UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I. (4,0 *điểm*)

1. Giải phương trình: $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$.

2. Cho hàm số bậc hai $f\left(x\right)=2x^2-3x-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f\left(5\sin 2x-3m\right)=1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Câu II. (6,0 *điểm*)

1. Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh, $\left(n\ge 2, n\in\mathbb{N}\right)$. Biết rằng, từ $2n$ đỉnh của đa giác đều đã cho ta lập được 2520 tam giác vuông. Tìm số cạnh của đa giác đều đã cho.

2. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;22]$. Tính xác suất để ba số viết ra có tổng chia hết cho 3.

3. Xét khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}$, với $n\ge 2, n\in\mathbb{N}$ và $a_0,a_1,a_2,...,a_{2n}$ là các hệ số. Biết $41a_3=14a_4$, tính a_5.

Câu III. (2,0 *điểm*) Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases}u_1=\dfrac{3}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{3nu_n}{n+3}\end{cases}$, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Tìm giới hạn $L=\lim\left(\dfrac{u_1}{3}+\dfrac{u_2}{3^2}+\dfrac{u_3}{3^3}+...+\dfrac{u_n}{3^n}\right)$.

Câu IV. (6,0 *điểm*)

1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BC, điểm N thay đổi thuộc cạnh AC. Biết mặt phẳng $\left(A'BN\right)$ luôn cắt AC' và AM lần lượt tại hai điểm P,Q. Xác định vị trí của N để diện tích của tam giác APQ bằng $\dfrac{2}{9}$ lần diện tích của tam giác AMC'.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét điểm M thay đổi trên đoạn AB (M khác A và B), gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với SA và BD. Xác định vị trí của M để thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) có diện tích đạt giá trị lớn nhất.

3. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và CD sao cho $AM=CN$. Khi các véctơ $\overline{BC},\overline{MN}$ và $\overline{AD}$ đồng phẳng, tính góc giữa 2 đường thẳng MN và BC.

Câu V. (2,0 *điểm*) Xét các số thực a,b,c khác 0 và $b<c$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{a^2+bc-b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^4+a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: ....Số báo danh..

Người coi thi số 1:..Người coi thi số 2:..

UBND TỈNH HÀ NAM **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11 THPT CẤP TỈNH** **NĂM HỌC 2022 – 2023**

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

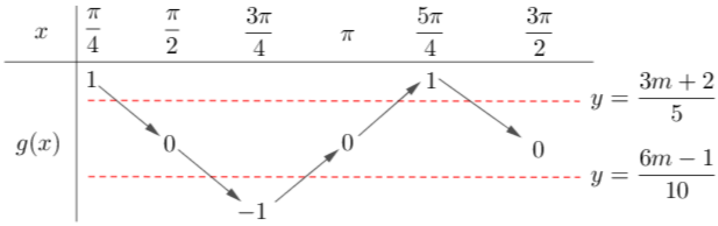
(*Hướng dẫn chấm gồm 06 trang*)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

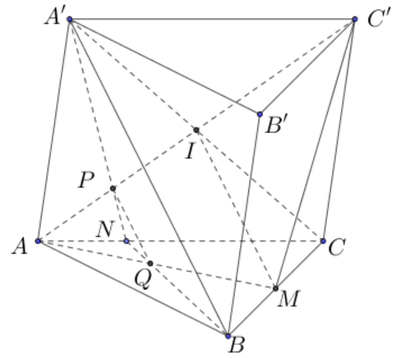
- *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.*
- *Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.*
- *Điểm toàn bài không làm tròn.*

