

TỔNG HỢP

GIẢI QUYẾT CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM- TÍCH PHÂN DƯỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA MÁY TÍNH CASIO FX- 580 VNX

Tích phân là một trong những chuyên đề hay, có nhiều ứng dụng trong tính toán thực tế. Ngoài ra, tích phân cũng là một chuyên đề thường xuyên xuất hiện trong các đề thi THPT Quốc Gia từ những câu hỏi ở mức độ nhận biết đến các bài vận dụng. Với hình thức thi Trắc nghiệm thì việc sử dụng máy tính thành thạo và hiệu quả giúp học sinh hạn chế tính nhầm, tránh trường hợp sai số đáng tiếc (câu trúc đề bài có các đáp án nhiễu). Mặt khác tối ưu thời gian làm bài. Trong bài viết này, *Diễn đàn máy tính cầm tay* sẽ tổng hợp một số hướng giải quyết các dạng toán tiêu biểu của chuyên đề Tích phân trong các đề thi dưới sự hỗ trợ của máy tính Casio fx- 580 VNX

Phụ lục

1. TÌM NGUYÊN HÀM $F(x)$ CỦA HÀM SỐ $f(x)$ CHO TRƯỚC.....	1
2. TÌM NGUYÊN HÀM $F(x)$ CỦA HÀM SỐ $f(x)$ CHO TRƯỚC THỎA ĐIỀU KIỆN $F(x_0) = M$	5
3. XÁC ĐỊNH CÁC ẨN SỐ A, B, C TRONG BÀI TOÁN TÍCH PHÂN.....	6
4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH MẶT PHẪNG	10
5. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY.....	13
6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI QUYẾT CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ.....	18

1. TÌM NGUYÊN HÀM $F(x)$ CỦA HÀM SỐ $f(x)$ CHO TRƯỚC

- Thuật toán trên máy tính CASIO $f(A) - \frac{d}{dx}(F_i(x))|_{x=A}$

f : là hàm số cần xác định nguyên hàm

$F_i(x)$: là các đáp án nguyên hàm đã cho

A : hằng số tự chọn thuộc tập xác định và có giá trị nhỏ

- Thay lần lượt các đáp án vào $F_i(x)$ và chọn giá trị A thích hợp
- Lựa chọn đáp án có kết quả xấp xỉ bằng 0:

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Bài toán 1.1 Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{7x^4 + 3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 1}}$

- A. $\int f(x)dx = (x^2 + 2x)\sqrt{x^3 + 1} + C$
 B. $\int f(x)dx = (x^3 + x)\sqrt{x^2 + 1} + C$
 C. $\int f(x)dx = (x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 1} + C$
 D. $\int f(x)dx = (x^3 + x)\sqrt{x^3 + 1} + C$

Phân tích: Hàm số $f(x)$ trên khá phức tạp do đó việc sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tìm nguyên hàm sẽ giúp các bạn chọn được đáp án đúng một cách nhanh chóng và chính xác hơn.

Hướng dẫn giải

Thay $F_i(x)$ lần lượt bằng các đáp án và chọn A = 0

Đáp án A	$\frac{7A^4 + 3A^2 + 4A}{2\sqrt{A^3 + 1}} - \frac{d}{dx} \left((x^2 + 2x)\sqrt{x^3 + 1} \right) \Big _{x=A}$ -2	LOẠI
Đáp án B	$\frac{7A^4 + 3A^2 + 4A}{2\sqrt{A^3 + 1}} - \frac{d}{dx} \left((x^3 + x)\sqrt{x^2 + 1} \right) \Big _{x=A}$ -1	LOẠI
Đáp án C	$\frac{d}{dx} \left((x^2 + 1)\sqrt{x^3 + 1} \right) \Big _{x=A}$ -1	NHẬN
Đáp án D	$\frac{7A^4 + 3A^2 + 4A}{2\sqrt{A^3 + 1}} - \frac{d}{dx} \left((x^3 + x)\sqrt{x^3 + 1} \right) \Big _{x=A}$ -1	LOẠI

Khi làm bài thi các bạn không cần thử tất cả các đáp án trong đề mà chúng ta sẽ dừng ngay việc thay đáp án khi chọn được biểu thức đúng

Bài toán 1.2 Tìm nguyên hàm của hàm số $y = 8 \sin 3x \cos 2x \sin 6x$

- A. $\int f(x)dx = 2 \sin x + \frac{2 \sin 5x}{5} - \frac{2 \sin 7x}{7} - \frac{2 \sin 11x}{11} + C$
 B. $\int f(x)dx = \sin x + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} - \frac{\sin 11x}{11} + C$

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

C. $\int f(x)dx = \sin x - \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 7x}{7} - \frac{\sin 11x}{11} + C$

D. $\int f(x)dx = 2\sin x - \frac{2\sin 5x}{5} - \frac{2\sin 7x}{7} - \frac{2\sin 11x}{11} + C$

Hướng dẫn giải

Để các phép toán lượng giác thực hiện chính xác hơn, chúng ta nên chuyển máy về chế độ Radian

Chọn $A = \pi$

Đáp án A	$8\sin(3A)\cos(2A)\sin(A) - \frac{d}{dx}\left(2\sin(x)\right)$	NHẬN
Đáp án B, C, D	LOẠI vì A là đáp án đúng	

Bài toán 1.3 (Đề thi THPT Quốc gia 2017) Cho hàm số $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của

hàm số $\frac{f'(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$

A. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x)\ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$

C. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

D. $\int f'(x)\ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) = F'(x)x = -\frac{1}{x^2}$, suy ra $f'(x)\ln x = \frac{2\ln x}{x^3}$

Nhập vào máy tính CASIO fx-580VN X: $\frac{2\ln A}{A^3} - \frac{d}{dx}G(x)\Big|_{x=A}$, với G(x) lần lượt là các hàm trong đáp án và $A = 0.1$

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Đáp án A	$\frac{2\ln(A)}{A^3} - \frac{d}{dx} \left(- \left(\frac{\ln(x)}{x^2} \right) \left(- \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \right) \right) \Big _{x=1} - 1000$	LOẠI
Đáp án B	$\frac{2\ln(A)}{A^3} - \frac{d}{dx} \left(- \left(\frac{\ln(x)}{x^2} \right) \right) \Big _{x=1} = \frac{2\ln(A)}{A^3} - \frac{d}{dx} \left(- \left(\frac{\ln(x)}{x^2} \right) \right) \Big _{x=1} = 3.5 \times 10^{-9} \approx 0$	NHẬN
Đáp án C, D	LOẠI vì đã chọn đáp án B	

Bình luận

- Để việc thay các đáp án vào máy tính trở nên nhanh hơn các bạn hãy tham khảo cách chỉnh sửa trên máy tính CASIO
- Phương pháp trên không chỉ áp dụng cho các bài thi trắc nghiệm mà nó còn là một đề học sinh kiểm tra kết quả khi làm bài tự luận.

