

CHƯƠNG

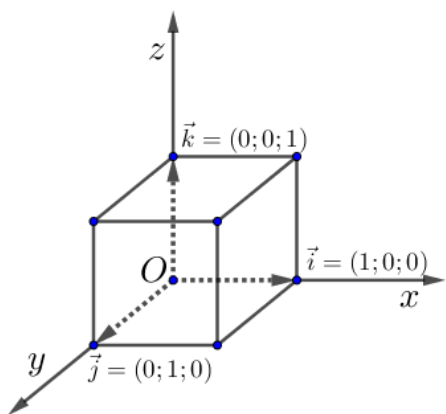


PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



LÝ THUYẾT.



1. Hệ trục tọa độ $Oxyz$:

- Hệ trục gồm ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox : **trục hoành**, có vector đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
- Trục Oy : **trục tung**, có vector đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
- Trục Oz : **trục cao**, có vector đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
- Điểm $O(0; 0; 0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$.

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

3. Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

QUY TẮC CHIỀU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ		Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ	
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$		▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$	
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$		▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$	
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$		▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$	
Đối xứng điểm qua trục tọa độ		Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ	
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$		▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy} M_1(x_M; y_M; -z_M)$	
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$		▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz} M_2(x_M; -y_M; z_M)$	
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$		▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz} M_3(-x_M; y_M; z_M)$	
4. Tích có hướng của hai vector:			
☛ Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$			
☛ Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$ \vec{a}, \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
▪ Điều kiện cùng phương của hai vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$.	▪ Điều kiện đồng phẳng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.		
▪ Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{\square ABCD} = [\vec{AB}, \vec{AD}] $.	▪ Diện tích tam giác ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{AB}, \vec{AC}] $.		
▪ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} $.	▪ Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} $.		

Chú ý:

– **Tích vô hướng** của hai vector thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– **Tích có hướng** của hai vector thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vector đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vector cùng phương.



HỆ THỐNG BÀI TẬP Ự LUẬN.

DẠNG 1: CÁC CÂU LIÊN QUAN TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

- Câu 1.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba vector: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.
Tìm toạ độ vector $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.
- Câu 2.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $D(-2; 3; -1)$.
a/ Tìm toạ độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
b/ Tìm toạ độ tâm I của hình bình hành $ABCD$.
- Câu 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 5)$, $B(3; 4; 4)$, $C(4; 6; 1)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) và cách đều các điểm A, B, C ?
- Câu 4.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $K(2; 4; 6)$, gọi K' là hình chiếu vuông góc của K trên trục Oz . Tìm toạ độ trung điểm của đoạn thẳng OK' ?
- Câu 5.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho $A(-2; 2; -1)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(x; 3; -1)$. Tìm các giá trị của x để tam giác ABC đều?
- Câu 6.** Trong không gian m , cho tam giác ABC có $A(-2; 0; -3)$, $B(-4; 1; -1)$, $C(-4; -4; 1)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC . Tìm toạ độ điểm D .
- Câu 7.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$
1/ Chứng minh: $\vec{AC'} + \vec{CA'} + 2\vec{C'C} = \vec{0}$
2/ Cho $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $C'(4; 5; -5)$, $D(1; -1; 1)$. Tính toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Câu 8.** Trong không gian m , cho tam giác đều ABC có $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.
1/ Tìm toạ độ điểm C .
2/ Tìm toạ độ điểm D biết $ABCD$ là tứ diện đều.

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

- Câu 1.** Trong không gian m cho tam giác ABC có $A(2; -1; 3)$, $B(3; 0; -2)$, $C(5; -1; -6)$. Tính $\cos \widehat{BAC}$
- Câu 2.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 2; 3)$, B đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) , C đối xứng với B qua gốc toạ độ O . Tính diện tích tam giác ABC ?
- Câu 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .
- Câu 4.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hai vecto $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$; $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$
a) Tính $|\vec{a} - 2\vec{b}|$. b) Tính góc giữa hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

- Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-2;2;-1)$, $B(-2;3;0)$, $C(x;3;-1)$. Tìm các giá trị của x để tam giác ABC đều?
- Câu 6.** Trong không gian m , cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ ($a, b > 0$). Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Tính thể tích của khối tứ diện $BDA'M$.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

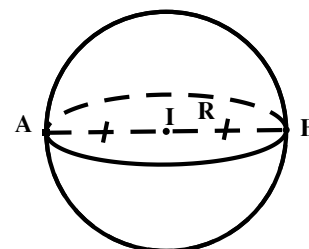


LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I cố định và một số thực dương R . Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I , bán kính R .

Kí hiệu: $S(I; R) \Rightarrow S(I; R) = \{M / IM = R\}$



II. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1 : Phương trình chính tắc

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R > 0$.

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2 : Phương trình tổng quát

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Điều kiện để phương trình (2) là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- (S) có tâm $I(a; b; c)$.
- (S) có bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

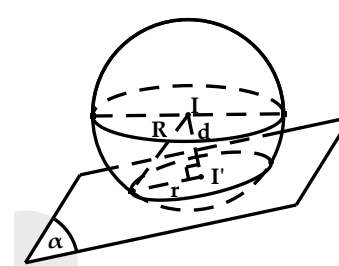
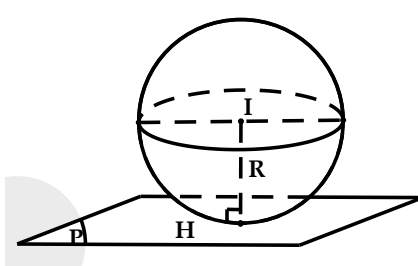
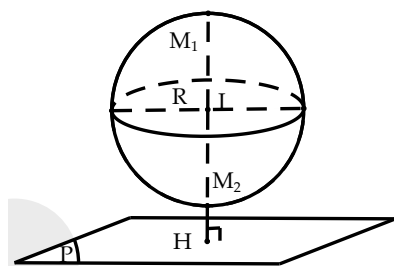
III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó :

+ Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.

+ Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó: (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.

+ Nếu $d < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

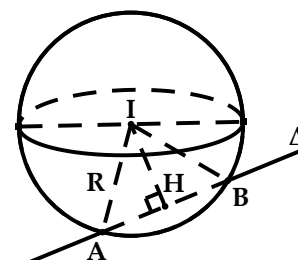
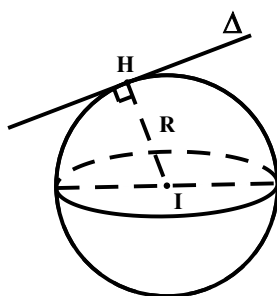
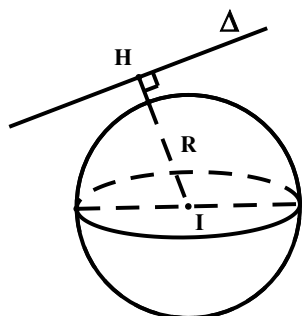


Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng kính và thiết diện lúc đó được gọi là đường tròn lớn.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ . Khi đó :

- + $IH > R$: Δ không cắt mặt cầu.
- + $IH = R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là tiếp tuyến của (S) và H là tiếp điểm.
- + $IH < R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.



* **Lưu ý:** Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

+ Xác định: $d(I; \Delta) = IH$.

+ Lúc đó: $R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

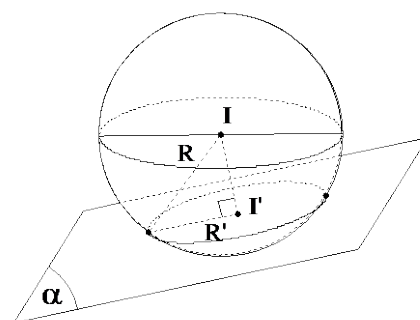
V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ tâm $I(a; b; c)$ bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

- Nếu $d(I, (P)) > R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- Nếu $d(I, (P)) = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau. Khi đó (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S) và điểm chung gọi là tiếp điểm
- Nếu $d(I, (P)) < R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn

có phương trình:
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Trong đó bán kính đường tròn $r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2}$ và tâm H của đường tròn là hình chiếu của tâm I mặt cầu (S) lên mặt phẳng (P) .



II HỆ THỐNG BÀI TẬP Ự LUẬN.

I. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU

Kiến thức vận dụng

- ⊛ Phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R
- ⊛ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu, nếu là phương trình mặt cầu hãy tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó.

- a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$.
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$.
- c) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y + 21 = 0$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm m để mỗi phương trình sau là phương trình mặt cầu.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m+1)y - 4z + 1 = 0$.
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 4mz + 8 = 0$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 - 1 = 0$ là phương trình của mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

II. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương pháp

Thuật toán 1:

Bước 1: Xác định tâm $I(a; b; c)$.

Bước 2: Xác định bán kính R của (S) .

Bước 3: Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Thuật toán 2:

Gọi phương trình (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Phương trình (S) hoàn toàn xác định nếu biết được a, b, c, d . ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau:

- a) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7), B(2; 1; 3)$.
- b) Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$.

c) Có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$.

d) Có tâm $A(2; 4; -5)$ và tiếp xúc với trục Oz .

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(-1; 0; 1)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm nằm trên $mp(Oxz)$.

Câu 3: Viết phương trình mặt cầu (S) biết :

a) (S) qua bốn điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$, $D(1; 0; 4)$.

b) (S) qua $A(0; 8; 0)$, $B(4; 6; 2)$, $C(0; 12; 4)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) .

Câu 4: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 3 = 0$ và $(\beta): x + 2y + 2z + 7 = 0$.

Câu 5: Lập phương trình mặt cầu (S) qua 2 điểm $A(2; 6; 0)$, $B(4; 0; 8)$ và có tâm thuộc d :

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{1}.$$

Câu 6: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$ tại hai điểm A, B với $AB = 16$.

Câu 7: Cho hai mặt phẳng $(P): 5x - 4y + z - 6 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 7 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của (P) và Δ sao cho (Q) cắt (S) theo một hình tròn có diện tích là 20π .

Câu 8: Cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc d và I cách (P) một khoảng bằng 2 và (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.

Câu 9: Cho điểm $I(1; 0; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB vuông tại I .

Câu 10: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Chú ý: Kỹ năng xác định tâm và bán kính của đường tròn trong không gian.

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R . Mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) .

Bước 1: Lập phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Bước 2: Tâm I' của đường tròn (C) là giao điểm của d và mặt phẳng (P) .

Bước 3: Gọi r là bán kính của (C) : $r = \sqrt{R^2 - [d(I; (P))]^2}$

Câu 11: Chứng minh rằng: Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ cắt mặt phẳng (P): $x - 2 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C).

II. SỰ TƯƠNG GIAO VÀ SỰ TIẾP XÚC

Phương pháp

Các điều kiện tiếp xúc:

+ Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (S) $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$.

+ Mặt phẳng (α) là tiếp diện của (S) $\Leftrightarrow d(I; (\alpha)) = R$.

* Lưu ý các dạng toán liên quan như tìm tiếp điểm, tương giao.

Câu 1: Cho đường thẳng (Δ): $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Tìm số điểm chung của (Δ) và (S) ?

Câu 2: Cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy

Câu 3: Cho điểm $I(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, tiếp xúc với d

Câu 4: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-11}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+25}{-2}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 16$

Câu 5: Cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $I(4; 1; 6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm I, tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Viết phương trình của mặt cầu (S)

Câu 6: Cho điểm $I(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều

CHƯƠNG

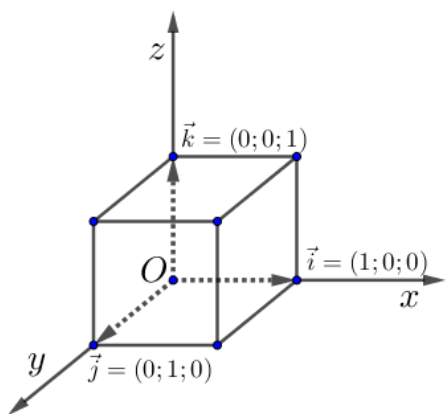


PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



LÝ THUYẾT.



1. Hệ trục tọa độ $Oxyz$:

- Hệ trục gồm ba trục Ox , Oy , Oz đôi một vuông góc nhau.
- Trục Ox : **trục hoành**, có vector đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
- Trục Oy : **trục tung**, có vector đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
- Trục Oz : **trục cao**, có vector đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$.
- Điểm $O(0; 0; 0)$ là **gốc tọa độ**.

2. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$.

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$$

$$k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

3. Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC :

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

QUY TẮC CHIỀU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ		Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ	
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x)]{\text{Chiếu vào } Ox} M_1(x_M; 0; 0)$		▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y)]{\text{Chiếu vào } Oxy} M_1(x_M; y_M; 0)$	
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y)]{\text{Chiếu vào } Oy} M_2(0; y_M; 0)$		▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z)]{\text{Chiếu vào } Oyz} M_2(0; y_M; z_M)$	
▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z)]{\text{Chiếu vào } Oz} M_3(0; 0; z_M)$		▪ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z)]{\text{Chiếu vào } Oxz} M_3(x_M; 0; z_M)$	
Đối xứng điểm qua trục tọa độ		Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ	
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x; \text{ đổi dấu } y, z)]{\text{Đối xứng qua } Ox} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$		▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, y; \text{ đổi dấu } z)]{\text{Đối xứng qua } Oxy} M_1(x_M; y_M; -z_M)$	
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y; \text{ đổi dấu } x, z)]{\text{Đối xứng qua } Oy} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$		▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } x, z; \text{ đổi dấu } y)]{\text{Đối xứng qua } Oxz} M_2(x_M; -y_M; z_M)$	
▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } z; \text{ đổi dấu } x, y)]{\text{Đối xứng qua } Oz} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$		▪ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giữ nguyên } y, z; \text{ đổi dấu } x)]{\text{Đối xứng qua } Oyz} M_3(-x_M; y_M; z_M)$	
4. Tích có hướng của hai vector:			
☛ Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$			
☛ Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$ \vec{a}, \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
▪ Điều kiện cùng phương của hai vector $\vec{a}$ & $\vec{b}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$.	▪ Điều kiện đồng phẳng của ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.		
▪ Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{\square ABCD} = [\vec{AB}, \vec{AD}] $.	▪ Diện tích tam giác ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{AB}, \vec{AC}] $.		
▪ Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} $.	▪ Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} $.		

Chú ý:

– **Tích vô hướng** của hai vector thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.

– **Tích có hướng** của hai vector thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vector đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vector cùng phương.



HỆ THỐNG BÀI TẬP Ự LUẬN.

DẠNG 1: CÁC CÂU LIÊN QUAN TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba vector: $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.
Tìm toạ độ vector $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} = (2; -5; 3)$

$$4\vec{b} = (0; 8; -4)$$

$$2\vec{c} = (2; 14; 4)$$

Suy ra: $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$

$$= (2; -5; 3) - (0; 8; -4) - (2; 14; 4)$$

$$= (2 - 0 - 2; -5 - 8 - 14; 3 + 4 - 4)$$

$$= (0; -27; 3). \text{ Vậy } \vec{d} = (0; -27; 3).$$

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $D(-2; 3; -1)$.

1/ Tìm toạ độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

2/ Tìm toạ độ tâm I của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

$$1/ \text{ Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_C - x_B + x_A = -3 \\ y_D = y_C - y_B + y_A = 6 \\ z_D = z_C - z_B + z_A = 3 \end{cases} \Rightarrow D(-3; 6; 3)$$

2/ Điểm I là tâm hình bình hành $ABCD$

$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_C}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_C}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 5)$, $B(3; 4; 4)$, $C(4; 6; 1)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) và cách đều các điểm A, B, C ?

Lời giải

Gọi $M(x; y; 0) \in (Oxy)$, $(x, y \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 \neq 0)$ là điểm cần tìm.

Vì M cách đều A, B, C nên ta có: $MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ AM^2 = CM^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + (0-5)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (0-4)^2 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (0-5)^2 = (x-4)^2 + (y-6)^2 + (0-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+10y-14=0 \\ 2x+4y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5y=7 \\ x+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ y=-5 \end{cases}$$

Vậy $M(16; -5; 0)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $K(2; 4; 6)$, gọi K' là hình chiếu vuông góc của K trên trục Oz . Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng OK' ?

Lời giải

Vì K' là hình chiếu vuông góc của $K(2; 4; 6)$ lên trục Oz nên $K'(0; 0; 6)$.

Gọi $I(x_1; y_1; z_1)$ là trung điểm OK' . Suy ra $I(0; 0; 3)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-2; 2; -1)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(x; 3; -1)$. Tìm các giá trị của x để tam giác ABC đều?

Lời giải

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Ta có: $M\left(-2; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $AB = \sqrt{2}$, $CM = \sqrt{(x+2)^2 + \frac{1}{2}}$

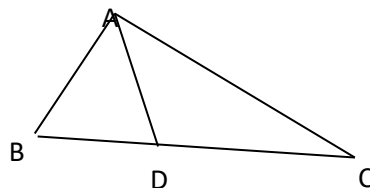
Tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$CM = AB \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 6. Trong không gian m , cho tam giác ABC có $A(-2; 0; -3)$, $B(-4; 1; -1)$, $C(-4; -4; 1)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm D.

Lời giải



Theo tính chất phân giác trong, ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{DC} \quad (1)$$

Mà: $AB = 3; AC = 6$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - x_D = -2(x_B - x_D) \\ y_C - y_D = -2(y_B - y_D) \\ z_C - z_D = -2(z_B - z_D) \end{cases} \Rightarrow D\left(-4; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$

1/ Chứng minh: $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$

2/ Cho $A(1;0;1), B(2;1;2), C'(4;5;-5), D(1;-1;1)$. Tính tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Lời giải

1/ Ta có: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A}$ và $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{CA}$

Suy ra: $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + 2\overrightarrow{C'C} = 2\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$ (đpcm)

2/ Sử dụng công thức hai vecto bằng nhau ta được:

$C(2;0;2), B'(4;6;-5), A'(3;5;-6), D'(3;4;-6)$

Câu 8. Trong không gian m , cho tam giác đều ABC có $A(5;3;-1), B(2;3;-4)$ và điểm C nằm trong mặt phẳng (Oxy) có tung độ nhỏ hơn 3.

1/ Tìm tọa độ điểm C .

2/ Tìm tọa độ điểm D biết $ABCD$ là tứ diện đều.

Lời giải

1/ Vì $C \in (Oxy)$ nên $C(x; y; 0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; 0; -3), \overrightarrow{AC} = (x-5; y-3; 1), \overrightarrow{BC} = (x-2; y-3; 4)$

Tam giác ABC đều nên $\begin{cases} AB = AC \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ AC^2 = BC^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1 = 18 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + 1 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1; 2; 0)$.

2/ Gọi $D(x; y; z)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AD} = (x-5; y-3; z+1); \overrightarrow{BD} = (x-2; y-3; z+4); \overrightarrow{CD} = (x-1; y-2; z)$.

Vì tam giác ABC đều nên tứ diện $ABCD$ đều khi và chỉ khi $AD = BD = CD = AB = 3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 - x \\ y = 16 - 5x \\ 3x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy: $D(2; 6; -1) \vee D\left(\frac{10}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}\right)$.

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ CÁC ỨNG DỤNG CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1. Trong không gian m cho tam giác ABC có $A(2; -1; 3), B(3; 0; -2), C(5; -1; -6)$. Tính $\cos \widehat{BAC}$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -5); \overrightarrow{AC} = (3; 0; -9)$

Suy ra: $\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{16}{3\sqrt{30}}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 2; 3)$, B đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) , C đối xứng với B qua gốc tọa độ O . Tính diện tích tam giác ABC ?

Lời giải

Theo đề bài: B đối xứng với A qua mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow B(1; 2; -3)$

C đối xứng với B qua gốc tọa độ $O \Rightarrow C(-1; -2; 3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (0; 0; -6); \overrightarrow{AC} = (-2; -4; 0) \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right| = 6\sqrt{5}.$$

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

Lời giải

Vì điểm M thuộc cạnh BC nên $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$, suy ra tọa độ điểm M là

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_C - (-2)x_B}{1 - (-2)} = -1 \\ y_M = \frac{y_C - (-2)y_B}{1 - (-2)} = 4 \\ z_M = \frac{z_C - (-2)z_B}{1 - (-2)} = 2 \end{cases}$$

Vậy độ dài AM bằng:

$$\sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 + (z_M - z_A)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{29}.$$

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ; |\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 3$

- 1) Tính $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.
- 2) Tính góc giữa hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Lời giải

- 1) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) = -3$
 $\Rightarrow (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 52 \Rightarrow |\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13}$.
- 2) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{x} = \vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ và $|\vec{x}| = \sqrt{(3\vec{a} + 2\vec{b})^2} = 6$.
 $\Rightarrow \cos(\vec{a}; \vec{x}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{x}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{x}) = 60^\circ$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-2; 2; -1)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(x; 3; -1)$. Tìm các giá trị của x để tam giác ABC đều?

Lời giải

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ta có: $M\left(-2; \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $AB = \sqrt{2}$, $CM = \sqrt{(x+2)^2 + \frac{1}{2}}$.

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$CM = AB \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow (x+2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy: $\begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 6. Trong không gian m , cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ ($a, b > 0$). Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Tính thể tích của khối tứ diện $BDA'M$.

Lời giải

Ta có: $C(a; a; 0)$, $C'(a; a; b) \Rightarrow M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{BD} = (-a; a; 0) \\ \overrightarrow{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right); \quad \overrightarrow{BA'} = (-a; 0; b)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'} = -\frac{3a^2b}{2}$$

Vậy thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ là: $V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BM}] \cdot \overrightarrow{BA'}| = \frac{a^2b}{4}$.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

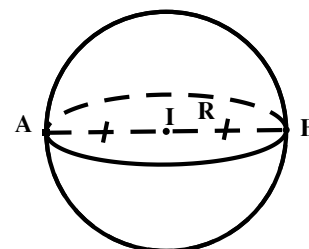


LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I cố định và một số thực dương R . Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I , bán kính R .

Kí hiệu: $S(I; R) \Rightarrow S(I; R) = \{M / IM = R\}$



II. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1 : Phương trình chính tắc

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R > 0$.

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2 : Phương trình tổng quát

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Điều kiện để phương trình (2) là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- (S) có tâm $I(a; b; c)$.
- (S) có bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

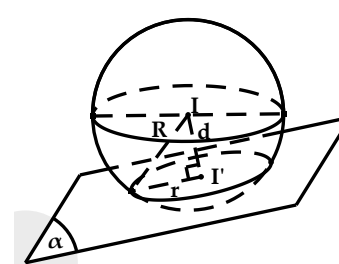
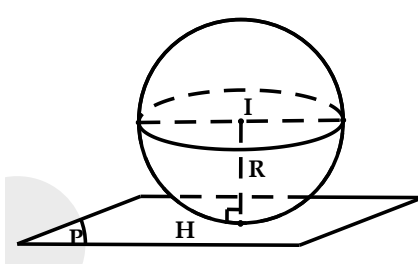
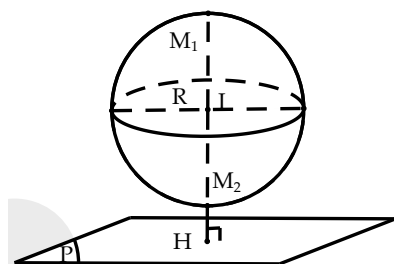
III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó :

+ Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.

+ Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó: (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.

+ Nếu $d < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

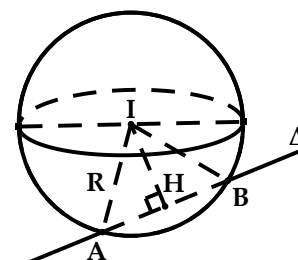
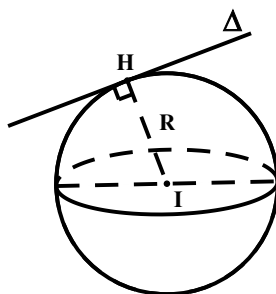
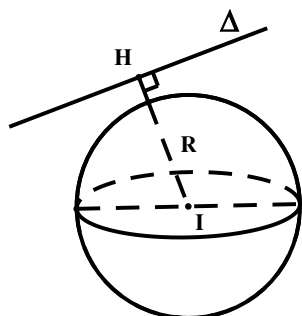


Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng kính và thiết diện lúc đó được gọi là đường tròn lớn.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ . Khi đó :

- + $IH > R$: Δ không cắt mặt cầu.
- + $IH = R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là tiếp tuyến của (S) và H là tiếp điểm.
- + $IH < R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.



* **Lưu ý:** Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

+ Xác định: $d(I; \Delta) = IH$.

+ Lúc đó: $R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

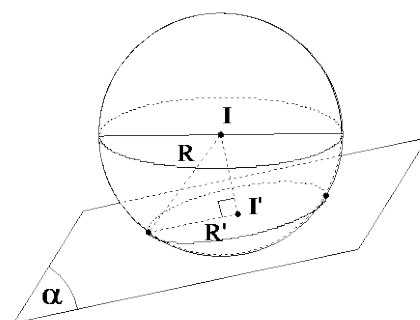
V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ tâm $I(a; b; c)$ bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

- Nếu $d(I, (P)) > R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- Nếu $d(I, (P)) = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau. Khi đó (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S) và điểm chung gọi là tiếp điểm
- Nếu $d(I, (P)) < R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn

có phương trình :
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Trong đó bán kính đường tròn $r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2}$ và tâm H của đường tròn là hình chiếu của tâm I mặt cầu (S) lên mặt phẳng (P) .





HỆ THỐNG BÀI TẬP Ự LUẬN.

I. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU

Kiến thức vận dụng

- ☛ Phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R
- ☛ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu, nếu là phương trình mặt cầu hãy tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó.

- a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$.
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$.
- c) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y + 21 = 0$.

Lời giải:

a) Phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên là phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-3;0)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a=1, b=-2, c=3, d=1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 13 > 0$.

Vậy phương trình cho là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$.

c) Phương trình $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 7 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=0, d=7 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = -\frac{23}{4} < 0$.

Vậy phương trình cho không phải là phương trình mặt cầu.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm m để mỗi phương trình sau là phương trình mặt cầu.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m+1)y - 4z + 1 = 0$.
- b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 4mz + 8 = 0$.

Lời giải:

a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m+1)y - 4z + 1 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a=m, b=-(m+1), c=2, d=1$.

ĐK: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 + 2^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 4mz + 8 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a=m-3, b=0, c=2m, d=8$.

$$\text{ĐK: } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 + (2m)^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m > 1 \end{cases}$$

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 - 1 = 0$ là phương trình của mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải:

Chọn **D**.

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 - 1 = 0$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a = -(m+2), b = 0, c = m-3, d = m^2 - 1.$$

$$\text{ĐK để pt cho là pt mặt cầu: } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Rightarrow (m+2)^2 + (m-3)^2 - (m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 14 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Khi đó bán kính mặt cầu là } R = \sqrt{m^2 - 2m + 14} = \sqrt{(m-1)^2 + 13} \geq \sqrt{13}$$

$$\text{Do đó } \min R = \sqrt{13} \text{ khi } m = 1.$$

II. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Phương pháp

Thuật toán 1:

Bước 1: Xác định tâm $I(a; b; c)$.

Bước 2: Xác định bán kính R của (S) .

Bước 3: Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Thuật toán 2:

Gọi phương trình (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Phương trình (S) hoàn toàn xác định nếu biết được a, b, c, d . ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau:

a) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7), B(2; 1; 3)$.

b) Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$.

c) Có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1; 1; 1), B(2; -1; -3), C(-1; 0; 2)$.

d) Có tâm $A(2; 4; -5)$ và tiếp xúc với trục Oz .

Lời giải:

a) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7), B(2; 1; 3)$.

☑ Tâm I của mặt cầu là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; -1; 5)$.

☑ Bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{(2-4)^2 + (1+3)^2 + (3-7)^2} = 3$.

☑ Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

b) Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$.

☑ Tâm của mặt cầu là $C(3; -3; 1)$.

☑ Bán kính mặt cầu là $R = CA = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5}$.

☑ Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

c) Có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$.

☑ Gọi phương trình mặt cầu dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

☑ Mặt cầu có tâm $I(a; b; c) \in mp(Oxy) \Rightarrow c = 0$ (1).

☑ Mặt cầu qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$, suy ra:

$$\begin{cases} 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \\ 14 - 4a + 2b + 6c + d = 0 \\ 5 + 2a - 4c + d = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $a = \frac{7}{10}$, $b = -\frac{12}{5}$, $c = 0$, $d = -\frac{32}{5}$.

☑ Vậy PTMC là: $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{5}x + \frac{24}{5}z - \frac{32}{5} = 0$.

d) Có tâm $A(2; 4; -5)$ và tiếp xúc với trục Oz .

☑ Tâm mặt cầu là $A(2; 4; -5)$.

☑ Gọi H là hình chiếu của A lên trục $Oz \Rightarrow H(0; 0; -5)$

Bán kính mặt cầu là $R = AH = \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2 + (-5+5)^2} = \sqrt{20}$

☑ Vậy PTMC là: $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 20$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(-1; 0; 1)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm nằm trên $mp(Oxz)$.

Lời giải:

☑ Gọi phương trình mặt cầu dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

☑ Mặt cầu có tâm $I(a; b; c) \in mp(Oxz) \Rightarrow b = 0$ (1).

☑ Mặt cầu qua 3 điểm $A(1; 1; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(-1; 0; 1)$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 6 - 2a - 2b - 4c + d = 0 \\ 3 - 2a - 2b + 2c + d = 0 \quad (2) \\ 2 + 2a - 2c + d = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta tìm được: } a = \frac{3}{4}, b = 0, c = \frac{1}{2}, d = -\frac{5}{2}.$$

$$\square \text{ Vậy PTMC là: } x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x - z - \frac{5}{2} = 0.$$

Câu 3: Viết phương trình mặt cầu (S) biết :

a) (S) qua bốn điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$.

b) (S) qua $A(0;8;0)$, $B(4;6;2)$, $C(0;12;4)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz).

Lời giải:

a) **Cách 1:** Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 7z = -2 \\ y - 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } I(-2;1;0) \text{ và } R = IA = \sqrt{26}. \text{ Vậy (S): } (x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26.$$

Cách 2: Gọi phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$,
 $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

$$\text{Do } A(1;2;-4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 4b + 8c + d = -21 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } B(1;-3;1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11 \quad (2)$$

$$C(2;2;3) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 6c + d = -17 \quad (3)$$

$$D(1;0;4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 8c + d = -17 \quad (4)$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có a, b, c, d , suy ra phương trình mặt cầu (S):

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26.$$

b) Do tâm I của mặt cầu nằm trên mặt phẳng (Oyz) $\Rightarrow I(0;b;c)$.

$$\text{Ta có: } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I(0;7;5) \text{ và } R = \sqrt{26}. \text{ Vậy (S): } x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26.$$

Câu 4: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 3 = 0$ và $(\beta): x + 2y + 2z + 7 = 0$.

Lời giải:

Gọi $I(t; -1; -t) \in \Delta$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết: $d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta)) \Leftrightarrow \frac{|1-t|}{3} = \frac{|5-t|}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t = 5-t \\ 1-t = t-5 \end{cases} \Rightarrow t = 3$.

Suy ra: $I(3; -1; -3)$ và $R = d(I, (\alpha)) = \frac{2}{3}$. Vậy (S): $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

Câu 5: Lập phương trình mặt cầu (S) qua 2 điểm $A(2; 6; 0)$, $B(4; 0; 8)$ và có tâm thuộc d:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{1}.$$

Lời giải:

Ta có $d: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -5+t \end{cases}$. Gọi $I(1-t; 2t; -5+t) \in d$ là tâm của mặt cầu (S) cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (1+t; 6-2t; 5-t)$, $\overrightarrow{IB} = (3+t; -2t; 13-t)$.

