

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐẮK LẮK
TRƯỜNG THPT PHAN ĐÌNH PHÙNG

**KỸ THUẬT TƯ DUY VÀ GIẢI TOÁN TRẮC
NGHIỆM HÌNH HỌC KHÔNG GIAN**

TÀI LIỆU ÔN THI THPT QG

HÀ DUY NGHĨA

Đắk Lắk, tháng 3 năm 2017

MỤC LỤC

1. Phần mở đầu	2
2. Phần nội dung	3
2.1 Cơ sở lí luận	3
2.2 Thực trạng vấn đề nghiên cứu	3
2.3 Nội dung và hình thức của giải pháp	
2.3.1. Bài toán liên quan đến thể tích khối đa diện	2
2.3.2. Bài toán liên quan đến tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện... 7	
2.3.3. Bài toán liên quan đến hình tròn xoay	11
2.3.4. Bài tập áp dụng	13
3. Phần kết luận	19
3.1 Kết luận	19
3.2 Kiến nghị	19
Tài liệu tham khảo	20

2. PHẦN NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lý luận

Trong chương trình THPT, môn Toán giữ một vai trò quan trọng. Môn Toán được coi là môn học công cụ, cung cấp các tri thức để người học có thể học tập các môn học khác. Thông qua học toán, người học được hình thành, rèn luyện và phát triển tư duy. Thực tế, có nhiều người ít dùng trực tiếp kiến thức toán học vào thực tiễn cuộc sống, nhưng không ai phủ nhận rằng, những người học toán tốt thường có tư duy tốt. Vì thế, người ta dùng các bài kiểm tra toán dưới nhiều hình thức khác nhau và dùng thành tích học tập môn Toán là một thước đo trong nhiều kì thi.

Trong năm học này, Bộ Giáo Dục và Đào Tạo chọn hình thức thi trắc nghiệm khách quan, đây là hình thức thi mà có thể kiểm tra tốt nhất năng lực tư duy của học sinh, nhưng cũng là hình thức thi khó mà học sinh gặp phải. Do vậy, để hình thành tư duy người học thông qua các bài toán trắc nghiệm khách quan là một vấn đề khá mới mẻ và hấp dẫn đối với mỗi giáo viên hiện nay.

2.2. Thực trạng

Học sinh hay gặp khó khăn và ngại khó khi học toán hình học không gian.

Học sinh mới chỉ dừng lại ở việc lĩnh hội các kiến thức trong sách giáo khoa mà chưa vận dụng nó, chưa có kiến thức cơ bản về tư duy trắc nghiệm, thường giải bài tập theo kiểu tự luận.

Giáo viên dạy cũng chưa có nhiều tài liệu tham khảo về vấn đề này.

Giáo viên chưa được tham gia các buổi hội thảo, thảo luận các vấn đề trắc nghiệm. Chỉ một số ít được tham gia tập huấn ra đề.

2.3 Nội dung và hình thức của giải pháp

2.3.1. Bài toán liên quan đến thể tích khối đa diện

Trong phần này, tôi trình bày một số kỹ thuật tính thể tích thông qua việc phân chia các thể tích cũng như tính tỉ số thể tích trực tiếp, gián tiếp và những ưu khuyết điểm của nó.

Về phần lí thuyết, ngoài kiến thức trong SGK tôi xin trình bày thêm các tính chất sau:

Tính chất 1. Cho khối chóp tam giác $S.ABC$, có M, N, P lần lượt là ba điểm thuộc ba cạnh SA, SB, SC khi đó ta luôn có:

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SN.SP}{SA.SB.SC}.(i)$$

Tính chất 2. Với mọi khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta luôn có:

$$V_{AA'B'D'} = V_{CB'D'C'} = V_{B'.ABC} = V_{D'.ACD} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}.(ii)$$

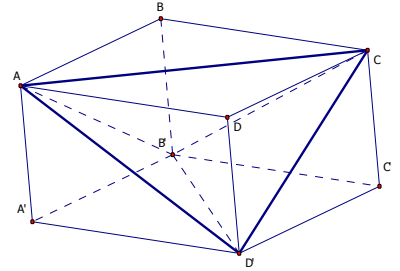
Tính chất 3. Luôn chia được khối lăng trụ tam giác thành 3 khối tứ diện có thể tích bằng nhau. Cụ thể, xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tùy ý ta có:

$$V_{A.A'B'C'} = V_{B'.ABC} = V_{A.B'C'C}.(iii)$$

Bài 1. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $1dm^3$. Thể tích khối chóp $ACB'D'$ là:

- A. $\frac{1}{3}dm^3$ B. $\frac{2}{3}dm^3$ C. $\frac{3}{4}dm^3$ D. $\frac{1}{2}dm^3$

Phân tích. Với bài toán này, nếu như tính trực tiếp thể tích khối $ACB'D'$ ta thiếu rất nhiều yếu tố về chiều cao cũng như diện tích đa giác đáy, do vậy khi làm bài trắc nghiệm ta không thể lần lượt từng bước đi giải quyết từng yếu tố một mà ta phải nghĩ ngay đến một công việc khác có thể đơn giản hơn. Do vậy việc đọc kỹ đề, phân tích giả thiết là một yếu tố cực kì quan trọng đối với việc giải một bài toán trắc nghiệm. Từ đó ta nên nghĩ đến việc tính thể tích khối tứ diện $ACB'D'$ gián tiếp thông qua việc phân chia lắp ghép khối đa diện.



