

Bài 1. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 3$ (1) có đồ thị (C_m) , m là tham số.

a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x)$ (1) có hai điểm cực trị âm.

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 7$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình lượng giác

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right]$$

2. Giải phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)^2 = \frac{4(1 + \sqrt{1+4x})}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2} + 1}$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 9y^3 + y = x\sqrt{3x-1} & (1) \\ \sqrt{9y^2 + 7} + \sqrt{3x+6} = 8 & (2) \end{cases}$

2. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho phương trình: $(2m+3)16^x - (4m-2)4^x + 3m-8 = 0$ (1), m là tham số thực.

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

Bài 5. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

b) Tính diện tích đáy $ABCD$ theo x của hình chóp $S.ABCD$.

c) Xác định x để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất. Tính giá trị thể tích lớn nhất đó.

Bài 6. (2,0 điểm)

Cho $2x^2 + y^2 - 2xy = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 4x^4 + y^4 - 2x^2 y^2 + 2018$.

HẾT

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh :.....

Chữ ký của GT1:.....Chữ ký GT2 :.....



ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI – THỪA THIÊN HUẾ
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: Toán 12

HỌC HỎI - CHỈ SẴN KIẾN THỨC

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)

LINK NHÓM <https://www.facebook.com/groups/1916660125164699>

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 3$ (1) có đồ thị (C_m) , m là tham số.

a) Tìm giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ (1) có hai điểm cực trị âm.

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 sao cho biểu thức

$$T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 7 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình lượng giác

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right]$$

2. Giải phương trình
$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)^2 = \frac{4(1 + \sqrt{1+4x})}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2} + 1}.$$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9y^3 + y = x\sqrt{3x-1} & (1) \\ \sqrt{9y^2 + 7} + \sqrt{3x+6} = 8 & (2) \end{cases}$$

2. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho phương trình $(2m+3)16^x - (4m-2)4^x + 3m-8 = 0$ (1), m là tham số thực.

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

b) Tính diện tích đáy $ABCD$ theo x của hình chóp $S.ABCD$.

c) Xác định x để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất. Tính giá trị thể tích lớn nhất đó.

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho $2x^2 + y^2 - 2xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 4x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 2018$.

-----**HẾT**-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + mx - 3$ (1) có đồ thị (C_m) , m là tham số.

a) Tìm giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ (1) có hai điểm cực trị âm.

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 sao cho biểu thức

$$T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 7 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Lời giải

a)

♦ Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$

♦ Để hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị âm thì phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3m > 0 \\ -2 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3.$$

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 + 3x^2 + mx - 3 = x - m \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - x(1 - m) - 3 + m = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 3 + m = 0 \end{cases} (*)$$

♦ Để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3 thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1 . Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} \Delta' = 1 + 3 - m = 4 - m > 0 \\ 1 - 2 - 3 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

♦ Khi đó: $x_1 = -1$; $x_2 + x_3 = -2$; $x_2 x_3 = -3 + m$.

$$T = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 7 = 1 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3 + 4(x_2 x_3)^2 - 7$$

$$= 1 + (-2)^2 - 2(m - 3) + 4(m - 3)^2 - 7 = 4m^2 - 26m + 40 = 4\left(m - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}.$$

♦ Vậy $T_{\min} = -\frac{9}{4}$ khi $m = \frac{13}{4}$ (thỏa mãn điều kiện của m).

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình lượng giác

$$\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right]$$

2. Giải phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^2 = \frac{4(1+\sqrt{1+4x})}{x+\sqrt{x^2+3x+2}+1}$.

Lời giải

1.