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

2. TÌM NGUYÊN HÀM $F(x)$ CỦA HÀM SỐ $f(x)$ CHO TRƯỚC THỎA ĐIỀU KIỆN

$$F(x_0) = M$$

Cách 1:



Nhập biểu thức vào máy tính CASIO fx- 580VN X:

$$F(A) - M - \int_{x_0}^A f(x) dx$$

(Thay lần lượt các đáp án vào hàm F)



CALC A là một giá trị nhỏ bất kì thuộc tập xác định



Chọn đáp án có kết quả phép tính gần bằng 0

Cách 2: Dùng chức năng TABLE trong CASIO fx- 580VN X



Nhập biểu thức $f(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$



Nhập biểu thức $g(x) = F(x) - M$



Nhập Table Range (phạm vi bảng): nên chọn khoảng 3-4 giá trị nhỏ để kiểm tra



Chọn đáp án thỏa $f(x) = g(x)$ tại tất cả các giá trị x

Bình luận : Với các máy tính Casio fx- 570VN Plus trở về trước khi nhập tích phân cần xác định trước hai cận. Tuy nhiên, thế hệ CASIO fx- 580VN X cận trên có thể là chữ x (là biến thay đổi khi ta bấm , còn x trong biểu thức là biến hình thức)

Bài toán 2.1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa điều kiện $F(1) = 2$

A. $2\sqrt{2x-1} + 1$

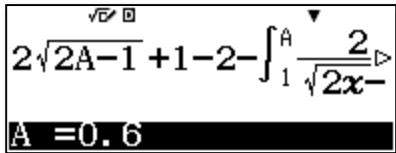
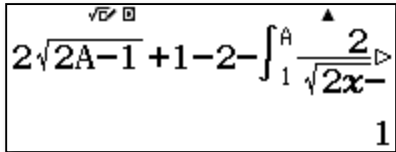
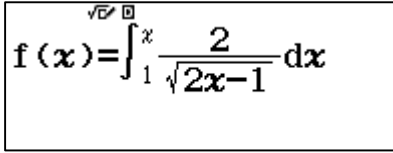
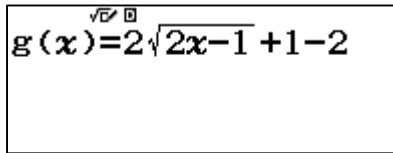
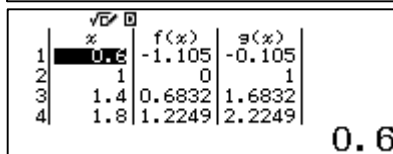
B. $\sqrt{2x-1} + 1$

C. $2\sqrt{2x-1}$

D. $2\sqrt{(2x-1)^3}$

Hướng dẫn giải

$$\text{TXĐ: } x > \frac{1}{2}$$

Cách 1	Cách 2
Đáp án A	
 	  
Qua cả 2 cách làm ta nhận thấy đáp án A sai khác đáp án đúng là 1 đơn vị nên ta chọn đáp án C	

Bình luận Việc bấm máy ở cách 1 sẽ nhanh chóng hơn, nhưng kết quả tìm được bị ảnh hưởng bởi giá trị A được chọn. Trong khi ở cách 2 ta có thể quan sát cùng lúc tại các giá trị A khác nhau, qua đó có thể đưa ra kết quả đáng tin cậy hơn.

3. XÁC ĐỊNH CÁC ẨN SỐ A, B, C TRONG BÀI TOÁN TÍCH PHÂN

Với những cải tiến đáng kể của chức năng lập bảng (TABLE)   khi cho phép đưa phép tính tích phân vào trong các hàm $f(x), g(x)$ để lập bảng giá trị. So với các dòng CASIO fx-570VN Plus trở về trước thì việc sử dụng chức năng bảng tính trong máy tính CASIO fx-580VN X để xác định các ẩn số trong các bài toán tích phân phức tạp trở nên đơn giản hơn khi chúng ta không phải tính tích phân rồi lưu vào ô nhớ trước khi sử dụng chức năng lập bảng. Dưới đây là một số bài cụ thể:

Bài toán 3.1 Cho $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = ae^2 + be$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $2a+3b$

A. $S = \frac{1}{2}$

B. $S = 2$

C. $S = \frac{5}{2}$

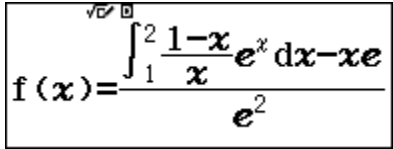
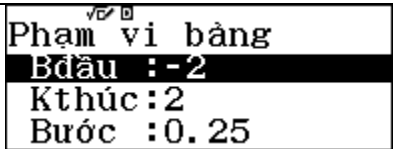
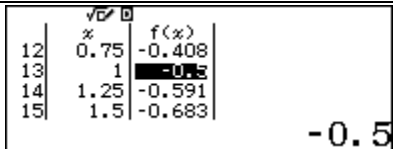
D. $S = \frac{7}{2}$

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Hướng dẫn giải

Ta có : $\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx = ae^2 + be$ suy ra $a = \frac{\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx - be}{e^2}$

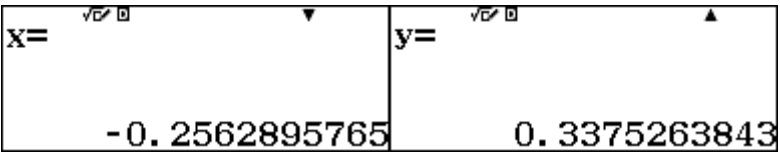
Cách 1: Sử dụng chức năng TABLE  **8** để tìm giá trị a, b thích hợp

$f(x) = \frac{\int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx - xe}{e^2}$ (có thể bỏ qua bước nhập $g(x)$)	
Nhập $Start = -2; End = 2, Step = 0.25$	
Quan sát bảng kết quả ta chọn $(a, b) = (f(x), x) = (-0.5, 1)$	
Vậy $S = 2a + 3b = 2$	

Cách 2: Giải hệ phương trình

Bên cạnh việc sử dụng chức năng bảng tính, chúng ta còn có thể sử dụng hệ phương trình để giải cho bài toán trên

Tiếp tục là một cải tiến mới của CASIO fx-580VN so với các dòng CASIO fx-570VN Plus. Ở phiên bản mới này ta có thể nhập tích phân ngay trên các hệ số, điều mà các dòng máy tiền nhiệm chưa làm được.