Lời giải:

Cách 1.

Nhìn vào hình vẽ của bài toán sẽ cho ta nghĩ đến việc chia khối hộp thành các khối tứ diện $AA'B'D'$, $CC'B'D'$, $ACDD'$, $ACBB'$ và $ACB'D'$.

$$\text{Nên } V_{ACB'D'} = V - V_{C.B'C'D'} - V_{B'.ABC} - V_{D'.ACD} - V_{A.A'B'D'}$$

$$\text{trong đó } V_{AA'B'D'} = V_{CB'D'C'} = V_{B'.ABC} = V_{D'.ACD} = \frac{1}{6}V.$$

$$\text{Suy ra: } V_{ACB'D'} = V - 4V_{AA'B'D'} = \frac{1}{3}V = \frac{1}{3}(dm^3).$$

Cách 2.

Từ các đáp án, ta nhận thấy rằng tỉ số của khối tứ diện $ACB'D'$ và khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ luôn bằng hằng số. Hơn nữa, khối lập phương cũng là khối hộp, do đó tỉ số thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$ với khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ luôn bằng tỉ số của khối tứ diện đều $ACB'D'$ với khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a .

Dễ thấy thể tích lập phương là a^3 và khối tứ diện đều $ACB'D'$ có cạnh $a\sqrt{2}$ nên thể tích khối $ACB'D'$ là $V' = \frac{1}{3} \left(a\sqrt{2} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{12}}{3} = \frac{a^3}{3}$, suy ra $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3}$.

Do đó $V' = \frac{1}{3}(dm^3)$.

Nhận xét: Nếu tính chất T đúng cho khối hộp thì tính chất T cũng đúng cho khối lập phương. Do vậy khi làm bài tập nếu chỉ cho khối hộp mà không có tính chất gì thêm thì ta xem khối hộp đó có thể là một khối lập phương cạnh a . Ngược lại bài toán đúng cho khối lập phương không suy ra được nó đúng cho khối hộp.

Bài 2. Cho khối chóp tứ giác lồi $S.ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC và SD . Khi đó, tỉ số thể tích $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.MNPQ}}$ bằng bao nhiêu?

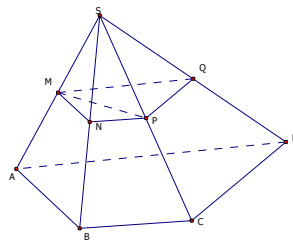
A. $\frac{1}{16}$

B. 8

C. 16

D. 2

Phân tích: Với bài này, tạo cho ta liên tưởng ngay đến công thức tỉ số thể tích (*Tính chất 1*), nhưng đây là khối chóp tứ giác chứ không phải là tứ diện. Do đó, để áp dụng được công thức (i) ta cần phải chia khối chóp tứ giác này thành các khối tứ diện sau đó mới áp dụng được công thức.



Lời giải.

Áp dụng công thức (i) cho hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ có:

$$V_{S.MNP} = \frac{1}{8} V_{S.ABC}, V_{S.QMP} = \frac{1}{8} V_{S.ACD}$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.MNP} + V_{S.QMP} = V_{S.MNPQ} = \frac{1}{8} V_{S.ABC} + \frac{1}{8} V_{S.ACD} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$$

$$\text{Hay, } \frac{V_{S.ABCD}}{V_{S.MNPQ}} = 8.$$

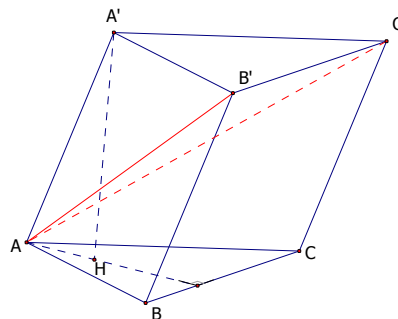
trong cách giải bài này, đó là việc áp dụng $\frac{V_{S.MNPO}}{V_{S.ABCD}} = \frac{SM.SN.SP.SQ}{SA.SB.SC.SD} = \frac{1}{16}$. Dẫn đến sai lầm là chọn ngay đáp án A hoặc D.