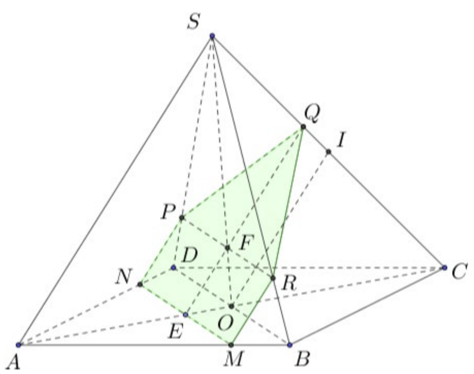
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
I **(4,0 điểm)**	**1.** Giải phương trình: $2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$.	**2,0**
	Điều kiện: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Phương trình $\Leftrightarrow 1-2\sin x\cos x=2\sin^2 x-\tan x$ $\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x+\cos x)-\left(1+\frac{\sin x}{\cos x}\right)=0$	0,5
	$\Rightarrow(\sin x+\cos x)(\sin 2x-1)=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin 2x=1\end{array}\right.$	0,5
	+) $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+m\pi,m\in\mathbb{Z}$ (thỏa mãn).	0,5
	+) $\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+n\pi,n\in\mathbb{Z}$ (thỏa mãn). Kết hợp, suy ra $x=\frac{\pi}{4}+l\frac{\pi}{2},l\in\mathbb{Z}$.	0,5
	2. Cho hàm số bậc hai $f(x)=2x^2-3x-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(5\sin 2x-3m)=1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$.	**2,0**
	+) $f(x)=1\Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=2\end{array}\right.$ +) $f(5\sin 2x-3m)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5\sin 2x-3m=-\frac{1}{2}\\ 5\sin 2x-3m=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\sin 2x=\frac{6m-1}{10} & (1)\\ \sin 2x=\frac{3m+2}{5} & (2)\end{array}\right.$	0,5

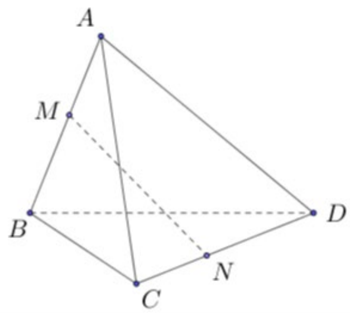
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Bảng biến thiên của hàm số $g(x)=\sin 2x$ trên $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right]$  	0,5
	Phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm khi: **TH1:** (1) có 2 nghiệm và (2) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -1<\frac{6m-1}{10}<0 \\ 0\le\frac{3m+2}{5}<1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}<m<\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3}\le m<1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le m<\frac{1}{6}$.	0,5
	TH2: (1) có 3 nghiệm và (2) có 2 nghiệm $\begin{cases} \frac{6m-1}{10}\ge 0 \\ \frac{3m+2}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ge\frac{1}{6} \\ m=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$. Vậy $m\in\left[-\frac{2}{3};\frac{1}{6}\right)\cup\{1\}$.	0,5
II **(6,0 điểm)**	**1.** Cho đa giác đều có $2n$ đỉnh, $(n\ge 2, n\in\mathbb{N})$. Biết rằng, từ $2n$ đỉnh của đa giác đều đã cho ta lập được 2520 tam giác vuông. Tìm số cạnh của đa giác đều đã cho.	**1,5**
	Đa giác đều có $2n$,$(n\ge 2, n\in\mathbb{N})$ đỉnh luôn nội tiếp đường tròn và có n đường chéo đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp.	0,5
	Số tam giác vuông lập được từ $2n$ đỉnh của đa giác đều là: $C_n^1.C_{2n-2}^1$ (tam giác). Từ giả thiết, suy ra $C_n^1.C_{2n-2}^1=2520$	0,5
	$\Leftrightarrow n^2-n-1260=0 \Rightarrow n=36$. Vậy đa giác đều đã cho có 72 đỉnh nên có 72 (cạnh).	0,5
	2. Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;22]$. Tính xác suất để ba số viết ra có tổng chia hết cho 3.	**2,5**