Đáp án A $\begin{cases} ae^2 + be = \int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx \\ 2a + 3b = \frac{1}{2} \end{cases}$		LOẠI (vì $x, y \notin \mathbb{Q}$)
---	--	---

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Đáp án B $\begin{cases} ae^2 + be = \int_1^2 \frac{1-x}{x^2} e^x dx \\ 2a + 3b = 2 \end{cases}$	$x =$ $y =$ $-\frac{1}{2}$ 1	NHẬN
---	--	------

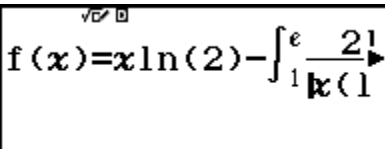
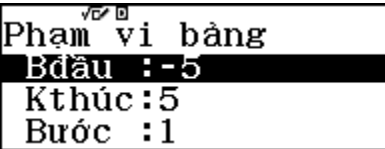
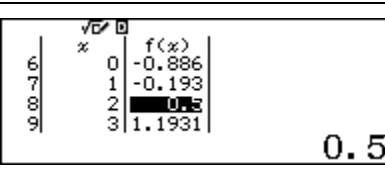
Bài toán 3.2: Cho $I = \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c} (a, b, c \in \mathbb{Z})$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $S = a + b + c$

- A. $S = 0$ B. $S = 3$ C. $S = 5$ D. $S = 7$

Hướng dẫn giải

Đặt $d = \frac{b}{c}$. Khi đó $d = a \ln 2 - \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx$

Sử dụng chức năng TABLE   để tìm giá trị a, d thích hợp

Nhập vào máy hàm số $f(x) = x \ln 2 - \int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx$	
Nhập $Start = -5; End = 5, Step = 1$	
Quan sát bảng kết quả và dựa vào điều kiện a, b, c ta được $(a, d) = (x; f(x)) = (2; 0.5)$ Suy ra: $b = 1; c = 2$	
Vậy: $a + b + c = 5$ Đáp án: C	

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Bài toán 3.3 Cho tích phân $\int_1^e (2+x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ (a, b, c là số hữu tỉ). Xác định mệnh đề

đúng

A. $a+b=c$

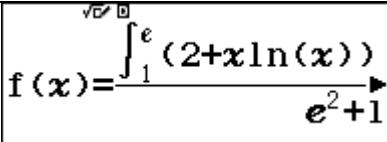
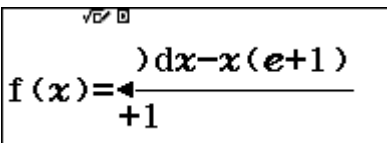
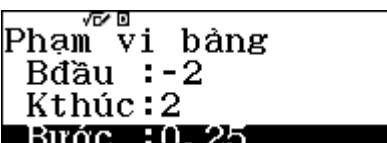
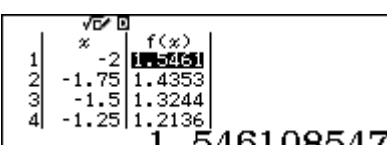
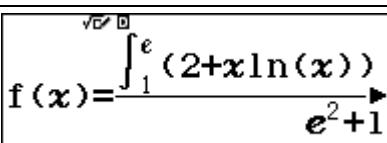
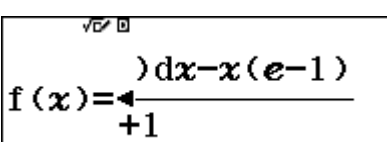
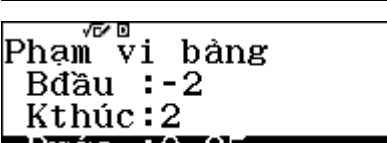
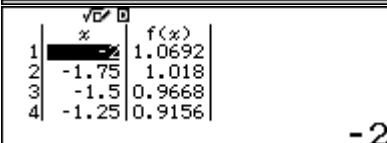
B. $a-b=c$

C. $a-b=-c$

D. $a+b=-c$

Hướng dẫn giải

Sử dụng chức năng TABLE   kiểm tra các đáp án

Đáp A: $a+b=c$ Suy ra $a = \frac{\int_1^e (2+x \ln x) dx - b(e+1)}{e^2+1}$ Nhập vào máy hàm số $f(x) = \frac{\int_1^e (2+x \ln x) dx - x(e+1)}{e^2+1}$ Nhập $Start = -2; End = 2, Step = 0.25$ Quan sát bảng giá trị ta thấy tất cả các giá trị $f(x)$ tìm được đều có phần thập phân phức tạp. Do đó ta loại đáp án A	   
Đáp án B: $a-b=c$. Suy ra $a = \frac{\int_1^e (2+x \ln x) dx - b(e-1)}{e^2+1}$ Nhập vào máy hàm số $f(x) = \frac{\int_1^e (2+x \ln x) dx - x(e-1)}{e^2+1}$ Nhập $Start = -2; End = 2, Step = 0.25$ Quan sát bảng giá trị ta thấy ta thấy tồn tại $(x, f(x)) = (2; 0.25)$ Do đó ta chọn đáp án B	   

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Bình luận: Để chọn Bắt đầu (Start), Kết thúc (End) và Bước (Step) thích hợp, chúng ta nên xem xét phân tích kĩ điều kiện của các ẩn số kết hợp với các đáp án trong đề bài (Ví dụ: $a, b, c \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

thì ta chọn $Step = 1$; $a, b, c \in \mathbb{Q}$ thì thường chọn $Step = \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \dots$)

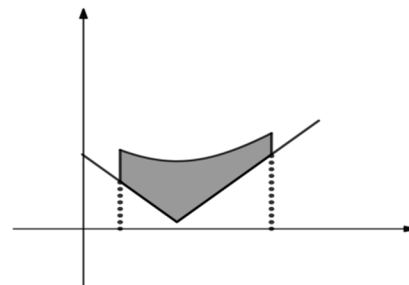
4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH MẶT PHẶNG

➤ Tóm tắt lý thuyết

Bài toán 1: Diện tích của mặt phẳng giới hạn bởi $(C_1): y = f(x); (C_2): y = g(x); x = a; x = b$ ($a < b$)