Một điều cần chú ý ở bài toán này là nếu các điểm M,N,P,Q chia các cạnh SA, SB, SC, SD theo các tỉ số khác nhau và chúng đồng phẳng thì ta có thể giải như trên không. Nếu không thì cần thêm yếu tố gì nữa?.

Bài 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, hình chiếu H của A' lên mặt phẳng ABC nằm trên đường cao của tam giác ABC . Biết $A'H=3a$. Tính thể tích khối chóp $A.B'BCC'$.

- A.** $2\sqrt{3}a^3$ **B.** $4\sqrt{3}a^3$ **C.** $\sqrt{3}a^3$ **D.** $2\sqrt{3}a^3$

Phân tích: Bài toán cho ta liên tưởng đến việc chia khối lăng trụ. Như ta đã biết khối lăng trụ bất kỳ ta luôn chia được thành 3 khối tứ diện có thể tích bằng nhau. Tức là nhìn vào hình vẽ ta sẽ thấy ngay được khối tứ diện $A.A'B'C'$ có thể tích bằng $\frac{1}{3}$ thể tích lăng trụ hay thể tích khối chóp



A.B'BCC' bằng $\frac{2}{3}$ thể tích lăng trụ. Do vậy,

việc đi tìm thể tích khối chóp $A.B'BCC'$ chính là tìm thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải:

Ta có : $S_{\triangle ABC} = a^2\sqrt{3}$, Chiều cao AH của lăng trụ là $3a$. Khi đó thể tích lăng trụ là:

$$V = B.h = a^2 \sqrt{3}.3a = 3\sqrt{3}a^3$$

Áp dụng tính chất (iii) Ta có : $V_{A.B'BCC'} = V - V_{A.A'B'C'} = \frac{2}{3}V$.

Suy ra thể tích khối chóp A.B'BCC' là: $V_{A.B'BCC'} = \frac{2}{3}V = 2\sqrt{3}a^3$

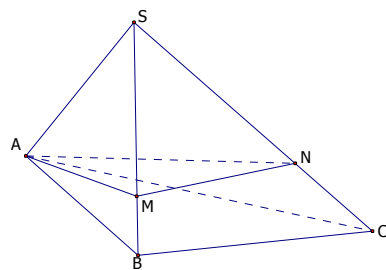
Nhận xét: Đề bài cho hình chiếu H của A' lên mặt phẳng (ABC) nằm trên đường cao tam giác ABC chỉ để gây nhiễu, nếu không chú ý kỹ sẽ mất thời gian ở dữ kiện này.

Mặt khác, nếu cho thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng V và tính thể tích khối chóp $A.B'BCC'$ thì ta xem khối lăng trụ trên là nửa khối lập phương và khi đó khối chóp $A.B'BCC'$ có thể tích bằng $\frac{1}{3}$ khối lập phương.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$ với $a < b < c$ và các góc $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABC$ là :

- A. $\frac{abc\sqrt{12}}{12}$ B. $\frac{abc\sqrt{12}}{4}$ C. $\frac{abc\sqrt{12}}{3}$ D. $\frac{abc\sqrt{12}}{6}$

Phân tích: Nếu bài này tính trực tiếp thể tích khối chóp $S.ABC$ ta sẽ gặp vấn đề khó khăn đó chính là xác định độ dài đường cao, nhưng tính gián tiếp thể tích khối chóp $S.ABC$ thì ta dựa vào thể tích khối nào?. Vậy nên ta nên chọn cách nào?. Trả lời câu hỏi này chính là trả lời câu hỏi “*các góc ở đỉnh của tam diện bằng 60° trong đề có ý nghĩa gì*”? Và ta để ý thêm rằng nếu các cạnh bên của khối chóp bằng a thì khối chóp $S.ABC$ trở thành khối chóp đều, và đó chính là chìa khóa của bài này.



Lời giải: Giả sử trên cạnh SB , SC lấy các điểm M , N sao cho $SM=SN=SA=a$. khi đó ta có $V_{S.AMN} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$. Ngoài ra, áp dụng công thức (i) ta được:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SN}{SB.SC} = \frac{a^2}{bc}$$

$$\text{Suy ra, } V_{S.ABC} = bc \frac{V_{S.AMN}}{a^2} = abc \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Nhận xét: Khi làm bài tập trắc nghiệm nên vận dụng thành thạo cũng như thuộc các công thức thể tích khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều có các cạnh bằng nhau,... để khi làm bài tập ta liên tưởng ngay đến nó nếu bài toán có dấu hiệu liên quan.

2.3.2. Bài toán liên quan đến tâm và bán mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

Trong phần này tôi xin trình bày về vấn đề hay gặp là tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và lăng trụ còn về tâm mặt cầu thì chỉ đề cập. Ngoài kiến thức trong SGK tôi giới thiệu một số tính chất như sau:

Tính chất 1. Nếu hình chóp có đường thẳng d là trục của đường tròn đáy (đường thẳng qua tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đáy) thì tâm mặt cầu ngoại tiếp là giao điểm của d và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên (nếu có cạnh bên SA và d đồng phẳng thì dựng đường trung trực của cạnh bên SA đó trong mp (d, SA)).