	+) Xét phép thử ngẫu nhiên: :"Ba bạn A, B, C viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1;22]$". $\Rightarrow n(\Omega)=22^3$.	0,5
	+) Gọi biến cố X: "Ba số viết ra có tổng chia hết cho 3" Nhận xét: Phân 22 số tự nhiên thuộc đoạn $[1;22]$ thành ba nhóm: Nhóm X_1: Gồm 7 số tự nhiên chia hết cho 3. Nhóm X_2: Gồm 8 số tự nhiên chia cho 3 dư 1. Nhóm X_3: Gồm 7 số tự nhiên chia cho 3 sư 2.	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	TH1: Ba số viết ra đều thuộc nhóm X_1 có: 7^3 (cách)	
	TH2: Ba số viết ra đều thuộc nhóm X_2 có: 8^3 (cách) **TH3:** Ba số viết ra đều thuộc nhóm X_3 có: 7^3 (cách)	0,5
	TH4: Ba số viết ra có 1 số thuộc nhóm X_1; 1 số thuộc nhóm X_2; 1 số thuộc nhóm X_3 (hoán vị các kết quả) có: $7.8.7.3!$ (cách)	0,5
	$\Rightarrow n(\mathrm{X}) = 7^3 + 8^3 + 7^3 + 7.8.7.3!$ Vậy $P(\mathrm{X}) = \dfrac{n(\mathrm{X})}{n(\Omega)} = \dfrac{1775}{5324}$.	0,5
	3. Xét khai triển $\left(1+x+x^2\right)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}$, với $n \geq 2$ và $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ là các hệ số. Biết $41a_3 = 14a_4$, tính a_5.	**2,0**
	Ta có $\left(1+x+x^2\right)^n = \left[1+x(1+x)\right]^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \left[x(1+x)\right]^k$ $= \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k \sum\limits_{i=0}^{k} C_k^i x^i = \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{i=0}^{k} C_n^k C_k^i x^{k+i}$ Suy ra hệ số a_{k+i} của x^{k+i} là: $C_n^k C_k^i$ (với $0 \leq i \leq k \leq n$)	0,5
	+) $a_3 = C_n^3 C_3^0 + C_n^2 C_2^1$ và $a_4 = C_n^4 C_4^0 + C_n^3 C_3^1 + C_n^2 C_2^2$	0,5
	+) $41a^3 = 14a_4 \Leftrightarrow 41\left(C_n^3 C_3^0 + C_n^2 C_2^1\right) = 14\left(C_n^4 C_4^0 + C_n^3 C_3^1 + C_n^2 C_2^2\right)$ $\Leftrightarrow 7n^2 - 33n - 370 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -\dfrac{37}{7} (l) \end{array}\right.$.	0,5
	+) Với $n = 10$, ta có $a_5 = C_{10}^5 C_5^0 + C_{10}^4 C_4^1 + C_{10}^3 C_3^2 = 1452$.	0,5
III **(2,0 điểm)**	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3nu_n}{n+3} \end{cases}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn $L = \lim\left(\dfrac{u_1}{3} + \dfrac{u_2}{3^2} + \dfrac{u_3}{3^3} + \ldots + \dfrac{u_n}{3^n}\right)$.	**2,0**
	+) Ta có $u_{n+1} = \dfrac{3nu_n}{n+3} \Leftrightarrow (n+3)u_{n+1} = 3nu_n$ $\Leftrightarrow (n+3)(n+2)(n+1)u_{n+1} = 3(n+2)(n+1)nu_n$	0,5
	Đặt $v_n = (n+2)(n+1)nu_n$, ta được dãy (v_n) xác định bởi: $\begin{cases} v_1 = 9 \\ v_{n+1} = 3v_n \end{cases}$ $\Rightarrow (v_n)$ là cấp số nhân có công bội $q = 3 \Rightarrow v_n = 9.3^{n-1} = 3^{n+1}$	0,5
	+) $\dfrac{u_n}{3^n} = \dfrac{3}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right)$ $\Rightarrow \dfrac{u_1}{3} + \dfrac{u_2}{3^2} + \dfrac{u_3}{3^3} + \ldots + \dfrac{u_n}{3^n} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right)$	0,5
	Vậy $L = \lim \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{3}{4}$.	0,5