♦ ĐKXD: $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

♦ Phương trình: $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) \right]$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \sin 2x - 2\sin^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cos \frac{\frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4} - 3x}{2} \cdot \sin \frac{\frac{\pi}{4} - x - \frac{\pi}{4} + 3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x + \sin 2x) \cdot \sin^2 x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \sin^2 x = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \cdot \sin x (\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \\ \sin x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} - m\frac{\pi}{2} \\ x = n\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + p2\pi \end{cases} \quad (m, n, p \in \mathbb{Z}).$$

Đối chiếu với đkxd của phương trình ta có nghiệm của phương trình là:

$$x = -\frac{\pi}{8} - m\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + p2\pi \text{ với } m, p \in \mathbb{Z}.$$

2.

♦ Điều kiện: $x > 0$.

♦ Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{4(1+\sqrt{1+4x})}{x+\sqrt{x^2+3x+2}+1} \Leftrightarrow \frac{x+1+\sqrt{(x+1)(x+2)}}{(x+1)^2} = 4x+4x\sqrt{1+4x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = 4x+4x\sqrt{1+4x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\sqrt{1+\frac{1}{x+1}} = 4x+4x\sqrt{1+4x} \quad (*).$$

♦ Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{1+t}$ với $t > 0$, ta có

$$f'(t) = 1 + \sqrt{1+t} + \frac{t}{2\sqrt{1+t}} > 0, \forall t > 0$$

Suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$

♦ Từ (*) suy ra $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f(4x) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 4x \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Kết hợp với điều kiện, ta nhận $x = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$.

♦ Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{2}}{2} \right\}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9y^3 + y = x\sqrt{3x-1} & (1) \\ \sqrt{9y^2+7} + \sqrt{3x+6} = 8 & (2) \end{cases}$$

2. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn.

Lời giải

1.

♦ Điều kiện: $x \geq \frac{1}{3}$.

♦ Ta có: $(1) \Leftrightarrow 27y^3 + 3y = 3x\sqrt{3x-1} \Leftrightarrow (3y)^3 + 3y = (\sqrt{3x-1})^3 + \sqrt{3x-1}$.

♦ Xét hàm số: $f(x) = x^3 + x$, có $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow f(3y) = f(\sqrt{3x-1}) \Leftrightarrow 3y = \sqrt{3x-1}$.

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x+6} + \sqrt{3x+6} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{3x+6} = 4 \Leftrightarrow 3x+6 = 16 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$.

Với $x = \frac{10}{3} \Rightarrow y = 1$.

♦ Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{10}{3}; 1\right)$.

2.

♦ Số các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ là $5.5.4.3 = 300$.

♦ Số các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số $0, 1, 2, 3, 4, 5$ là $A_5^3 + 2.4.4.3 = 156$.

Vậy xác suất để số được chọn là số chẵn là $\frac{156}{300} = \frac{13}{25}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho phương trình $(2m+3)16^x - (4m-2)4^x + 3m-8 = 0$ (1), m là tham số thực.

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

a) Với $m = 3$, phương trình (1) trở thành

$$9.16^x - 10.4^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 1 \\ 4^x = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_4 \frac{1}{9} = -\log_2 3 \end{cases}$$

b)

♦ Đặt $t = 4^x$, phương trình (1) trở thành $(2m+3)t^2 - (4m-2)t + 3m-8 = 0$ (2).

♦ Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2$.

♦ Ta có $(2) \Leftrightarrow m(2t^2 - 4t + 3) + 3t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-3t^2 - 2t + 8}{2t^2 - 4t + 3}$.

- ♦ Xét hàm số $f(t) = \frac{-3t^2 - 2t + 8}{2t^2 - 4t + 3}$ với $t \in (0; +\infty)$.
- ♦ Ta có $f'(t) = \frac{16t^2 - 50t + 26}{(2t^2 - 4t + 3)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{25 \pm \sqrt{209}}{16}$. Bảng biến thiên

t	0	$\frac{25 - \sqrt{209}}{16}$	1	$\frac{25 + \sqrt{209}}{16}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\frac{8}{3}$	$\frac{3 + \sqrt{209}}{4}$	3	$\frac{3 - \sqrt{209}}{4}$	$-\frac{3}{2}$