Tính chất 2. Trong tứ diện đều có:

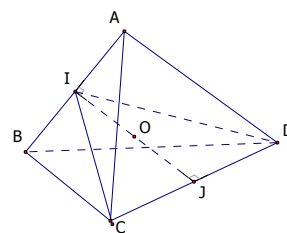
- Trọng tâm G của tứ diện là giao điểm của đoạn nối trung điểm của các cặp cạnh đối diện và là trung điểm của các đoạn nối đó.
- Trọng tâm của tứ diện cũng là giao điểm của các đoạn nối đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện và chia đoạn đó theo tỉ số $\frac{1}{3}$ ($GA=3GG'$, A là đỉnh và G' là trọng tâm tam giác đáy của tứ diện).
- Tứ diện đều có tâm đường tròn nội tiếp ngoại tiếp và giao điểm các đường cao là trọng tâm của tứ diện.

Tính chất 3. Hình tứ diện gần đều (có các cặp cạnh đối bằng nhau) có tâm mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện trùng với trọng tâm tứ diện.

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$; $AC = BD = 5$; $AD = BC = 6$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là:

- A. $\frac{\sqrt{35}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{35}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{35}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{35}}{5}$

Phân tích: Dễ nhận thấy đây là tứ diện gần đều nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp là trọng tâm tứ diện. Hơn nữa các tam giác CAB và DBA là hai tam giác bằng nhau nên hai trung tuyến CI và DI bằng nhau, từ đó ta suy ra tam giác IDC cân tại I và $IJ \perp DC$.



Lời giải: Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD khi đó trọng tâm O tứ diện là trung điểm của IJ và cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

$$\text{Để tính được: } IJ^2 = IC^2 - JC^2 = \left(\frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \right) - \frac{CD^2}{4} = \left(\frac{6^2 + 5^2}{2} - \frac{3^2}{4} \right) - \frac{3^2}{4} = 26$$

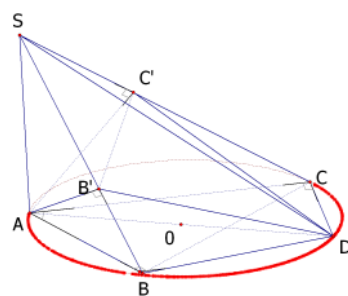
$$\text{Suy ra: } R = OA = IA^2 + \frac{IJ^2}{4} = \frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Nhận xét: Trong tứ diện gần đều trên, các mặt là những tam giác bằng nhau nên diện tích của chúng cũng bằng nhau. Suy ra thể tích các khối OABC, OACD, OABD, OBCD bằng nhau và bằng $\frac{1}{4}$ thể tích tứ diện. Từ đó khoảng cách từ O đến các mặt cũng bằng nhau và bằng $\frac{3V}{4S}$. Vậy luôn tồn tại mặt cầu nội tiếp tứ diện có bán kính $r = \frac{3V}{4S}$.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy, $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Bán kính mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B', C' là:

A. $\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{2\sqrt{3}}$ B. $\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc}}{2\sqrt{3}}$

Phân tích. Tương tự bài trước, nhận thấy khối A.BB'C'C là khối chóp có đáy là tứ giác nội tiếp đường tròn, nên tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BB'C'C, việc tìm tâm theo kỹ thuật này cũng thật sự khó với lại bài toán chỉ cần tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp mà thôi. Do vậy nếu giả sử dựng được tâm I của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp A.BB'C'C khi đó I cũng nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, kéo dài AO cắt đường tròn này tại D. Để nhận thấy các tam giác AC'D, AB'D vuông tại C', B'. Suy ra tâm I của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp chính là O.



Lời giải. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, kéo dài AO cắt đường tròn này tại D, ta có $DC \perp (SAC)$, $DB \perp (SAB)$. Suy ra các tam giác tam giác AC'D, AB'D vuông tại C', B'. Hay O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

Hơn nữa áp dụng công thức tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta có

$$R = OA = \frac{abc}{4S} = \frac{bc\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{4bc \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}{2\sqrt{3}}$$

Nhận xét. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp không phụ thuộc vào vị trí điểm S, nên khi giải bài toán không nên chú ý nhiều về yếu tố tự do. Ngoài ra, khi làm bài tập liên quan bán kính mặt cầu nên lưu ý công thức bán kính đường tròn ngoại tiếp.