Theo giả thiết, do (S) đi qua A, B $\Leftrightarrow IA = IB$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+t)^2 + (6-2t)^2 + (5-t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + 4t^2 + (13-t)^2}$$

$$\Leftrightarrow 62 - 32t = 178 - 20t \Leftrightarrow 12t = -116 \Leftrightarrow t = -\frac{29}{3}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{32}{3}; -\frac{58}{3}; -\frac{44}{3}\right) \text{ và } R = IA = 2\sqrt{233}.$$

$$\text{Vậy (S): } \left(x - \frac{32}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{58}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{44}{3}\right)^2 = 932.$$

Câu 6: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$ tại hai điểm A, B với $AB = 16$.

Lời giải:

Chọn $M(-1; 1; 0) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (-3; -2; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; -4; 1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_\Delta \right] = (2; 4; 14) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_\Delta \right] \right|}{\left| \vec{u}_\Delta \right|} = 2\sqrt{3}.$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) . Theo giả thiết: $R = \sqrt{\left[d(I, \Delta) \right]^2 + \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{19}.$

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 76.$

Câu 7: Cho hai mặt phẳng $(P): 5x - 4y + z - 6 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 7 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của (P) và Δ sao cho (Q) cắt (S) theo một hình tròn có diện tích là 20π .

Lời giải:

Ta có $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 7t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 1 - 2t & (3) \\ 5x - 4y + z - 6 = 0 & (4) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $5(1+7t) - 4(3t) + (1-2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 0; 1).$

Ta có: $d(I, (Q)) = \frac{5\sqrt{6}}{3}.$

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và mặt phẳng (Q) . Ta có:

$20\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r = 2\sqrt{5}.$

R là bán kính mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết: $R = \sqrt{\left[d(I, (Q)) \right]^2 + r^2} = \frac{\sqrt{330}}{3}$. Vậy $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{110}{3}.$

Câu 8: Cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc d và I cách (P) một khoảng bằng 2 và (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.

Lời giải:

Gọi $I(-t; 2t-1; t+2) \in d$: là tâm của mặt cầu (S) và R là bán kính của (S) .

Theo giả thiết: $R = \sqrt{\left[d(I, (P)) \right]^2 + r^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$

Mặt khác: $d(I, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-2t - 2t + 1 - 2t - 4 - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \Leftrightarrow |6t+5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ t = -\frac{11}{6} \end{cases}$

* Với $t = \frac{1}{6}$: Tâm $I_1\left(-\frac{1}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right)$, suy ra $(S_1): \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{6}\right)^2 = 13$.

* Với $t = -\frac{11}{6}$: Tâm $I_2\left(\frac{11}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$, suy ra $(S_2): \left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = 13$.

Câu 9: Cho điểm $I(1;0;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB vuông tại I .

Lời giải:

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;2)$ và $P(1;-1;1) \in d$.

Ta có: $\vec{IP} = (0;-1;-2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{IP}] = (0;-4;-2)$. Suy ra: $d(I; d) = \frac{|\vec{u}, \vec{IP}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

Gọi R là bán kính của (S) . Theo giả thiết, ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{2}{R^2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}IH = \sqrt{2}d(I, d) = \frac{\sqrt{40}}{3}$$

Vậy $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{40}{9}$.

Câu 10: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB) , biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Lời giải:

(S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$. Nhận xét: điểm O và A cùng thuộc (S) .

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R' = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Khoảng cách: $d(I; (P)) = \sqrt{R^2 - (R')^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Mặt phẳng (P) đi qua O có phương trình dạng: $ax + by + cz = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) (*)

Do (P) đi qua A , suy ra: $4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

Lúc đó: $d(I; (P)) = \frac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} \Rightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ c = -1 \end{cases}$. Theo (*), suy ra $(P): x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$.

Chú ý: Kỹ năng xác định tâm và bán kính của đường tròn trong không gian.

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R . Mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) .

Bước 1: Lập phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Bước 2: Tâm I' của đường tròn (C) là giao điểm của d và mặt phẳng (P) .

Bước 3: Gọi r là bán kính của (C) :

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I; (P))]^2}$$

Câu 11: Chứng minh rằng: Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ cắt mặt phẳng $(P): x - 2 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Xác định tâm và bán kính của (C) .

Lời giải:

* Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có : $d(I, (P)) = 1 < 2 = R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là 1 đường tròn.
(đ.p.c.m)

* Đường thẳng d qua $I(1; 0; 0)$ và vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_p = (1; 0; 0)$ làm 1 vectơ chỉ

phương, có phương trình $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

+ Tọa độ tâm I' đường tròn là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(2; 0; 0)$.

+ Ta có: $d(I, (P)) = 1$. Gọi r là bán kính của (C) , ta có : $r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{3}$.

II. SỰ TƯƠNG GIAO VÀ SỰ TIẾP XÚC

Phương pháp

Các điều kiện tiếp xúc:

+ Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của $(S) \Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$.

+ Mặt phẳng (α) là tiếp diện của $(S) \Leftrightarrow d(I; (\alpha)) = R$.

* Lưu ý các dạng toán liên quan như tìm tiếp điểm, tương giao.

Câu 1: Cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Tìm số điểm chung của (Δ) và (S) ?

Lời giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(0; 1; 2)$ và có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $\vec{MI} = (1; -1; -4)$ và $[\vec{u}, \vec{MI}] = (-5; 7; -3) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{\|[\vec{u}, \vec{MI}]\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{498}}{6}$

Vì $d(I, \Delta) > R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S) .

Câu 2: Cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy

Lời giải:

Gọi M là hình chiếu của $I(1; -2; 3)$ lên Oy, ta có : $M(0; -2; 0)$.

$\vec{IM} = (-1; 0; -3) \Rightarrow R = d(I, Oy) = IM = \sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 3: Cho điểm $I(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, tiếp xúc với d

Lời giải:

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1; 2; -3)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; 1; -1)$

$\Rightarrow d(A, d) = \frac{\|[\vec{u}, \vec{AM}]\|}{\|\vec{u}\|} = 5\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.

Câu 4: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-11}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+25}{-2}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 16$

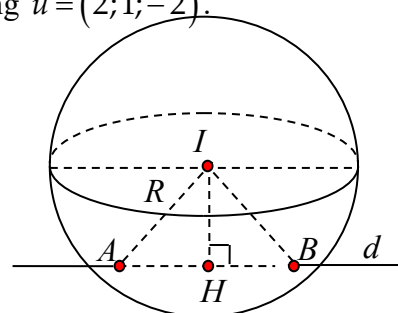
Lời giải:

Đường thẳng (d) đi qua $M(11; 0; -25)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có:

$$IH = d(I, AB) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \overrightarrow{MI} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = 15 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2} = 17.$$

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289.$



Câu 5: Cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $I(4; 1; 6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm I , tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Viết phương trình của mặt cầu (S)

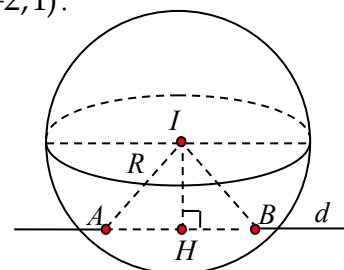
Lời giải:

Đường thẳng d đi qua $M(-5; 7; 0)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có :

$$IH = d(I, AB) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \overrightarrow{MI} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2} \right)^2} = 18$$

Vậy $(S): (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18.$



Câu 6: Cho điểm $I(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều

Lời giải:

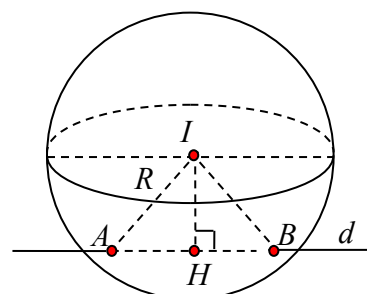
Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1; 1; -2)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (0; -1; 2)$ và $\left[\vec{u}, \overrightarrow{MI} \right] = (5; -2; -1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có :

$$IH = d(I, AB) = \frac{\left| \left[\vec{u}, \overrightarrow{MI} \right] \right|}{\left| \vec{u} \right|} = \sqrt{5}.$$

Xét tam giác IAB , có $IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$



Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

- Câu 1:** (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là
A. $(0;2;-3)$. **B.** $(1;0;-3)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(1;0;0)$.
- Câu 2:** (MĐ 102-2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là
A. $(1;0;-3)$. **B.** $(1;0;0)$. **C.** $(1;2;0)$. **D.** $(0;2;-3)$.
- Câu 3:** (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1;-4;0)$ và $\vec{v} = (-1;-2;1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là
A. $(-2;-6;3)$. **B.** $(-4;-8;4)$. **C.** $(-2;-10;-3)$. **D.** $(-2;-10;3)$.
- Câu 4:** (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1;-4;0)$ và $\vec{v} = (-1;-2;1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là
A. $(-2;-10;3)$. **B.** $(-2;-6;3)$. **C.** $(-4;-8;4)$. **D.** $(-2;-10;-3)$.
- Câu 5:** (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng
A. $\sqrt{6}$. **B.** 12. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 3.
- Câu 6:** (MĐ 102-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng
A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 12.
- Câu 7:** (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
A. $(-4;2;-6)$. **B.** $(4;-2;6)$. **C.** $(2;-1;3)$. **D.** $(-2;1;-3)$.
- Câu 8:** (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
A. $(-2;1;-3)$. **B.** $(-4;2;-6)$. **C.** $(4;-2;6)$. **D.** $(2;-1;3)$.

- Câu 9: (MĐ 103-2022)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$ là
- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.
 C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.
- Câu 10: (MĐ 104-2022)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 3 = 0$ là:
- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$. B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.
 C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.
- Câu 11: (MĐ 101-2022)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ có bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng
- A. 39. B. $12\sqrt{3}$. C. 18. D. $28\sqrt{3}$.
- Câu 12: (MĐ 102-2022)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4;2;1)$ bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng.
- A. $6\sqrt{2}$. B. 14. C. 8. D. $9\sqrt{2}$.
- Câu 13: (MĐ 103-2022)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN với mặt cầu (S) , giá trị của $AM \cdot AN$ bằng?
- A. $12\sqrt{3}$. B. 18. C. $28\sqrt{3}$. D. 39.
- Câu 14: (MĐ 104-2022)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;4;2)$ bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng
- A. $9\sqrt{2}$. B. 14. C. $6\sqrt{2}$. D. 8.
- Câu 15: (TK2020-2021)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là
- A. $(4;2;2)$. B. $(2;1;1)$. C. $(2;0;-2)$. D. $(1;0;-1)$.

- Câu 16: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Toạ độ của vector $\overrightarrow{OA}$ là
A. $(-2;3;5)$. **B.** $(2;-3;5)$. **C.** $(-2;-3;5)$. **D.** $(2;-3;-5)$.
- Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;3)$. Toạ độ vector $\overrightarrow{OA}$ là
A. $(-4;1;3)$. **B.** $(4;-1;3)$. **C.** $(-4;1;-3)$. **D.** $(4;1;3)$.
- Câu 18: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là
A. $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$. **B.** $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.
C. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. **D.** $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.
- Câu 19: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-4)$. Toạ độ của $\overrightarrow{OA}$ là
A. $(3;-2;-4)$. **B.** $(-3;-2;4)$. **C.** $(3;2;-4)$. **D.** $(3;2;4)$.
- Câu 20: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;4)$. Toạ độ của vector $\overrightarrow{OA}$ là
A. $(-2;1;4)$. **B.** $(2;-1;4)$. **C.** $(2;1;4)$. **D.** $(-2;1;-4)$.
- Câu 21: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai vector $\vec{u}(-1;2;0)$ và $\vec{v}(1;-2;3)$. Toạ độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là
A. $(0;0;-3)$. **B.** $(0;0;3)$. **C.** $(-2;4;-3)$. **D.** $(2;-4;3)$.
- Câu 22: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}(-1;2;0)$ và $\vec{v}(1;-2;3)$. Toạ độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là
A. $(-2;4;-3)$. **B.** $(2;-4;3)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(0;0;-3)$.
- Câu 23: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai vector $\vec{u}(-1;2;-5)$ và $\vec{v}(0;-2;3)$. Toạ độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là
A. $(1;-1;8)$. **B.** $(-1;0;-2)$. **C.** $(-1;4;-8)$. **D.** $(1;0;2)$.
- Câu 24: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}(0;-2;3)$ và $\vec{v}(-1;2;-5)$. Toạ độ của vector $\vec{u} + \vec{v}$ là
A. $(1;-4;8)$. **B.** $(-1;0;-2)$. **C.** $(-1;4;-8)$. **D.** $(1;0;2)$.
- Câu 25: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có toạ độ là
A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.
- Câu 26: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có toạ độ là
A. $(0;1;0)$. **B.** $(2;1;0)$. **C.** $(0;1;-1)$. **D.** $(2;0;-1)$.
- Câu 27: (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên trục Ox có toạ độ là

A. $(0; 2; 0)$. **B.** $(0; 0; 5)$. **C.** $(1; 0; 0)$. **D.** $(0; 2; 5)$.

Câu 28: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là:

A. $(0; 2; 1)$. **B.** $(3; 0; 0)$. **C.** $(0; 0; 1)$. **D.** $(0; 2; 0)$.

Câu 29: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0; 5; 2)$. **B.** $(0; 5; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; 2)$.

Câu 30: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8; 1; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

A. $(0; 1; 0)$. **B.** $(8; 0; 0)$. **C.** $(0; 1; 2)$. **D.** $(0; 0; 2)$.

Câu 31: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$. Điểm nào sau đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 4; 2)$ trên mặt phẳng Oxy ?

A. $(0; 4; 2)$. **B.** $(1; 4; 0)$. **C.** $(1; 0; 2)$. **D.** $(0; 0; 2)$.

Câu 32: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$ điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

A. $M(3; 0; 2)$ **B.** $(0; 0; 2)$ **C.** $Q(0; 5; 2)$ **D.** $N(3; 5; 0)$

Câu 33: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng Oxy .

A. $Q(1; 0; 3)$ **B.** $P(1; 2; 0)$ **C.** $M(0; 0; 3)$ **D.** $N(0; 2; 3)$

Câu 34: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 4; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

A. $Q(0; 4; 1)$. **B.** $P(3; 0; 1)$. **C.** $M(0; 0; 1)$. **D.** $N(3; 4; 0)$.

Câu 35: (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(3; 0; -1)$. **B.** $(0; 1; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; -1)$.

Câu 36: (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

A. $(0; 0; -1)$. **B.** $(2; 0; -1)$. **C.** $(0; 1; 0)$. **D.** $(2; 0; 0)$.

Câu 37: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(3; -1; 0)$. **B.** $(0; 0; 1)$. **C.** $(0; -1; 0)$. **D.** $(3; 0; 0)$.

Câu 38: (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oz có tọa độ là

A. $(2; 0; 0)$. **B.** $(0; 1; 0)$. **C.** $(2; 1; 0)$. **D.** $(0; 0; -1)$.

Câu 39: (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3; 0; 0)$ **B.** $N(0; -1; 1)$ **C.** $P(0; -1; 0)$ **D.** $Q(0; 0; 1)$

- Câu 40: (Mã 102 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$
- Câu 41: (Đề Tham Khảo 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(1; 2; 3)$ **B.** $(-1;-2; 3)$ **C.** $(3;5;1)$ **D.** $(3;4;1)$
- Câu 42: (Mã 110 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .
A. $OA = \sqrt{5}$ **B.** $OA = 5$ **C.** $OA = 3$ **D.** $OA = 9$
- Câu 43: (Mã 101 2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là
A. $(4;-2;10)$ **B.** $(1;3;2)$ **C.** $(2;6;4)$ **D.** $(2;-1;5)$
- Câu 44: (Đề Tham Khảo 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-4;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,1,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.
A. $D(6;0;0), D(12;0;0)$ **B.** $D(0;0;0), D(6;0;0)$
C. $D(-2;1;0), D(-4;0;0)$ **D.** $D(0;0;0), D(-6;0;0)$
- Câu 45: (Mã 105 2017)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2;1;0)$ và $\vec{b} = (-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.
A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$
- Câu 46: (Mã 104 2017)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
A. $m = 2$ **B.** $m = -6$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = -4$
- Câu 47: (TK 2020-2021)** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng
A. 9. **B.** 3. **C.** 81. **D.** 6.
- Câu 48: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-4;0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là
A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$. **D.** $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$.

- Câu 49: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;-2)$ và có bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là:
- A. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. B. $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.
 C. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$. D. $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.
- Câu 50: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là
- A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4$.
 C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$. D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 2$.
- Câu 51: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(1;-3;0)$. B. $(-1;3;0)$. C. $(1;3;0)$. D. $(-1;-3;0)$.
- Câu 52: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(1;-3;0)$. B. $(1;3;0)$. C. $(-1;3;0)$. D. $(-1;-3;0)$.
- Câu 53: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-1;0;2)$. B. $(1;0;2)$. C. $(1;0;-2)$. D. $(-1;0;-2)$.
- Câu 54: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(1;0;-2)$. B. $(-1;0;2)$. C. $(1;0;2)$. D. $(-1;0;-2)$.
- Câu 55: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-1;-2;-3)$. B. $(1;2;3)$. C. $(-1;2;-3)$. D. $(1;-2;3)$.
- Câu 56: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-2;4;-1)$. B. $(2;-4;1)$. C. $(2;4;1)$. D. $(-2;-4;-1)$.
- Câu 57: (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$. Bán kính của (S) bằng
- A. 6. B. 18. C. 3. D. 9.
- Câu 58: (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. Bán kính của (S) bằng
- A. 6. B. 18. C. 9. D. 3.
- Câu 59: (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:
- A. 32 B. 8 C. 4 D. 16

- Câu 60:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng
- A. 4. B. 32. C. 16. D. 8.
- Câu 61:** (Mã 101- 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-1; 2; -3)$. B. $(2; -4; 6)$. C. $(1; -2; 3)$. D. $(-2; 4; -6)$.
- Câu 62:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-1; 2; 3)$. B. $(2; -4; -6)$. C. $(-2; 4; 6)$. D. $(1; -2; -3)$.
- Câu 63:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là:
- A. $(-2; -4; 6)$. B. $(2; 4; -6)$. C. $(-1; -2; 3)$. D. $(1; 2; -3)$.
- Câu 64:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(-1; -2; 3)$. B. $(-2; -4; 6)$. C. $(1; 2; -3)$. D. $(2; 4; -6)$.
- Câu 65:** (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Tính bán kính R của (S) .
- A. $R = 2\sqrt{2}$ B. $R = 64$ C. $R = 8$ D. $R = 4$
- Câu 66:** (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ có bán kính bằng
- A. 9 B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. $\sqrt{3}$
- Câu 67:** (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .
- A. $R = 6$ B. $R = 3$ C. $R = 18$ D. $R = 9$
- Câu 68:** (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A. $(3; -1; 1)$ B. $(-3; -1; 1)$ C. $(-3; 1; -1)$ D. $(3; 1; -1)$
- Câu 69:** (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$.
- A. $I(-1; 2; -4), R = 2\sqrt{5}$ B. $I(1; -2; 4), R = 20$
C. $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$ D. $I(-1; 2; -4), R = 5\sqrt{2}$
- Câu 70:** (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng
- A. 3. B. $\sqrt{15}$. C. $\sqrt{7}$. D. 9.
- Câu 71:** (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 72: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 9. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** 3.

Câu 73: (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 3. **C.** 9. **D.** $\sqrt{15}$.

Câu 74: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$. **B.** $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$. **D.** $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Câu 75: (Mã 110 2017) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m < 6$ **B.** $m \geq 6$ **C.** $m \leq 6$ **D.** $m > 6$

Câu 76: (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$ **B.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$ **D.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Câu 77: (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ **B.** $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$ **D.** $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

Câu 78: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 8. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 4.

Câu 79: (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a,b,c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 16

Câu 80: (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a; b; c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

- A. 20. B. 8. C. 12. D. 16.

Câu 81: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(-2; 1; -4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

- A. $5\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{13}$. C. $\sqrt{61}$. D. $\sqrt{85}$.

Câu 82: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (x+1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S) tại M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

- Câu 1:** (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là
- A. $(0;2;-3)$. B. $(1;0;-3)$. C. $(1;2;0)$. D. $(1;0;0)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của $A(1;2;-3)$ lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(1;2;0)$.

- Câu 2:** (MĐ 102-2022) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là
- A. $(1;0;-3)$. B. $(1;0;0)$. C. $(1;2;0)$. D. $(0;2;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là $(1;2;0)$.

- Câu 3:** (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1;-4;0)$ và $\vec{v} = (-1;-2;1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là
- A. $(-2;-6;3)$. B. $(-4;-8;4)$. C. $(-2;-10;-3)$. D. $(-2;-10;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3\vec{v} = (-3;-6;3)$.

Do đó: $\vec{u} + 3\vec{v} = (-2;-10;3)$.

- Câu 4:** (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1;-4;0)$ và $\vec{v} = (-1;-2;1)$. Vector $\vec{u} + 3\vec{v}$ có tọa độ là
- A. $(-2;-10;3)$. B. $(-2;-6;3)$. C. $(-4;-8;4)$. D. $(-2;-10;-3)$.

Lời giải

Chọn A

$$\vec{u} + 3\vec{v} = (1; -4; 0) + 3(-1; -2; 1) = (-2; -10; 3).$$

MẶT CẦU

Câu 5: (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. 12. C. $2\sqrt{6}$. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình mặt cầu ta suy ra bán kính của mặt cầu $(S): R = \sqrt{6}$

Vậy đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 6: (MĐ 102-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$. Đường kính của (S) bằng

- A. 3. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{6}$. D. 12.

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình mặt cầu (S) ta thấy, bán kính của mặt cầu $R = \sqrt{6}$.

Vậy đường kính của (S) bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 7: (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-4; 2; -6)$. B. $(4; -2; 6)$. C. $(2; -1; 3)$. D. $(-2; 1; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm mặt cầu (S) có tọa độ là: $(2; -1; 3)$.

Câu 8: (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-2; 1; -3)$. B. $(-4; 2; -6)$.
C. $(4; -2; 6)$. D. $(2; -1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$ có tâm $I(2; -1; 3)$.

Câu 9: (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $x - 2y + 2z + 3 = 0$ là

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $(P): x - 2y + 2z + 3 = 0$. Mặt cầu có bán kính là $R = d(A; (P)) = \frac{|1 - 4 + 6 + 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 2$.

Phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc mặt phẳng (P) là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Câu 10: (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 3 = 0$ là:

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Lời giải

Chọn D

Bán kính của mặt cầu là: $R = d(A, (\alpha)) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 2$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

VD-VDC

Câu 11: (MĐ 101-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;3;9)$ có bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

A. 39.

B. $12\sqrt{3}$.

C. 18.

D. $28\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d(I; (Oxz)) = 3 = R$ suy ra mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) tại điểm $A(1;0;9)$ (do đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (Oxz) và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A).

Gọi $M(a;0;0)$ và $N(0;0;b) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a-1;0;-9), \overrightarrow{AN} = (-1;0;b-9)$.

Do A, M, N thẳng hàng nên $\frac{a-1}{-9} = \frac{-1}{b-9} \Leftrightarrow b-9 = \frac{9}{a-1}$.

Để ý thấy $\triangle OMN$ vuông tại O và $IA \perp (OMN)$ nên $(IMN) \perp (OMN)$.

Khi đó, nếu gọi R, R_1, R_2 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$, đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$, đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$ ta có:

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{MN^2}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{MN^2}{4} + R_2^2 - \frac{MN^2}{4} \Leftrightarrow R = R_2$$

Lại có: $S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot MN = \frac{3MN}{2}$.

Mặt khác: $R_2 = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4S_{\triangle IMN}} \Leftrightarrow \frac{13}{2} = \frac{IM \cdot IN}{4 \cdot \frac{3}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 39$.

$$\Leftrightarrow IM^2 \cdot IN^2 = 1521 \Leftrightarrow [(a-9)^2 + 3^2 + 1^2][9^2 + 3^2 + (b-1)^2] = 1521.$$

$$\Leftrightarrow [(a-9)^2 + 3^2 + 1^2] \left[9^2 + 3^2 + \frac{81}{(a-9)^2} \right] = 1521 \Leftrightarrow (t+10) \left(90 + \frac{81}{t} \right) = 1521, t = (a-9)^2 > 0.$$

$$\Leftrightarrow 90(t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow (a-9)^2 = 3 \Rightarrow (b-1)^2 = \frac{81}{3} = 27.$$

Từ đó ta có: $\begin{cases} AM^2 = (a-9)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 4 \\ AN^2 = (-9)^2 + 0^2 + (b-1)^2 = 108 \end{cases} \Rightarrow AM \cdot AN = \sqrt{4} \cdot \sqrt{108} = 12\sqrt{3}.$

Câu 12: (MĐ 102-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(4;2;1)$ bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng.

A. $6\sqrt{2}$.

B. 14.

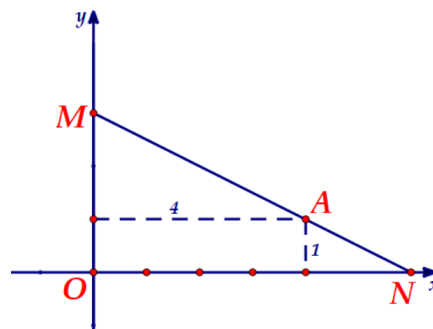
C. 8.

D. $9\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại $A(4;2;0)$. Nên suy ra MN đi qua A .

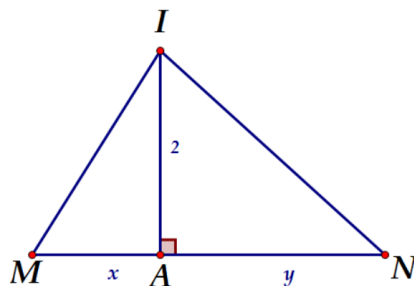


Đặt $\begin{cases} AM = x \\ AN = y \end{cases}$. Suy ra $\frac{y}{4} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow y = \frac{4x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

Xét tứ diện $OIMN$ có $IA \perp (OMN)$ và $\triangle OMN$ vuông tại O . Nên tâm K của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ thuộc mặt phẳng (IMN) .

Hay bán kính mặt cầu ngoại tiếp $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$.

Theo đề ta có: $S = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \frac{7}{2}} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot MN$. Suy ra $IM \cdot IN = 14$.



Mà: $IM = \sqrt{x^2 + 4}$, $IN = \sqrt{y^2 + 4}$.

Nên ta có $IM \cdot IN = \sqrt{x^2 + 4} \cdot \sqrt{y^2 + 4} = 14$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(y^2 + 4) = 196$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4) \left(\frac{16x^2}{x^2 - 1} + 4 \right) = 196$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)(5x^2 - 1) = 49(x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow 5x^4 - 30x^2 + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3$$

$$\text{Khi đó: } AM \cdot AN = x \cdot y = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Câu 13: (MĐ 103-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(9;3;1)$ bán kính bằng 3. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oz sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{13}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN với mặt cầu (S) , giá trị của $AM \cdot AN$ bằng?

A. $12\sqrt{3}$.

B. 18.

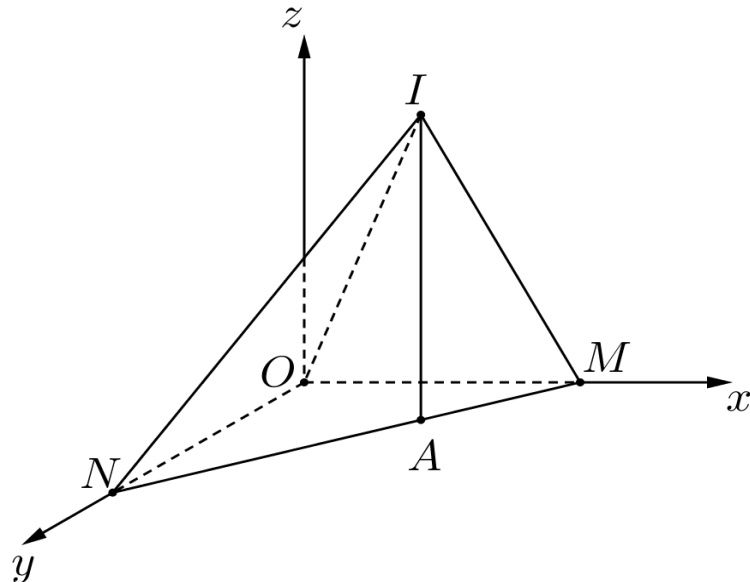
C. $28\sqrt{3}$.

D. 39.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Gọi $M(a; 0; 0) \in Ox$, $N(0; 0; b) \in Oz$.

Ta có $d(I; (Oxy)) = 3 = R$ nên (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) tại điểm $A(9; 0; 1)$ và MN cũng đi qua A .

Lại có $\overrightarrow{AM} = (a - 9; 0; -1)$, $\overrightarrow{AN} = (-9; 0; b - 1)$ và 3 điểm A, M, N thẳng hàng nên ta được:

$$\frac{a-9}{-9} = \frac{-1}{b-1} \Leftrightarrow (a-9)(b-1) = 9 \quad (1).$$

Tứ diện $OIMN$ có $IA \perp (OMN)$ và $\triangle OMN$ vuông tại O nên nếu gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ thì $J \in (IMN)$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$.

Ta có $S_{\triangle IMN} = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4r}$ (với $r = \frac{13}{2}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IMN$).

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} IA \cdot MN = \frac{IM \cdot IN \cdot MN}{4 \cdot \frac{13}{2}} \Leftrightarrow IM \cdot IN = 13IA \Leftrightarrow IM \cdot IN = 39$$

$$\Leftrightarrow [(a-9)^2 + 10][(b-1)^2 + 90] = 1521 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} m = a - 9 \\ n = b - 1 \end{cases}.$$

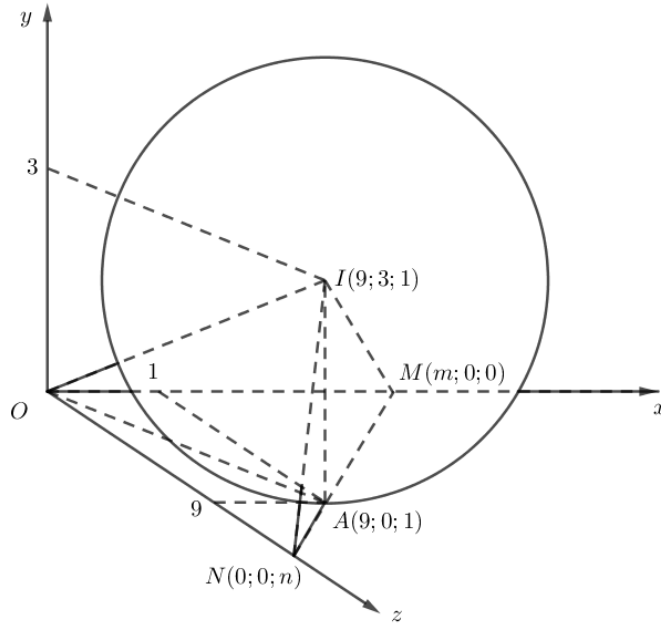
$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ } \begin{cases} mn = 9 \\ (m^2 + 10)(n^2 + 90) = 1521 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{9}{m} \\ (m^2 + 10)\left(\frac{81}{m^2} + 90\right) = 1521 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Từ (4) ta được: } (m^2 + 10)(81 + 90m^2) = 1521m^2$$

$$\Leftrightarrow 90m^4 - 540m^2 + 810 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3} \\ m = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 3\sqrt{3} \\ n = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} a = 9 + \sqrt{3}, b = 1 + 3\sqrt{3} \\ a = 9 - \sqrt{3}, b = 1 - 3\sqrt{3} \end{cases}$. Vậy $AM \cdot AN = 12\sqrt{3}$.