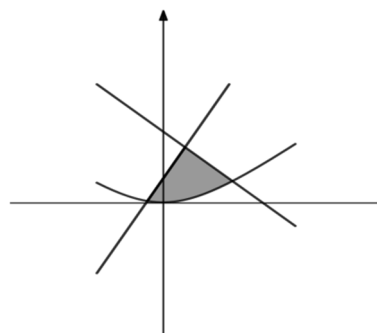
Công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi

$$\begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ (C_3): y = h(x) \end{cases}$$



Bước 1: Tìm giao điểm của các đồ thị bằng cách giải các phương trình hoành độ giao điểm

Bước 2: Áp dụng công thức

$$S = \int_a^c |f(x) - h(x)| dx + \int_c^b |g(x) - h(x)| dx$$

Bài toán 4.1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2; x=0$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức: $S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên

$$\int_0^2 |x^2 - 2x| dx \quad \text{SHIFT} \quad \left[\int \right] \quad x \quad x^2 \quad - \quad 2 \quad x \quad \downarrow \quad 0 \quad \uparrow \quad 2 \quad =$$

$$\int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \frac{4}{3}$$

Bài toán 4.2 Tính diện tích giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \frac{3x+5}{2x+2}$; $y=0$; $x=0$ và $x=2$

A. $S = \ln 2 + 3$

B. $S = \ln 3 + 3$

C. $S = \ln 3$

D. $S = \ln 3 - 2$

Hướng dẫn giải

Diện tích mặt phẳng cần tìm: $S = \int_0^2 \left| \frac{3x+5}{2x+2} \right| dx$

Quan sát đáp án ta thấy có 3 đáp án chứa $\ln 3$ nên ta tính $\int_0^2 \left| \frac{3x+5}{2x+2} \right| dx - \ln 3$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính biểu thức trên

$\left[\int \right] \left[\text{SHIFT} \right] \left[\left(\right] \left[\frac{\Box}{\Box} \right] \left[3 \right] \left[x \right] \left[+ \right] \left[5 \right] \left[\text{DOWN} \right] \left[2 \right] \left[x \right] \left[+ \right] \left[2 \right] \left[\text{DOWN} \right] \left[0 \right] \left[\text{UP} \right] \left[2 \right] \left[\text{RIGHT} \right] \left[- \right] \left[\ln \right] \left[3 \right] \left[\right]$

$$\int_0^2 \left| \frac{3x+5}{2x+2} \right| dx - \ln(3) = 3$$

Đáp án: B

Bài toán 4.3. Tính diện tích mặt phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $\begin{cases} (C_1): y = x^2 + 1 \\ (C_2): y = x^2 + 2x \\ x = 1; x = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Diện tích mặt phẳng cần tìm $S = \int_1^2 |(x^2 + 1) - (x^2 + 2x)| dx$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên:

$\left[\int \right] \left[\text{SHIFT} \right] \left[\left(\right] \left[\left(\right] \left[x \right] \left[x^2 \right] \left[+ \right] \left[1 \right] \left[\right] \left[- \right] \left[\left(\right] \left[x \right] \left[x^2 \right] \left[+ \right] \left[2 \right] \left[x \right] \left[\right] \left[\text{DOWN} \right] \left[1 \right] \left[\text{UP} \right] \left[2 \right] \left[\text{ENTER} \right]$

$$\int_1^2 |(x^2 + 1) - (x^2 + 2x)| dx = 2$$

Bài toán 4.4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1): y = x^2 + 2 \\ (C_2): y = 3x \end{cases}$

- A. 2 B. 3 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{6}$

Hướng dẫn giải

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để giải phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

Khi đó : $S = \int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên:

$\int_1^2 |x^2 - 3x + 2| dx$

Đáp án D

Bài toán 4.5.

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol

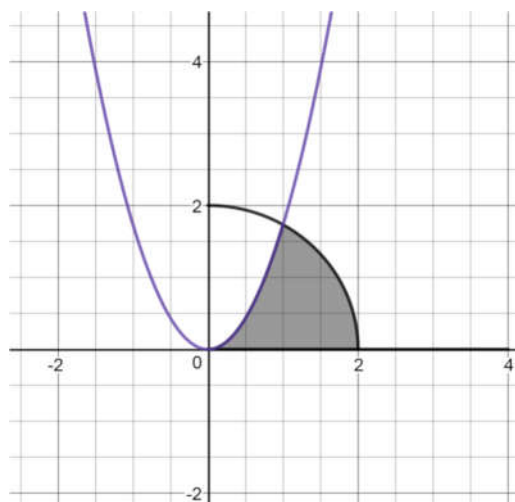
$y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$

(với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (như hình vẽ)

- A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$ B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$
C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$ D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$

Hướng dẫn giải

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X tìm nghiệm của các phương trình hoành độ giao điểm



ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

- $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \quad (0 \leq x \leq 2) \Rightarrow x=1$
- $\sqrt{3}x^2 = 0 \Rightarrow x=0$
- $\sqrt{4-x^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq 2) \Rightarrow x=2$

Như vậy: Diện tích cần tìm $S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên và lưu kết quả:

$\left[\int \right] \left[\sqrt{\square} \right] \left[3 \right] \left[\rightarrow \right] \left[x \right] \left[x^2 \right] \left[\nabla \right] \left[0 \right] \left[\blacktriangle \right] \left[1 \right] \left[\rightarrow \right] \left[+ \right] \left[\int \right] \left[\sqrt{\square} \right] \left[4 \right] \left[- \right] \left[x \right] \left[x^2 \right] \left[\nabla \right] \left[1 \right] \left[\blacktriangle \right] \left[2 \right] \left[\text{STO} \right]$
 $\left[(-) \right]$

$\int_0^1 \sqrt{3} x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$
1.805719968

$\left[\int \right] \left[\sqrt{\square} \right] \left[4 \right] \left[- \right] \left[x \right] \left[x^2 \right] \left[\nabla \right] \left[1 \right] \left[\blacktriangle \right] \left[2 \right] \left[\text{STO} \right]$

Thử các kết của đề bài ta có

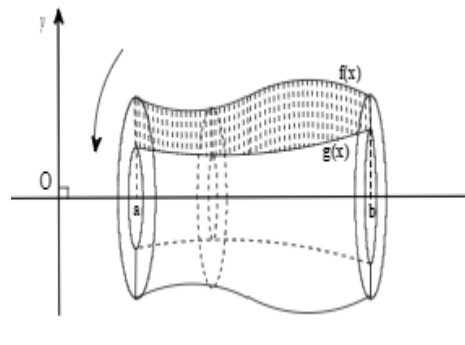
$A - \frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$ 0.6141848493	$A - \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$ 4.42 × 10⁻¹²	≈ 0	Đáp án C	Đáp án D
LOẠI	NHẬN		Đã chọn đáp án B	

5. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

➤ Tóm tắt lý thuyết

Dạng 1. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$; $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành vật thể khối tròn xoay có thể tích bằng

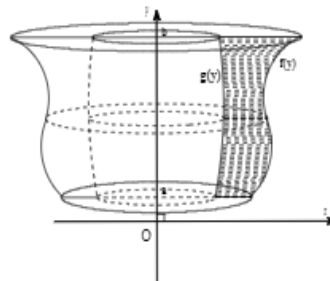
$$V_{0x} = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx$$



ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Dạng 2. Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = a$; $y = b$ quay quanh trục Oy tạo thành vật thể khối tròn xoay có thể tích bằng

$$V_{0y} = \pi \int_a^b \left([f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right) dy$$



Chú ý:

- ✚ Nếu đề bài không có cho hai giả thiết $x = a$; $x = b$ (hay $y = a$; $y = b$) thì trước khi áp dụng công thức V_{0x} (V_{0y}) ta phải tìm hai cận của tích phân bằng cách giải phương trình giao điểm $f(x) = g(x)$ (hoặc $f(y) = g(y)$)

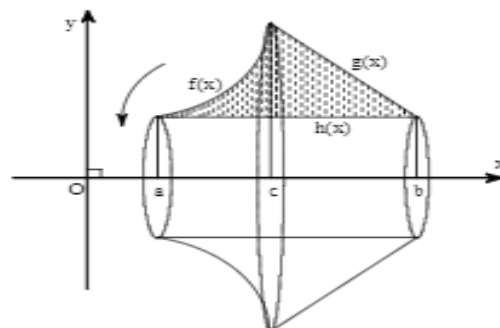
ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Mở rộng:

Bước 1: Tìm các giao điểm a, b, c là nghiệm của các phương trình $f(x) = h(x)$; $f(x) = g(x)$ và $g(x) = h(x)$

Bước 2: Áp dụng công thức

$$V = \pi \left| \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx \right| + \pi \left| \int_b^c ([g(x)]^2 - [h(x)]^2) dx \right|$$



Bài toán 5.1 Tính thể tích vật thể khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\sin x}$, trục hoành, $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$ quanh trục Ox.

A.1

B. $\frac{\pi}{2}$

C. 2π

D. π

Công thức tính thể tích $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin x})^2 dx$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên

[SHIFT] [x10^x] [∫] [C] [√] [sin] [ALPHA] [C] [D] [▶] [D] [x^2] [▼] [0] [▲] [SHIFT] [x10^x] [÷] [2] [=]

Đáp án: D

Chú ý: Trước khi thực hiện phép tính ta cần chuyển máy tính về chế độ Radian (xem hướng dẫn tại https://www.youtube.com/watch?v=dJ61cX3k_kQ)

Bài toán 5.2 Cho miền D giới hạn bởi hai đồ thị $y = 4 - x^2$ và $y = x^2 + 2$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox.

C. 16π

B. $\frac{8}{3}\pi$

C. 12π

D. π

Nhận xét: Vì đề bài không cho hai cận của tích phân do đó đầu tiên chúng ta phải tìm hoành độ giao điểm của hai hàm số đã cho

Dùng máy tính CASIO fx-580VN X để tìm nghiệm của phương trình: $4 - x^2 = x^2 + 2$

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_1 =$$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_2 =$$

Công thức: $V = \pi \left| \int_{-1}^1 [(4-x^2)^2 - (x^2+2)^2] dx \right|$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{(\int_0^x)} \boxed{(\int_0^x)} \boxed{4} \boxed{-} \boxed{x} \boxed{x^2} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{(\int_0^x)} \boxed{x} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{\nabla} \boxed{-}$

$\boxed{1} \boxed{\blacktriangle} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\pi \left| \int_{-1}^1 (4-x^2)^2 - (x^2+2)^2 dx \right|$$

$$16\pi$$

Bài toán 5.3 Cho miền D giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2$

; $y = 4x^2$ và $y = 4$. Tính thể tích khối tròn xoay được

tạo nên do D quay quanh trục Oy (như hình)

- A. 12π B. 2π
C. 6π D. 8π

Hướng dẫn giải

Chuyển đổi hàm số:

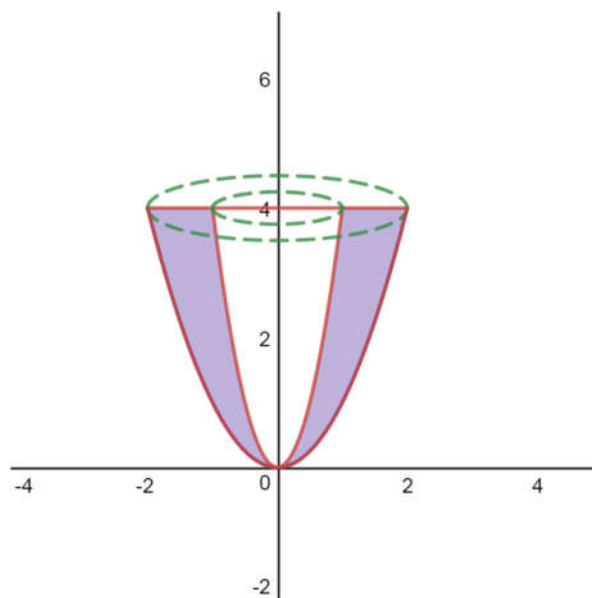
$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \text{ và } y = 4x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{y}}{2}$$

Nhận xét ta có đồ thị $y = x^2$ và $y = 4x^2$ giao nhau tại O.

$$\text{Do đó ta có } V = \pi \left| \int_0^4 \left((\sqrt{y})^2 - \left(\frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 \right) dy \right|$$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x} \boxed{\int_0^x} \boxed{x} \boxed{-} \boxed{\int_0^x} \boxed{x} \boxed{\nabla} \boxed{4} \boxed{\nabla} \boxed{0} \boxed{\blacktriangle} \boxed{4} \boxed{=}$



$$\pi \int_0^4 x - \frac{x}{4} dx$$

6π

Đáp án: C

Nhận xét: Đối với một số biểu thức đơn giản ta có thể khai triển để việc bấm máy trở nên nhanh và dễ dàng hơn