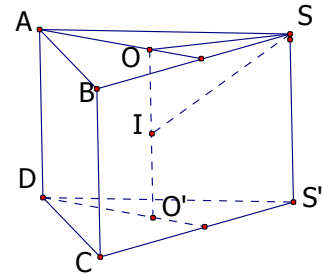
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ hoặc } S = \frac{abc}{4R}.$$

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có AB=5a, BC=8a, mặt bên SAB nằm trên mặt phẳng vuông góc đáy có SA=6a, SB=9a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

- A. $\frac{a}{8}\sqrt{2482}$ B. $\frac{a}{4}\sqrt{2482}$ C. $\frac{a}{2}\sqrt{2482}$ D. $a\sqrt{2482}$

Phân tích.

Đây cũng là bài toán xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp, nhưng ở bài này ta nhận thấy rằng mặt bên SAB của hình chóp vuông góc mặt đáy (ABCD) và đáy ABCD là hình chữ nhật nên tạo cho ta liên tưởng đến một hình lăng trụ đứng đã bị cắt bỏ những bộ phận không liên quan. Từ đó, ta tái hiện lại lăng trụ đứng có đáy là tam giác SAB và mặt bên là hình chữ nhật ABCD ta có ngay được tâm và bán kính của khối lăng trụ và nó cũng chính là tâm và bán kính của khối chóp cần tìm.



Lời giải: Dựng lăng trụ đứng SAB.S'CD có đáy là tam giác SAB và mặt bên là hình chữ nhật ABCD như hình vẽ. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB, S'CD. Khi đó, ta có tâm mặt cầu ngoại tiếp là trung điểm I của OO' và bán kính là IS.

Áp dụng công thức bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB ta có

$$OS = \frac{abc}{4S_{\Delta SAB}} = \frac{27}{\sqrt{2}}a$$

$$\text{Suy ra, bán kính mặt cầu là } IS = \sqrt{IO^2 + R^2} = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + R^2} = a\frac{1}{8}\sqrt{2482}$$

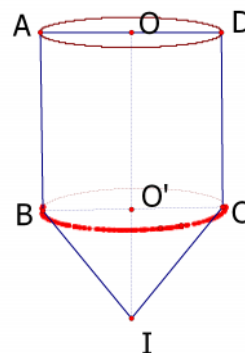
Nhận xét: Đây là kiểu bài toán giống bài số 42 trong đề minh họa THPT Quốc gia 2017 nhưng ở mức độ khó hơn và lưu ý rằng chỉ có lăng trụ đứng có đáy là đa giác nội tiếp đường tròn thể có được tâm mặt cầu ngoại tiếp. Do đó bài toán có yếu tố cạnh bên vuông góc với đáy ta mới nghĩ đến việc dựng lăng trụ.

Ngoài ra khi giải bài toán trắc nghiệm ta nên chú ý các đáp án. Ở bài này bán kính mặt cầu ngoại tiếp không thể là đáp án D vì nó lớn gấp 4 lần độ dài cạnh lớn nhất.

2.3.3. Bài toán liên quan đến hình tròn xoay

Trong phần này tôi xin trình bày một số bài toán liên quan đến thể tích các vật thể tròn xoay trong thực tế, các dạng bài tập tương tự như các bài trong đề thi minh họa và đề thử nghiệm. Ngoài kiến thức trong SGK, để giải các dạng bài tập này ta cần chú ý các tính chất sau:

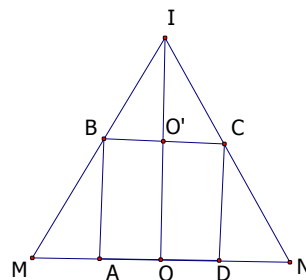
Bài 1. Một thùng đựng thức ăn gia súc có dạng một hình tròn xoay như hình vẽ bên được thiết kế gồm một hình trụ nội tiếp hình nón (hình trụ được gọi là nội tiếp hình nón nếu một đường tròn đáy nằm trên mặt xung quanh của hình nón, đáy còn lại nằm trên mặt đáy của hình nón) và phần đỉnh của nón. Biết rằng hình nón đỉnh I có thiết diện qua trục của nó là tam giác đều cạnh 1m, còn thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Thể tích của thùng là:



A. $\frac{\pi}{8}(2\sqrt{3}-3)^2(3\sqrt{3}-4)$ B. $\frac{\pi}{4}(2\sqrt{3}-3)^2(3\sqrt{3}-4)$

C. $\frac{\pi}{2}(2\sqrt{3}-3)^2(3\sqrt{3}-4)$ D. $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{3}-3)^2(3\sqrt{3}-4)$

Phân tích. Thùng cần tính thể tích gồm khối trụ tròn xoay ghép với khối nón tròn xoay, để tính thể tích của thùng ta cần tính thể tích từng khối, tức là ta phải tìm cạnh của hình vuông ABCD. Vấn đề ở đây là cách nào để tìm cạnh hình vuông ABCD khi chỉ biết được nó nội tiếp được trong tam giác đều có cạnh bằng 1. Qua biểu diễn hình sẽ cho ta liên tưởng đến các hệ thức của tam giác đồng dạng, thật vậy nếu



ta đặt $AB = x$ ta có hệ thức: $\frac{IB}{IM} = \frac{BO'}{MO}$ và $\frac{MB}{IM} = \frac{AO}{IO}$ từ đây thay $MB = IM - IB$ ta được kết quả và lời giải ngắn gọn như sau.