Cách 2:



Gọi $M(m; 0; 0) \in Ox$; $N(0; 0; n) \in Oz$ với $m, n > 0$ thì $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m-9; 0; -1) \\ \overrightarrow{AN} = (-9; 0; n-1) \end{cases}$

Nhận thấy mặt cầu (S) có tâm $I(9; 3; 1)$ bán kính bằng 3 luôn tiếp xúc mặt phẳng (Oxz) tại điểm $A(9; 0; 1)$.

Do ba điểm A, M, N thẳng hàng nên hai vector $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ cùng phương nhưng ngược hướng

nên tồn tại số thực $k < 0$ sao cho $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} m-9 = -9k \\ -1 = k(n-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-9 = -9k \\ n-1 = -\frac{1}{k} \end{cases} \quad (1)$

Suy ra: $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m-9; 0; -1) = (-9k; 0; -1) \\ \overrightarrow{AN} = (9; 0; 1-n) = \left(-9; 0; -\frac{1}{k}\right) \end{cases}$.

Gọi mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $OIMN$ là (S') có dạng:

$(S'): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Ta có:

$O(0; 0; 0) \in (S') \Rightarrow d = 0$ nên (S') có dạng: $(S'): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$.

$M(m; 0; 0) \in (S') \Rightarrow m^2 - 2am = 0 \Leftrightarrow a = \frac{m}{2} = \frac{9-9k}{2}$ (do (1)).

$N(0; 0; n) \in (S') \Rightarrow n^2 - 2cn = 0 \Leftrightarrow c = \frac{n}{2} = \frac{k-1}{2k}$ (do (1)).

$$I(9;3;1) \in (S') \Rightarrow 91 - 18a - 6b - 2c = 0 \Rightarrow b = \frac{91 - 18a - 2c}{6} = \frac{81k^2 + 9k + 1}{6k}$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $OIMN$ bằng:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\left(\frac{9-9k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k-1}{2k}\right)^2 + \left(\frac{81k^2 + 9k + 1}{6k}\right)^2} = \frac{13}{2}.$$

Bình phương và quy đồng sẽ thu được phương trình bậc bốn, sau đó casio giải phương trình cho ta nghiệm $k = -0,1924500926$ (Do $k < 0$).

Khi đó:

$$AM = \sqrt{(-9k)^2 + 0^2 + (1)^2} = 2,0000000022 \text{ và } AN = \sqrt{9^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = 10,39230481$$

Vậy: $AM \cdot AN = 20,78460985$.

Câu 14: (MĐ 104-2022) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(1;4;2)$ bán kính bằng 2. Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai trục Ox, Oy sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với (S) , đồng thời mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ có bán kính bằng $\frac{7}{2}$. Gọi A là tiếp điểm của MN và (S) , giá trị $AM \cdot AN$ bằng

A. $9\sqrt{2}$.

B. 14.

C. $6\sqrt{2}$.

D. 8.

Lời giải

Chọn C

Do mặt cầu (S) tâm $I(1;4;2)$ bán kính $R = 2$ nên ta có $d(I, Oxy) = 2 = R$. Vì vậy (S) tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại $A(1;4;0)$, và A cũng là tiếp điểm của MN và (S) (vì MN thuộc mặt phẳng Oxy).

Gọi $M(a;0;0), N(0;b;0)$, do M, N, A thẳng hàng nên $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$.

$$\text{Trục đường tròn ngoại tiếp tam giác } OMN \text{ là } d: \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ là $J\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; t\right) \in d$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OIMN$ bằng $\frac{7}{2}$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 & (1) \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + t^2 = \frac{49}{4} & (2) \\ \left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 4\right)^2 + (t - 2)^2 = \frac{49}{4} & (3) \end{cases}$$

Rút b theo a từ (1); trừ hai vế của (2),(3), rút t theo a , thay vào (2) ta được:

$$\frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{(a-1)^2} + \frac{1}{16} \left(21 - a - \frac{16a}{a-1} \right)^2 = \frac{49}{4}.$$

Giải phương trình tìm được $\begin{cases} a = 1 - 2\sqrt{2} \\ a = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} a = 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow b = 4 - \sqrt{2} \\ a = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow b = 4 + \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AM \cdot AN = 6\sqrt{2}.$

Câu 15: (TK2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$ và $B(3;1;0)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A.** $(4;2;2)$. **B.** $(2;1;1)$. **C.** $(2;0;-2)$. **D.** $(1;0;-1)$.

Lời giải

Trung điểm I của AB có tọa độ là $x_I = \frac{3+1}{2} = 2, y_I = \frac{1+1}{2} = 1, z_I = \frac{2+0}{2} = 1 \Rightarrow I(2;1;1)$.

Câu 16: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;5)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{OA}$ là

- A.** $(-2;3;5)$. **B.** $(2;-3;5)$. **C.** $(-2;-3;5)$. **D.** $(2;-3;-5)$.

Lời giải

Ta có $A(-2;3;5)$ nên tọa độ của vector là $\overrightarrow{OA} = (-2;3;5)$.

Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;3)$. Tọa độ vector $\overrightarrow{OA}$ là

- A.** $(-4;1;3)$. **B.** $(4;-1;3)$. **C.** $(-4;1;-3)$. **D.** $(4;1;3)$.

Lời giải

Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm A cũng chính là tọa độ vector $\overrightarrow{OA}$. Do đó $\overrightarrow{OA} = (4;-1;3)$

Câu 18: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là

- A.** $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 2$. **B.** $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 2$.
C. $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. **D.** $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và bán kính bằng 2 có phương trình là $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 19: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-4)$. Tọa độ của $\overrightarrow{OA}$ là

- A.** $(3; -2; -4)$. **B.** $(-3; -2; 4)$. **C.** $(3; 2; -4)$. **D.** $(3; 2; 4)$.

Lời giải

Ta có $A(3; 2; -4) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (3; 2; -4)$

Câu 20: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; 4)$. Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{OA}$ là

- A.** $(-2; 1; 4)$. **B.** $(2; -1; 4)$. **C.** $(2; 1; 4)$. **D.** $(-2; 1; -4)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (2; -1; 4)$.

Câu 21: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u}(-1; 2; 0)$ và $\vec{v}(1; -2; 3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A.** $(0; 0; -3)$. **B.** $(0; 0; 3)$. **C.** $(-2; 4; -3)$. **D.** $(2; -4; 3)$.

Lời giải

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (0; 0; 3)$.

Câu 22: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{v} = (1; -2; 3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A.** $(-2; 4; -3)$. **B.** $(2; -4; 3)$. **C.** $(0; 0; 3)$. **D.** $(0; 0; -3)$.

Lời giải

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (-1+1; 2-2; 0+3) = (0; 0; 3)$.

Câu 23: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u} = (-1; 2; -5)$ và $\vec{v} = (0; -2; 3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A.** $(1; -1; 8)$. **B.** $(-1; 0; -2)$. **C.** $(-1; 4; -8)$. **D.** $(1; 0; 2)$.

Lời giải

Ta có : $\vec{u} + \vec{v} = (-1+0; 2+(-2); -5+3) = (-1; 0; -2)$

Câu 24: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (0; -2; 3)$ và $\vec{v} = (-1; 2; -5)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ là

- A.** $(1; -4; 8)$. **B.** $(-1; 0; -2)$. **C.** $(-1; 4; -8)$. **D.** $(1; 0; 2)$.

Lời giải

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (-1; 0; -2)$.

Câu 25: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A.** $(2; 0; 1)$. **B.** $(2; -2; 0)$. **C.** $(0; -2; 1)$. **D.** $(0; 0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(x_0; y_0; 0)$.

Do đó hình chiếu của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M'(2; -2; 0)$.

Câu 26: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

- A.** $(0; 1; 0)$. **B.** $(2; 1; 0)$. **C.** $(0; 1; -1)$. **D.** $(2; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu của $M(2; 1; -1)$ lên mặt phẳng (Ozx) là điểm có tọa độ $(2; 0; -1)$.

Câu 27: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A.** $(0; 2; 0)$. **B.** $(0; 0; 5)$. **C.** $(1; 0; 0)$. **D.** $(0; 2; 5)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 5)$ trên trục Ox có tọa độ là $(1; 0; 0)$.

Câu 28: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là:

- A.** $(0; 2; 1)$. **B.** $(3; 0; 0)$. **C.** $(0; 0; 1)$. **D.** $(0; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 29: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A.** $(0; 5; 2)$. **B.** $(0; 5; 0)$. **C.** $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là $(3; 0; 0)$.

Câu 30: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8; 1; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A.** $(0; 1; 0)$. **B.** $(8; 0; 0)$. **C.** $(0; 1; 2)$. **D.** $(0; 0; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(8;1;2)$ trên trục Ox là $(8;0;0)$.

Câu 31: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$. Điểm nào sau đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng Oxy ?

- A.** $(0;4;2)$. **B.** $(1;4;0)$. **C.** $(1;0;2)$. **D.** $(0;0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu của $A(1;4;2)$ trên mặt phẳng Oxy là $(1;4;0)$.

Câu 32: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$ điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

- A.** $M(3;0;2)$ **B.** $(0;0;2)$ **C.** $Q(0;5;2)$ **D.** $N(3;5;0)$

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(3;5;0)$.

Câu 33: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng Oxy .

- A.** $Q(1;0;3)$ **B.** $P(1;2;0)$ **C.** $M(0;0;3)$ **D.** $N(0;2;3)$

Lời giải

Chọn B

Ta có hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng Oxy là điểm $P(1;2;0)$.

Câu 34: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;4;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

- A.** $Q(0;4;1)$. **B.** $P(3;0;1)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $N(3;4;0)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;4;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $N(3;4;0)$.

Câu 35: (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A.** $(3;0;-1)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(3;0;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Câu 36: (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A.** $(0;0;-1)$. **B.** $(2;0;-1)$. **C.** $(0;1;0)$. **D.** $(2;0;0)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oy có tọa độ là $(0;1;0)$.

Câu 37: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A.** $(3;-1;0)$. **B.** $(0;0;1)$. **C.** $(0;-1;0)$. **D.** $(3;0;0)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;1)$ trên trục Oz có tọa độ là $(0;0;1)$

Câu 38: (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A.** $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(2;1;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;1;-1)$ trên trục Oz có tọa độ là: $(0;0;-1)$.

Câu 39: (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A.** $M(3;0;0)$ **B.** $N(0;-1;1)$ **C.** $P(0;-1;0)$ **D.** $Q(0;0;1)$

Lời giải

Chọn B

Khi chiếu vuông góc một điểm trong không gian lên mặt phẳng (Oyz) , ta giữ lại các thành phần tung độ và cao độ nên hình chiếu của $A(3;-1;1)$ lên (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 40: (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} = (2-1; 2-1; 1-(-2)) \text{ hay } \overrightarrow{AB} = (1;1;3).$$

Câu 41: (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. (1; 2; 3)

B. (−1; −2; 3)

C. (3; 5; 1)

D. (3; 4; 1)

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (1; 2; 3)$$

Câu 42: (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

A. $OA = \sqrt{5}$

B. $OA = 5$

C. $OA = 3$

D. $OA = 9$

Lời giải

Chọn C

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Câu 43: (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

A. (4; -2; 10)

B. (1; 3; 2)

C. (2; 6; 4)

D. (2; -1; 5)

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AB , ta có tọa độ điểm I là

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = -1. \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$$

Vậy $I(2; -1; 5)$.

Câu 44: (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $D(6; 0; 0), D(12; 0; 0)$

B. $D(0; 0; 0), D(6; 0; 0)$

C. $D(-2; 1; 0), D(-4; 0; 0)$

D. $D(0; 0; 0), D(-6; 0; 0)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $D(x; 0; 0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Câu 45: (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$.

Câu 46: (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = 2$ **B.** $m = -6$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = -4$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN}(-3; -2; 2); \overrightarrow{NP}(2; m-2; 1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Câu 47: (TK 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 81. **D.** 6.

Lời giải

Phương trình mặt cầu là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên $R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$.

Câu 48: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 9$. **B.** $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 3$. **D.** $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 3$.

Lời giải

Do mặt cầu (S) có tâm $I(1; -4; 0)$ và bán kính bằng 3 nên phương trình mặt cầu (S) là:

$(x-1)^2 + (y+4)^2 + z^2 = 9$.

Câu 49: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; -2)$ và có bán kính bằng 3. Phương trình của (S) là:

A. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. **B.** $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.
C. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$. **D.** $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 1; -2)$ và có bán kính $R = 3$, phương trình mặt cầu (S) là:

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9.$$

Câu 50: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2. Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 2.$

B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 4.$

C. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4.$

D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 2.$

Lời giải

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;0)$ và bán kính bằng 2 nên có phương trình là:

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4.$$

Câu 51: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;-3;0).$

B. $(-1;3;0).$

C. $(1;3;0).$

D. $(-1;-3;0).$

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$ có tâm là $I(-1;3;0)$.

Câu 52: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;-3;0).$

B. $(1;3;0).$

C. $(-1;3;0).$

D. $(-1;-3;0).$

Lời giải

Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(1;-3;0)$.

Câu 53: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;0;2).$

B. $(1;0;2).$

C. $(1;0;-2).$

D. $(-1;0;-2).$

Lời giải

Từ phương trình ta có ngay tọa độ tâm của mặt cầu (S) là $(1;0;-2)$.

Câu 54: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(1;0;-2).$

B. $(-1;0;2).$

C. $(1;0;2).$

D. $(-1;0;-2).$

Lời giải

Ta có tâm của (S) là $I(-1;0;2)$.

Câu 55: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3).$

B. $(1;2;3).$

C. $(-1;2;-3).$

D. $(1;-2;3).$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm là $I(a; b; c)$.

Suy ra, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ có tâm là $I(1; -2; 3)$.

- Câu 56: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A.** $(-2; 4; -1)$. **B.** $(2; -4; 1)$. **C.** $(2; 4; 1)$. **D.** $(-2; -4; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(2; -4; 1)$.

- Câu 57: (Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$. Bán kính của (S) bằng
- A.** 6. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Bán kính của (S) là $R = \sqrt{9} = 3$.

- Câu 58: (Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. Bán kính của (S) bằng
- A.** 6. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

- Câu 59: (Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:
- A.** 32 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 16

Lời giải

Chọn C

Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 16 \Rightarrow$ Bán kính $R = \sqrt{16} = 4$

- Câu 60: (Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng
- A.** 4. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Bán kính của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16$ là $R = \sqrt{16} = 4$.

- Câu 61:** (Mã 101- 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -4; 6)$. **C.** $(1; -2; 3)$. **D.** $(-2; 4; -6)$.

Lời giải

Chọn A

Tâm mặt cầu (S) có tọa độ là $(-1; 2; -3)$.

- Câu 62:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A.** $(-1; 2; 3)$. **B.** $(2; -4; -6)$. **C.** $(-2; 4; 6)$. **D.** $(1; -2; -3)$.

Lời giải

Chọn D

Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là $(1; -2; -3)$.

- Câu 63:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là:
- A.** $(-2; -4; 6)$. **B.** $(2; 4; -6)$. **C.** $(-1; -2; 3)$. **D.** $(1; 2; -3)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của (S) có tọa độ là: $(-1; -2; 3)$

- Câu 64:** (Mã 104 - 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A.** $(-1; -2; 3)$. **B.** $(-2; -4; 6)$. **C.** $(1; 2; -3)$. **D.** $(2; 4; -6)$.

Lời giải

Chọn C

Tâm của mặt cầu (S) đã cho là: $I(1; 2; -3)$.

- Câu 65:** (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Tính bán kính R của (S) .
- A.** $R = 2\sqrt{2}$ **B.** $R = 64$ **C.** $R = 8$ **D.** $R = 4$

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu tổng quát: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$.

- Câu 66:** (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ có bán kính bằng

- A.** 9 **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Câu 67: (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Tính bán kính R của (S) .

- A.** $R = 6$ **B.** $R = 3$ **C.** $R = 18$ **D.** $R = 9$

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có dạng:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \Rightarrow R = 3.$$

Câu 68: (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A.** $(3; -1; 1)$ **B.** $(-3; -1; 1)$ **C.** $(-3; 1; -1)$ **D.** $(3; 1; -1)$

Lời giải

Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(-3; -1; 1)$.

Câu 69: (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$.

- A.** $I(-1; 2; -4), R = 2\sqrt{5}$ **B.** $I(1; -2; 4), R = 20$
C. $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$ **D.** $I(-1; 2; -4), R = 5\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R .

Nên mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$ có tâm và bán kính là $I(1; -2; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Câu 70: (Mã 101 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A.** 3. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \cdot (-1) \cdot x + 2 \cdot 0 \cdot y - 2 \cdot 1 \cdot z - 7 = 0.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = 1, d = -7.$$

$$\Rightarrow \text{Tâm mặt cầu } I(-1; 0; 1) \text{ bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 7} = 3.$$

Câu 71: (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. $\sqrt{15}$. B. $\sqrt{7}$. C. 9. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-7)} = 3.$

Câu 72: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. 9. C. $\sqrt{15}$. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$

Vậy bán kính của mặt cầu bằng 3.

Câu 73: (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A. $\sqrt{7}$. B. 3. C. 9. D. $\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu đã cho có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ có bán kính là $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 7} = 3$

Câu 74: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$. Phương trình của (S) là

- A. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$. B. $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$.
C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 25$. D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và bán kính R là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = R^2$.

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow 4^2 + 0^2 + (0+3)^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = 25$.

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 75: (Mã 110 2017) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

A. $m < 6$

B. $m \geq 6$

C. $m \leq 6$

D. $m > 6$

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là một phương trình mặt cầu

$$\Leftrightarrow 1^2 + 1^2 + 2^2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6.$$

Câu 76: (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$

Lời giải

Chọn C

Ta có $RI = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

vậy phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm A có phương trình là

$$(x-x_I)^2 + (y-y_I)^2 + (z-z_I)^2 = R^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$$

Câu 77: (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

B. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0) \Rightarrow IM = \sqrt{13}$. Suy ra phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

Câu 78: (Mã 102 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 8.

B. 16.

C. 12.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;\sqrt{2})$ và bán kính $R = \sqrt{3}$; $A \in (Oxy) \Rightarrow A(a;b;0)$.

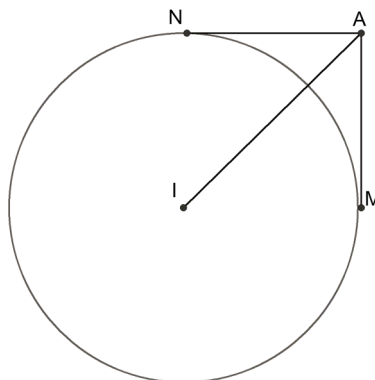
* Xét trường hợp $A \in (S)$, ta có $a^2 + b^2 = 1$. Lúc này các tiếp tuyến của (S) thuộc tiếp diện của (S) tại A nên có vô số các tiếp tuyến vuông góc nhau.

Trường hợp này ta có 4 cặp giá trị của $(a; b)$ là $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}; \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}; \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}; \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

* Xét trường hợp A ở ngoài (S) . Khi đó, các tiếp tuyến của (S) đi qua A thuộc mặt nón đỉnh A . Nên các tiếp tuyến này chỉ có thể vuông góc với nhau tại A .

Điều kiện để có ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc là góc ở đỉnh của mặt nón lớn hơn hoặc bằng 90° .

Giả sử $A'N; A'M$ là các tiếp tuyến của (S) thỏa mãn $AN \perp AM$ ($N; M$ là các tiếp điểm)



Dễ thấy $A'NIM$ là hình vuông có cạnh $IN = R = \sqrt{3}$ và $IA' = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$.

Điều kiện phải tìm là $\begin{cases} IA > R \\ IA \leq IA' = \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 > 1 \\ a^2 + b^2 \leq 4 \end{cases}$

Vì a, b là các số nguyên nên ta có các cặp nghiệm $(a; b)$ là

$(0; 2), (0; -2), (2; 0), (-2; 0), (1; 1), (-1; -1), (-1; 1), (1; -1)$.

Vậy có 12 điểm A thỏa mãn yêu cầu.

Câu 79: (Mã 104 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a, b, c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 20

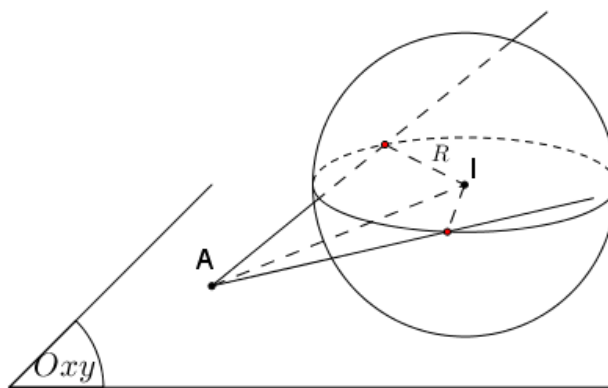
B. 8

C. 12

D. 16

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Vì $A \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Các giao tuyến của A đến mặt cầu (nếu $IA > R$) tạo nên một mặt nón tâm A , để mặt nón này có hai đường sinh vuông góc thì góc của mặt nón này phải $\geq 90^\circ$ hay $IA \leq R\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } R \leq IA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$$

Ta có các bộ số thỏa mãn $(0;\pm 2);(0;\pm 3);(\pm 1;\pm 2);(\pm 2;\pm 2);(\pm 2;\pm 1);(\pm 2;0);(\pm 3;0)$, 20 bộ số.

Câu 80: (Mã 103 - 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

A. 20.

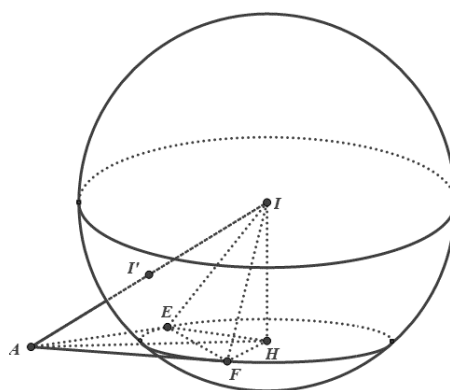
B. 8.

C. 12.

D. 16.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5$ có tâm $I(0;0;-1)$ và có bán kính $R = \sqrt{5}$

$$A(a;b;0) \in (Oxy), \text{ Gọi } I' \text{ là trung điểm của } AI \Rightarrow I'\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Gọi E, F lần lượt là hai tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua A sao cho $AE \perp AF$.

Ta có: E, F cùng thuộc mặt cầu (S') đường kính IA có tâm $I'\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$.

Để tồn tại E, F thì hai mặt cầu (S) và (S') phải cắt nhau suy ra $|R - R'| \leq II' \leq |R + R'|$

$$\Leftrightarrow \left| \sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \leq \sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 4(1)$$

Gọi H là hình chiếu của I trên (AEF) khi đó tứ giác $AEHF$ là hình vuông có cạnh $AE = HF = \sqrt{AI^2 - 5}$.

$$\text{Ta có } IH^2 = R^2 - HF^2 = 5 - (AI^2 - 5) = 10 - AI^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 1 \leq 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 9(2)$$

Từ (1) và (2) ta có $4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$ mà $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nên có 20 điểm thỏa bài toán.

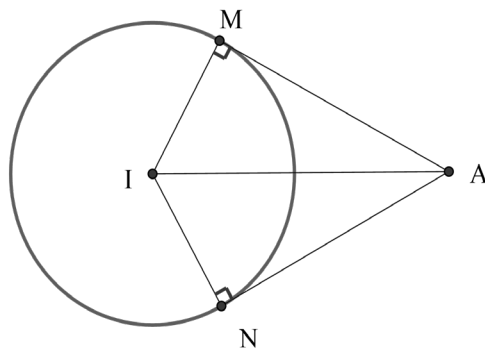
Cách khác:

Mặt cầu (S) có tâm $I(0, 0, -1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$. Ta có $d_{(I(Oxy))} = 1 < R \Rightarrow$ mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) . Để có tiếp tuyến của (S) đi qua $A \Leftrightarrow AI \geq R$ (1).

$$\text{Có } A(a, b, c) \in (Oxy) \Rightarrow A(a, b, 0), IA = a^2 + b^2 + 1.$$

Quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón nếu $AI > R$ và là một mặt phẳng nếu $AI = R$.

Trong trường hợp quỹ tích các tiếp tuyến đi qua A của (S) là một mặt nón gọi AM, AN là hai tiếp tuyến sao cho A, M, I, N đồng phẳng.



Tồn tại ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\widehat{MAN} \geq 90^\circ \Leftrightarrow IA \leq R\sqrt{2}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow 4 \leq a^2 + b^2 \leq 9$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 4 \end{cases}.$$

Bốn hệ phương trình đầu tiên có hai nghiệm, ba hệ sau có 4 nghiệm suy ra số điểm A thỏa mãn là $4.2 + 3.4 = 20$.

Câu 81: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$ và $B(-2; 1; -4)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 4$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng

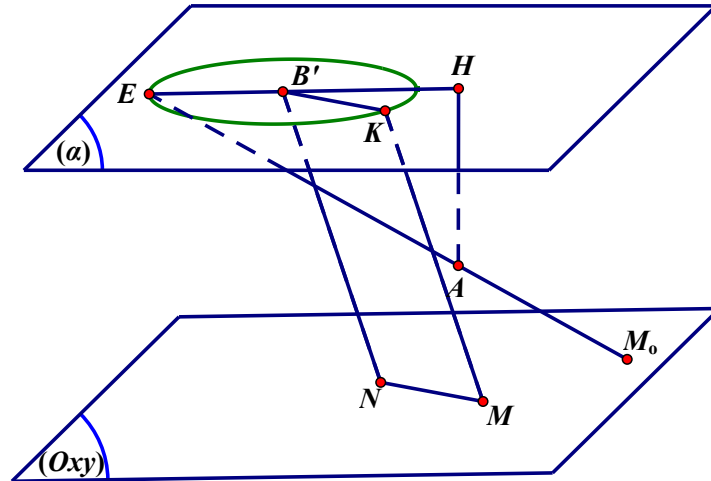
A. $5\sqrt{2}$.

B. $3\sqrt{13}$.

C. $\sqrt{61}$.

D. $\sqrt{85}$.

Lời giải



Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy) , suy ra $B'(-2; 1; 4)$, $BN = B'N$ và A, B' ở cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) .

Lấy điểm K sao cho $\overrightarrow{B'K} = \overrightarrow{NM}$ ($B'NMK$ là hình bình hành), khi đó $B'K = MN = 4$, $B'N = MK$.

Do $B'K \parallel MN$ nên $B'K$ nằm trên mặt phẳng (α) đi qua B' và song song với mặt phẳng (Oxy) , suy ra (α) có phương trình $z = 4$.

Do $B'K = 4$ nên K thuộc đường tròn (C) nằm trên mặt phẳng (α) có tâm là B' , bán kính $R = 4$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(\alpha) \Rightarrow H(1; -3; 4)$ và $HB' = 5 > R$, E là giao điểm của tia đối của tia $B'H$ với (C) .

Ta có $|AM - BN| = |AM - B'N| = |AM - MK| \leq AK = \sqrt{AH^2 + HK^2} \leq \sqrt{AH^2 + HE^2}$.

Mà $AH = 2$, $HE = HB' + B'E = 5 + 4 = 9$ suy ra $|AM - BN| \leq \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} K \equiv E \\ M \in AK, |AM - MK| = AK \end{cases} \Leftrightarrow M = AE \cap (Oxy) = M_0$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng $\sqrt{85}$.

Câu 82: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (x+1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc (S) sao cho tiếp diện của (S)

tại M cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

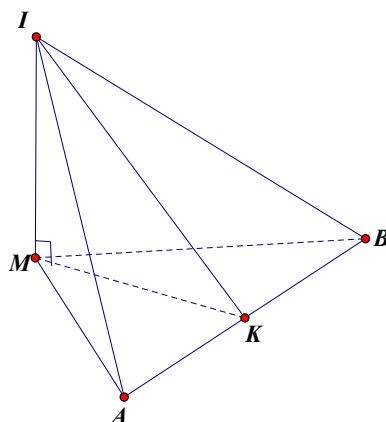
A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$, bán kính $R=1$.

Gọi K là trung điểm của AB . Suy ra $K\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$.

Dễ dàng chứng minh được tam giác IMK vuông tại M và $MK = \frac{AB}{2}$.

$$MI^2 + MK^2 = IK^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 2\right)^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{a^2}{4} - 3a + 9 + \frac{b^2}{4} - 2b + 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 12a - 8b + 52$$

$$\Leftrightarrow 3a + 2b = 13$$

Vì a nguyên dương nên ta được a là số lẻ và $a < \frac{13}{3}$

a	1	3	5	7	9
b	5	2	-1	-4	-7

Từ đó $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. Vì có 2 cặp điểm A, B nên có 2 điểm M thỏa đề.

Câu 50. (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 1$. Có bao nhiêu điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho tiếp

diện của (S) tại M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0)$ mà a, b là các số nguyên dương và $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

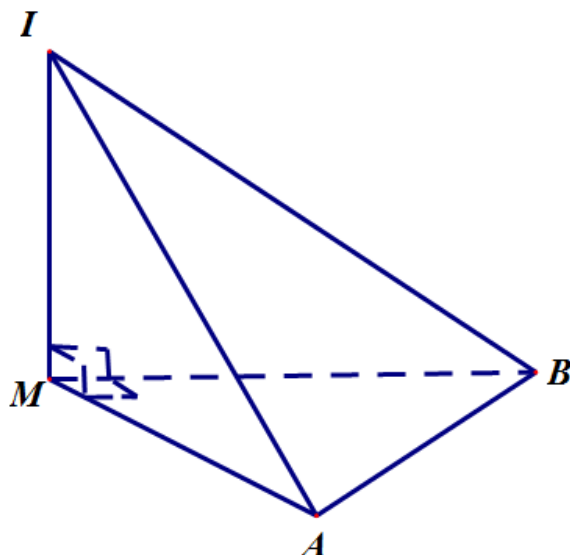
A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1)$ và bán kính $R=1$.

Vì M là tiếp điểm nên $IM \perp (AMB)$ và $IM = R = 1$.

Ta có $AI^2 = (a-3)^2 + 4 + 1 = a^2 - 6a + 14 \Rightarrow AM^2 = AI^2 - MI^2 = a^2 - 6a + 13$.

Và $BI^2 = 9 + (b-2)^2 + 1 = b^2 - 4b + 14 \Rightarrow BM^2 = BI^2 - MI^2 = b^2 - 4b + 13$.

Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên $AM^2 + BM^2 = AB^2 \Rightarrow a^2 - 6a + 13 + b^2 - 4b + 13 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3a + 2b = 13$

$$\Rightarrow b = \frac{13-3a}{2}.$$

Vì a, b nguyên dương nên $13 - 3a \geq 2 \Rightarrow 1 \leq a \leq \frac{11}{3}$. Lập bảng:

A	1	2	3
B	5	3,5	2

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM TOẠ ĐỘ ĐIỂM, VÉC TƠ LIÊN QUAN ĐẾN HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ $Oxyz$

- Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?
- A. $M(3;4;0)$. B. $P(-2;0;3)$. C. $Q(2;0;0)$. D. $N(0;4;-1)$.
- Câu 2:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oxy) là M' . Xác định tọa độ M' .
- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.
- Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oxz) là M' . Xác định tọa độ M' .
- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.
- Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .
- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.
- Câu 5:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M trên trục Ox là M' . Xác định tọa độ M' .
- A. $M'(4;5;0)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;6)$.
- Câu 6:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M trên trục Oy là M' . Xác định tọa độ M' .
- A. $M'(0;0;6)$. B. $M'(4;0;6)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(0;5;0)$.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M trên trục Oz là M' . Xác định tọa độ M' .
- A. $M'(0;0;6)$. B. $M'(0;5;0)$. C. $M'(4;0;0)$. D. $M'(4;5;0)$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A.** $(0; 2; 3)$. **B.** $(-1; -2; -3)$. **C.** $(-1; 2; 3)$. **D.** $(1; 2; -3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oxz) là

- A.** $(1; -2; 3)$. **B.** $(-1; -2; -3)$. **C.** $(-1; 2; 3)$. **D.** $(1; 2; -3)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oxy) là

- A.** $(0; 2; 3)$. **B.** $(-1; -2; -3)$. **C.** $(-1; 2; 3)$. **D.** $(1; 2; -3)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A.** $A'(2; 3; 5)$. **B.** $A'(2; -3; -5)$. **C.** $A'(-2; -3; 5)$. **D.** $A'(-2; -3; -5)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3); \vec{b}(2; 2; -1); \vec{c}(4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A.** $\vec{d}(-7; 0; -4)$ **B.** $\vec{d}(-7; 0; 4)$ **C.** $\vec{d}(7; 0; -4)$ **D.** $\vec{d}(7; 0; 4)$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A.** $(3; 4; 1)$. **B.** $(-1; -2; 3)$. **C.** $(3; 5; 1)$. **D.** $(1; 2; 3)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A.** $(10; -2; 13)$. **B.** $(-2; 2; -7)$. **C.** $(-2; -2; 7)$. **D.** $(-2; 2; 7)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A.** $(-1; 2; -3)$. **B.** $(2; -3; -1)$. **C.** $(2; -1; -3)$. **D.** $(-3; 2; -1)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A.** $(10; -2; 13)$. **B.** $(-2; 2; -7)$. **C.** $(-2; -2; 7)$. **D.** $(-2; 2; 7)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A.** $\vec{a} = (4; 1; -1)$. **B.** $\vec{a} = (3; 1; -4)$. **C.** $\vec{a} = (0; 1; -1)$. **D.** $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. **B.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.
C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. **D.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ vectơ $\vec{u}$ là

- A.** $(-2; 3; 1)$. **B.** $(2; 3; -1)$. **C.** $(2; -3; -1)$. **D.** $(2; 3; 1)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A.** $(1; 7; 2)$. **B.** $(1; 5; 2)$. **C.** $(3; 7; 2)$. **D.** $(1; 7; 3)$.

- Câu 21:** Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:
A. $\vec{a}(-1; 2; -3)$. **B.** $\vec{a}(2; -3; -1)$. **C.** $\vec{a}(-3; 2; -1)$. **D.** $\vec{a}(2; -1; -3)$.
- Câu 22:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng
A. 6. **B.** 11. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{6}$.
- Câu 23:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -1), B(2; 3; 2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(2; 2; 3)$. **B.** $(1; 2; 3)$. **C.** $(3; 5; 1)$. **D.** $(3; 4; 1)$.
- Câu 24:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 0)$ và $B(1; 1; -3)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là
A. $(3; 0; -3)$. **B.** $(-1; 2; -3)$. **C.** $(-1; -2; 3)$. **D.** $(1; -2; 3)$.
- Câu 25:** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; -2; 1), B(1; -1; 3)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:
A. $(-1; 1; 2)$. **B.** $(-3; 3; -4)$. **C.** $(3; -3; 4)$. **D.** $(1; -1; -2)$
- Câu 26:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1), B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .
A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.
- Câu 27:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1), B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là
A. $2\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1; 3; 5), B(2; 2; 3)$. Độ dài đoạn AB bằng
A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{5}$.
- Câu 29:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
A. $I(1; 0; 4)$. **B.** $I(2; 0; 8)$. **C.** $I(2; -2; -1)$. **D.** $I(-2; 2; 1)$.
- Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 3; 2), B(3; -1; 4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB .
A. $I(2; -4; 2)$. **B.** $I(4; 2; 6)$. **C.** $I(-2; -1; -3)$. **D.** $I(2; 1; 3)$.
- Câu 31:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là
A. $(1; 3; 2)$. **B.** $(2; -1; 5)$. **C.** $(2; -1; -5)$. **D.** $(2; 6; 4)$.
- Câu 32:** Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3), B(-1; 2; 5), C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
A. $G(0; 0; 3)$. **B.** $G(0; 0; 9)$. **C.** $G(-1; 0; 3)$. **D.** $G(0; 0; 1)$.
- Câu 33:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 3; 4), B(2; -1; 0), C(3; 1; 2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
A. $G(2; 1; 2)$. **B.** $G(6; 3; 6)$. **C.** $G\left(3; \frac{2}{3}; 3\right)$. **D.** $G(2; -1; 2)$.

- Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5;-2;0), B(-2;3;0), C(0;2;3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ:
- A. $(1;2;1)$. B. $(2;0;-1)$. C. $(1;1;1)$. D. $(1;1;-2)$.

DẠNG 2. TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

- Câu 35:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3;0;1)$ và $\vec{v} = (2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.
- Câu 36:** Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2;-1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2;-3)$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.
- Câu 37:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1;-2;3), \vec{b} = (-2;1;2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng
- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.
- Câu 38:** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1;2;3); B(-1;2;1); C(3;-1;-2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- A. -6. B. -14. C. 14. D. 6.
- Câu 39:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1;3), B(-2;-2), C(3;1)$. Tính cosin góc A của tam giác.
- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$
- Câu 40:** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là
- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .
- Câu 41:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3;4;0), \vec{b} = (5;0;12)$. Cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.
- Câu 42:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là
- A. 120° . B. 30° . C. 60° . D. 150° .
- Câu 43:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:
- A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- Câu 44:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3;4;0)$ và $\vec{b} = (5;0;12)$. Cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.
- Câu 45:** Cho $\vec{u} = (-1;1;0), \vec{v} = (0;-1;0)$, góc giữa hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là
- A. 120° . B. 45° . C. 135° . D. 60° .

- Câu 46:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?
A. $AB \perp BD$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp AC$. **D.** $AB \perp CD$.
- Câu 47:** Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.
A. $m = -5$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$
- Câu 48:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
A. $m = 4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -2$.
- Câu 49:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Côsin của góc BAC bằng
A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **C.** $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $-\frac{9}{\sqrt{35}}$.
- Câu 50:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vectơ $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
A. $\vec{c} = (2; 6; -1)$. **B.** $\vec{c} = (4; 6; -1)$. **C.** $\vec{c} = (4; -6; -1)$. **D.** $\vec{c} = (2; -6; -1)$.
- Câu 51:** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 0; 3)$ là
A. $(2; 3; -1)$. **B.** $(3; 5; -2)$. **C.** $(2; -3; -1)$. **D.** $(3; -5; -1)$.
- Câu 52:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-2; 1; 3)$ và $D(0; 1; 1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:
A. 6. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 4.
- Câu 53:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(1; -1; 2)$. Diện tích tam giác OAB bằng
A. $\sqrt{11}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$. **D.** $\sqrt{6}$.
- Câu 54:** Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(-1; 1; 0)$, $D(-2; 1; 2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng
A. $\frac{42}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{21}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

- Câu 55:** Trong không gian $Oxyz$, tính diện tích S của tam giác ABC , biết $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$.
- A. $S = \frac{\sqrt{61}}{3}$. B. $S = \frac{\sqrt{61}}{2}$. C. $S = 2\sqrt{61}$. D. $S = \sqrt{61}$.
- Câu 56:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $O(0;0;0)$, $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tất cả giá trị của m để 4 điểm O, A, B, C đồng phẳng?
- A. $m = 14$. B. $m = -14$. C. $m = 7$. D. $m = -7$.
- Câu 57:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $A.BCD$ có $A(0;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(1;-1;0)$ và $D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.
- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 58:** Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là
- A. $2\sqrt{87}$. B. $\frac{\sqrt{349}}{2}$. C. $\sqrt{349}$. D. $\sqrt{87}$.
- Câu 59:** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3)$, $B(1;0;2)$, $C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng
- A. $x + y = 1$. B. $x + y = 17$. C. $x + y = -\frac{11}{5}$. D. $x + y = \frac{11}{5}$.
- Câu 60:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 4; n = -3$. C. $m = 1; n = 0$. D. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.
- Câu 61:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.
- A. $x = 4; y = 7$ B. $x = -4; y = -7$ C. $x = 4; y = -7$ D. $x = -4; y = 7$
- Câu 62:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là
- A. $M(4;-5;0)$. B. $M(2;-3;0)$. C. $M(0;0;1)$. D. $M(4;5;0)$.
- Câu 63:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

- Câu 64:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là
- A. $|a|$. B. $2|a|$. C. $3|a|$. D. $\frac{3}{2}|a|$.
- Câu 65:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?
- A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- Câu 66:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với: $\vec{AB} = (1;-2;2)$; $\vec{AC} = (3; -4; 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là:
- A. 29. B. $\sqrt{29}$. C. $\frac{\sqrt{29}}{2}$. D. $2\sqrt{29}$.
- Câu 67:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2;m-1;3)$, $\vec{b} = (1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. B. $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. C. $m = 4; n = -3$. D. $m = 1; n = 0$.
- Câu 68:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\vec{CA} + \vec{CB}|$ bằng:
- A. $10\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{6}$. D. $5\sqrt{10}$.
- Câu 69:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- A. $D(-4;-2;9)$. B. $D(-4;2;9)$. C. $D(4;-2;9)$. D. $D(4;2;-9)$.
- Câu 70:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành?
- A. $D(2;0;0)$. B. $D(1;1;1)$. C. $D(0;0;1)$. D. $D(0;2;1)$.
- Câu 71:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- A. $D(-2;8;-3)$ B. $D(-4;8;-5)$ C. $D(-2;2;5)$ D. $D(-4;8;-3)$
- Câu 72:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , Tam giác ABC với $A(1;-3;3)$; $B(2;-4;5)$, $C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a+b+c$ bằng.
- A. -5 B. 3 C. 1 D. -2
- Câu 73:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$ Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\vec{CE} = 2\vec{EB}$ thì tọa độ điểm E là:
- A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ B. $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. C. $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ D. $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$
- Câu 74:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là

A. $\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **B.** $(4; 5; -9)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; -5; \frac{17}{2}\right)$. **D.** $(1; -7; 12)$.

Câu 75: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -2)$ và $B(3; -1; 1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9; -5; 7)$. **B.** $M(9; 5; 7)$.
C. $M(-9; 5; -7)$. **D.** $M(9; -5; -5)$.

Câu 76: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2; 5; 0)$. **B.** $B(0; -1; -2)$. **C.** $B(0; 1; 2)$. **D.** $B(-2; -5; 0)$

Câu 77: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết

$I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a - b + c$ bằng

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

Câu 78: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 79: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1)$, $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

A. $I(1; 1; 1)$. **B.** $I(0; 1; 1)$. **C.** $I(0; -1; -1)$. **D.** $I(1; 0; 1)$.

Câu 80: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Gọi $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a + b + 2c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 81: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{AM}{BM} = 2$ **C.** $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ **D.** $\frac{AM}{BM} = 3$

Câu 82: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

A. $D(-12; -1; 3)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. **C.** $D(8; 7; -1)$. **D.** $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$.

Câu 83: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1; 2; 1)$, $B(2; 0; -1)$, $C(6; 1; 0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a; b; c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 84: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là
A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Câu 85: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.
A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.

Câu 86: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là
A. $(1;1;-2)$. **B.** $(2;1;-2)$. **C.** $(1;2;-1)$. **D.** $(2;1;-1)$.

Câu 87: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là
A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 11; 1)$.

Câu 88: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.
A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. **B.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. **C.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. **D.** $M(4;-3;8)$.

Câu 89: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C' .
A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Câu 90: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.
A. $T = 8$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = 14$.

Câu 91: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.
A. $M(0;0;3)$. **B.** $M(0;0;-3)$. **C.** $M(-8;-4;7)$. **D.** $M(8;4;-7)$.

Câu 92: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$
A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Câu 93: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a+2b+c$?
A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

- Câu 94:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .
- A. $m = 2$. B. $m = 2 \pm \sqrt{6}$. C. $m = 2 - \sqrt{6}$. D. $m = 2 + \sqrt{6}$.
- Câu 95:** Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 5.
- Câu 96:** Biết $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$. Khẳng định nào đúng?
- A. $5z - x = 0$. B. $7x - y = 0$. C. $5z + x = 0$. D. $7x + y = 0$.
- Câu 97:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$
- A. $\sqrt{19}$. B. -5 . C. 7. D. $\sqrt{39}$.
- Câu 98:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
- A. $m = -6$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 2$.
- Câu 99:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-5; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; 1)$, $\vec{c} = (m; 3; -1)$. Giá trị của m sao cho $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$ là
- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.
- Câu 100:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$. Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.
- A. $\vec{p} = (9; -12; 0)$. B. $\vec{p} = (45; -60; 0)$. C. $\vec{p} = (0; 9; -12)$. D. $\vec{p} = (0; 45; -60)$.
- Câu 101:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; -2; 2-a)$; $B(a+3; -1; 1)$; $C(-4; -3; 0)$; $D(-1; -2; a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?
- A. $(-7; -2)$. B. $(3; 6)$. C. $(5; 8)$. D. $(-2; 2)$.
- Câu 102:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3; -2; m)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(0; 0; 3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.
- A. $m = 8$. B. $m = 4$. C. $m = 12$. D. $m = 6$.
- Câu 103:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 1; 2)$, $\vec{v} = (-1; m; m-2)$. Khi $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = \sqrt{14}$ thì
- A. $m = 1$ hoặc $m = -\frac{11}{5}$ B. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{11}{3}$
 C. $m = 1$ hoặc $m = -3$ D. $m = -1$
- Câu 104:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; -1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(2; -1; 3)$, $D \in Oy$ và có thể tích bằng 5. Tính tổng tung độ của các điểm D .
- A. -6 B. 2 C. 7 D. -4

Câu 105: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$, $D(-2; m; n)$. Trong các hệ thức liên hệ giữa m và n dưới đây, hệ thức nào để bốn điểm A , B , C , D đồng phẳng?

- A.** $2m + n = 13$. **B.** $2m - n = 13$. **C.** $m + 2n = 13$. **D.** $2m - 3n = 10$.

Câu 106: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC là

- A.** $\frac{\sqrt{11}}{11}$. **B.** 1. **C.** 11. **D.** $\sqrt{11}$.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM TOẠ ĐỘ ĐIỂM, VÉC TƠ LIÊN QUAN ĐẾN HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ $Oxyz$

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A.** $M(3;4;0)$. **B.** $P(-2;0;3)$. **C.** $Q(2;0;0)$. **D.** $N(0;4;-1)$.

Lời giải

Mặt phẳng tọa độ (Oyz) có phương trình là $x = 0 \Rightarrow N(0;4;-1) \in (Oyz)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oxy) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A.** $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Lời giải

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng (Oxy) là $M'(4;5;0)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oxz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A.** $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Lời giải

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng (Oxz) là $M'(4;0;6)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A.** $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Lời giải

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng (Oyz) là $M'(0;5;6)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M trên trục Ox là M' . Xác định tọa độ M' .

- A.** $M'(4;5;0)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;6)$.

Lời giải

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng Ox là $M'(4;0;0)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M trên trục Oy là M' . Xác định tọa độ M' .

- A.** $M'(0;0;6)$. **B.** $M'(4;0;6)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(0;5;0)$.

Lời giải

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng Oy là $M'(0;5;0)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4;5;6)$. Hình chiếu của M trên trục Oz là M' . Xác định tọa độ M' .

- A.** $M'(0;0;6)$. **B.** $M'(0;5;0)$. **C.** $M'(4;0;0)$. **D.** $M'(4;5;0)$.

Lời giải

Hình chiếu của $M(4;5;6)$ xuống mặt phẳng Oz là $M'(4;0;0)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- A.** $(0;2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(-1;2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow H(0;2;3)$

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oyz)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(-1;2;3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oxz) là

- A.** $(1;-2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(-1;2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oxz) \Rightarrow H(1;0;3)$

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oxz)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(1;-2;3)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oxy) là

- A.** $(0;2;3)$. **B.** $(-1;-2;-3)$. **C.** $(-1;2;3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow H(1;2;0)$

Gọi M' là điểm đối xứng với $M(1;2;3)$ qua mặt phẳng (Oxy)

$\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow M'(1;2;-3)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- A.** $A'(2;3;5)$. **B.** $A'(2;-3;-5)$. **C.** $A'(-2;-3;5)$. **D.** $A'(-2;-3;-5)$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2;-3;5)$ lên Oy . Suy ra $H(0;-3;0)$

Khi đó H là trung điểm đoạn AA' .

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -3 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -5 \end{cases} \Rightarrow A'(-2;-3;-5).$$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1;2;3); \vec{b}(2;2;-1); \vec{c}(4;0;-4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A.** $\vec{d}(-7;0;-4)$ **B.** $\vec{d}(-7;0;4)$ **C.** $\vec{d}(7;0;-4)$ **D.** $\vec{d}(7;0;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c} = (1-2+2.4; 2-2+2.0; 3+1+2.(-4)) = (7;0;-4)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

- A.** $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a} - \vec{b} = (2-1; 3-1; 2+1) = (1;2;3)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;-3;3)$, $\vec{b} = (0;2;-1)$, $\vec{c} = (3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A.** $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a} = (4;-6;6)$, $3\vec{b} = (0;6;-3)$, $-2\vec{c} = (-6;2;-10) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2;2;-7)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A.** $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Lời giải

$\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{a}(-1;2;-3)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;-3;3)$, $\vec{b} = (0;2;-1)$, $\vec{c} = (3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A.** $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Lời giải

Có $2\vec{a} = (4; -6; 6)$; $3\vec{b} = (0; 6; -3)$; $-2\vec{c} = (-6; 2; -10)$.

Khi đó: $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (-2; 2; -7)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- A.** $\vec{a} = (4; 1; -1)$. **B.** $\vec{a} = (3; 1; -4)$. **C.** $\vec{a} = (0; 1; -1)$. **D.** $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{y} = (2; 0; -2)$.

$$\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y} = (2 + 2; 1 + 0; -3 - 2) = (4; 1; -5).$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- A.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$. **B.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.
C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$. **D.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

Lời giải

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ vectơ $\vec{u}$ là

- A.** $(-2; 3; 1)$. **B.** $(2; 3; -1)$. **C.** $(2; -3; -1)$. **D.** $(2; 3; 1)$.

Lời giải

Theo định nghĩa ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Do đó, $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (2; 3; -1)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A.** $(1; 7; 2)$. **B.** $(1; 5; 2)$. **C.** $(3; 7; 2)$. **D.** $(1; 7; 3)$.

Lời giải

Có $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, gọi $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2.1 + (-1) = 1 \\ c_2 = 2.2 + 3 = 7 \\ c_3 = 2.1 + 0 = 2 \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = (1; 7; 2)$

Câu 21: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là:

- A.** $\vec{a}(-1; 2; -3)$. **B.** $\vec{a}(2; -3; -1)$. **C.** $\vec{a}(-3; 2; -1)$. **D.** $\vec{a}(2; -1; -3)$.

Lời giải

Chọn A

+) Ta có $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(x; y; z)$ nên $\vec{a}(-1; 2; -3)$. Do đó **Chọn A**

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A.** 6. **B.** 11. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 6; 2)$.

Vậy $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 2\sqrt{11}$.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(0; 1; -1), B(2; 3; 2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(2; 2; 3)$. **B.** $(1; 2; 3)$. **C.** $(3; 5; 1)$. **D.** $(3; 4; 1)$.

Lời giải

Hai điểm $A(0; 1; -1), B(2; 3; 2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là $(2; 2; 3)$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho $A(2; -1; 0)$ và $B(1; 1; -3)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(3; 0; -3)$. **B.** $(-1; 2; -3)$. **C.** $(-1; -2; 3)$. **D.** $(1; -2; 3)$.

Lời giải

$A(2; -1; 0), B(1; 1; -3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1 - 2; 1 + 1; -3 - 0) = (-1; 2; -3)$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz cho $A(2; -2; 1), B(1; -1; 3)$. Tọa độ vecto $\overrightarrow{AB}$ là:

- A.** $(-1; 1; 2)$. **B.** $(-3; 3; -4)$. **C.** $(3; -3; 4)$. **D.** $(1; -1; -2)$

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 2)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; -3; 1), B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

- A.** 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (2; 3; -3) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$.

Câu 27: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; -2; -1), B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- A.** $2\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{6}$ **C.** 3 **D.** $2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $AB = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;3;5)$, $B(2;2;3)$. Độ dài đoạn AB bằng

- A.** $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{6}.$$

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A.** $I(1;0;4)$. **B.** $I(2;0;8)$. **C.** $I(2;-2;-1)$. **D.** $I(-2;2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ trung điểm I của đoạn AB với $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$ được tính bởi

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1;0;4)$$

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;3;2)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

- A.** $I(2;-4;2)$. **B.** $I(4;2;6)$. **C.** $I(-2;-1;-3)$. **D.** $I(2;1;3)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;3).$$

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A.** $(1;3;2)$. **B.** $(2;-1;5)$. **C.** $(2;-1;-5)$. **D.** $(2;6;4)$.

Lời giải

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB, \text{ ta có: } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow M(2;-1;5).$$

Câu 32: Trong không gian cho hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3), B(-1;2;5), C(0;0;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A.** $G(0;0;3)$. **B.** $G(0;0;9)$. **C.** $G(-1;0;3)$. **D.** $G(0;0;1)$.

Lời giải

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC bằng

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1-1+0}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2+2+0}{3} = 0 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{3+5+1}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0;0;3)$$

Câu 33: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;3;4), B(2;-1;0), C(3;1;2)$.

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A.** $G(2;1;2)$. **B.** $G(6;3;6)$. **C.** $G\left(3;\frac{2}{3};3\right)$. **D.** $G(2;-1;2)$.

Lời giải

Toạ độ trọng tâm G là

$$\begin{cases} x_G = \frac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{3-1+1}{3} = 1 \\ z_G = \frac{4+0+2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(2;1;2).$$

Câu 34: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5;-2;0), B(-2;3;0), C(0;2;3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ:

- A.** $(1;2;1)$. **B.** $(2;0;-1)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $(1;1;-2)$.

Lời giải

Giả sử $G(x, y, z)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+(-2)+0}{3} = 1 \\ y = \frac{-2+3+2}{3} = 1 \\ z = \frac{0+0+3}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(1;1;1).$$

DẠNG 2. TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

Lời giải

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3.2 + 0.1 + 1.0 = 6$.

Câu 36: Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1; 3)$.

Do đó, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.2 + 3.(-1) = -1$.

Câu 37: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

- A. 12. B. 2. C. 11. D. 10.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1.(-2) + (-1).1 + 5.2 = 11$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3); B(-1; 2; 1); C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. -6. B. -14. C. 14. D. 6.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; -2); \overrightarrow{AC} = (2; -3; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6$

Câu 39: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

- A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$ B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$ C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

Khi đó: $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-3.2 + 5.2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 60° . C. 150° . D. 30° .

Lời giải

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

Câu 41: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 12}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2 + 12^2}} = \frac{-3}{13}.$$

Câu 42: Trong không gian tọa độ Oxyz góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- A. 120° . B. 30° . C. 60° . D. 150° .

Lời giải

Ta có $\vec{i} = (1; 0; 0)$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{i}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{i}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } (\vec{u}, \vec{i}) = 150^\circ.$$

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$.

Diện tích của tam giác ABC bằng:

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 1; 1) \Rightarrow (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$.

$$\text{Nên diện tích tam giác ABC là } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 44: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$ và $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{3}{13}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $-\frac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-15}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 12^2}} = -\frac{3}{13}.$$

Câu 45: Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là

- A. 120° . B. 45° . C. 135° . D. 60° .

Lời giải

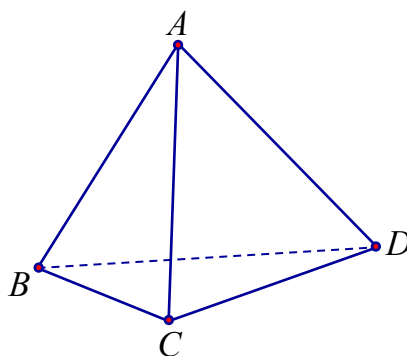
Chọn C

$$\text{Ta có } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ.$$

Câu 46: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $AB \perp BD$. B. $AB \perp BC$. C. $AB \perp AC$. D. $AB \perp CD$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 0; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 0; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 \neq 0 \Rightarrow AB$ và AC không vuông góc.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$ cho 2 vectơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- A. $m = -5$. B. $m = 5$. C. $m = 1$. D. $m = -2$

Lời giải

$$(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 48: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- A. $m = 4$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \Leftrightarrow 3 - m = 1 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Côsin của góc BAC bằng

- A. $\frac{9}{\sqrt{35}}$. B. $\frac{9}{2\sqrt{35}}$. C. $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. D. $-\frac{9}{\sqrt{35}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \text{ với } \overrightarrow{AB} = (1; 5; -2), \overrightarrow{AC} = (5; 4; -1).$$

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1.5 + 5.4 + (-2)(-1)}{\sqrt{1^2 + 5^2 + (-2)^2} \sqrt{5^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{27}{\sqrt{30}\sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}$$

DẠNG 3. TÍCH CÓ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vector $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ là tích có hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\vec{c} = (2; 6; -1)$. B. $\vec{c} = (4; 6; -1)$. C. $\vec{c} = (4; -6; -1)$. D. $\vec{c} = (2; -6; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tính tích có hướng trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ ta được:

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2; -6; -1)$$

Vậy chọn đáp án D

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vector $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 0; 3)$ là

- A. $(2; 3; -1)$. B. $(3; 5; -2)$. C. $(2; -3; -1)$. D. $(3; -5; -1)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } [\vec{a}, \vec{b}] = (3; -5; -1).$$

Câu 52: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-2; 1; 3)$ và $D(0; 1; 1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:

- A. 6. B. 8. C. 12. D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; 2; 3); \overrightarrow{AC} = (-3; 3; 3); \overrightarrow{AD} = (-1; 3; 1).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; -12; 9);$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = (-3) \cdot (-1) + (-12) \cdot 3 + 9 \cdot 1 = -24.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |-24| = 4.$$

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(1; -1; 2)$. Diện tích tam giác OAB bằng

- A. $\sqrt{11}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. D. $\sqrt{6}$.

Lời giải

$$[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-1; -3; -1)$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{1+9+1} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;2)$, $B(1;-1;-2)$, $C(-1;1;0)$, $D(-2;1;2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A.** $\frac{42}{3}$. **B.** $\frac{14}{3}$. **C.** $\frac{21}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AC} = (-3;1;-2); \overrightarrow{AB} = (-1;-1;-4); \overrightarrow{AD} = (-4;1;0).$$

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-6;-10;4).$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện là: } V = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |14| = \frac{7}{3}.$$

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$, tính diện tích S của tam giác ABC , biết $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$ và $C(0;0;4)$.

- A.** $S = \frac{\sqrt{61}}{3}$. **B.** $S = \frac{\sqrt{61}}{2}$. **C.** $S = 2\sqrt{61}$. **D.** $S = \sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} = (-2;3;0), \overrightarrow{AC} = (-2;0;4), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12;8;6).$$

$$\text{Ta có } |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2S.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{61}.$$

Câu 56: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $O(0;0;0)$, $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tất cả giá trị của m để 4 điểm O, A, B, C đồng phẳng?

- A.** $m = 14$. **B.** $m = -14$. **C.** $m = 7$. **D.** $m = -7$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} = (0;1;-2), \overrightarrow{OB} = (1;2;1), \overrightarrow{OC} = (4;3;m). \text{ Bốn điểm } O, A, B, C \text{ đồng phẳng}$$

$$\Leftrightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot m = 0 \Leftrightarrow m = 14.$$

$$\text{Vậy } m = 14.$$

Câu 57: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $ABCD$ có $A(0;1;-1)$, $B(1;1;2)$, $C(1;-1;0)$ và $D(0;0;1)$. Tính độ dài đường cao của hình chóp $ABCD$.

- A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Có } \overrightarrow{BC} &= (0; -2; -2), \overrightarrow{BD} = (-1; -1; -1), \overrightarrow{BA} = (-1; 0; -3); [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (0; 2; -2); \\ [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA} &= 6 \\ h_A &= \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BA}}|}{|\overrightarrow{[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 58: Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

- A.** $2\sqrt{87}$. **B.** $\frac{\sqrt{349}}{2}$. **C.** $\sqrt{349}$. **D.** $\sqrt{87}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-2; -3; 8) \text{ và } \overrightarrow{AC} = (-1; 0; 6) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-18; 4; -3).$$

$$\text{Vậy: } S_{ABCD} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}.$$

Câu 59: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 2; -3)$, $B(1; 0; 2)$, $C(x; y; -2)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

- A.** $x + y = 1$. **B.** $x + y = 17$. **C.** $x + y = -\frac{11}{5}$. **D.** $x + y = \frac{11}{5}$.

Lời giải

$$\text{Có } \overrightarrow{AB} = (2; -2; 5), \overrightarrow{AC} = (x + 1; y - 2; 1).$$

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x + y = 1.$$

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (2; m - 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

- A.** $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 4; n = -3$. **C.** $m = 1; n = 0$. **D.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng hướng} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ m = 7 \\ n = -\frac{3}{4} \end{cases}. \text{ Vậy } m = 7; n = -\frac{3}{4}$$

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 5)$, $B(5; -5; 7)$, $M(x; y; 1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

- A.** $x = 4; y = 7$ **B.** $x = -4; y = -7$ **C.** $x = 4; y = -7$ **D.** $x = -4; y = 7$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 2)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+1; -4)$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}.$$

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

- A.** $M(4; -5; 0)$. **B.** $M(2; -3; 0)$. **C.** $M(0; 0; 1)$. **D.** $M(4; 5; 0)$.

Lời giải

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$; $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1)$; $\overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; -1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy $M(4; -5; 0)$.

Câu 63: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = (m; 2; m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\vec{u} = (2; -2; 1)$

Khi đó $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$ và $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 2^2 + (m+1)^2} = \sqrt{2m^2 + 2m + 5}$

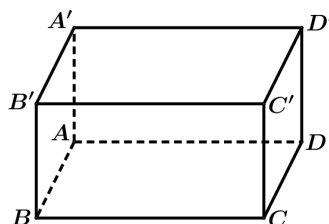
$$\text{Do đó } |\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow 9 = 2m^2 + 2m + 5 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$; $D(0; 2a; 0)$, $A'(0; 0; 2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

- A.** $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 2a; 0)$; $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} = (a; 2a; 2a)$.

Suy ra $AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = 3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC' = 3|a|$.

Câu 65: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (-1; 5; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; 3)$ và $\vec{x} = (-3; 22; 5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

- A.** $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.
C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. **D.** $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Đặt: $\vec{x} = m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c}$, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow (-3; 22; 5) = m.(2; 3; 1) + n.(-1; 5; 2) + p.(4; -1; 3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n + 4p = -3 \\ 3m + 5n - p = 22 \\ m + 2n + 3p = 5 \end{cases} \quad (I).$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \\ p = -1 \end{cases}$.