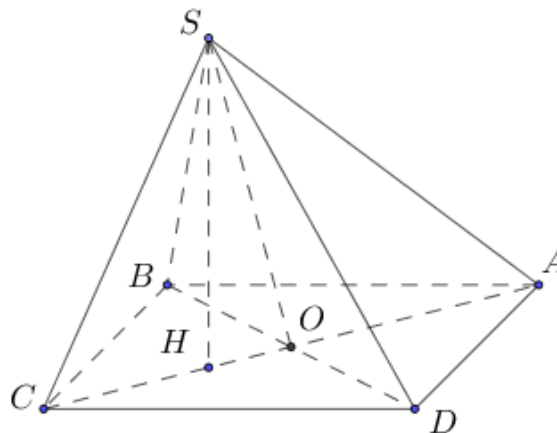
- ♦ Từ bảng biến thiên, suy ra $\frac{8}{3} < m < 3$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng 1. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy $ABCD$.

- Chứng minh rằng $SA \perp SC$.
- Tính diện tích đáy $ABCD$ theo x của hình chóp $S.ABCD$.
- Xác định x để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất. Tính giá trị thể tích lớn nhất đó.

Lời giải



- Chứng minh rằng $SA \perp SC$.
 - ♦ Gọi $O = AC \cap BD$.
 - ♦ Ta có $AB = AD = CB = CD = SB = SD = 1 \Rightarrow \triangle CBD = \triangle SBD = \triangle ABD$ (c.c.c.)
 - ♦ Mà O là trung điểm của $BD \Rightarrow OC = OS = OA$
 - $\Rightarrow \triangle SAC$ vuông tại S hay $SA \perp SC$ (đpcm).

b) Tính diện tích đáy $ABCD$ theo x của hình chóp $S.ABCD$.

♦ Tam giác SAC vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{x^2 + 1}$.

♦ Ta có $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD \Rightarrow OC \perp OD$

♦ Tam giác OCD vuông tại $O \Rightarrow OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2 + 1}{4}} = \frac{\sqrt{3 - x^2}}{2}$ (với

$$OC = \frac{1}{2}AC)$$

$$\Rightarrow BD = 2OD = \sqrt{3 - x^2}.$$

♦ Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2 + 1)(3 - x^2)}$ (với $0 < x < \sqrt{3}$).

c) Xác định x để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất. Tính giá trị thể tích lớn nhất đó.

♦ Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $BCD \Rightarrow H \in AC$.

♦ Vì $SB = SC = SD = 1 \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

♦ Tam giác SAC vuông tại $S \Rightarrow SH = \frac{SA \cdot SC}{AC} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{6}x\sqrt{3 - x^2} = \frac{1}{6}\sqrt{x^2(3 - x^2)} \leq \frac{1}{4}.$$

♦ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

♦ Vậy $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ thì thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho $2x^2 + y^2 - 2xy = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, y) = 4x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 2018$.

Lời giải

♦ Ta có :

$$2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \Leftrightarrow (2x^2 + y^2 - 2xy)^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^4 + y^4 + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 - 8x^3y - 4xy^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + y^4 + 8x^2y^2 - 4xy(2x^2 + y^2) = 1 \Leftrightarrow 4x^4 + y^4 + 8x^2y^2 - 4xy(1 + 2xy) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 + y^4 - 4xy = 1 \Leftrightarrow 4x^4 + y^4 = 1 + 4xy.$$

♦ Thay vào biểu thức $f(x, y) = 4x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 2018$ ta có:

$$f(x, y) = -2x^2y^2 + 4xy + 2019 = -2(xy - 1)^2 + 2021.$$

♦ Vậy $f(x, y) \leq 2021$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

♦ Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} xy = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

♦ Vậy giá trị lớn nhất của $f(x; y)$ bằng 2021 khi

$$(x; y) \in \left\{ (1; 1); (-1; -1); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2} \right) \right\}.$$

-----HẾT-----