Lời giải. Biểu diễn hình vẽ, Đặt $AB = x$, áp dụng các hệ thức của tam giác đồng dạng ta có:

$$\frac{IB}{IM} = \frac{BO'}{MO}, \quad \frac{MB}{IM} = \frac{AO}{IO} \text{ suy ra: } \frac{MI - IB}{IM} = \frac{BA}{IO} \text{ hay } \frac{IB}{IM} = 1 - \frac{BA}{IO} \text{ tức là:}$$

$$\frac{BO'}{OM} = 1 - \frac{BA}{IO} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

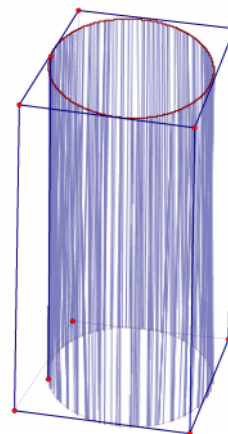
Ngoài ra, chiều cao của khối nón là: $h = IO - O'O = \frac{\sqrt{3}}{2} - (2\sqrt{3} - 3) = \frac{6 - 3\sqrt{3}}{2}$

Vậy thể tích thùng là: $V = \frac{\pi}{8}(2\sqrt{3} - 3)^2(3\sqrt{3} - 4)$

Nhận xét. Trong thùng trên, ta thấy khối trụ và khối nón chung đáy nên khi tính thể tích ta thiết lập công thức trước và sử dụng máy tính cầm tay để tính đỡ tốn thời gian.

Có rất nhiều loại bài toán trắc nghiệm kiểu này, người ta có thể thay khối nón được ghép bởi nửa khối cầu, (*bồn chứa xăng*) do vậy cần rèn luyện thật nhiều các kĩ thuật biến đổi để rút ngắn thời gian trong quá trình làm bài.

Bài 2. Một bóng đèn huỳnh quang dài 120 cm, đường kính 2cm, được đặt khít vào ống giấy cứng dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ bên). Để bảo vệ bóng đèn khỏi vỡ khi di chuyển người ta thường cho xốp vào các khoảng hở giữa bóng đèn và hộp giấy. Tính thể tích xốp cần để lấp kín những khoảng hở đó là:



- A. $0,103m^3$ B. $130cm^3$
C. $1,03dm^3$ D. $0,103dm^3$

Phân tích: Để xác định được đáy của hộp giấy là hình vuông có cạnh bằng đường kính của bóng đèn và chiều cao hộp bằng chiều cao của bóng đèn. Thể tích xốp cần lấp vào khoảng hở bằng thể tích khối hộp trừ đi thể tích bóng đèn.

Lời giải: Ta có thể tích bóng đèn là: $V = \pi.120(cm^3)$

Thể tích khối hộp: $V = 4.120 = 480(cm^3)$

Thể tích xốp: $V = 480 - \pi.120 \approx 103(cm^3)$

Nhận xét. Đây là bài tập vận dụng nhưng ở mức độ thấp, nhưng học sinh dễ mắc phải sai lầm khi thực hiện chọn đáp án ở dạng quy đổi đơn vị .

Bài 3. Khi sản xuất vỏ lon sữa hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích lon sữa đó bằng $1dm^3$ và diện tích toàn phần của nó nhỏ nhất thì bán kính đáy của hình trụ phải bằng bao nhiêu?



A. $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} dm..$

B. $\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} dm.$

C. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} dm.$

D. $\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} dm$

Phân tích. Đây là bài toán liên quan đến GTLN, GTNN của biểu thức. Trước hết ta phải xác định được diện tích toàn phần của lon sữa theo thể tích của nó sau đó mới biện luận giá trị nhỏ nhất được. Thật vậy, nếu như ta gọi chiều cao lon sữa là h , bán kính đáy lon sữa là r thì $S_{tp} = 2\pi r.h + 2\pi r^2$ và thể tích lon sữa là: $V = \pi r^2 h$ suy ra diện tích toàn phần là:

$$S_{tp} = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{1}{r} + \pi r^2\right)$$

Lời giải: Gọi chiều cao lon sữa là h , bán kính đáy lon sữa là r thì diện tích toàn phần của lon sữa là:

$$S_{tp} = 2\pi r \frac{1}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = 2\left(\frac{1}{r} + \pi r^2\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương: $\pi r^2, \frac{1}{2r}, \frac{1}{2r}$ ta được:

$$S_{tp} = 2\left(\frac{1}{r} + \pi r^2\right) \geq \sqrt[3]{\pi}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\pi r^2 = \frac{1}{2r} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, (dm).$

Nhận xét. Đây là bài toán thuộc loại cực trị hình học, ta có thể áp dụng hàm số để tìm GTNN của S_{tp} như sau:

Xét hàm số $f(r) = 2\left(\frac{1}{r} + \pi r^2\right)$ với $(r > 0)$ có $f'(r) = 2\left(-\frac{1}{r^2} + 2\pi r\right)$

Suy ra $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$ lập BBT ta được kết quả.