Vậy $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

Câu 66: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với: $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 2)$; $\overrightarrow{AC} = (3; -4; 6)$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là:

- A.** 29. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\frac{\sqrt{29}}{2}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Lời giải

Ta có

$$AB^2 = 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9, \quad AC^2 = 3^2 + (-4)^2 + 6^2 = 61, \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1.3 + (-2)(-4) + 2.6 = 23.$$

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2.\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 61 + 9 - 2.23 = 24.$$

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có:

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9 + 61}{2} - \frac{24}{4} = 29.$$

Vậy $AM = \sqrt{29}$.

Câu 67: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; m-1; 3)$, $\vec{b} = (1; 3; -2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

A. $m = 7; n = -\frac{3}{4}$. **B.** $m = 7; n = -\frac{4}{3}$. **C.** $m = 4; n = -3$. **D.** $m = 1; n = 0$.

Lời giải

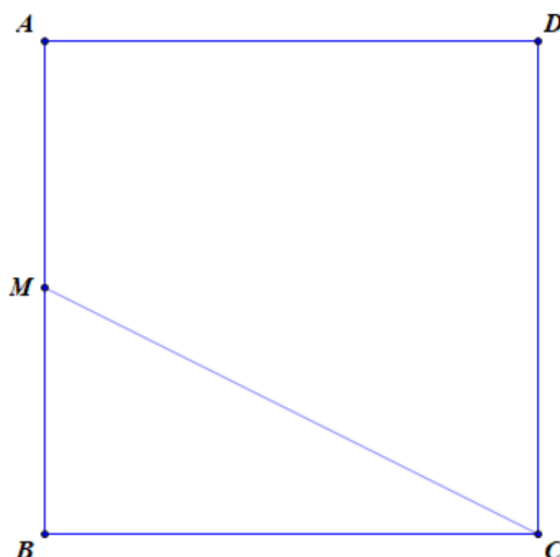
Các vector $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 3k \\ 3 = k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m - 1 = 6 \\ 3 = 2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = k \\ m = 7 \\ n = \frac{-3}{4} \end{cases}.$$

Câu 68: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\vec{CA} + \vec{CB}|$ bằng:

A. $10\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Lời giải



$$\vec{BD} = (-8; -4; -8) \Rightarrow BD = 12 \Rightarrow AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow MC = 3\sqrt{10}$.

$$|\vec{CA} + \vec{CB}| = |2\vec{CM}| = 2CM = 6\sqrt{10}.$$

Câu 69: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(-4;2;9)$. **C.** $D(4;-2;9)$. **D.** $D(4;2;-9)$.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; 3; -7) = (-3-x; 1-y; 2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4; -2; 9).$$

Câu 70: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(1;1;0), C(0;1;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành?

- A.** $D(2;0;0)$. **B.** $D(1;1;1)$. **C.** $D(0;0;1)$. **D.** $D(0;2;1)$.

Lời giải

Gọi $D(x; y; z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (x-1; y; z)$ và $\overrightarrow{BC} = (-1; 0; 1)$.

Suy ra $x = 0; y = 0; z = 1$.

Vậy $D(0;0;1)$.

Câu 71: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A.** $D(-2;8;-3)$ **B.** $D(-4;8;-5)$ **C.** $D(-2;2;5)$ **D.** $D(-4;8;-3)$

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x_D; y_D; z_D)$ cần tìm

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \\ z_B - z_A = z_C - z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1 = -3-x_D \\ -1-2 = 5-y_D \\ 3-(-1) = 1-z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 8 \\ z_D = -3 \end{cases}.$$

Suy ra: $D(-4;8;-3)$.

Câu 72: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, Tam giác ABC với $A(1;-3;3); B(2;-4;5), C(a;-2;b)$ nhận điểm $G(1;c;3)$ làm trọng tâm của nó thì giá trị của tổng $a+b+c$ bằng.

- A.** -5 **B.** 3 **C.** 1 **D.** -2

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} 1 = \frac{1+2+a}{3} \\ c = \frac{-3-4-2}{3} \\ 3 = \frac{3+5+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy $a+b+c = -2$

Câu 73: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$ Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3}; 3; -\frac{8}{3}\right)$ **C.** $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE} = (x-7; y-4; z+2)$; $2\overrightarrow{EB} = (2-2x; 4-2y; -6-2z)$

$$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 = 2-2x \\ y-4 = 4-2y \\ z+2 = -6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 74: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$, tọa độ điểm M là

A. $\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ **B.** $(4; 5; -9)$ **C.** $\left(\frac{3}{2}; -5; \frac{17}{2}\right)$ **D.** $(1; -7; 12)$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$. Vì M thuộc đoạn AB nên:

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2(2-x) \\ 1-y = -2(-3-y) \\ -2-z = -2(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 75: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9; -5; 7)$ **B.** $M(9; 5; 7)$ **C.** $M(-9; 5; -7)$ **D.** $M(9; -5; -5)$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x; y-1; z+2)$; $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 3)$.

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y-1 = -6 \\ z+2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -5 \\ z = 7 \end{cases}. \text{ Vậy } M(9; -5; 7).$$

Câu 76: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 3; 1)$ thì tọa độ của điểm B là:

- A. $B(2; 5; 0)$. B. $B(0; -1; -2)$. C. $B(0; 1; 2)$. D. $B(-2; -5; 0)$

Lời giải

Gọi $B(x; y; z)$

$$\text{Có } A(1; 2; -1) \quad \overrightarrow{AB} = (1; 3; 1) = (x-1; y-2; z+1) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2; 5; 0)$$

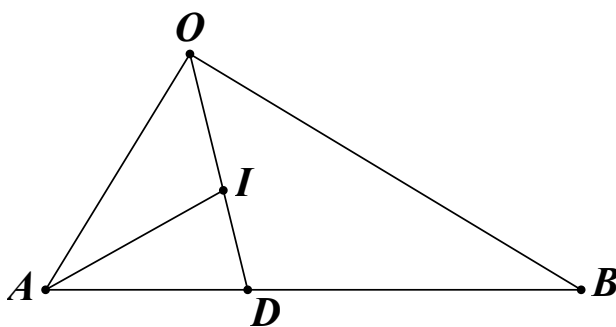
Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -2)$ và $B\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Biết

$I(a; b; c)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OAB . Giá trị $a-b+c$ bằng

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, do đó $OA = 3$, $OB = 4$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ O , ta có $\overrightarrow{DA} = -\frac{DA}{DB} \cdot \overrightarrow{DB} = -\frac{OA}{OB} \cdot \overrightarrow{DB}$, suy ra

$$\overrightarrow{DA} = -\frac{3}{4} \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{7}. \text{ Do đó } D\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}; 0\right).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AD} = \left(\frac{5}{7}; -\frac{2}{7}; 2\right) \Rightarrow AD = \frac{15}{7}.$$

$$\overrightarrow{ID} = -\frac{AD}{AO} \cdot \overrightarrow{IO} = -\frac{5}{7} \overrightarrow{IO} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{7}{12} \overrightarrow{OD} \Rightarrow D(1; 1; 0)$$

Do đó $a - b + c = 0$.

Câu 78: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2)$. Có tất cả bao nhiêu điểm M trong không gian thỏa mãn M không trùng với các điểm A, B, C và $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA .

Do $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 90^\circ$ nên các tam giác $\triangle AMB, \triangle BMC, \triangle CMA$ vuông tại M .

Khi đó $IM = \frac{AB}{2}; JM = \frac{BC}{2}; KM = \frac{AC}{2}$. Mặt khác $AB = BC = AC = 2\sqrt{2}$.

Vậy $MI = MJ = MK = \sqrt{2}$. Khi đó M thuộc trục của đường tròn ngoại tiếp đáy IJK và cách (IJK) một khoảng không đổi là $\sqrt{2}$. Khi đó có hai điểm M thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 79: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1), N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

- A.** $I(1; 1; 1)$. **B.** $I(0; 1; 1)$. **C.** $I(0; -1; -1)$. **D.** $I(1; 0; 1)$.

Lời giải

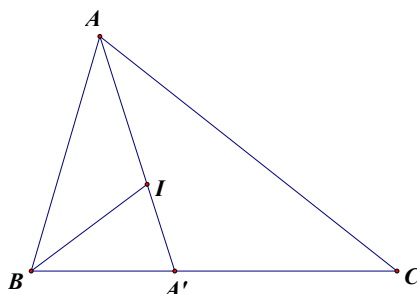
Chọn B

Ta có bài toán bài toán sau

Trong tam giác ABC , I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta có: $a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

với $BC = a; AC = b; AB = c$.

Thật vậy:



Gọi A' là chân đường phân giác trong kẻ từ A .

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA'} = \frac{c}{b} \overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow b \overrightarrow{BA'} + c \overrightarrow{CA'} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{IA} = \frac{c}{A'B} \overrightarrow{A'I} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} \overrightarrow{A'I} = \frac{b+c}{a} \overrightarrow{A'I} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + (b+c)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} + b\overrightarrow{BA'} + c\overrightarrow{CA'} = \vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \quad (do(1)).$$

Áp dụng công thức trọng tâm tam giác OMN

$$ta \text{ được } OM.\overrightarrow{IN} + ON.\overrightarrow{IM} + MN.\overrightarrow{IO} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{OM.x_N + ON.x_M + MN.x_O}{OM + ON + MN} = 0 \\ y_I = \frac{OM.y_N + ON.y_M + MN.y_O}{OM + ON + MN} = 1 \\ z_I = \frac{OM.z_N + ON.z_M + MN.z_O}{OM + ON + MN} = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm $I(0;1;1)$ là điểm cần tìm.

Câu 80: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC . Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. 5.

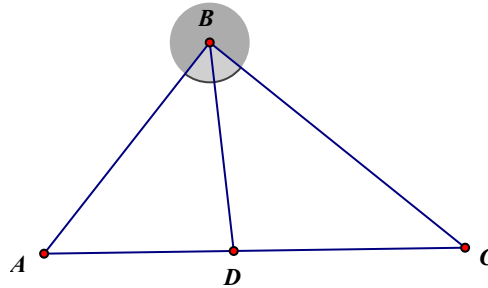
B. 4.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn A



$$Ta \text{ có } AB = \sqrt{26}, \quad BC = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

$$\text{Gọi } D(x;y;z), \text{ theo tính chất phân giác ta có } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} (*).$$

$$Ta \text{ có } \overrightarrow{DA} = (1-x; 2-y; -1-z) \text{ và } \overrightarrow{DC} = (-4-x; 7-y; 5-z).$$

$$\text{Do đó } (*) \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right) \Rightarrow a+b+2c = 5.$$

Câu 81: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A.** $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{AM}{BM} = 2$ **C.** $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$ **D.** $\frac{AM}{BM} = 3$

Lời giải

Chọn A

$M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB} = (7;3;1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$ và

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9;0;0).$$

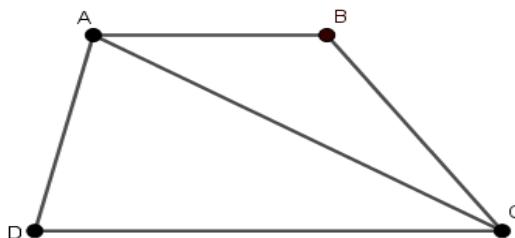
$$\overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2); \overrightarrow{AM} = (-7; -3; -1) \Rightarrow BM = 2AB.$$

Câu 82: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 3 lần diện tích tam giác ABC .

- A.** $D(-12;-1;3)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. **C.** $D(8;7;-1)$. **D.** $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}.$$

$$\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC.$$

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1), \overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12;-1;3)$.

Câu 83: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

- A.** $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; -2; -2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = 3; \overrightarrow{BC} = (4; 1; 1) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}.$$

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD+BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (AD+3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

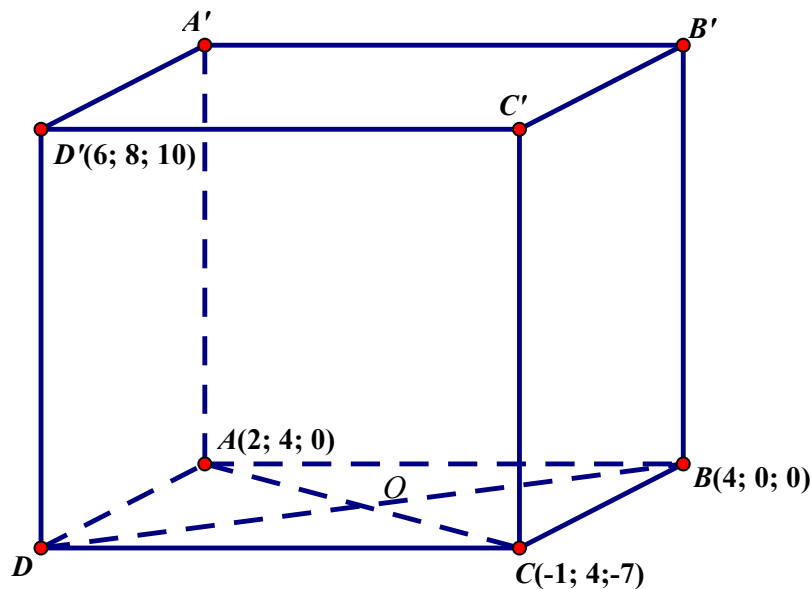
Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{Giả sử } D(a;b;c) \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 6.$$

Câu 84: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

- A.** $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Lời giải



Giả sử $D(a;b;c)$, $B'(a';b';c')$

$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2}; 4; \frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{DD'} = (9; 0; 17)$, $\overrightarrow{BB'} = (a' - 4; b'; c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BB'}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a' = 13 \\ b' = 0 \\ c' = 17 \end{cases}. \text{ Vậy } B'(13; 0; 17).$$

Câu 85: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

- A.** $A'(4; 6; -5)$. **B.** $A'(2; 0; 2)$. **C.** $A'(3; 5; -6)$. **D.** $A'(3; 4; -6)$.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'} = (3; 5; -6)$, $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (0; -1; 0)$.

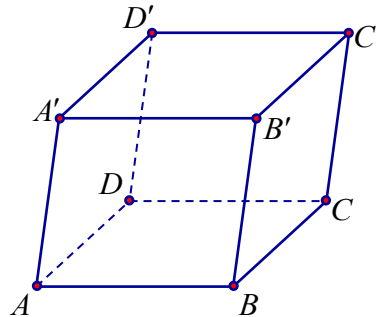
Do đó: $\overrightarrow{AA'} = (2; 5; -7)$.

Suy ra $A'(3; 5; -6)$.

Câu 86: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là

- A.** $(1; 1; -2)$. **B.** $(2; 1; -2)$. **C.** $(1; 2; -1)$. **D.** $(2; 1; -1)$.

Lời giải



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (x; y - 3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overrightarrow{A'D'} = (-x'; 3 - y'; -3 - z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 + 3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2).$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD' . Ta có $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Gọi $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DI} = 3\overrightarrow{IG} \text{ với } \begin{cases} \overrightarrow{DI} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{IG} = \left(a - \frac{3}{2}; b - \frac{3}{2}; c + \frac{3}{2}\right) \end{cases}. \text{ Do đó: } \begin{cases} \frac{3}{2} = 3\left(a - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(b - \frac{3}{2}\right) \\ -\frac{3}{2} = 3\left(c + \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$

Vậy $G(2; 1; -2)$.

Câu 87: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2; 11; 1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} = (-1; -3; 4) \Rightarrow |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{26}; \overrightarrow{BC} = (-6; 8; 2) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{26}.$$

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

$$\text{Suy ra: } \frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right).$$

Câu 88: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

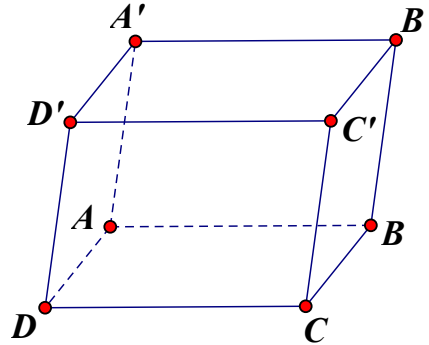
A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. **B.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. **C.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. **D.** $M(4; -3; 8)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - 3x_B}{1-3} = 4 \\ y_M = \frac{y_A - 3y_B}{1-3} = -3 \\ z_M = \frac{z_A - 3z_B}{1-3} = 8 \end{cases} \Rightarrow M(4; -3; 8).$$

- Câu 89:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C' .
- A.** $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Lời giải



Gọi $C'(x; y; z)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 0)$; $\overrightarrow{AD} = (0; 0; 1)$; $\overrightarrow{AA'} = (4; 2; 3)$.

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = (10; 4; 4) \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 3 \\ y = 4 - 0 \\ z = 4 - 0 \end{cases} \Rightarrow C'(13; 4; 4).$$

- Câu 90:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A.** $T = 8$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = 14$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0; 2; -2)$, $\overrightarrow{OB} = (2; 2; -4)$. (OAB) có phương trình: $x + y + z = 0$

$$I \in (OAB) \Rightarrow a + b + c = 0.$$

$$\overrightarrow{AI} = (a; b - 2; c + 2), \overrightarrow{BI} = (a - 2; b - 2; c + 4), \overrightarrow{OI} = (a; b; c).$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} AI = BI \\ AI = OI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (c + 2)^2 = (a - 2)^2 + (c + 4)^2 \\ (b - 2)^2 + (c + 2)^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 4 \\ -b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I(2; 0; -2) \Rightarrow T = a^2 + b^2 + c^2 = 8$$

- Câu 91:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 1)$, $B(-2; -1; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$.

- A.** $M(0; 0; 3)$. **B.** $M(0; 0; -3)$. **C.** $M(-8; -4; 7)$. **D.** $M(8; 4; -7)$.

Lời giải

Gọi điểm $M(x; y; z)$. Khi đó: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 2(-2-x) \\ y-2 = 2(-1-y) \\ z-1 = 2(4-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=3 \end{cases}$

Vậy $M(0; 0; 3)$.

Câu 92: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\Delta ABC}$

- A.** $D(8; 7; -1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8; -7; 1) \\ D(12; 1; -3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8; 7; -1) \\ D(-12; -1; 3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12; -1; 3)$.

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\Delta ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1)$.

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}$.

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

Câu 93: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5; 1; 5)$; $B(4; 3; 2)$; $C(-3; -2; 1)$. Điểm $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + 2b + c$?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 2; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (-7; -5; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B .

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC .

$\Rightarrow I\left(1; -\frac{1}{2}; 3\right)$. Vậy $a + 2b + c = 3$.

Câu 94: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u} = (1; 1; -2)$, $\vec{v} = (1; 0; m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45° .

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 2 \pm \sqrt{6}$. **C.** $m = 2 - \sqrt{6}$. **D.** $m = 2 + \sqrt{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 + (\vec{u}, \vec{v}) = 45^\circ &\Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)} = 1-2m \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ 3m^2+3 = 1-4m+4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2-4m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2-\sqrt{6}.
 \end{aligned}$$

Câu 95: Trong không gian $Oxyz$, cho các vec tơ $\vec{a} = (5; 3; -2)$ và $\vec{b} = (m; -1; m+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3m-9}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{2m^2+6m+10}}.$$

Góc giữa hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc tù khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}; \vec{b}) < 0 \Leftrightarrow 3m-9 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 96: Biết $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$. Khẳng định nào đúng?

- A.** $5z-x=0$. **B.** $7x-y=0$. **C.** $5z+x=0$. **D.** $7x+y=0$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có $\vec{c} = (x; y; z)$ khác $\vec{0}$ và vuông góc với cả hai vector $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 2; 3)$ nên

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4z=0 \\ -1x+2y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4z=0 \\ 5y+7z=0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1x+3y+4 \cdot \frac{-5}{7}y=0 \\ z=\frac{-5}{7}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=0 \\ 5y+7z=0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Câu 97: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau một góc 120° và $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 5$.

Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$

- A.** $\sqrt{19}$. **B.** -5 . **C.** 7 . **D.** $\sqrt{39}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } \left(|\vec{u} + \vec{v}| \right)^2 &= (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\vec{v} + \vec{v}^2 = |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}; \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \\
 &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + 5^2 = 19.
 \end{aligned}$$

Suy ra $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{19}$.

Câu 98: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$.
Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = -6$.

B. $m = 0$.

C. $m = -4$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{NM} = (3; 2; -2), \quad \overrightarrow{NP} = (2; m-2; 1).$$

Tam giác MNP vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot (m-2) - 2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 0$.

Câu 99: Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (-5; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; 1)$, $\vec{c} = (m; 3; -1)$. Giá trị của m sao cho $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$ là

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

$$[\vec{b}, \vec{c}] = (-5; m+1; 3-2m)$$

Ta có: $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}] \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=3 \\ 3-2m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Câu 100: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{m} = (4; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 0; 1)$. Gọi $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$. Biết $|\vec{p}| = 15$, tìm tọa độ vector $\vec{p}$.

A. $\vec{p} = (9; -12; 0)$.

B. $\vec{p} = (45; -60; 0)$.

C. $\vec{p} = (0; 9; -12)$.

D. $\vec{p} = (0; 45; -60)$.

Lời giải

Ta có: $[\vec{m}, \vec{n}] = (3; -4; 0)$

Do $\vec{p}$ là vector cùng hướng với $[\vec{m}, \vec{n}]$ nên $\vec{p} = k[\vec{m}, \vec{n}]$, $k > 0$

Mặt khác: $|\vec{p}| = 15 \Leftrightarrow k \cdot |[\vec{m}, \vec{n}]| = 15 \Leftrightarrow k \cdot 5 = 15 \Leftrightarrow k = 3$. Vậy $\vec{p} = (9; -12; 0)$.

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; -2; 2-a)$; $B(a+3; -1; 1)$; $C(-4; -3; 0)$; $D(-1; -2; a-1)$. Tập hợp các giá trị của a để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng là tập con của tập nào sau?

A. $(-7; -2)$.

B. $(3; 6)$.

C. $(5; 8)$.

D. $(-2; 2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(a+3; 1; a-1)$, $\overrightarrow{AC}(-4; -1; a-2)$, $\overrightarrow{AD}(-1; 0; 2a-3)$.

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2a-3; -a^2-5a+10; -a+1).$$

Để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow -2a+3+(2a-3) \cdot (-a+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 102: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m), B(2;0;0), C(0;4;0), D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

A. $m = 8$.

B. $m = 4$.

C. $m = 12$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{DA} = (3;-2;m-3), \overrightarrow{DB} = (2;0;-3), \overrightarrow{DC} = (0;4;-3)$.

$$\text{Thể tích tứ diện: } V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}] \cdot \overrightarrow{DA}| \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{6} |24 + 8(m-3)| \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 6 \end{cases}$$

Vì m dương nên $m = 6$.

Câu 103: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1;1;2), \vec{v} = (-1;m;m-2)$. Khi $[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{14}$ thì

A. $m = 1$ hoặc $m = -\frac{11}{5}$

B. $m = -1$ hoặc $m = -\frac{11}{3}$

C. $m = 1$ hoặc $m = -3$

D. $m = -1$

Lời giải

Chọn C

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (-m-2; -m; m+1) \Rightarrow \|\vec{u}, \vec{v}\| = \sqrt{(m+2)^2 + m^2 + (m+1)^2} = \sqrt{3m^2 + 6m + 5}$$

$$\|\vec{u}, \vec{v}\| = \sqrt{14} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 5 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

Câu 104: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1), B(3;0;-1), C(2;-1;3), D \in Oy$ và có thể tích bằng 5. Tính tổng tung độ của các điểm D .

A. -6

B. 2

C. 7

D. -4

Lời giải

Chọn A

Do $D \in Oy \Rightarrow D(0; y; 0)$, khi đó: $\overrightarrow{DA} = (2;-1-y;1), \overrightarrow{DB} = (3;-y;-1), \overrightarrow{DC} = (2;-1-y;3)$.

Khi đó $[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] = (1+2y; 5; y+3)$

$$\text{Và } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}] \cdot \overrightarrow{DC}| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+6=30 \\ 2y+6=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ y=-18 \end{cases}$$

Vậy $y_1 + y_2 = 12 - 18 = -6$.

Câu 105: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0), B(1;0;-1), C(0;-1;2), D(-2;m;n)$. Trong các hệ thức liên hệ giữa m và n dưới đây, hệ thức nào để bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng?

- A.** $2m + n = 13$. **B.** $2m - n = 13$. **C.** $m + 2n = 13$. **D.** $2m - 3n = 10$.

Lời giải

Ta tính

$$\overrightarrow{AB} = (0; 2; -1); \overrightarrow{AC} = (-1; 1; 2); \overrightarrow{AD} = (-3; m+2; n); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (5; 1; 2)$$

$$\text{Bốn điểm } A, B, C, D \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow m + 2n = 13$$

Câu 106: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC là

- A.** $\frac{\sqrt{11}}{11}$. **B.** 1. **C.** 11. **D.** $\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi DH là độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng ABC .

$$\text{Công thức tính thể tích tứ diện } ABCD \text{ là: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

$$\text{Công thức tính diện tích tam giác } S_{\triangle ABC} \text{ là: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|.$$

$$\text{Mặt khác } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot DH \text{ nên}$$

$$\frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| \cdot DH \Rightarrow DH = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (3; 0; 3); \overrightarrow{AC} = (1; 1; -2); \overrightarrow{AD} = (4; 1; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-3; 9; 3); [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -3.$$

$$\text{Nên } DH = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|}{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|} = \frac{3}{\sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{11}}{11}.$$



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH

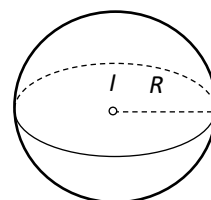
• Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng nhau và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

A. $I(-4;1;0), R=2$. B. $I(-4;1;0), R=4$. C. $I(4;-1;0), R=2$. D. $I(4;-1;0), R=4$.

Câu 2: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $R = \sqrt{3}$. B. $R = 3$. C. $R = 9$. D. $R = 3\sqrt{3}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) :

A. $I(-4;1;0), R=2$. B. $I(-4;1;0), R=4$. C. $I(4;-1;0), R=2$. D. $I(4;-1;0), R=4$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S)

A. $I(-3;1;-1)$. B. $I(3;1;-1)$. C. $I(-3;-1;1)$. D. $I(3;-1;1)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là:

A. $(-1; 2; 1)$. B. $(2; -4; -2)$. C. $(1; -2; -1)$. D. $(-2; 4; 2)$.

- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .
- A.** $R = 1$. **B.** $R = 7$. **C.** $R = \sqrt{151}$. **D.** $R = \sqrt{99}$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 1 = 0$ có tâm là
- A.** $(-4; 2; -6)$ **B.** $(2; -1; 3)$ **C.** $(-2; 1; -3)$ **D.** $(4; -2; 6)$
- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.
- A.** $I(-1; 2; -3); R = 2$. **B.** $I(-1; 2; -3); R = 4$. **C.** $I(1; -2; 3); R = 2$. **D.** $I(1; -2; 3); R = 4$.
- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Tính bán kính R của (S) .
- A.** 1. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là
- A.** $(-3; 1; -1)$. **B.** $(3; -1; 1)$. **C.** $(3; -1; -1)$. **D.** $(3; 1; -1)$.

DẠNG 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① **Dạng 1.** Cơ bản $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a; b; c) \\ \bullet \text{ BK : } R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$.

② **Dạng 2.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và đi qua điểm A .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet \text{ BK : } R = IA \end{cases}$

③ **Dạng 3.** Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I & \text{là trung điểm của } AB. \\ \bullet \text{ BK : } R = \frac{1}{2} AB \end{cases}$

- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7), B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là
- A.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$. **B.** $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$.
C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$. **D.** $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.
- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$.
- A.** $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 18$. **B.** $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16$.
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 16$. **D.** $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

- Câu 13:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(1;-1;3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là
- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$. B. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.
 C. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$. D. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8$.
- Câu 14:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A, B(-2;2;-3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là
- A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$. B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.
 C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$. D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 36$.
- Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$ B. $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$ D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;-3)$; $B(0;3;-1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là :
- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$ D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$
- Câu 17:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?
- A. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$. B. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$.
 C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$.
- Câu 18:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là
- A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$. B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.
 C. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$. D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$.
- Câu 19:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2;1;-2)$ bán kính $R=2$ là:
- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2^2$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$. D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$.
- Câu 20:** Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?
- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8$. B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8$.
 C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64$. D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64$.

- Câu 21:** Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:
- A.** $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 3$. **B.** $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 45$. **D.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$.
- Câu 22:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là
- A.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29$. **B.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$. **D.** $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5$.
- Câu 23:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là
- A.** $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$. **B.** $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$.
C. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$. **D.** $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.
- Câu 24:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(7;-2;2)$ và $B(1;2;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đường kính AB?
- A.** $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$. **B.** $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2\sqrt{14}$.
C. $(x-7)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 14$. **D.** $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 56$.
- Câu 25:** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $M(3;-2;5), N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:
- A.** $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$. **D.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH

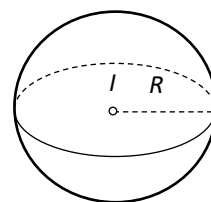
• Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng nhau và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

A. $I(-4;1;0), R=2$. **B.** $I(-4;1;0), R=4$. **C.** $I(4;-1;0), R=2$. **D.** $I(4;-1;0), R=4$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$.

Vậy mặt cầu (S) có tâm $I(4;-1;0)$ và bán kính $R=4$.

Câu 2: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $R=\sqrt{3}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=9$. **D.** $R=3\sqrt{3}$.

Lời giải

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Vậy bán kính của mặt cầu (S) là $R=3$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) :

A. $I(-4;1;0), R=2$. **B.** $I(-4;1;0), R=4$. **C.** $I(4;-1;0), R=2$. **D.** $I(4;-1;0), R=4$.

Lời giải

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow I(4; -1; 0)$$

$$R = 4.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S)

- A.** $I(-3; 1; -1)$. **B.** $I(3; 1; -1)$. **C.** $I(-3; -1; 1)$. **D.** $I(3; -1; 1)$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm là $I(-3; -1; 1)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là:

- A.** $(-1; 2; 1)$. **B.** $(2; -4; -2)$. **C.** $(1; -2; -1)$. **D.** $(-2; 4; 2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

Từ đó suy ra mặt cầu (S) có tâm là: $(-1; 2; 1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A.** $R = 1$. **B.** $R = 7$. **C.** $R = \sqrt{151}$. **D.** $R = \sqrt{99}$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

$$\text{Ta có } a = 4, b = -5, c = 3, d = 49. \text{ Do đó } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 1.$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 1 = 0$ có tâm là

- A.** $(-4; 2; -6)$ **B.** $(2; -1; 3)$ **C.** $(-2; 1; -3)$ **D.** $(4; -2; 6)$

Lời giải

Chọn B

Từ phương trình mặt cầu suy ra tâm của mặt cầu là $(2; -1; 3)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- A.** $I(-1; 2; -3); R = 2$. **B.** $I(-1; 2; -3); R = 4$. **C.** $I(1; -2; 3); R = 2$. **D.** $I(1; -2; 3); R = 4$.

Lời giải

Mặt cầu đã cho có tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Tính bán kính R của (S) .

- A. 1. B. 9. C. 2. **D. 3.**

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Ta có: $a = -2, b = 1, c = 0, d = -4 \Rightarrow$ Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = 3$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A. $(-3; 1; -1)$. **B. $(3; -1; 1)$.** C. $(3; -1; -1)$. D. $(3; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn B

Tâm của (S) có tọa độ là $(3; -1; 1)$.

DẠNG 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① **Dạng 1.** Cơ bản $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a; b; c) \\ \bullet \text{ BK : } R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$.