Bài toán 5.4. Cho miền D giới hạn bởi đồ thị (C): $y = x^2 + 1 (x \geq 0)$ và hai đường thẳng $y = -3x + 11$; $y = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

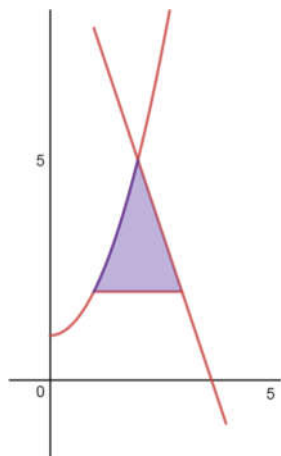
Hướng dẫn giải

Tìm giao điểm của các đồ thị

- $x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$ (vì $x > 0$)
- $-3x + 11 = 2 \Rightarrow x = 3$
- $x^2 + 1 = -3x + 11 \Rightarrow x = 2$ (vì $x = -5 < 0$)

$$\begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \\ x_1 = \\ \hline ax^2 + bx + c = 0 \\ x_2 = \end{array}$$

2
 -5



Công thức tính thể tích:

$$V = \pi \int_1^2 [(x^2 + 1)^2 - 4] dx + \pi \int_2^3 [(-3x + 11)^2 - 4] dx$$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X để tính tích phân trên

$$\pi \int_1^2 (x^2 + 1)^2 - 4 dx + \pi \int_2^3 (-3x + 11)^2 - 4 dx$$

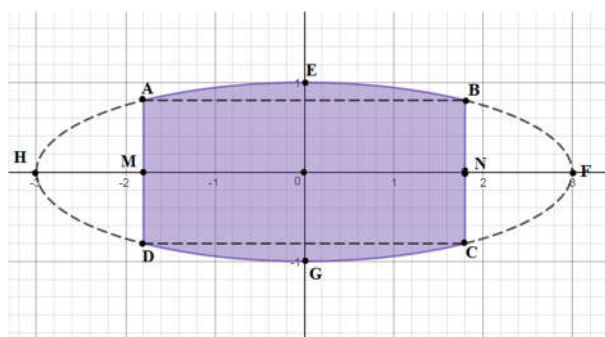
$\frac{253}{15}\pi$

$$\leftarrow + \pi \int_2^3 (-3x + 11)^2 - 4 dx$$

6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ GIẢI QUYẾT CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài toán 6.1. Một người muốn dán tấm bảng hiệu cũ là một phần của hình elip với kích thước như hình vẽ. Tính gần đúng chi phí mà người đó phải bỏ ra để mua giấy dán biết giá của $1m^2$ giấy là 20000

Hướng dẫn giải: Xây dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình:



Phương trình Elip có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (E)

(a, b lần lượt là nửa trục dài và trục ngắn của Elip)

Theo đề bài ta có: $b = OE = \frac{1}{2} EG = 1$

Do $B(1.8; 0.8) \in (E)$ nên

$$\frac{1.8^2}{a^2} + \frac{0.8^2}{1^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$\text{Suy ra } (E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \text{ hay } y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

$$\text{Ta có: } S = 4S_{OEBN} = 4 \int_0^{1.8} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} dx$$

Sử dụng máy tính CASIO fx- 580VN X tính tích phân trên và lưu vào A

Vậy số tiền người chủ phải bỏ ra để mua giấy dán là

$$20000A \approx 134820$$

$$\frac{1.8^2}{9} + \frac{0.8^2}{1} = 1$$

$$4 \int_0^{1.8} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} dx \rightarrow A$$

$$20000A$$

Bình luận

- Đối với những bài toán tính diện tích của một hình phức tạp không có sẵn công thức ta có thể sử dụng tích phân để tính diện tích
- Để có thể áp dụng tích phân để tính diện tích ta cần xây dựng hệ trục tọa độ Oxy và xây dựng các hàm số phù hợp, đơn giản mà không mất tính tổng quát, kết quả diện tích không sai lệch.

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Bài toán 6.2 Tính thể tích cái bình hoa với kích thước như hình vẽ biết bình cao $2\pi(cm)$ và đường sinh của bình khi nằm ngang là đường cong có dạng $y = \sin x + 2$

Phân tích:

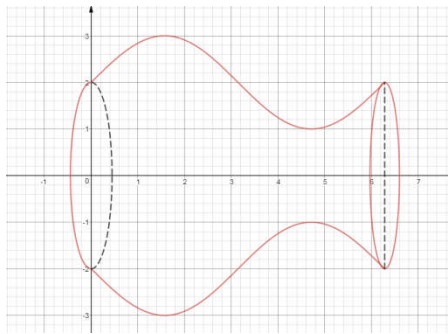
Cái bình có dạng khối tròn xoay với đường sinh hình Parabol là đồ thị của hàm số $y = \sin x + 2$.

Do đó ta có thể áp dụng công thức tích phân để tính thể tích khối tròn xoay trên.

Để việc tính toán trở nên thuận lợi ta nên xây dựng hệ trục tọa độ Oxy cho bình nằm ngang và trục Ox chia bình thành hai phần bằng nhau

Hướng dẫn giải

Xây dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Khi đó thể tích của bình bằng: $V = \pi \int_0^{2\pi} (\sin x + 2)^2 dx$

Sử dụng máy tính CASIO fx- 580VN X tính tích phân $\int_0^{2\pi} (\sin x + 2)^2 dx$

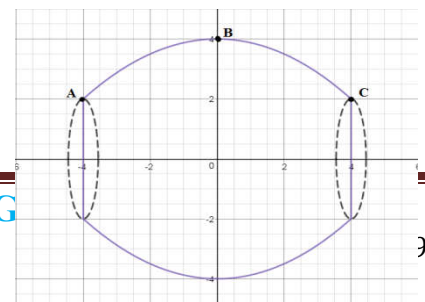
$$\int_0^{2\pi} (\sin(x)+2)^2 dx = 9\pi$$

(Trước khi thực hiện phép tính cần chuyển máy về chế độ Radian)

Vậy thể tích bình hoa $V = 9\pi^2 (cm^3)$

Bài toán 6.3. Một cái lu có bán kính ở 2 đầu là $2(dm)$ và ở giữa là $4(dm)$, chiều cao của cái lu là $8(dm)$. Tính lượng nước tối đa mà lu có thể chứa được.