2.3.4. Bài tập áp dụng

Câu 1 : Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có thể tích là V. Gọi I, J lần lượt là trung điểm hai cạnh AA' và BB'. Khi đó thể tích của khối đa

diện ABCIJC' bằng:

- A. $\frac{3}{4}V$. B. $\frac{4}{5}V$. C. $\frac{2}{3}V$.. D. $\frac{3}{5}V$.

Câu 2 : Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi M,N, lần lượt là trung điểm của SB, SC . Khi đó, tỉ số thể tích $\frac{V_{ABCNM}}{V_{S.ABC}}$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 4 D. $\frac{3}{4}$

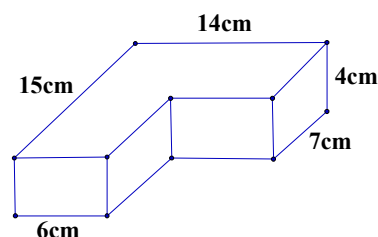
Câu 3 : Xét một hộp bóng bàn dạng hình hộp chữ nhật, biết rằng hộp chứa vừa khít ba quả bóng bàn được xếp theo chiều dọc, các quả bóng có kích thước như nhau. Khi đó, phần không gian còn trống trong hộp chiếm:

- A. 60,9% B. 47,64% C. 52,36% D. 82,36%

Câu 4 : Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Đường thẳng qua trọng tâm tam giác ABC song song với BC cắt AB tại D, cắt AC tại E. Mặt phẳng đi qua A', D, E chia khối lăng trụ thành hai phần. Tỉ số thể tích của hai phần đó (số bé chia số lớn) là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{23}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{4}{27}$

Câu 5 : Thể tích của khối được ghép bởi hai hình hộp như hình bên là:



- A. $328cm^3$ B. $456cm^3$ C. $584cm^3$ D. $712cm^3$

Câu 6 : Cho khối lăng trụ tam giác có thể tích bằng V. Xét điểm P thuộc cạnh BB' sao cho $\frac{PB}{BB'} = \frac{1}{2}$, điểm Q thuộc cạnh CC' sao cho $\frac{QC}{CC'} = \frac{1}{4}$. Tính thể tích khối chóp A. BCQP

- A. $\frac{3V}{8}$ B. $\frac{V}{5}$ C. $\frac{V}{6}$ D. $\frac{V}{4}$

Câu 7 : Hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là một hình thoi với diện tích S_1 . Hai mặt chéo ACC'A' và BDD'B' có diện tích lần lượt bằng S_2, S_2

Khi đó thể tích của khối hộp là ?

- A. $\frac{\sqrt{3S_1S_2S_3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$ C. $\sqrt{\frac{S_1S_2S_3}{2}}$ D. $\frac{S_1\sqrt{S_2S_3}}{2}$

Câu 8 : Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ là:

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a}{4}$ D. $a\sqrt{2}$

Câu 9 : Cho khối hộp $ABCD.A'B'CD'$ có thể tích V . Mặt phẳng đi qua đỉnh A và qua trung điểm của các cạnh $B'C'$, $C'D'$ cắt $A'B'$ tại E cắt $A'D'$ tại F . Tính thể tích khối chóp $A.A'EF$

- A. $\frac{V}{3}$ B. $\frac{2V}{3}$ C. $\frac{3V}{4}$ D. $\frac{3V}{8}$

Câu 10 : Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° , cạnh $AB = a$. Tính thể tích khối đa diện $ABCC'B'$ bằng

- A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^3$ B. $\sqrt{3}a^3$ C. $\frac{3}{4}a^3$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$

Câu 11 : Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là V . Gọi M và N là trung điểm $A'B'$ và $B'C'$ thì thể tích khối chóp $D'.DMN$ bằng?