② **Dạng 2.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và đi qua điểm A .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet \text{ BK : } R = IA \end{cases}$

③ **Dạng 3.** Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I & \text{là trung điểm của } AB. \\ \bullet \text{ BK : } R = \frac{1}{2} AB \end{cases}$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7), B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

- A. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{45}$. B. $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 45$.
C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{45}$. **D. $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.**

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB ta có $I(-1; 3; 3)$ là tâm mặt cầu.

Bán kính $R = IA = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-3)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{45}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 45$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$.

A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

B. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 16$.

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 16$.

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Lời giải

Mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$ nên có bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 18$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(1; -1; 3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 8$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 8$.

Lời giải

Gọi I là tâm của mặt cầu đường kính AB .

Khi đó $I(1; 0; 2)$.

Bán kính của mặt cầu là: $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A, B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 36$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(0; 3; -1)$.

$\overrightarrow{IA} = (2; 1; 2) \Rightarrow IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$.

Mặt cầu đã cho có tâm I , đường kính AB nên có phương trình là $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$

B. $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0$

Lời giải

Chọn A

Đáp án B vì không có số hạng y^2 . Đáp án C loại vì có số hạng $2xy$. Đáp án D loại vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 1 + 4 - 8 = -2 < 0$.

Đáp án A thỏa mãn vì $a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + 0 + 4 + 1 = 6 > 0$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3)$; $B(0; 3; -1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là:

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 6$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$

Lời giải

Chọn D

Tâm I mặt cầu là trung điểm của AB

$$I(1; 1; -2) \text{ bán kính } R = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 4} = \frac{1}{2} \sqrt{24}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 6$$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

A. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0$.

B. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0$.

Lời giải

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình của một mặt cầu nếu $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Câu 18: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36$.

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.

C. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$.

D. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

Lời giải.

Tọa độ tâm mặt cầu là $I(3; 3; 1)$, bán kính $R = IA = 3$.

Câu 19: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2; 1; -2)$ bán kính $R = 2$ là:

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2^2$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$.

Lời giải

Phương trình mặt cầu tâm $I(2; 1; -2)$ bán kính $R = 2$ có hai dạng:

Chính tắc: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2^2$

Tổng quát: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.

Vậy đáp án đúng là **B**.

Câu 20: Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$?

A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 8.$

B. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8.$

C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 64.$

D. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 64.$

Lời giải

Vì mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$, đi qua điểm $B(0;1;2)$ nên mặt cầu (S) có tâm $A(2;1;0)$ và nhận độ dài đoạn thẳng AB là bán kính.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 0; 2)$. $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Suy ra: $R = 2\sqrt{2}$.

Vậy: $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 8.$

Vậy chọn đáp án **B**

Câu 21: Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2;3;4)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

A. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 3.$

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9.$

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 45.$

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3.$

Lời giải

Chọn D

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{3}$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(2;3;4)$ và $R = IA = \sqrt{3}$ là $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 3$

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $I(1;1;1)$ và $A(1;2;3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 29.$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25.$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 5.$

Lời giải

Chọn B

Bán kính của mặt cầu: $r = IA = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5.$

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;-1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$

B. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6.$

C. $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 9.$

D. $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 36.$

Lời giải

Chọn A

+ Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3;3;1)$.

$$\overline{AB}(4;2;-4) \Rightarrow AB = \sqrt{16+4+16} = 6$$

+ Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(3;3;1)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = 3$ có phương trình là:

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(7;-2;2)$ và $B(1;2;4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đường kính AB ?

A. $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$.

B. $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 2\sqrt{14}$.

C. $(x-7)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 14$.

D. $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 56$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu nhận AB làm đường kính, do đó mặt cầu nhận trung điểm $I(4;0;3)$ của AB làm tâm và có bán kính $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{56}$.

Suy ra phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 56$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Lời giải

Chọn D

Tâm I của mặt cầu là trung điểm đoạn $MN \Rightarrow I(1;2;1)$.

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{(-1-3)^2 + (6+2)^2 + (-3-5)^2}}{2} = 6.$$

Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH CỦA MẶT CẦU

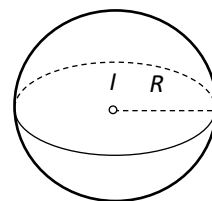
• Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng nhau và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

- A. 4 B. 6 C. 5 D. 7

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

- A. $1 < m < 2$. B. $m < 1$ hoặc $m > 2$. C. $-2 \leq m \leq 1$. D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

- A. $\{1; 10\}$. B. $\{2; -10\}$. C. $\{-1; 11\}$. D. $\{1; -11\}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $C(0;0;3)$, $B(0;2;0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

- A. $R = 2$. B. $R = \sqrt{3}$. C. $R = 3$. D. $R = \sqrt{2}$.

- Câu 6:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .
- A.** $l = 2\sqrt{13}$. **B.** $l = 2\sqrt{41}$. **C.** $l = 2\sqrt{26}$. **D.** $l = 2\sqrt{11}$.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là
- A.** $\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\sqrt{14}$.
- Câu 8:** Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S) .
- A.** $R = 2\sqrt{2}$. **B.** $R = 3$. **C.** $R = 6$. **D.** $R = \sqrt{6}$.
- Câu 9:** Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng
- A.** 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.
- Câu 10:** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.
- A.** $m < -5$ hoặc $m > 1$. **B.** $-5 < m < 1$. **C.** $m < -5$. **D.** $m > 1$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.
- A.** $I(3;-2;-1)$. **B.** $I(2;-1;0)$. **C.** $I(3;-2;1)$. **D.** $I(-3;-2;1)$.
- Câu 12:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu là
- A.** $(2;-1;0)$. **B.** $(-2;1;0)$. **C.** $(0;0;-2)$. **D.** $(0;0;0)$.
- Câu 13:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6;-12;18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là
- A.** $(9;18;-27)$. **B.** $(-3;-6;9)$. **C.** $(3;6;-9)$. **D.** $(-9;-18;27)$.
- Câu 14:** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2 = 4$ với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz . Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng
- A.** 40π . **B.** 4π . **C.** 20π . **D.** 36π .
- Câu 15:** Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;0;0)$, $B(0;-2;0)$, $C(0;0;-4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

- A.** 116π . **B.** $\frac{29\pi}{4}$. **C.** 29π . **D.** 16π .

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A.** $R = \sqrt{41}$. **B.** $R = \sqrt{15}$. **C.** $R = \sqrt{13}$. **D.** $R = \sqrt{26}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0;1;2)$ và tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. Bán kính của (S) bằng

- A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3;2;-2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) .

- A.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$. **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{70}{3}$.
C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{74}{3}$. **D.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{76}{3}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

- A.** $P = 6$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 9$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

- A.** $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$. **B.** $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

DẠNG 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① **Dạng 1. Cơ bản** $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a;b;c) \\ \bullet BK : R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$

② **Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và đi qua điểm A .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = IA \end{cases}$

③ **Dạng 3. Viết phương trình mặt cầu** (S) có đường kính AB , với A, B cho trước.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \text{ là trung điểm của } AB. \\ \bullet BK : R = \frac{1}{2} AB \end{cases}$

④ **Dạng 4. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = IM \end{cases}$ với M là hình chiếu của I lên trục hoặc mp tọa độ.

⑤ **Dạng 5. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = d[I;(P)] \end{cases}$

• Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ được xác định bởi

công thức:
$$d(M;(P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

⑥ **Dạng 6. Viết phương trình mặt cầu** (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D .

Phương pháp: Gọi $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C, D \in (S)$ nên tìm được 4 phương trình $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑦ **Dạng 7. Viết phương trình mặt cầu** (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm thuộc mp (P) .

Phương pháp: Gọi $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A, B, C \in (S)$ nên tìm được 3 phương trình và $I(a;b;c) \in (P)$ là phương trình thứ tư.

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑧ **Dạng 8. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r .

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $\boxed{R^2 = d^2_{[I;(P)]} + r^2}$ và cần nhớ $C = 2\pi r$ và $S_{\text{đt}} = \pi r^2$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I , cắt trục Ox tại

hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ là

A. $m = 5$.

B. $m = \sqrt{3}$.

C. $m = 3$.

D. $m = \sqrt{5}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

A. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$.

B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$.

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$.

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2), B(3; 2; -3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B có phương trình.

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 2 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1; 1; 1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6), D(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2; 1; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$. **D.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16$. **B.** $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$. **D.** $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) . Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$. **B.** $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 144$.

C. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36$. **D.** $(x+9)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 25$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$. **B.** $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$. **D.** $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2;2;1)$, $N\left(\frac{-8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

A. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$. **B.** $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. **D.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 = 81$. **B.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. **C.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. **D.** $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$. **B.** $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$. **D.** $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TÂM, BÁN KÍNH CỦA MẶT CẦU

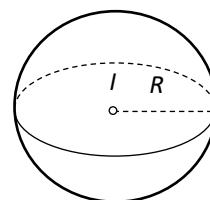
• Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và có bán kính R có phương trình $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

• Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình của mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

• Để một phương trình là một phương trình mặt cầu, cần thỏa mãn hai điều kiện:

Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng nhau và $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.



Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, có tất cả bao nhiêu giá nguyên của m để

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ là phương trình một mặt cầu?

A. 4

B. 6

C. 5

D. 7

Lời giải

Chọn D

Phương trình đã cho là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi

$$(m+2)^2 + (m-1)^2 - 3m^2 + 5 > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 10 < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$$

Theo bài ra $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow$ có 7 giá trị của m nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu.

A. $1 < m < 2$.

B. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

C. $-2 \leq m \leq 1$.

D. $m < -2$ hoặc $m > 1$.

Lời giải

Điều kiện để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my + 19m - 6 = 0$ là phương trình mặt cầu

là: $(m+2)^2 + 4m^2 - 19m + 6 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow m < 1$ hoặc $m > 2$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ là phương trình mặt cầu?

- A.** 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 2m)^2 + (y + m)^2 + (z - m)^2 = 28 - 3m^2 \quad (1).$$

$$(1) \text{ là phương trình mặt cầu } \Leftrightarrow 28 - 3m^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{28}{3}} < m < \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cầu (S) có phương trình dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Tập hợp các giá trị thực của a để (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π là

- A.** $\{1; 10\}$. **B.** $\{2; -10\}$. **C.** $\{-1; 11\}$. **D.** $\{1; -11\}$.

Lời giải

Đường tròn lớn có chu vi bằng 8π nên bán kính của (S) là $\frac{8\pi}{2\pi} = 4$.

Từ phương trình của (S) suy ra bán kính của (S) là $\sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a}$.

$$\text{Do đó: } \sqrt{2^2 + 1^2 + a^2 - 10a} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 11 \end{cases}.$$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $B(0; 2; 0)$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

- A.** $R = 2$. **B.** $R = \sqrt{3}$. **C.** $R = 3$. **D.** $R = \sqrt{2}$.

Lời giải

Giả sử $M(x; y; z)$.

$$\text{Ta có: } MA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2; MB^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2; MC^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2.$$

$$MA^2 = MB^2 + MC^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = (y-2)^2 + x^2 + (z-3)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2.$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là $R = \sqrt{2}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A.** $l = 2\sqrt{13}$. **B.** $l = 2\sqrt{41}$. **C.** $l = 2\sqrt{26}$. **D.** $l = 2\sqrt{11}$.

Lời giải

Gọi tâm mặt cầu là: $I(x; y; 0)$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y+3)^2 + 1^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + 4^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + 3^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 + 4^2 = (y+3)^2 + 1^2 \\ x^2 - 2x + 1 + 16 = x^2 - 4x + 4 + 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10 \\ 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow l = 2R = 2\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = 2\sqrt{26}. \end{aligned}$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(0;-3;0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì O, A, B, C thuộc (S) nên ta có:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 1 + 2a + d = 0 \\ 4 - 4c + d = 0 \\ 9 + 6b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Vậy bán kính mặt cầu (S) là: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 8: Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0), B(1;3;0), C(-1;0;3), D(1;2;3)$. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = 2\sqrt{2}$. **B.** $R = 3$. **C.** $R = 6$. **D.** $R = \sqrt{6}$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D . Khi đó:

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \\ AI^2 = DI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-3)^2 + c^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a+1)^2 + b^2 + (c-3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b=-3 \\ a-c=-1 \\ a-2b-3c=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$$

Bán kính: $R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Câu 9: Cho hai điểm A, B cố định trong không gian có độ dài AB là 4. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian sao cho $MA = 3MB$ là một mặt cầu. Bán kính mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. $\frac{9}{2}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có: $MA = 3MB \Leftrightarrow \overline{MA}^2 = 9\overline{MB}^2 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 = 9(\overline{MI} + \overline{IB})^2$
 $\Leftrightarrow IA^2 - 9IB^2 + 2\overline{MI}(\overline{IA} - 9\overline{IB}) = 8MI^2 \quad (1)$

Gọi I thỏa mãn $\overline{IA} - 9\overline{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{BI} = \frac{1}{8}\overline{AB}$ nên $IB = \frac{1}{2}; IA = \frac{9}{2}$.

Từ (1) suy ra $\Leftrightarrow 8MI^2 = 18 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$ suy ra $M \in S\left(I; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình trên là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m < -5$ hoặc $m > 1$. B. $-5 < m < 1$. C. $m < -5$. D. $m > 1$.

Lời giải

Ta có điều kiện xác định mặt cầu là $a^2 + b^2 > c^2$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 4m^2 + m^2 - 5m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 1 \end{cases}.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện đều $ABCD$ có $A(0;1;2)$ và hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (BCD) là $H(4;-3;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $I(3;-2;-1)$. B. $I(2;-1;0)$. C. $I(3;-2;1)$. D. $I(-3;-2;1)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c) \Rightarrow \overline{IA} = (-a; 1-b; 2-c); \overline{IH} = (4-a; -3-b; -2-c)$

$ABCD$ là tứ diện đều nên tâm I của mặt cầu ngoại tiếp trùng với trọng tâm tứ diện

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IH} \Rightarrow \begin{cases} -a = -3(4-a) \\ 1-b = -3(-3-b) \\ 2-c = -3(-2-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow I(3; -2; -1).$$

- Câu 12:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm nằm trên mặt phẳng Oxy và đi qua ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tọa độ tâm (I) của mặt cầu là
- A.** $(2; -1; 0)$. **B.** $(-2; 1; 0)$. **C.** $(0; 0; -2)$. **D.** $(0; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi tâm $I(a; b; c)$ và phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Do $I \in (Oxy) \Leftrightarrow c = 0 \Leftrightarrow (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by + d = 0$.

Ta có: $\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 4b - d = 21 \\ 2a - 6b - d = 11 \\ 4a + 4b - d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ d = -21 \end{cases}$.

Vậy $I(-2; 1; 0)$.

- Câu 13:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn tam giác ABC có trọng tâm là điểm $G(-6; -12; 18)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

- A.** $(9; 18; -27)$. **B.** $(-3; -6; 9)$. **C.** $(3; 6; -9)$. **D.** $(-9; -18; 27)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi tọa độ các điểm trên ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \frac{a}{3} = -6 \\ \frac{b}{3} = -12 \\ \frac{c}{3} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -18 \\ b = -36 \\ c = 54 \end{cases}$.

Gọi phương trình mặt cầu (S) cần tìm là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + q = 0$. Vì (S) qua các điểm O, A, B, C nên ta có hệ:

$$\begin{cases} q = 0 \\ 36m + q = -18^2 \\ 72n + q = -36^2 \\ -108p + q = -54^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -9 \\ n = -18 \\ p = 27 \\ q = 0 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ tâm mặt cầu (S) là $(-9; -18; 27)$.

Câu 14: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha)^2 + (y - \cos \beta)^2 + (z - \cos \gamma)^2 = 4$ với α, β và γ lần lượt là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia Ox, Oy và Oz . Biết rằng mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định. Tổng diện tích của hai mặt cầu cố định đó bằng

A. 40π .

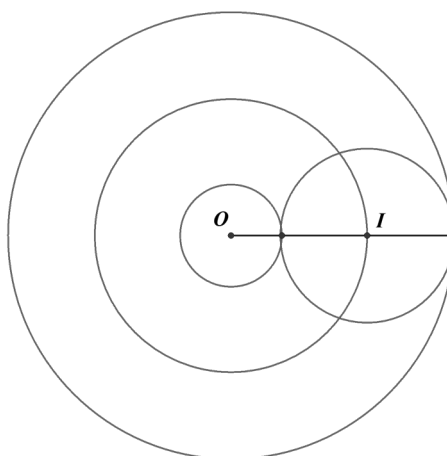
B. 4π .

C. 20π .

D. 36π .

Lời giải

Chọn A



Ta dễ dàng chứng minh được: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Mặt cầu (S) có tâm $I(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$.

Suy ra tâm I thuộc mặt cầu (S') có tâm $O(0; 0; 0)$, $R = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = 1$

Mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm là O , bán kính $R_1 = |OI - R| = |1 - 2| = 1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm là O , bán kính $R_2 = OI + R = 1 + 2 = 3$.

Vậy tổng diện tích hai mặt cầu bằng $4\pi(R_1^2 + R_2^2) = 4\pi(1^2 + 3^2) = 40\pi$.

Câu 15: Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ với m là tham số. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình đã cho là phương trình mặt cầu.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ là phương trình mặt cầu.

Khi đó tâm mặt cầu là $I(2; -m; 0)$, và bán kính $R = \sqrt{4 + m^2 - (3m^2 - 2m)} = \sqrt{-2m^2 + 2m + 4}$.
với điều kiện $-2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-1; 2)$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -4)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có diện tích bằng

- A.** 116π . **B.** $\frac{29\pi}{4}$. **C.** 29π . **D.** 16π .

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

$$(S) \text{ đi qua 4 điểm } O, A, B, C \text{ nên ta có hệ phương trình: } \begin{cases} d = 0 \\ 9 - 6a + d = 0 \\ 4 + 4b + d = 0 \\ 16 + 8c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -1 \\ c = -2 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; -1; -2\right)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu (S) bằng $\frac{29\pi}{4}$.

Cách 2:

Khối tứ diện $OABC$ có 3 cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc tại O . Khi đó mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện $OABC$ có bán kính $R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp $OABC$ bằng $\frac{29\pi}{4}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

- A.** $R = \sqrt{41}$. **B.** $R = \sqrt{15}$. **C.** $R = \sqrt{13}$. **D.** $R = \sqrt{26}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với tọa độ tâm $I(a; b; c)$.

Ta có:

$$I(a; b; c) \in (Oxy) \Rightarrow c = 0;$$

$$\begin{cases} A \in (S) \\ B \in (S) \\ C \in (S) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 4b + d = -21 \\ -2a + 6b + d = -11 \\ -4a - 4b + d = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ d = -21 \end{cases};$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4 + 1 + 0 + 21} = \sqrt{26}.$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu đi qua điểm $D(0; 1; 2)$ và tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$. Bán kính của (S) bằng

- A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) . Vì (S) tiếp xúc với các trục Ox , Oy , Oz tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ nên ta có $IA \perp Ox$, $IB \perp Oy$, $IC \perp Oz$ hay A, B, C tương ứng là hình chiếu của I trên $Ox, Oy, Oz \Rightarrow I(a; b; c)$.

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

Vì (S) đi qua A, B, C, D nên ta có:
$$\begin{cases} a^2 = b^2 = c^2 = d & (1) \\ 5 - 2b - 4c + d = 0 & (2) \end{cases}$$

Vì $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ nên $0 < d \neq 1$. Mặt khác, từ (1) $\Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{2d}$.

• **TH1:** Từ (1) $\Rightarrow b = c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 6\sqrt{d} + d = 0 \Leftrightarrow d = 25$.

$\Rightarrow R = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$.

• **TH2:** Từ (1) $\Rightarrow b = c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 6\sqrt{d} + d = 0$.

• **TH3:** Từ (1) $\Rightarrow b = \sqrt{d}, c = -\sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 + 2\sqrt{d} + d = 0$.

• **TH4:** Từ (1) $\Rightarrow b = -\sqrt{d}, c = \sqrt{d}$. Thay vào (*): $5 - 2\sqrt{d} + d = 0$.

Vậy mặt cầu (S) có bán kính $R = 5\sqrt{2}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$ và hình nón (H) có đỉnh $A(3; 2; -2)$ và nhận AI làm trục đối xứng với I là tâm mặt cầu. Một đường sinh của hình nón (H) cắt mặt cầu tại M, N sao cho $AM = 3AN$. Viết phương trình mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (H) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$.

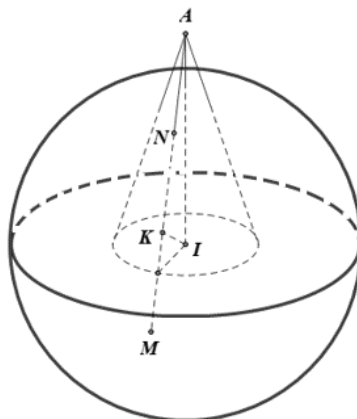
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{70}{3}$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{74}{3}$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{76}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi hình chiếu vuông góc của I trên MN là K .

Dễ thấy $AN = NK = \frac{1}{3}AM$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$

Có $AM \cdot AN = AI^2 - R^2 = 4 \Rightarrow AN^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow KN = AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow IK = \sqrt{IN^2 - KN^2} = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Nhận thấy mặt cầu đồng tâm với mặt cầu (S) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón

(H) chính là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ có bán kính $IK = \frac{\sqrt{213}}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{71}{3}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

A. $P = 6$.

B. $P = 0$.

C. $P = 3$.

D. $P = 9$.

Lời giải

Vì mặt cầu tâm I tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ nên

$$d(I, (Oyz)) = d(I, (Ozx)) = d(I, (Oxy)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = c \\ a = -b = -c \end{cases}$$

Nhận thấy chỉ có trường hợp $a = -b = c$ thì phương trình $AI = d(I, (Oxy))$ có nghiệm, các trường hợp còn lại vô nghiệm.

Thật vậy:

Với $a = -b = c$ thì $I(a; -a; a)$

$$AI = d(I, (Oyx)) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a-1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3$$

Khi đó $P = a - b + c = 9$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; -1; 2)$, $B(2; -3; 0)$, $C(-2; 1; 1)$, $D(0; -1; 3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, đường tròn đó có bán kính r bằng bao nhiêu?

A. $r = \frac{\sqrt{11}}{2}$.

B. $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

C. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

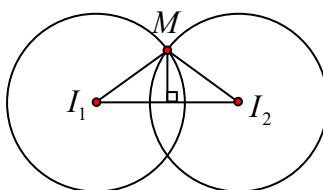
Gọi $M(x; y; z)$ là tập hợp các điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có

$$\overrightarrow{AM} = (x; y+1; z-2), \overrightarrow{BM} = (x-2; y+3; z), \overrightarrow{CM} = (x+2; y-1; z-1), \overrightarrow{DM} = (x; y+1; z-3).$$

$$\text{Từ giả thiết: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1 \\ \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + (y+1)(y+3) + z(z-2) = 1 \\ x(x+2) + (y+1)(y-1) + (z-1)(z-3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

Suy ra quỹ tích điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt cầu tâm $I_1(1; -2; 1)$, $R_1 = 2$ và mặt cầu tâm $I_2(-1; 0; 2)$, $R_2 = 2$.



Ta có: $I_1I_2 = \sqrt{5}$.

$$\text{Để thấy: } r = \sqrt{R_1^2 - \left(\frac{I_1I_2}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

DẠNG 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

① **Dạng 1. Cơ bản** $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a; b; c) \\ \bullet \text{ BK : } R \end{cases} \Rightarrow (S): \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$

② **Dạng 2. Viết phương trình mặt cầu** (S) có tâm I và đi qua điểm A .

Phương pháp: $(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet \text{ BK : } R = IA \end{cases}$

③ **Dạng 3.** Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB, với A, B cho trước.

Phương pháp: (S): $\begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I & \text{là trung điểm của } AB. \\ \bullet BK : R = \frac{1}{2} AB \end{cases}$

④ **Dạng 4.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với các trục và mp tọa độ.

Phương pháp: (S): $\begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = IM \end{cases}$ với M là hình chiếu của I lên trục hoặc mp tọa độ.

⑤ **Dạng 5.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Phương pháp: (S): $\begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I \\ \bullet BK : R = d[I; (P)] \end{cases}$

• Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng (P): $ax + by + cz + d = 0$ được xác định bởi

công thức:
$$d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

⑥ **Dạng 6.** Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D.

Phương pháp: Gọi (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì A, B, C, D ∈ (S) nên tìm được 4 phương trình $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑦ **Dạng 7.** Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm thuộc mp (P).

Phương pháp: Gọi (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì A, B, C ∈ (S) nên tìm được 3 phương trình và $I(a; b; c) \in (P)$ là phương trình thứ tư.

Giải hệ bốn phương trình này $\Rightarrow a, b, c, d \Rightarrow (S)$.

⑧ **Dạng 8.** Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r.

Phương pháp: Dựa vào mối liên hệ $R^2 = d^2_{[I; (P)]} + r^2$ và cần nhớ $C = 2\pi r$ và $S_{\text{đt}} = \pi r^2$.

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1; -2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$

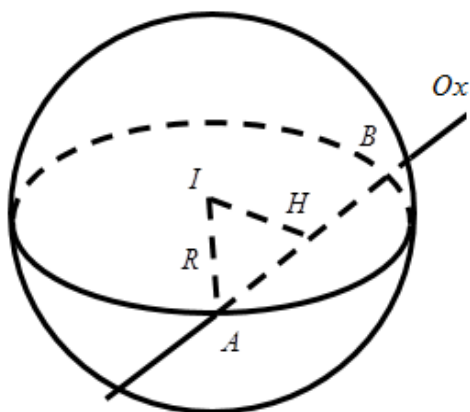
A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16.$

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 20.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25.$

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$

Lời giải.



Gọi H là trung điểm AB suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên Ox nên $H(1;0;0)$.

$$IH = \sqrt{13} \Rightarrow R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = 4.$$

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, giá trị dương của m sao cho mặt phẳng (Oxy) tiếp xúc với mặt cầu $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ là

- A.** $m = 5$. **B.** $m = \sqrt{3}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = \sqrt{5}$.

Lời giải

Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 = m^2 + 1$ có tâm $I(3;0;2)$, bán kính $R = \sqrt{m^2 + 1}$.

(S) tiếp xúc với $(Oxy) \Leftrightarrow d(I, (Oxy)) = R$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow m^2 = 3 \Leftrightarrow m = \sqrt{3}.$$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu tâm I bán kính IM ?

- A.** $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$. **B.** $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$. **D.** $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Lời giải

Với điểm $M(1;-2;3)$ thì hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $I(1;0;0)$

Có $IM = \sqrt{13}$ vậy phương trình mặt cầu tâm $I(1;0;0)$ bán kính IM là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trong các mặt cầu dưới đây, mặt cầu nào có bán kính $R = 2$?

- A.** $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$. **B.** $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$.
C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 2 = 0$. **D.** $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 5 = 0$.

Lời giải

Ta có mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Trong đáp án C ta có:
$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{4} = 2.$$

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2), B(3;2;-3)$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc Ox và đi qua hai điểm A, B có phương trình.

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0.$

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 2 = 0.$

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2 = 0.$

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2 = 0.$

Lời giải

Gọi $I(a;0;0) \in Ox \Rightarrow \overline{IA}(1-a;1;2); \overline{IB}(3-a;2;-3).$

Do (S) đi qua hai điểm A, B nên $IA = IB \Leftrightarrow \sqrt{(1-a)^2 + 5} = \sqrt{(3-a)^2 + 13} \Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$

$\Rightarrow (S)$ có tâm $I(4;0;0)$, bán kính $R = IA = \sqrt{14}.$

$\Rightarrow (S): (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2 = 0.$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu có tâm $I(1;1;1)$ và diện tích bằng 4π có phương trình là

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 4$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Lời giải

Ta có: $S = 4\pi R^2 = 4\pi \Leftrightarrow R = 1$

Vậy (S) tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R = 1$ có pt: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) qua bốn điểm $A(3;3;0), B(3;0;3), C(0;3;3), D(3;3;3)$. Phương trình mặt cầu (S) là

A. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

B. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$

C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$

D. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$

Vì mặt cầu đi qua 4 điểm nên:

$$\begin{cases} 18 - 6a - 6b + d = 0 \\ 18 - 6a - 6c + d = 0 \\ 18 - 6b - 6c + d = 0 \\ 27 - 6a - 6b - 6c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a - 6b + d = -18 \\ -6a - 6c + d = -18 \\ -6b - 6c + d = -18 \\ -6a - 6b - 6c + d = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ đỉnh $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $A(2; 4; 6)$. Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Viết phương trình mặt cầu (S') có tâm trùng với tâm của mặt cầu (S) và có bán kính gấp 2 lần bán kính của mặt cầu (S) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 12 = 0$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì (S) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 0^2 - 2.a.2 - 2.b.0 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 4^2 + 0^2 - 2.a.0 - 2.b.4 - 2.c.0 + d = 0 \\ 0^2 + 0^2 + 6^2 - 2.a.0 - 2.b.0 - 2.c.6 + d = 0 \\ 2^2 + 4^2 + 6^2 - 2.a.2 - 2.b.4 - 2.c.6 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + d = -4 \\ -8b + d = -16 \\ -12c + d = -36 \\ -4a - 8b - 12c + d = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0 \Rightarrow I(1; 2; 3)$ và $R = \sqrt{14} \Rightarrow R' = 2\sqrt{14}$.

Vậy: mặt cầu (S') có tâm $I(1; 2; 3)$ và $R' = 2\sqrt{14} : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 56$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$.

B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$.

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$.

Lời giải

Gọi M là hình chiếu của I trên $Oy \Rightarrow M(0;1;0)$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có bán kính $IM = \sqrt{13}$.

Vậy (S) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;2)$ và có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16$.

B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$.

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$.

Lời giải

Thể tích mặt cầu là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Theo đề bài ta có $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256\pi}{3} \Leftrightarrow R = 4$.

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1;4;2)$ và bán kính $R = 4$ là

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16.$$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Một mặt cầu (S') có tâm $I'(9;1;6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu (S) . Phương trình mặt cầu (S') là

A. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$.

B. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 144$.

C. $(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 36$.

D. $(x+9)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(1;1;0), R = 2, II' = 10$.

Gọi R' là bán kính của mặt cầu (S') . Theo giả thiết, ta có $R' + R = II' \Leftrightarrow R' = II' - R = 8$.

Khi đó phương trình mặt cầu $(S'): (x-9)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 64$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

A. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$.

B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$.

D. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$$d(I, (Oxy)) = d(I, (Oyz)) = d(I, (Oxz)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R \quad (1)$$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} IA = R \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = R^2 \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = R^2 \\ a = c = -b = R > 0 \quad (\text{do}(1)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 18 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 3 \\ b = -3 \\ R = 3 \end{cases} &\Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9. \end{aligned}$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 2; 1)$, $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

A. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

B. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Lời giải

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OMN .

Ta áp dụng tính chất sau: “Cho tam giác OMN với I là tâm đường tròn nội tiếp, ta có $a\vec{IO} + b\vec{IM} + c\vec{IN} = \vec{0}$, với $a = MN$, $b = ON$, $c = OM$ ”.

Ta có $OM = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$, $ON = \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = 4$.

$MN = \sqrt{\left(-\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{8}{3} - 1\right)^2} = 5$.

$$5\vec{IO} + 4\vec{IM} + 3\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 0 \\ y_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 1 \\ z_I = \frac{5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)}{3 + 4 + 5} = 1 \end{cases}$$

Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$.