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="7">IV
(6,0 điểm)</td><td>1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BC, điểm N thay đổi thuộc cạnh AC. Biết mặt phẳng $(A'BN)$ luôn cắt AC' và AM lần lượt tại hai điểm P,Q. Xác định vị trí của N để diện tích của tam giác APQ bằng $\frac{2}{9}$ diện tích của tam giác AMC'.</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>

Gọi $I = A'C \cap AC' \Rightarrow A'B // IM$
Ta có $\begin{cases} IM \subset (AMC'), A'B \subset (A'BN) \\ (AMC') \cap (A'BN) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ // IM // A'B$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$S_{AMC'} = 2S_{AIM}, S_{APQ} = \left(\frac{AQ}{AM}\right)^2 S_{AIM}$ nên $S_{APQ} = \frac{2}{9}S_{AMC'}$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow \left(\frac{AQ}{AM}\right)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{AQ}{AM} = \frac{2}{3}$
$\Rightarrow Q$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow N$ là trung điểm của AC.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét điểm M thay đổi trên đoạn AB (M khác A và B), gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với SA và BD. Xác định vị trí của M để thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) có diện tích đạt giá trị lớn nhất.</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>

Kẻ $MN // BD$ $(N \in AD)$; $NP // SA$ $(P \in SD)$; $MR // SA$ $(R \in SB)$.
Gọi $O = AC \cap BD$; $E = MN \cap AC$; $F = PR \cap SO$; $Q = EF \cap SC$.
Khi đó thiết diện cần tìm là ngũ giác $MNPQR$, trong đó tứ giác $MNPR$ là hình bình hành.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Đặt $x = \frac{AM}{AB}$ $(0 < x < 1)$.
Gọi α là góc giữa SA và BD. Khi đó $MN = x.BD$, $MR = (1-x).SA$.</td><td>0,5</td></tr>
</table>

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Suy ra $S_{MNPR}=MN.MR.\sin\alpha=x\left(1-x\right).SA.BD.\sin\alpha$.	
	Gọi I là trung điểm của SC, khi đó: $\dfrac{QF}{OI}=\dfrac{SF}{SO}=\dfrac{AE}{AO}=\dfrac{AM}{AB}=x$ $\Rightarrow QF=x.OI=\dfrac{x}{2}SA$ Do góc giữa QE và PR bằng α nên $S_{PQR}=\dfrac{1}{2}PR.QF.\sin\alpha=\dfrac{1}{2}MN.QF.\sin\alpha$ $=\dfrac{x^2}{4}SA.BD.\sin\alpha$.	0,5
	Vậy $S_{MNPQR}=S_{MNPR}+S_{PQR}=x\left(1-\dfrac{3x}{4}\right).SA.BD.\sin\alpha\quad(*)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có: $\dfrac{3x}{4}\left(1-\dfrac{3x}{4}\right)\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3x}{4}+1-\dfrac{3x}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow x\left(1-\dfrac{3x}{4}\right)\le\dfrac{1}{3}$.	0,5
	Từ $(*)$ suy ra $S_{MNPQR}\le\dfrac{1}{3}.SA.BD.\sin\alpha$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{3x}{4}=1-\dfrac{3x}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$ hay $\dfrac{MA}{MB}=2$.	0,5
	3. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB và CD sao cho $AM=CN$. Khi các véctơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng, tính góc giữa đường thẳng MN và BC.	**2,0**
	 +) Không mất tính tổng quát, giả sử tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng 1 Đặt $AM=CN=x\left(0\le x\le 1\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN}=x\overrightarrow{CD}$. Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=-x\overrightarrow{AB}+\left(1-x\right)\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AD}$	0,5
	Vì $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng nên $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{BC}+n\overrightarrow{AD}$ (cặp số $\left(m,n\right)$ duy nhất). $\Leftrightarrow -x\overrightarrow{AB}+\left(1-x\right)\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AD}=m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+n\overrightarrow{AD}$ $\Leftrightarrow\left(m-x\right)\overrightarrow{AB}+\left(1-x-m\right)\overrightarrow{AC}+\left(x-n\right)\overrightarrow{AD}=\vec{0}$	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m-x=0 \\ 1-x-m=0 \\ x-n=0 \end{cases}$ (vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng). $\Rightarrow x=m=n=\frac{1}{2}$.	0,5
	+) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ và $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ $\cos(MN,BC)=\left\|\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}\right)\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}\right\|}{MN.BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng $45°$.	0,5
V (2,0 điểm)	Xét các số thực a,b,c khác 0 và $b<c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{a^2+bc-b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^4+a^2\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}}$.	**2,0**
	$P=\frac{a^2+bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}+\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$ $=\frac{bc+a^2}{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(a^2+b^2\right)}}+\frac{-b(c-b)}{(c-b)\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c(c-b)}{(c-b)\sqrt{a^2+c^2}}$ Vì 3 số a,b,c khác 0 nên trong hệ trục tọa độ Oxy, chọn 3 điểm $A(0;a);B(b;0);C(c;0),b<c$ là ba đỉnh một tam giác.	0,5
	Ta có $\overrightarrow{AB}=(b;-a);\overrightarrow{AC}=(c;-a);\overrightarrow{BC}=(c-b;0)$. Xét tam giác ABC, ta có: $\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{bc+a^2}{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}$; $\cos B=\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=\frac{-b(c-b)}{\|c-b\|\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos C=\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{c(c-b)}{\|c-b\|\sqrt{a^2+c^2}}$;	0,5
	$\Rightarrow P=\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$ $VT=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}+1$ Do A,B,C là các góc của tam giác nên $0<\cos\frac{A+B}{2}<1;0<\cos\frac{A-B}{2}\le 1$.	0,5
	Do đó, $VT\le -2\cos^2\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}+1=\frac{3}{2}-2\left(\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{3}{2}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ khi đó $c>0;b=-c;a=\pm\sqrt{3}c$.	0,5

-----HẾT-----