Phân tích:



ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Cái lu có dạng khối tròn xoay với đường sinh hình Parabol là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$. Do đó ta có thể áp dụng công thức tích phân để tính thể tích khối tròn xoay trên.

Dựa vào kích thước của cái lu trên đề bài ta có thể xây dựng hệ trục tọa độ Oxy phù hợp và đơn giản như hình vẽ. Khi đó ta có thể sử dụng công thức tích phân để tính thể tích

- Từ chiều cao của cái lu ta tìm được cận của tích phân
- Từ đồ dài bán kính 2 đầu và ở giữa ta lấy được 3 điểm $A(-4;2)$; $B(0;4)$; $C(4;2)$ thuộc đồ thị (P)

Hướng dẫn giải:

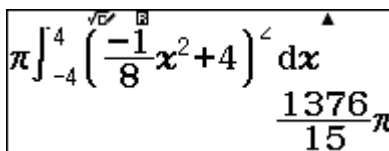
Tìm phương trình Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ qua 3 điểm $A(-4;2)$; $B(0;4)$; $C(4;2)$

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = 2 \\ c = 4 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{8}x^2 + 4$$

Như vậy: $V = \pi \int_{-4}^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 4 \right)^2 dx$

Sử dụng máy tính CASIO fx-580VN X tính tích phân trên


$$\pi \int_{-4}^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 4 \right)^2 dx = \frac{1376}{15}\pi$$

Vậy thể tích cái lu là: $V = \frac{1376\pi}{15} \approx 288.189 (dm^3)$

Bài toán 6.4 Vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 6t^2 + 1 (m/s)$. Hỏi quãng đường máy bay bay từ giây thứ 5 đến giây thứ 15 là bao nhiêu?

A. $2400m$

B. $1202m$

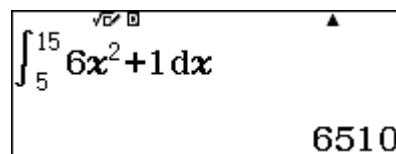
C. $6510m$

D. $1134m$

Hướng dẫn giải

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Quãng đường đi được $S(t)$ là nguyên hàm của vận tốc $v(t)$. Do đó quãng đường đi được từ giây thứ 5 đến giây thứ


$$\int_5^{15} 6x^2 + 1 dx = 6510$$

15 là:

$$S = \int_5^{15} v(t) dt = \int_5^{15} (6t^2 + 1) dt$$

Đáp án C

Bài toán 6.5 (SGK- Toán 12 NC) Một xe ô tô đang chạy thì phanh lại. Sau khi đạp phanh, ô tô bắt đầu chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét ?

A. $4.5(m)$

B. $5(m)$

C. $5.5(m)$

D. $6(m)$

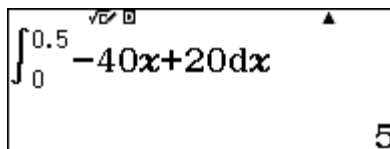
Hướng dẫn giải

Chọn mốc thời gian là lúc người lái xe đạp phanh và T là thời điểm ô tô dừng hẳn

Khi đó $v(T) = 0$ hay $-40T + 20 = 0$. Suy ra $T = 0.5$

Như vậy, kể từ lúc đạp phanh ô tô mất thêm $0.5s$ để dừng hẳn và quãng đường ô tô di chuyển

trong thời gian này là: $S = \int_0^{0.5} v(t) dt = \int_0^{0.5} (-40t + 20) dt$


$$\int_0^{0.5} -40x + 20 dx = 5$$

Đáp án: B

Bài toán 6.6 (Đề THPT Quốc Gia 2018) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng

với vận tốc biến thiên theo thời gian quy luật $v(t) = \frac{1}{120}t^2 + \frac{58}{45}t(m/s)$ trong đó t (giây) là

khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được $15s$ thì đuổi kịp A. Vận tốc B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25(m/s)$

B. $30(m/s)$

C. $36(m/s)$

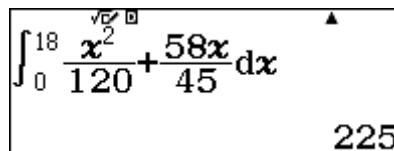
D. $21(m/s)$

Hướng dẫn giải

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

✚ Tính quãng đường A đi được cho đến khi B đuổi kịp A

$$S = \int_0^{18} v_A(t) dt = \int_0^{18} \left(\frac{1}{120} t^2 + \frac{58}{45} t \right) dt = 225$$


$$\int_0^{18} \frac{x^2}{120} + \frac{58x}{45} dx = 225$$

✚ Tính quãng đường B đi được cho đến khi B đuổi kịp A

Vận tốc của B tại thời điểm $t(s)$ tính từ lúc B xuất phát là $v_B(t) = at(m/s)$

Quãng đường B đi được cho đến khi B đuổi kịp A

$$S = \int_0^{15} v_B(t) dt = \int_0^{15} at dt = \frac{at^2}{2} \Big|_0^{15} = \frac{225}{2} a(m)$$

✚ Tính vận tốc B tại thời điểm đuổi kịp A: $\frac{225}{2} a = 225 \Leftrightarrow a = 2$

$$v_B(t) = 2t \Rightarrow v_B(15) = 30(m/s)$$

Đáp án B

Lưu ý: Để có thể làm tốt các bài toán trên, chúng ta cần nhớ mối hệ của các đại lượng Quãng đường $S(t)$, Vận tốc $v(t)$ và Gia tốc $a(t)$

- ✓ Quãng đường đi được $S(t)$ là nguyên hàm của vận tốc $v(t)$
- ✓ Quãng đường đi được của vật trong khoảng thời gian nào bằng tích phân của hàm vận tốc $v(t)$ khi biến t chạy trong khoảng thời gian đó.
- ✓ Đạo hàm của vận tốc $v(t)$ tại thời điểm t chính là gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm đó $a(t)$.