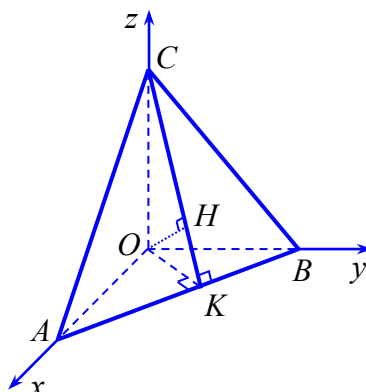
Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) nên mặt cầu có bán kính $R = d(I, (Oxz)) = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Viết phương trình mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) .

- A. $x^2 + y^2 + z^2 = 81$. B. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. C. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. D. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Lời giải



Ta có H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow OH \perp (ABC)$.

Thật vậy :

$$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB$$

Mà $CH \perp AB$

Từ và suy ra $AB \perp (OHC) \Rightarrow AB \perp OH$

Tương tự $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OH$.

Từ và suy ra $OH \perp (ABC)$.

Khi đó mặt cầu tâm O tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính $R = OH = 3$.

Vậy mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) là $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua điểm $A(1;-1;4)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ.

- A. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = 16$. B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.
C. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 36$. D. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 49$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) tiếp xúc với các mặt phẳng tọa độ

$$d(I, (Oxy)) = d(I, (Oyz)) = d(I, (Oxz)) \Leftrightarrow |a| = |b| = |c| = R \quad (1)$$

Mặt cầu (S) đi qua $A(1;-1;4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = R \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = R^2 \\ a > 0; c > 0; b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2 = R^2 \\ a = c = -b = R > 0 \quad (\text{do (1)}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (-a+1)^2 + (a-4)^2 = a^2 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 - 12a + 18 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 9 = 0 \\ a = c = -b = R > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = c = 3 \\ b = -3 \\ R = 3 \end{cases} \Rightarrow (S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

CHƯƠNG



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN MẶT CẦU

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

A. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. (2) .

Câu 2: Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2, 3, 3, 2$ tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{5}{9}$.

B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{7}{15}$.

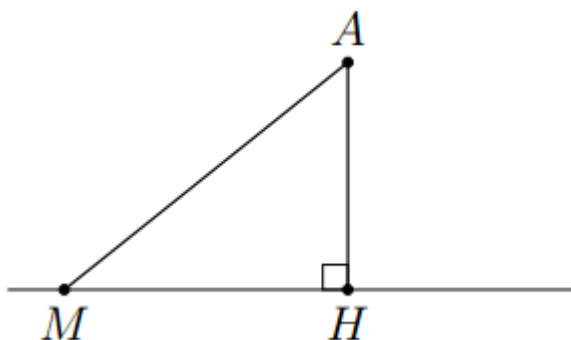
D. $\frac{6}{11}$.

DẠNG 2. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \geq AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB + BC \geq AC$.

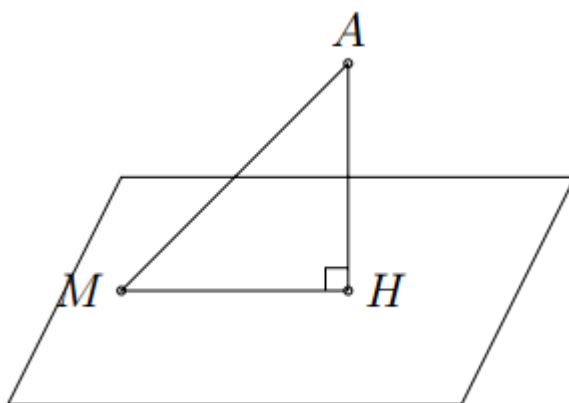
Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta luôn có $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x, y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) . Tìm giá trị nhỏ nhất của AM

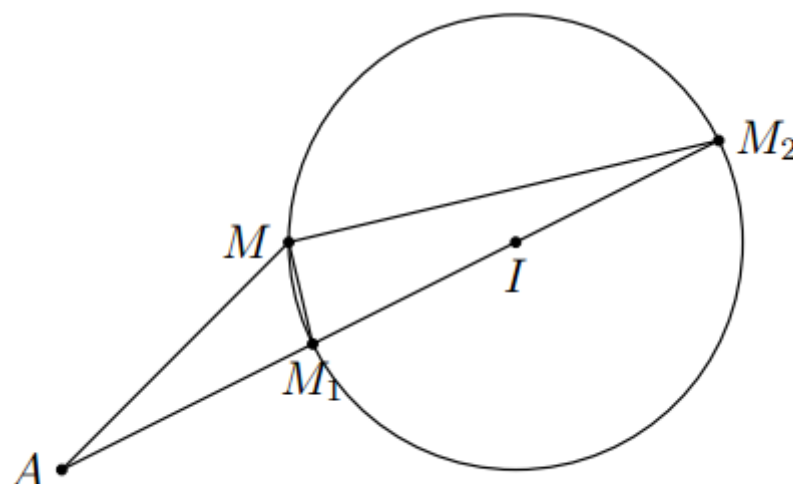


Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H) . Khi đó, trong tam giác AHM

Vuông tại M ta có $AM \geq AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R , M là điểm di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S) . Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) ($AM_1 < AM_2$) và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI . Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) . Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$$R - AI \leq AM \leq R + AI$$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P) . Khi đó

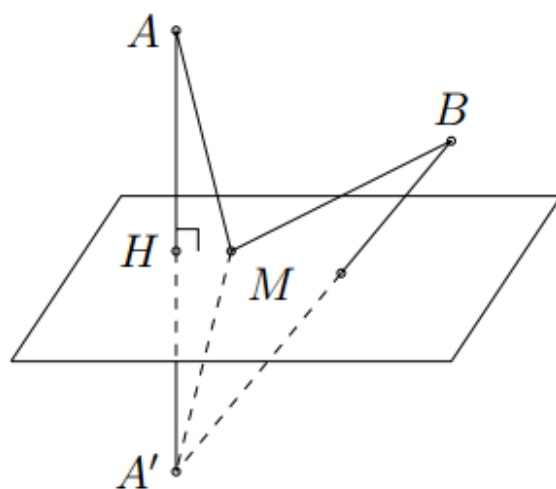
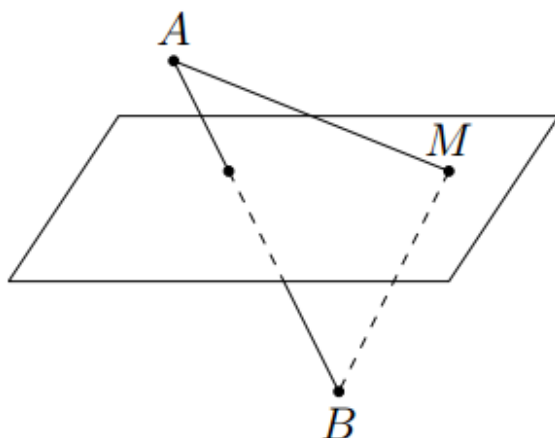
$$AM + BM \geq AB$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) . Gọi A' đối xứng với A qua (P) . Khi đó

$$AM + BM = A'M + BM \geq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .



2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) . Khi đó

$$|AM - BM| \leq AB$$

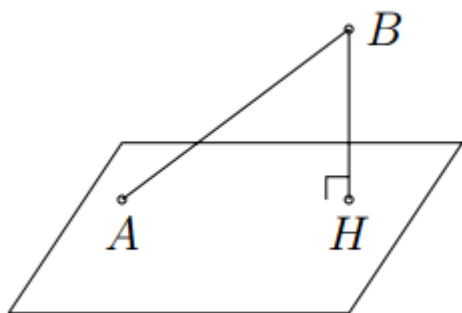
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P) . Gọi A' đối xứng với A qua (P) , Khi đó

$$|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) , khi đó

$$d(B, (P)) = BH \leq BA$$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B ,
mặt phẳng

C. Viết phương trình

(P) đi qua C và $T = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B, (P))$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P) .

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì

$$P = (\alpha + \beta)d(A, (P)) \leq (\alpha + \beta)AC$$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I . Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{ID}$ và E là trung điểm BD . Khi đó

$$P = \alpha d(A, (P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot d(D, (P)) = 2\alpha d(E, (P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P) . Gọi I là giao điểm của AB và (P) , B' là điểm đối xứng với B qua I . Khi đó

$$P = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B', (P))$$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm A . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ nằm cùng phía so với (P) . Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

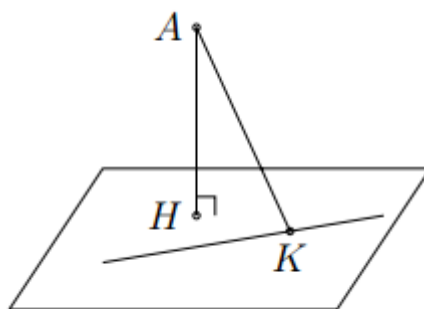
$$\sum_{i=1}^n d(A_i, (P)) = nd(G, (P)) \leq nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m + k = n$). Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A . Khi đó

$$P = md(G_3, (P)) + kd(G_2, (P))$$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ . Khi đó

$$d(A, (P)) = AH \leq AK$$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK .

Bài toán 8. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét véc tơ

$$\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$$

Trong đó $\alpha_1; \alpha_2 \dots \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$. Tìm điểm

M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 \vec{GA}_1 + \alpha_2 \vec{GA}_2 + \dots + \alpha_n \vec{GA}_n = \vec{0}$$

.

Ta có $\vec{MA}_k = \vec{MG} + \vec{GA}_k$ với $k = 1; 2; \dots; n$, nên

$$\vec{w} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \vec{MG} + \alpha_1 \vec{GA}_1 + \alpha_2 \vec{GA}_2 + \dots + \alpha_n \vec{GA}_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \vec{MG}$$

Do đó

$$|\vec{w}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \cdot |\vec{MG}|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Bài toán 9. Trong không gian Oxy z , cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét biểu thức:

$$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$.
2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 \vec{GA}_1 + \alpha_2 \vec{GA}_2 + \dots + \alpha_n \vec{GA}_n = \vec{0}$$

Ta có $\vec{MA}_k = \vec{MG} + \vec{GA}_k$ với $k = 1; 2; \dots; n$, nên

$$MA_k^2 = (\vec{MG} + \vec{GA}_k)^2 = MG^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GA}_k + GA_k^2$$

Do đó

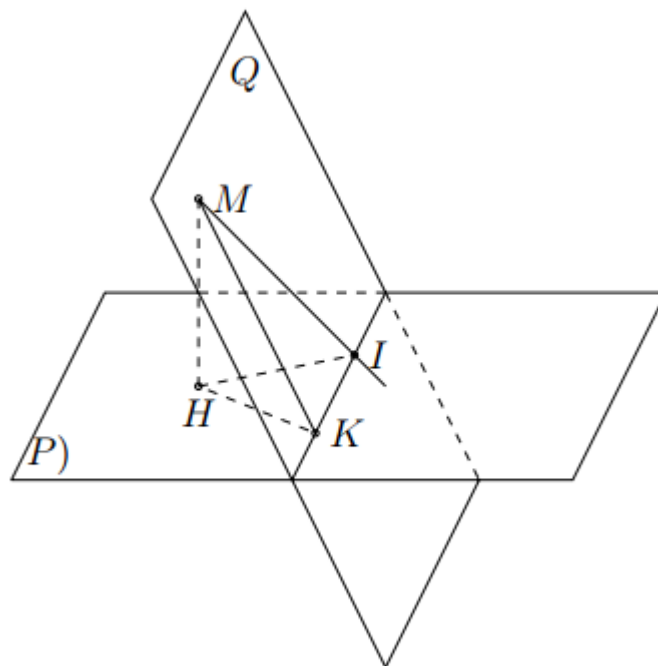
$$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \dots + \alpha_n GA_n^2$$

Vì $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \dots + \alpha_n GA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q) .

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó

$$\tan \phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI) , nên (Q) đi qua M và nhận $(\vec{n}_P \wedge \vec{u}_d) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

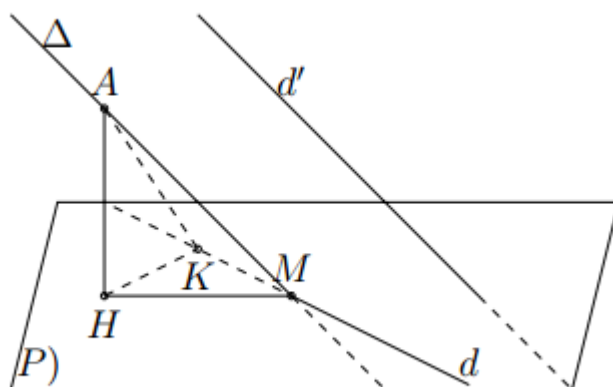
- Gọi $\vec{n} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) . Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c .

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có

$$\cos \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_P|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' . Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .

Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d , ϕ là góc giữa Δ và (P) .

$$\text{Khi đó } \phi = \widehat{AMH} \text{ và } \cos \phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) . Do đó (P) đi qua M và nhận $(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (P) . Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c .

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d' , ta có

$$\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Câu 3: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(6; -5; 8)$ và $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là cá số thực luôn thay đổi. Nếu $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng

- A. -25 B. -13 C. 0 D. 26

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$; $B(2; -1; 3)$ và điểm $M(a; b; 0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a + b$ là

- A. 2. B. -2. C. 3. D. 1.

- Câu 5:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng
- A.** 6. **B.** $\frac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;1;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ lớn nhất.
- A.** $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$. **C.** $M(0;0;5)$. **D.** $M(3;-4;0)$.
- Câu 7:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.
- A.** $P = 0$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = -2$.
- Câu 8:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất
- A.** $M(2;3;1)$. **B.** $M(0;3;1)$. **C.** $M(0;-3;1)$. **D.** $M(0;1;2)$.
- Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;-3;7)$, $B(0;4;1)$, $C(3;0;5)$ và $D(3;3;3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:
- A.** $M(0;1;-4)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(0;1;-2)$. **D.** $M(0;1;4)$.
- Câu 10:** Trong không gian cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;1)$, $C(3;6;-5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là
- A.** $M(1;2;0)$. **B.** $M(0;0;-1)$. **C.** $M(1;3;-1)$. **D.** $M(1;3;0)$.
- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3;2;1)$, $B(-2;3;6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.
- A.** $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 2. **D.** -2.
- Câu 12:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.
- A.** 64. **B.** 68. **C.** 60. **D.** 48.

- Câu 13:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?
A. 4. **B.** 2. **C.** 4π . **D.** Không tồn tại.
- Câu 14:** Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng
A. 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.
- Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2); B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng
A. $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.
- Câu 16:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(-2; 3; 4)$ và $C(-2; 5; 1)$. Điểm $M(a; b; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng
A. $T = 10$. **B.** $T = 25$. **C.** $T = 13$. **D.** $T = 17$.
- Câu 17:** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2), B(-2; 0; 3), C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là
A. $T = 3$. **B.** $T = -3$. **C.** $T = 1$. **D.** $T = -1$.
- Câu 18:** Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?
A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$.
- Câu 19:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng
A. $\frac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\frac{51}{7}$.
- Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho điểm $A(2t; 2t; 0), B(0; 0; t)$. Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q = 2a + b$ bằng
A. 5 **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

- Câu 21:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4;1;5), B(3;0;1), C(-1;2;0)$ và điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.
A. $P = 23$. **B.** $P = 31$. **C.** $P = 11$. **D.** $P = 13$.
- Câu 22:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4), B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng
A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.
- Câu 23:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm $A(0;2;0), B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ bằng
A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 24:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0), B(-1;1;0), C(0;-1;0), D(0;1;0), E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}|$ là:
A. 12. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** 24. **D.** $24\sqrt{2}$.
- Câu 25:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3), B(-2;-8;-4), C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.
A. $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = \sqrt{14}$. **D.** $P = 3\sqrt{14}$.
- Câu 26:** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2), B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng
A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{19}{4}$. **D.** $\frac{21}{4}$.
- Câu 27:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là
A. 12. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 24.
- Câu 28:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5), B(3;4;0), C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -4.
- Câu 29:** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.
A. $P = 2\sqrt{2}$. **B.** $P = 3\sqrt{2}$. **C.** $P = 4\sqrt{2}$. **D.** $P = 6\sqrt{2}$.

- Câu 30:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và các điểm $A(0;1;1)$, $B(-1;-2;-3)$, $C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S) . Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng:
- A. 9. B. $\frac{8}{3}$. C. 7. D. $\frac{16}{3}$.
- Câu 31:** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0)$, $B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.
- A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = 3\sqrt{2}$. C. $P = 4\sqrt{2}$. D. $P = 6\sqrt{2}$.
- Câu 32:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;2)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.
- A. $M(2;3;0)$. B. $M(1;3;0)$. C. $M(2;-3;0)$. D. $M(2;3;1)$.
- Câu 33:** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.
- A. $S_{\min} = 30$. B. $S_{\min} = 20$. C. $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$. D. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.
- Câu 34:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1;2;-4)$ và $B(1;2;14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của $(MA + 2MB)$ bằng
- A. $2\sqrt{82}$. B. $3\sqrt{79}$. C. $5\sqrt{79}$. D. $3\sqrt{82}$.
- Câu 35:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$. Gọi M là điểm thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là
- A. $2\sqrt{265}$. B. $\sqrt{265}$. C. $3\sqrt{265}$. D. $4\sqrt{265}$.
- Câu 36:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.
- A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$. B. $M(0;3;0)$. C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.
- Câu 37:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.
- A. $\sqrt{41}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 7. D. $\sqrt{17}$.



PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

DẠNG 1. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TIẾP TUYẾN MẶT CẦU

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và một điểm $M(2;3;1)$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

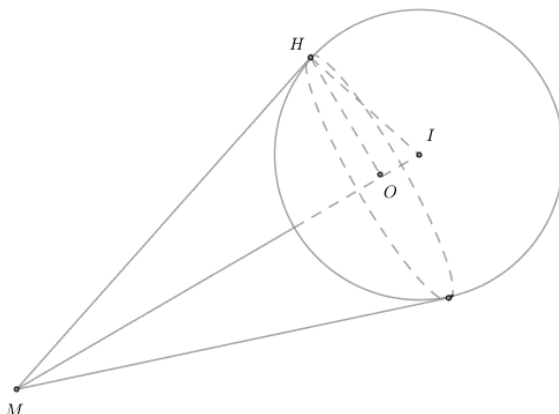
A. $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. (2) .

Lời giải



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (1;2;1)$ và $IM = \sqrt{6}$.

Gọi H là một tiếp điểm tùy ý khi kẻ tiếp tuyến từ $Oxyz$ đến mặt cầu, khi đó $MH = \sqrt{IM^2 - R^2} = \sqrt{2}$. Gọi O là tâm của đường tròn (C) **khi đó** $IM \perp HO$ và $HO = r$.

$$\text{Ta có } HI \cdot HM = HO \cdot IM \Rightarrow r = \frac{HI \cdot HM}{IM} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 2: Trong không gian, cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2, 3, 3, 2$ tiếp xúc ngoài với nhau. Mặt cầu nhỏ nhất tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{5}{9}$.

B. $\frac{3}{7}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{6}{11}$.

Lời giải

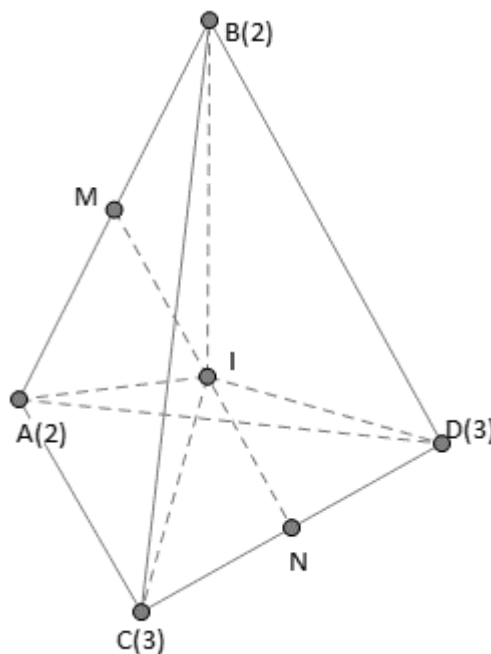
Cách 1:

Gọi A, B, C, D là tâm bốn mặt cầu, không mất tính tổng quát ta giả sử $AB = 4$, $AC = BD = AD = BC = 5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Dễ dàng tính được $MN = 2\sqrt{3}$. Gọi I là tâm mặt cầu nhỏ nhất với bán kính r tiếp xúc với bốn mặt cầu trên. Vì $IA = IB, IC = ID$ nên I nằm trên đoạn MN .

Đặt $IN = x$, ta có $IC = \sqrt{3^2 + x^2} = 3 + r$, $IA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 2 + r$

Từ đó suy ra $\sqrt{3^2 + x^2} - \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{3}}{11}$, suy ra $r = \sqrt{3^2 + \left(\frac{12\sqrt{3}}{11}\right)^2} - 3 = \frac{6}{11}$

Cách 2



Gọi A, B là tâm quả cầu bán kính bằng 2. C, D là tâm quả cầu bán kính bằng 3. I là tâm quả cầu bán kính x .

Mặt cầu (I) tiếp xúc ngoài với 4 mặt cầu tâm A, B, C, D nên $IA = IB = x + 2$, $IC = ID = x + 3$.

Gọi (P) , (Q) lần lượt là các mặt phẳng trung trực đoạn AB và CD .

$$\begin{cases} IA = IB \Rightarrow I \in (P) \\ IC = ID \Rightarrow I \in (Q) \end{cases} \Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \quad (1).$$

Tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = CA = CB = 5$ suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và CD , suy ra $MN = (P) \cap (Q)$.

Từ (1) và (2) suy ra $I \in MN$

Tam giác IAM có $IM = \sqrt{IA^2 - AM^2} = \sqrt{(x+2)^2 - 4}$.

Tam giác CIN có $IN = \sqrt{IC^2 - CN^2} = \sqrt{(x+3)^2 - 9}$.

Tam giác ABN có $NM = \sqrt{NA^2 - AM^2} = \sqrt{12}$.

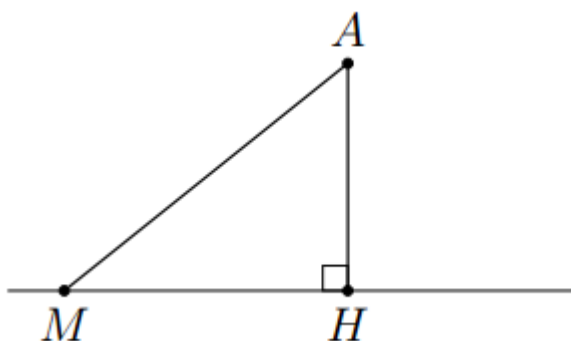
Suy ra $\sqrt{(x+3)^2 - 9} + \sqrt{(x+2)^2 - 4} = \sqrt{12} \Rightarrow x = \frac{6}{11}$.

DẠNG 2. BÀI TOÁN CỰC TRỊ

1. Một số bất đẳng thức cơ bản

Kết quả 1. Trong một tam giác, cạnh đối diện với góc lớn thì lớn hơn

Kết quả 2. Trong các đường xiên và đường vuông góc kẻ từ một điểm nằm ngoài đường thẳng đến đường thẳng đó thì đường vuông góc là đường ngắn nhất. Như trong hình vẽ ta luôn có $AM \geq AH$



Kết quả 3. Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có bất đẳng thức $AB + BC \geq AC$.

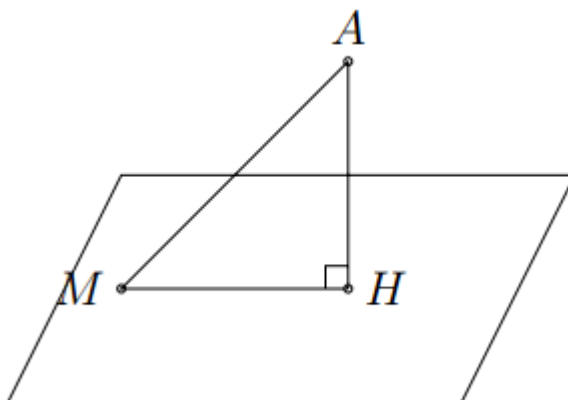
Tổng quát hơn ta có bất đẳng thức của đường gấp khúc: Với n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta luôn có $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n \geq A_1A_n$

Kết quả 4. Với hai số không âm x, y ta luôn có $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$

Kết quả 5. Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ta luôn có $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a} = k\vec{b}, k \in \mathbb{R}$

2. Một số bài toán thường gặp

Bài toán 1. Cho điểm A cố định và điểm M di động trên hình (H) . Tìm giá trị nhỏ nhất của AM

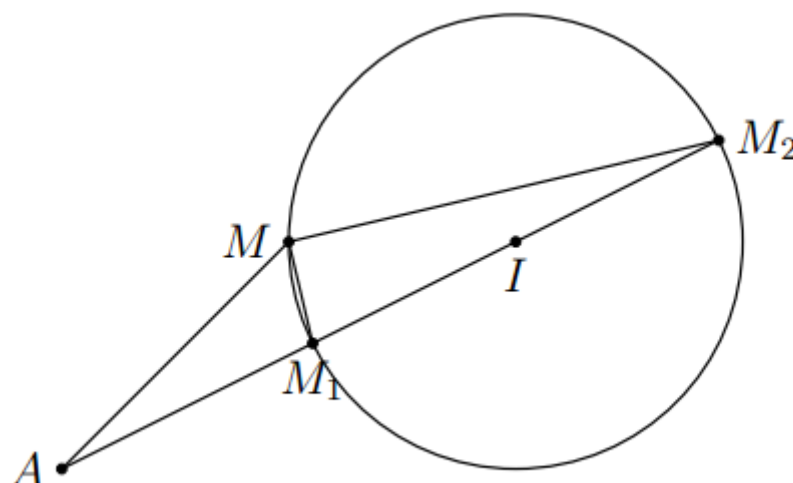


Lời giải: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên hình (H) . Khi đó, trong tam giác AHM

Vuông tại H ta có $AM \geq AH$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H$. Do đó AM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của A lên (H)

Bài toán 2. Cho điểm A và mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R , M là điểm di động trên (S) . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của AM .



Lời giải. Xét A nằm ngoài mặt cầu (S) . Gọi M_1, M_2 lần lượt là giao điểm của đường thẳng AI với mặt cầu (S) ($AM_1 < AM_2$) và (α) là mặt phẳng đi qua M và đường thẳng AI . Khi đó (α) cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) . Ta có $\widehat{M_1MM_2} = 90^\circ$, nên $\widehat{AMM_2}$ và $\widehat{AM_1M}$ là các góc tù, nên trong các tam giác AMM_1 và AMM_2 ta có

$$AI - R = AM_1 \leq AM \leq AM_2 = AI + R$$

Tương tự với A nằm trong mặt cầu ta có

$$R - AI \leq AM \leq R + AI$$

Vậy $\min AM = |AI - R|, \max AM = R + AI$

Bài toán 3. Cho mặt phẳng (P) và hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

Lời giải.

1. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm về hai phía so với (P) . Khi đó

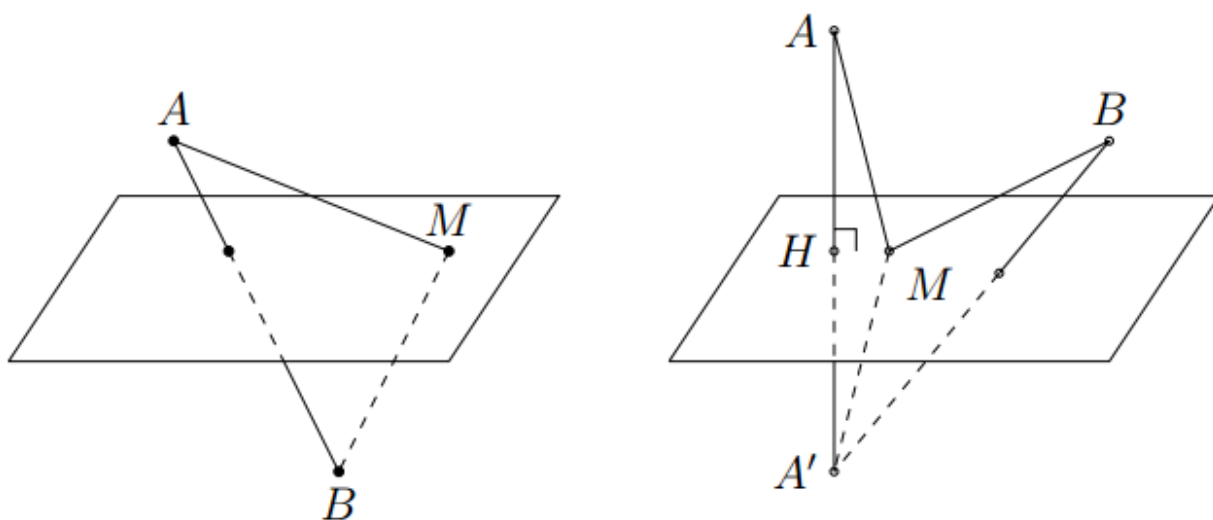
$$AM + BM \geq AB$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) . Gọi A' đối xứng với A qua (P) . Khi đó

$$AM + BM = A'M + BM \geq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .



2. Ta xét các trường hợp sau

- **TH 1:** Nếu A và B nằm cùng một phía so với (P) . Khi đó

$$|AM - BM| \leq AB$$

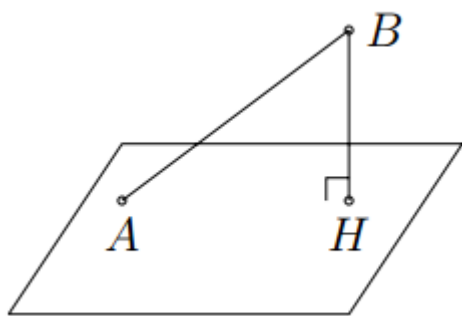
Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của AB với (P) .

- **TH 2:** Nếu A và B nằm khác phía so với (P) . Gọi A' đối xứng với A qua (P) , Khi đó

$$|AM - BM| = |A'M - BM| \leq A'B$$

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

Bài toán 4. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất.



Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B lên mặt phẳng (P) , khi đó

$$d(B, (P)) = BH \leq BA$$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua A vuông góc với AB

Bài toán 5. Cho các số thực dương α, β và ba điểm A, B , mặt phẳng (P) đi qua C và $T = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B, (P))$ nhỏ nhất.

C. Viết phương trình

Lời giải.

1. Xét A, B nằm về cùng phía so với (P) .

- Nếu $AB \parallel (P)$ thì

$$P = (\alpha + \beta)d(A, (P)) \leq (\alpha + \beta)AC$$

- Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại I . Gọi D là điểm thỏa mãn $\vec{IB} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{ID}$ và E là trung điểm BD . Khi đó

$$P = \alpha d(A, (P)) + \beta \cdot \frac{IB}{ID} \cdot d(D, (P)) = 2\alpha d(E, (P)) \leq 2(\alpha + \beta)EC$$

2. Xét A, B nằm về hai phía so với (P) . Gọi I là giao điểm của AB và (P) , B' là điểm đối xứng với B qua I . Khi đó

$$P = \alpha d(A, (P)) + \beta d(B', (P))$$

Đến đây ta chuyển về trường hợp trên.

So sánh các kết quả ở trên ta chọn kết quả lớn nhất.

Bài toán 6. Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và điểm A . Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tổng khoảng cách từ các điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ lớn nhất.

Lời giải.