- A. $\frac{V}{2}$ B. $\frac{V}{8}$ C. $\frac{V}{16}$ D. $\frac{V}{4}$

Câu 12 : Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, cạnh đáy bằng a . Cho góc hợp bởi $(A'BC)$ và mặt đáy là 30° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$ B. $\frac{\sqrt{3}}{24}a^3$ C. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ D. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$

Câu 13 : Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. I là trung điểm BB' . Mặt phẳng (DIC') chia khối lập phương thành 2 phần có tỉ số thể tích phần bé chia phần lớn bằng:

- A. $\frac{7}{48}$ B. $\frac{11}{48}$ C. $\frac{4}{14}$ D. $\frac{7}{24}$

Câu 14 : Cho ba đoạn thẳng SA,SB,SC đôi một vuông góc tạo với nhau thành một hình tứ diện S.ABC với $SA = a, SB = 2a, SC = 3a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện đó là

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ C. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{14}}{6}$

Câu 15 : Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích 36 cm^3 . Gọi M là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng ABCD. Thể tích khối chóp $MA'B'C'D'$ là:

- A. 18 cm^3 B. 16 cm^3 C. 12 cm^3 D. 24 cm^3

Câu 16 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tỉ số thể tích của khối chóp S.MNCD và khối chóp S.ABCD bằng:

- A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 17 : Người ta bỏ 3 quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng 3 lần đường kính của quả bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của 3 quả bóng bàn, S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số S_1/S_2 bằng:

- A. 1 B. 2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{6}{5}$

Câu 18 : Một hình tứ diện đều cạnh a có 1 đỉnh trùng với đỉnh của hình nón tròn xoay, còn 3 đỉnh còn lại của tứ diện nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Khi đó, diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay là:

- A. $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}$ B. $\pi a^2\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{2}$

Câu 19 : Gọi S là diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay được sinh ra bởi đoạn thẳng AC' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh b khi quay xung quanh trục AA'. Diện tích S là:

- A. πb^2 B. $\pi b^2\sqrt{2}$ C. $\pi b^2\sqrt{3}$ D. $\pi b^2\sqrt{6}$

Câu 20 : Cho hình trụ có chiều cao 1 dm . Biết diện tích xung quanh hình trụ gấp đôi diện tích hai đáy. Thể tích khối trụ là:

A. $\frac{\pi}{2}(dm^3)$ B. $\frac{\pi}{4}(dm^3)$ C. $\frac{\pi}{3}(dm^3)$ D. $\frac{\pi}{5}(dm^3)$

Câu 21 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình bình hành và có thể tích bằng 1. Trên cạnh SC lấy E sao cho $SE=2EC$, tính thể tích V của khối tứ diện SEBD.

A. $V = \frac{1}{3}$ B. $V = \frac{1}{6}$ C. $V = \frac{1}{12}$ D. $V = \frac{2}{3}$

Câu 22 : Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy bằng R, thiết diện qua trục là hình vuông. Tính thể tích lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $2R^3$ B. $3R^3$ C. $4R^3$ D. $5R^3$

Câu 23 : Bài 7. Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=a$; $AB=AC=b$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Bán kính cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC là

A. $R = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}$ B. $R = \frac{a}{4} + \frac{b}{3}$ C. $R = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3}}$ D. $R = \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right)^2$

Câu 24 : Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông ABCD cạnh $2\sqrt{3}$ cm với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc $\widehat{AB}$ sao cho $\widehat{ABM} = 60^\circ$. Tính thể tích V của khối tứ diện ACDM.

A. $8\sqrt{3}(\text{cm}^3)$ B. $3(\text{cm}^3)$ C. $6(\text{cm}^3)$ D. $9(\text{cm}^3)$

Câu 25 : Cho tứ diện ABCD có $CD = 2a$, các cạnh còn lại có độ dài $a\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là:

A. $R = \frac{2a}{3}$ B. $R = 2a$ C. $R = a$ D. $R = \frac{a}{2}$

Câu 26 : Cho hình nón có bán kính đáy R và đường sinh tạo với mặt đáy một góc 60° . Tính thể tích của mặt cầu nội tiếp trong hình nón.

A. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{27}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$ C. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{27}$ D. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$

Câu 27 : Cho hình trụ có bán kính đáy bằng a và đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích của lăng trụ tam giác đều ngoại tiếp hình trụ.

A. $a^3\sqrt{3}$ B. $3a^3\sqrt{6}$ C. $a^3\sqrt{6}$ D. $9a^3\sqrt{3}$

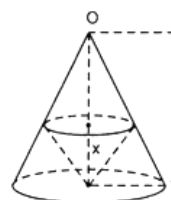
Câu 28 : Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có tất cả các cạnh bằng a. Tính thể tích khối chóp SABCD theo a

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Câu 29 : Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều. Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30° và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Câu 30 : Cho hình nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón có đỉnh là tâm của đáy và đáy là một thiết diện song song với đáy của hình nón đã cho. Chiều cao x của khối nón này là bao nhiêu để thể tích của nó lớn nhất, biết $0 < x < h$?



- A. $x = \frac{2h}{3}$ B. $x = \frac{h}{3}$ C. $x = \frac{h}{2}$ D. $x = h$

Đáp án.

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	C	11	A	21	A
2	D	12	A	22	A
3	B	13	B	23	B
4	B	14	C	24	B
5	C	15	A	25	C
6	D	16	B	26	D
7	C	17	A	27	D
8	D	18	A	28	A
9	D	19	D	29	B
10	B	20	B	30	B