Bài toán 6.5. Công ty vừa đưa vào một dây chuyền sản xuất để chế tạo máy tính mới. Sau vài

tuần, sản lượng đạt được $q(t) = 2000 \left[1 - \frac{10}{(10-t)^2} \right]$ máy/tuần. Tìm số máy sản xuất được từ đầu

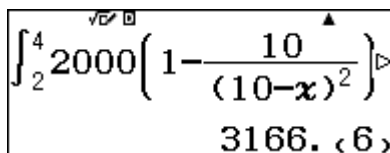
tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư

- A. 147 máy
- B. 1523 máy
- C. 1470 máy
- D. 3166 máy

Hướng dẫn giải

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

Số máy sản xuất được từ đầu tuần thứ ba đến hết tuần thứ tư là: $\int_2^4 2000 \left[1 - \frac{10}{(10-t)^2} \right] dt$



$$\int_2^4 2000 \left(1 - \frac{10}{(10-x)^2} \right) dx = 3166.666667$$

Đáp án D

Bài toán 6.6 Người ta thay nước mới cho 1 bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1 = 300cm$. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ

bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi

- A. 2 giờ 7 phút
- B. 1 giờ 7 phút
- C. 4 giờ 7 phút
- D. 3 giờ 7 phút

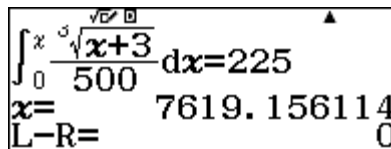
Hướng dẫn giải

Mực nước của hồ bơi tại thời gian t giây là: $h(t) = h(0) + \int_0^t \left(\frac{1}{500} \sqrt[3]{x+3} \right) dx = \int_0^t \left(\frac{1}{500} \sqrt[3]{x+3} \right) dx$

Theo đề bài, lượng nước bơm được bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi nên ta có:

$$h(t) = \frac{3}{4} h_1 \Leftrightarrow \int_0^t \left(\frac{1}{500} \sqrt[3]{x+3} \right) dx = \frac{3}{4} 300 = 225$$

Dùng chức năng SOLVE của Casio fx 580vnx để tìm nghiệm cho phương trình trên:



$$\int_0^x \frac{\sqrt[3]{x+3}}{500} dx = 225$$

$$x = 7619.156114$$

Vậy $t \approx 7619 \approx 2$ giờ 7 phút

Đáp án A

Bài toán 6.7. Một công ty dự định đầu tư một khu nhà máy sản xuất. Giả sử sau t năm, dự án lần 1 có tốc độ phát sinh lợi nhuận là $P_1(t) = 100 + t^2$ trăm đôla/năm, tiếp sau đó dự án lần 2 có tốc độ phát sinh lợi nhuận là $P_2(t) = 150 + 5t$ trăm đôla/năm. Biết rằng sau thời gian t thì tốc độ lợi nhuận lần 1 gấp 2 lần tốc độ lợi nhuận lần 2. Tính lợi nhuận chênh lệch thực tế cho khoảng thời gian trên

- A. 676.66 trăm đô
- B. 755 trăm đô
- C. 750 trăm đô
- D. 666.67 trăm đô

Hướng dẫn giải

Khoảng thời gian $t(t > 0)$ để tốc độ lợi nhuận lần 1 gấp 2 lần tốc độ lợi nhuận lần 2 là nghiệm dương của phương trình:

$$P_1(t) = 2P_2(t) \Leftrightarrow 100 + t^2 = 300 + 10t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 20 \\ t = -10 \end{cases}$$

$ax^2+bx+c=0$ $1x^2-10x-200=0$ $x_1 = -200$	$ax^2+bx+c=0$ $x_1 = 20$	$ax^2+bx+c=0$ $x_2 = -10$
---	-----------------------------	------------------------------

Vậy lợi nhuận chênh lệch thực tế cho khoảng thời gian $0 \leq t \leq 20$ là

$$\int_0^{20} [P_1(t) - P_2(t)] dt = \int_0^{20} [(100 + t^2) - (150 + 5t)] dt = \int_0^{20} (t^2 - 5t - 50) dt$$

$$\int_0^{20} x^2 - 5x - 50 dx$$

666.666667

Đáp án D

Bài toán 6.8 Ban đầu trong một mẫu nước có khoảng 600 con vi khuẩn, trong 1 giờ số lượng này tăng lên với tốc độ $v(t) = 400e^{1.25t}$. Hỏi sau 3 giờ, 5 giờ và 7 giờ số lượng vi khuẩn trong mẫu lần lượt là bao nhiêu ?

- A. 13886 – 166044 – 2019700
- B. 17608 – 207805 – 2524875
- C. 18808 – 210205 – 2528475

D. 18702 – 220350 – 2516969

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đặt $S(t)$ là số vi khuẩn trong mẫu sau t giờ

$$\text{Khi đó ta có: } S(t) = \int v(t) dt = \int 400e^{1.25t} dt = 320e^{1.25t} + C$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } S(0) = 600 \Leftrightarrow 320 + C = 600 \Leftrightarrow C = 280$$

$$\text{Suy ra: } S(t) = 320e^{1.25t} + 280$$

Sử dụng Casio fx 580vnx tìm số lượng vi khuẩn sau 3 giờ, 5 giờ và 7 giờ

Nhập biểu thức vào máy:

$$320e^{1.25x} + 280$$

Sử dụng lệnh **[CALC]** lần lượt tại các giá trị $x = 3$; $x = 5$ và $x = 7$

$320e^{1.25x} + 280$ $x = 3$	$320e^{1.25x} + 280$ 13886.74624
$320e^{1.25x} + 280$ $x = 5$	$320e^{1.25x} + 280$ 166044.1039
$320e^{1.25x} + 280$ $x = 7$	$320e^{1.25x} + 280$ 2019700.195

Đáp án A

Cách 2 Đặt $S(t)$ là số vi khuẩn trong mẫu sau t giờ

$$\text{Ta có } S(t) = S(0) + \int_0^t 400e^{1.25x} dx = 600 + \int_0^t 400e^{1.25x} dx$$

Nhập biểu thức vào máy:

$$600 + \int_0^A 400e^{1.25x} dx$$

Sử dụng lệnh **[CALC]** lần lượt tại các giá trị $A = 3$; $A = 5$ và $A = 7$

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

$600 + \int_0^A 400e^{1.25x} dx$ A = 3	$600 + \int_0^A 400e^{1.25x} dx$ 13886.74624
$600 + \int_0^A 400e^{1.25x} dx$ A = 5	$600 + \int_0^A 400e^{1.25x} dx$ 166044.1039
$600 + \int_0^A 400e^{1.25x} dx$ A = 7	$600 + \int_0^A 400e^{1.25x} dx$ 2019700.195

Đáp án A

Cảm ơn bạn đọc đã theo dõi bài viết của chúng tôi. Mọi ý kiến đóng góp hay các câu hỏi thắc mắc về bài viết cũng như các vấn đề về máy tính CASIO fx 580VNX, các bạn có thể gửi tin nhắn trực tiếp về fanpage **DIỄN ĐÀN TOÁN CASIO**