- Xét n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ nằm cùng phía so với (P) . Gọi G là trọng tâm của n điểm đã cho. Khi đó

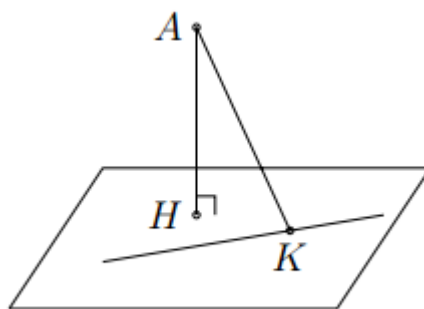
$$\sum_{i=1}^n d(A_i, (P)) = nd(G, (P)) \leq nGA$$

- Trong n điểm trên có m điểm nằm về một phía và k điểm nằm về phía khác ($m + k = n$). Khi đó, gọi G_1 là trọng tâm của m điểm, G_2 là trọng tâm của k điểm G_3 đối xứng với G_1 qua A . Khi đó

$$P = md(G_3, (P)) + kd(G_2, (P))$$

Đến đây ta chuyển về bài toán trên.

Bài toán 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua đường thẳng Δ và cách A một khoảng lớn nhất



Lời giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ . Khi đó $d(A, (P)) = AH \leq AK$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với AK .

Bài toán 8. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét véc tơ

$$\vec{w} = \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}$$

Trong đó $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ là các số thực cho trước thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|\vec{w}|$ có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = \vec{0}$$

.

Ta có $\overrightarrow{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1; 2; \dots; n$, nên

$$\vec{w} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \vec{MG} + \alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \vec{MG}$$

Do đó

$$|\vec{w}| = |\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n| \cdot |\vec{MG}|$$

Vì $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ là hằng số khác không nên $|\vec{w}|$ có giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, mà $M \in (P)$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Bài toán 9. Trong không gian Oxy z , cho các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$. Xét biểu thức:

$$T = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$$

Trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực cho trước. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. T giá trị nhỏ nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$.
2. T có giá trị lớn nhất biết $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$.

Lời giải. Gọi G là điểm thỏa mãn

$$\alpha_1 \vec{GA_1} + \alpha_2 \vec{GA_2} + \dots + \alpha_n \vec{GA_n} = \vec{0}$$

Ta có $\vec{MA_k} = \vec{MG} + \vec{GA_k}$ với $k = 1; 2; \dots; n$, nên

$$MA_k^2 = (\vec{MG} + \vec{GA_k})^2 = MG^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GA_k} + GA_k^2$$

Do đó

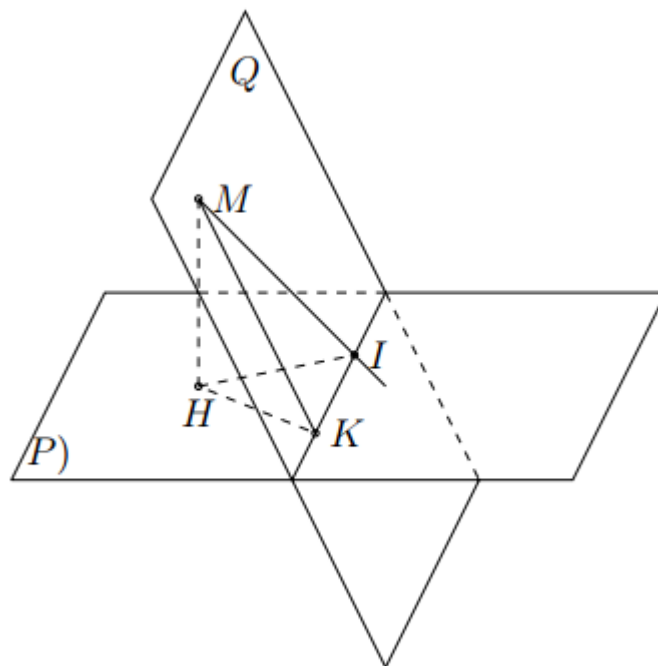
$$T = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)MG^2 + \alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \dots + \alpha_n GA_n^2$$

Vì $\alpha_1 GA_1^2 + \alpha_2 GA_2^2 + \dots + \alpha_n GA_n^2$ không đổi nên

- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.
- với $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì T đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất.

Mà $M \in (P)$ nên MG nhỏ nhất khi điểm M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Bài toán 10. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau. Viết phương trình của mặt phẳng (Q) chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất.



Lời giải.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (P) và lấy điểm $M \in d, M \neq I$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên (P) và giao tuyến Δ của (P) và (Q) .

Đặt ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có $\phi = \widehat{MKH}$, do đó

$$\tan \phi = \frac{HM}{HK} \geq \frac{HM}{HI}$$

Do đó (Q) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với mặt phẳng (MHI) , nên (Q) đi qua M và nhận $(\vec{n}_P \wedge \vec{u}_d) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

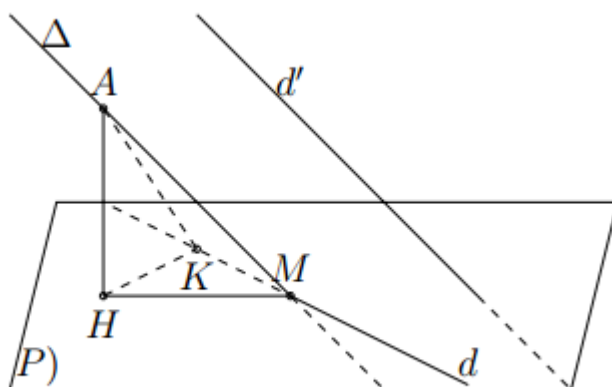
- Gọi $\vec{n} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (Q) . Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c .

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và (Q) , ta có

$$\cos \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_P|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}, c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Bài toán 11. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và tạo với d' một góc lớn nhất.



Lời giải. Trên đường thẳng d , lấy điểm M và dựng đường thẳng Δ đi qua M song song với d' . Khi đó góc giữa Δ và (P) chính là góc giữa d' và (P) .

Trên đường thẳng Δ , lấy điểm A . Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d , ϕ là góc giữa Δ và (P) .

$$\text{Khi đó } \phi = \widehat{AMH} \text{ và } \cos \phi = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}$$

Suy ra (P) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với mặt phẳng (AMK) . Do đó (P) đi qua M và nhận $(\vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'}) \wedge \vec{u}_d$ làm VTPT.

Chú ý. Ta có thể giải bài toán trên bằng phương pháp đại số như sau:

- Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ là một VTPT của mặt phẳng (P) . Khi đó $\vec{n} \cdot \vec{u}_d = 0$ từ đây ta rút được a theo b, c .

- Gọi ϕ là góc giữa (P) và d' , ta có

$$\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}_{d'}|} = f(t)$$

với $t = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$. Khảo sát $f(t)$ ta tìm được max của $f(t)$

Câu 3: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(6; -5; 8)$ và $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k}$ trong đó a, b là các số thực luôn thay đổi. Nếu $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a - b$ bằng

A. -25

B. -13

C. 0

D. 26

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{k} \Rightarrow M(a; 0; b)$

$$\overrightarrow{MA} = (-1-a; 2; 3-b); \overrightarrow{MB} = (6-a; -5; 8-b) \Rightarrow -2\overrightarrow{MB} = (-12+2a; 10; -16+2b)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = (a-13; 12; b-13)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(a-13)^2 + 12^2 + (b-13)^2} \geq 12$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}|_{\min} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} a=13 \\ b=13 \end{cases}. \text{ Do đó } a-b=0$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$; $B(2;-1;3)$ và điểm $M(a;b;0)$ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất. Giá trị của $a+b$ là

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Ta thấy $M(a;b;0) \in (Oxy)$.

Gọi $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM})^2 + (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})^2 \\ &= (\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IM}^2 - 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IM}) + (\overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{IM}^2 - 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IM}) \\ &= IM^2 + 2IA^2 - 2\overrightarrow{IM}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = IM^2 + \frac{AB^2}{2} = IM^2 + 7. \end{aligned}$$

Bởi vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (Oxy) . Bởi vậy $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. Như vậy $a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \Rightarrow a+b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6.

B. $\frac{21}{4}$.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 \\ &= 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \\ &= 4MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \geq IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 \\ \text{Dấu "=" xảy ra } &\Leftrightarrow M \equiv I \text{ tức là } M\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right) \Rightarrow x+y+z = \frac{7}{4} + \frac{7}{2} = \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(2;-1;3)$, $C(3;1;-5)$. Tìm điểm M trên mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ lớn nhất.

A. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$. **C.** $M(0; 0; 5)$. **D.** $M(3; -4; 0)$.

Lời giải

Gọi điểm E thỏa $\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$. Suy ra B là trung điểm của AE , suy ra $E(3; -4; 5)$.

Khi đó: $MA^2 - 2MB^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 - 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = -ME^2 + EA^2 - 2EB^2$.

Do đó $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của $E(3; -4; 5)$ lên $(Oxy) \Leftrightarrow M(3; -4; 0)$.

Chú ý: Ta có thể làm trắc nghiệm như sau

+ Loại C vì $M(0; 0; 5)$ không thuộc (Oxy) .

+ Lần lượt thay $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$, $M(3; -4; 0)$ vào biểu thức $MA^2 - 2MB^2$ thì $M(3; -4; 0)$ cho giá trị lớn nhất nên ta chọn $M(3; -4; 0)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2; 1; 3)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; -6; 1)$. Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P = x + y + z$.

A. $P = 0$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = -2$.

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(2; -2; 2)$.

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 3MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Mà $M \in (Oyz) \Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên $(Oyz) \Leftrightarrow M(0; -2; 2)$.

Vậy $P = 0 - 2 + 2 = 0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất

A. $M(2; 3; 1)$. **B.** $M(0; 3; 1)$. **C.** $M(0; -3; 1)$. **D.** $M(0; 1; 2)$.

Lời giải

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = (2; 3; 1) \Leftrightarrow I(2; 3; 1).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| &= |(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| \\ &= |2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}| = 2|\overrightarrow{MI}| = 2MI. \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MI ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của $I(2; 3; 1)$ lên mặt phẳng (Oyz) . Suy ra $M(0; 3; 1)$.

- Câu 9:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -3; 7)$, $B(0; 4; 1)$, $C(3; 0; 5)$ và $D(3; 3; 3)$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (Oyz) sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó tọa độ của M là:
- A.** $M(0; 1; -4)$. **B.** $M(2; 1; 0)$. **C.** $M(0; 1; -2)$. **D.** $M(0; 1; 4)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 7; -6)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (1; 6; -4)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 \neq 0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Khi đó $G(2; 1; 4)$.

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |4\overrightarrow{MG}| = 4MG.$$

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG ngắn nhất.

Vậy M là hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oyz) nên $M(0; 1; 4)$.

- Câu 10:** Trong không gian cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 2; 1)$, $C(3; 6; -5)$. Điểm M thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là
- A.** $M(1; 2; 0)$. **B.** $M(0; 0; -1)$. **C.** $M(1; 3; -1)$. **D.** $M(1; 3; 0)$.

Lời giải

Lấy $G(1; 3; -1)$ là trọng tâm của tam giác ABC .

Ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ bé nhất khi MG bé nhất.

Hay M là hình chiếu của điểm G lên mặt phẳng Oxy .

Vậy $M(1; 3; 0)$.

- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(3; 2; 1)$, $B(-2; 3; 6)$. Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) . Tìm giá trị của biểu thức $T = x_M + y_M + z_M$ khi $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.
- A.** $-\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 2 . **D.** -2 .

Lời giải

Gọi điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$ khi đó:
$$\begin{cases} x_H = \frac{x_A + 3x_B}{1+3} \\ y_H = \frac{y_A + 3y_B}{1+3} \\ z_H = \frac{z_A + 3z_B}{1+3} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; \frac{19}{4}\right).$$

Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

Xét $T = \frac{z_H}{1} = \frac{19}{4}$ do đó tọa độ điểm M cần tìm là:
$$\begin{cases} x_M = x_H - aT \\ y_M = y_H - bT \\ z_M = z_H - cT \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}; 0\right).$$

Vậy $T = x_M + y_M + z_M = -\frac{3}{4} + \frac{11}{4} + 0 = 2$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S) . Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

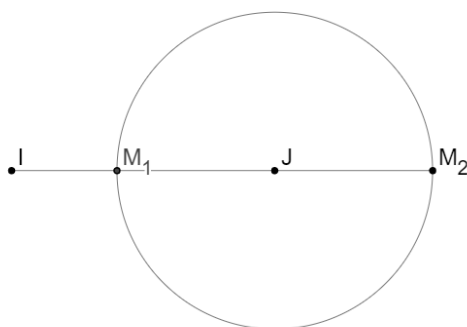
A. 64.

B. 68.

C. 60.

D. 48.

Lời giải



Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow I(2x_A - x_B; 2y_A - y_B; 2z_A - z_B)$$

$$\Rightarrow I(5; 5; -1).$$

Suy ra I là điểm cố định.

Suy ra P đạt giá trị nhỏ nhất khi MI đạt giá trị nhỏ nhất, P đạt giá trị lớn nhất khi MI đạt giá trị lớn nhất.

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9 \text{ có tâm } J(1; 2; -1) \text{ và bán kính } R = 3$$

$$\text{Suy ra } IJ = 5$$

Mà M là điểm thay đổi trên (S)

Do đó:

$$\min MI = IM_1 = IJ - R = 5 - 3 = 2$$

$$\max MI = IM_2 = IJ + R = 5 + 3 = 8$$

Suy ra $m - n = 8^2 - 2^2 = 60$

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6z + 7 = 0$. Cho ba điểm A, M, B nằm trên mặt cầu (S) sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng?

- A.** 4. **B.** 2. **C.** 4π . **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Ta có $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 4 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(1;1;3)$ và bán kính $R = 2$.

Bài ra A, M, B nằm trên mặt cầu (S) và $\widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow AB$ qua $I \Rightarrow AB = 2R = 4$.

Ta có $S_{AMB} = \frac{1}{2}MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow MA = MB = \frac{AB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ và $AB = 4$.

Do đó diện tích tam giác AMB có giá trị lớn nhất bằng 4.

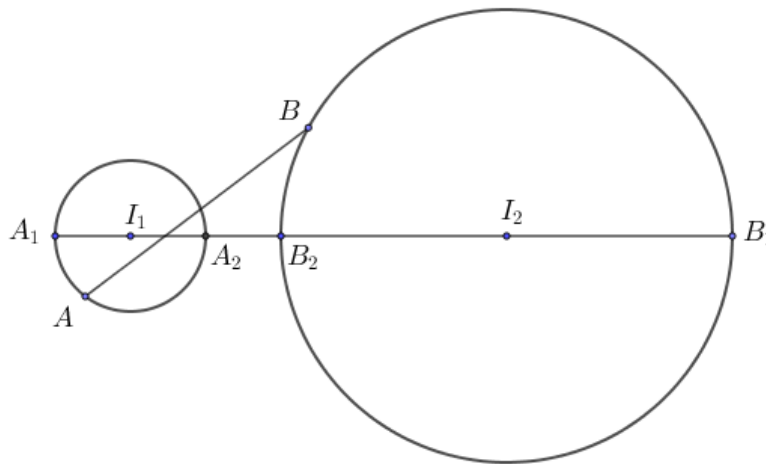
Câu 14: Cho a, b, c, d, e, f là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} (d-1)^2 + (e-2)^2 + (f-3)^2 = 1 \\ (a+3)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất,

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = \sqrt{(a-d)^2 + (b-e)^2 + (c-f)^2}$ lần lượt là M, m . Khi đó, $M - m$ bằng

- A.** 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $A(d, e, f)$ thì A thuộc mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ có tâm $I_1(1;2;3)$, bán kính $R_1 = 1$, $B(a, b, c)$ thì B thuộc mặt cầu $(S_2): (x+3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ có tâm $I_2(-3;2;0)$, bán kính $R_2 = 3$. Ta có $I_1I_2 = 5 > R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1)$ và (S_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.



Để thấy $F = AB$, AB max khi $A \equiv A_1, B \equiv B_1 \Rightarrow$ Giá trị lớn nhất bằng $I_1I_2 + R_1 + R_2 = 9$.

AB min khi $A \equiv A_2, B \equiv B_2 \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất bằng $I_1I_2 - R_1 - R_2 = 1$.

Vậy $M - m = 8$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$; $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

- A.** $6\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$.

$$\text{Ta có } \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3MA = 2MB \Leftrightarrow 9MA^2 = 4MB^2$$

$$\Leftrightarrow 9[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2] = 4[(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = 108.$$

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ và bán kính $R = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-6)^2} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-2; 3; 4)$ và $C(-2; 5; 1)$. Điểm $M(a; b; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng

- A.** $T = 10$. **B.** $T = 25$. **C.** $T = 13$. **D.** $T = 17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $G(-1; 3; 2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Khi đó

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \\ &= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG}(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

Do đó $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy) . Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1; 3; 0)$ Vậy

$$M(-1; 3; 0). \text{ Từ đó } T = (-1)^2 + 3^2 = 10.$$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + 3\overline{MC} \cdot \overline{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 12a + 12b + c$ có giá trị là

A. $T = 3$.

B. $T = -3$.

C. $T = 1$.

D. $T = -1$.

Lời giải:

Chọn D

Xét $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$

$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})$$

$$= 6MI^2 + \overrightarrow{MI}(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IAIB} + 2\overrightarrow{IBIC} + 3\overrightarrow{ICIA}$$

Gọi I là điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{4x_A + 3x_B + 5x_C}{12} \\ y_I = \frac{4y_A + 3y_B + 5y_C}{12} \\ z_I = \frac{4x_A + 3z_B + 5z_C}{12} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{-2}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}\right).$

Mà: $(4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) = \vec{0}$. $\overrightarrow{IAIB} + 2\overrightarrow{IBIC} + 3\overrightarrow{ICIA} = \text{const}$. Nên $S_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min}$

Suy ra M là hình chiếu của I lên mặt Oxy. $\Rightarrow M\left(\frac{-2}{12}, \frac{1}{12}, 0\right) \Rightarrow T = 12a + 12b + c = -1$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, lấy điểm C trên tia Oz sao cho $OC = 1$. Trên hai tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm A, B thay đổi sao cho $OA + OB = OC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$?

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $\sqrt{6}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt: $OA = a; OB = b$ ($a > 0, b > 0$) $\Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 - 2ab$

Bán kính cầu:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow R^2 = \frac{(1 - 2ab) + 1^2}{4} = \frac{2 - 2a(1 - a)}{4} = \frac{2a^2 - 2a + 2}{4} = \frac{a^2 - a + 1}{2}$$

$$= \frac{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{2}$$

$$R^2 \geq \frac{3}{8} \Leftrightarrow R \geq \frac{\sqrt{6}}{4}. \text{ Vậy } R_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0$ sao cho biểu thức $T = 2a + 3b + 6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P = 2a - b + c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$.

B. 8.

C. 6.

D. $\frac{51}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16.$$

$$M(a; b; c) \in (S) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 16.$$

$$\text{Ta có: } |2(a-1) + 3(b-2) + 6(c-2)| \leq \sqrt{(2^2 + 3^2 + 6^2) \cdot [(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2]}.$$

$$\Leftrightarrow |2a + 3b + 6c - 20| \leq 28 \Rightarrow 2a + 3b + 6c - 20 \leq 28 \Rightarrow 2a + 3b + 6c \leq 48.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 48 \\ \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{3} \\ \frac{a-1}{2} = \frac{c-2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 48 \\ 3a - 2b = -1 \\ 3a - c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{15}{7} \\ b = \frac{26}{7} \\ c = \frac{38}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = 2a - b + c = 2 \cdot \frac{15}{7} - \frac{26}{7} + \frac{38}{7} = 6.$$

- Câu 20:** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, Cho điểm $A(2t; 2t; 0)$, $B(0; 0; t)$. Điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$. Biết rằng có giá trị $t = \frac{a}{b}$ với a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất bằng 3. Khi đó giá trị của $Q = 2a + b$ bằng
- A.** 5 **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Gọi } P(x; y; z), \text{ ta có: } \overrightarrow{OP} = (x; y; z), \overrightarrow{AP} = (x - 2t; y - 2t; z), \overrightarrow{BP} = (x; y; z - t)$$

$$\text{Vì } P(x; y; z) \text{ thỏa mãn } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4tx - 4ty - 2tz - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}tx - \frac{4}{3}ty - \frac{2}{3}tz - 1 = 0$$

$$\text{Nên } P \text{ thuộc mặt cầu tâm } I\left(\frac{2t}{3}; \frac{2t}{3}; \frac{t}{3}\right), R = \sqrt{t^2 + 1}.$$

Ta có $OI = t < R$ nên O thuộc phần không gian phía trong mặt cầu.

Để $OP_{\max}$ thì P, I, O thẳng hàng và $OP = OI + R$.

$$\text{Suy ra } OP_{\max} = OI + R \Leftrightarrow 3 = t + \sqrt{t^2 + 1}. \text{ Từ đó tìm được } t = \frac{4}{3} \text{ Suy ra } a = 4, b = 3$$

$$\text{Vậy, } Q = 2a + b = 11.$$

- Câu 21:** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(4; 1; 5), B(3; 0; 1), C(-1; 2; 0)$ và điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ lớn nhất. Tính $P = a - 2b + 4c$.
- A.** $P = 23$. **B.** $P = 31$. **C.** $P = 11$. **D.** $P = 13$.

Lời giải

Chọn D

$$+ \text{Đặt } Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}.$$

$$\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2).$$

$$\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)^2 = MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \Rightarrow 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - BC^2.$$

$$\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\right)^2 = MC^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \Rightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2).$$

$$\Rightarrow Q = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - 5\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) + MB^2 + MC^2 - BC^2 - \frac{5}{2}(MC^2 + MA^2 - AC^2)$$

$$= -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 - \frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2.$$

$-\frac{1}{2}AB^2 - BC^2 + \frac{5}{2}AC^2$ không đổi nên Q lớn nhất khi $T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

$$+ T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2.$$

Gọi E là điểm thỏa mãn $-2\overrightarrow{EA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{EC} = \vec{0}$.

$$\Leftrightarrow -4\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{EA} = 3\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}.$$

$$\Rightarrow E\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right).$$

$$T = -2MA^2 + \frac{3}{2}MB^2 - \frac{3}{2}MC^2 = -2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + \frac{3}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 - \frac{3}{2}(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2$$

$$= -2ME^2 - 2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2 \leq -2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2.$$

Vì $-2EA^2 + \frac{3}{2}EB^2 - \frac{3}{2}EC^2$ không đổi nên T đạt giá trị lớn nhất khi $ME = 0 \Rightarrow M \equiv E$.

$$\Rightarrow M\left(1; \frac{5}{2}; \frac{17}{4}\right).$$

$$P = a - 2b + 4c = 1 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \frac{17}{4} = 13.$$

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4)$, $B(-3; 3; -1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 103.

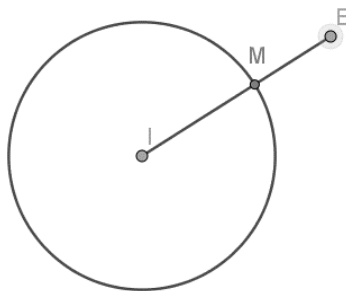
B. 108.

C. 105.

D. 100.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 3; 3)$ bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn: $2\vec{EA} + 3\vec{EB} = \vec{0}$. Suy ra $E(-1; 1; 1)$.

Xét $P = 2MA^2 + 3MB^2 = 2(\vec{ME} + \vec{EA})^2 + 3(\vec{ME} + \vec{EB})^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2$.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ME đạt giá trị nhỏ nhất.

$IE = 2\sqrt{3} > R$ suy ra điểm E nằm ngoài mặt cầu nên ME nhỏ nhất bằng

$$IE - R = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

Vậy $P = 2MA^2 + 3MB^2 = 5ME^2 + 2EA^2 + 3EB^2 = 105$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0$ và hai điểm $A(0; 2; 0)$, $B(2; -6; -2)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (S) thỏa mãn $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}.$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vì $IA = \sqrt{2} > R$ và $IB = \sqrt{82} > R$ nên hai điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) .

Gọi K là trung điểm đoạn thẳng AB thì $K(1; -2; -1)$ và K nằm ngoài mặt cầu (S) .

$$\text{Ta có: } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MK} + \vec{KA}) \cdot (\vec{MK} + \vec{KB})$$

$$= MK^2 + \overrightarrow{MK} \cdot (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB}) + \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = MK^2 - KA^2.$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MK^2 nhỏ nhất, tức là MK nhỏ nhất.

Đánh giá: $IM + MK \geq IK \Rightarrow R + MK \geq IK \Rightarrow MK \geq IK - R$.

Suy ra MK nhỏ nhất bằng $IK - R$, xảy ra khi I, M, K thẳng hàng và M nằm giữa hai điểm I, K . Như vậy M là giao điểm của đoạn thẳng IK và mặt cầu (S) .

$$\text{Có } \overrightarrow{IK} = (2; -4; -2), IK = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6} = 4R = 4IM.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IK} = 4\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4(a+1) \\ -4 = 4(b-2) \\ -2 = 4(c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $a + b + c = 1$.

Câu 24: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 5 điểm $A(1;0;0)$, $B(-1;1;0)$, $C(0;-1;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;3;0)$. M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}|$ là:

A. 12.

B. $12\sqrt{2}$.

C. 24.

D. $24\sqrt{2}$.

Lời giải

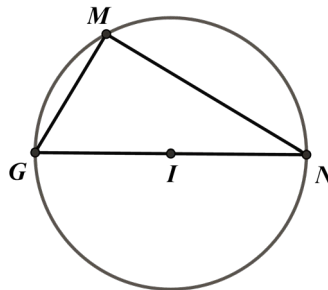
Chọn B

Mặt cầu (S) : tâm $I(0;1;0)$ bán kính $R = 1$

Gọi trọng tâm tam giác ABC là $G(0;0;0)$, trung điểm DE là $N(0;2;0)$

do G, N đều nằm trên (S) và I là trung điểm GN nên GN là đường kính của (S)

$$\begin{aligned} P &= 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}| = 2|3\overrightarrow{MG}| + 3|2\overrightarrow{MN}| \\ &= 6MG + 6MN = 6(MG + MN) \end{aligned}$$



$$\text{Ta có: } (MG + MN)^2 \leq 2(MG^2 + MN^2) = 2GN^2 = 8$$

$$\text{Suy ra } MG + MN \leq 2\sqrt{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $12\sqrt{2}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;-1;3), B(-2;-8;-4), C(2;-1;1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$. Gọi $M(x_M; y_M; z_M)$ là điểm trên (S) sao cho biểu thức $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = x_M + y_M$.

A. $P = 0$.

B. $P = 6$.

C. $P = \sqrt{14}$.

D. $P = 3\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi J là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JO} + 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OJ} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow J(3; 6; 9)$.

Mà $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ} + (3\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC})$ nên $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MJ}|$

Do đó $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MJ}|_{\min}$.

Mặt khác: (S) có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{14}$ và $IJ = 2\sqrt{14} > R \Rightarrow$ điểm J nằm ngoài mặt cầu nên IJ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm M_1, M_2 .

Phương trình đường thẳng $(IJ): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 6t \end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 6t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Suy ra $M_1(2; 4; 6), M_2(0; 0; 0), M_1J = \sqrt{14}; M_2J = 3\sqrt{14}$.

Vậy $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|_{\min} \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MJ}|_{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1$.

$P = x_M + y_M = 2 + 4 = 6$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0; 0; 2), B(1; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{1}{4}$.

Xét điểm M thay đổi thuộc (S) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{19}{4}$.

D. $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 1)$, bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Rightarrow K\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 &= (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA})^2 + 2(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB})^2 \\ &= 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2 + 2\overrightarrow{MK}(\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB}) = 3MK^2 + KA^2 + 2KB^2. \end{aligned}$$

Biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt GTNN khi và chỉ khi MK đạt giá trị nhỏ nhất.

Với M thay đổi thuộc (S) ta có $MK_{\min} = |KI - R| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

$$\text{Vậy } (MA^2 + 2MB^2)_{\min} = 3MK_{\min}^2 + KA^2 + 2KB^2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{19}{4}.$$

Câu 27: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm A, B thay đổi trên mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ thỏa mãn $AB = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $OA^2 - OB^2$ là

A. 12.

B. 6.

C. 10.

D. 24.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ có tâm $I(0;0;1)$.

Vì A, B cùng thuộc mặt cầu tâm I nên $IA = IB$.

$$\begin{aligned} OA^2 - OB^2 &= (\overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{OB})^2 = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{OI}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BA} = 2OI \cdot BA \cdot \cos \varphi, \text{ với } \varphi = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BA}). \end{aligned}$$

Suy ra biểu thức $OA^2 - OB^2$ đạt GTLN khi và chỉ khi $\varphi = 0$.

$$\text{Vậy } \max(OA^2 - OB^2) = 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot \cos 0 = 12.$$

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;5)$, $B(3;4;0)$, $C(2;-1;0)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $a + b + c$ có giá trị bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. -4.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OC} = (2;1;1) \Leftrightarrow I(2;1;1)$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, } T &= MA^2 + MB^2 + 3MC^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) + IA^2 + IB^2 + 3IC^2 \\ &= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + 3IC^2 \end{aligned}$$

Vì I, A, B, C cố định $\Rightarrow IA^2 + IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên T nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I(2;1;1) \Rightarrow a = 2, b = c = 1$.

Vậy $a + b + c = 4$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3;0;0); B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

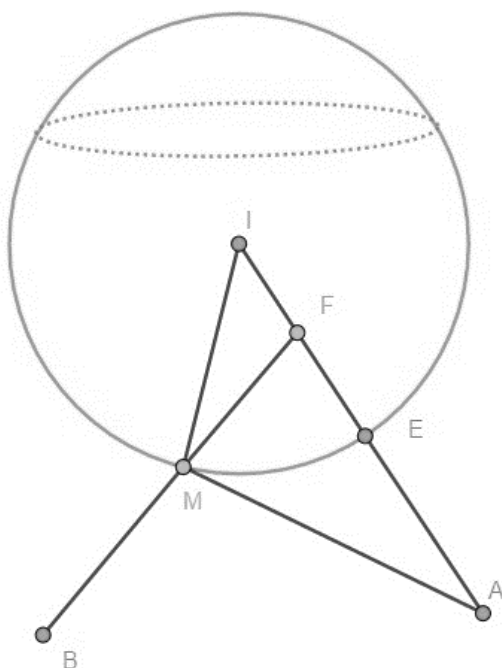
B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Nhận xét: điểm A, B nằm ngoài mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0), R = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA = 4\sqrt{2} = 2R, E = IA \cap (S) \Rightarrow E(1;2;0)$.

Gọi F là trung điểm của $IE \Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có $\widehat{AIM}$ chung và $\frac{IF}{IM} = \frac{1}{2} = \frac{IM}{IA} \Rightarrow \triangle AIM \sim \triangle MIF$.

Suy ra $\frac{MA}{FM} = \frac{AI}{MI} = 2 \Rightarrow MA = 2MF$.

Ta có: $MA + 2MB = 2(MF + MB) \geq 2FB = 6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu " $=$ " xảy ra khi $M = BF \cap (S)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$ và các điểm $A(0;1;1), B(-1;-2;-3), C(1;0;-3)$. Điểm D thuộc mặt cầu (S) . Thể tích tứ diện $ABCD$ lớn nhất bằng:

A. 9.

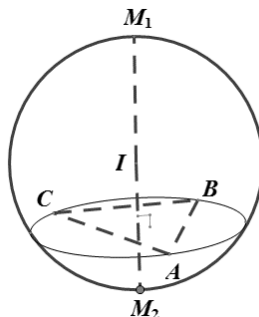
B. $\frac{8}{3}$.

C. 7.

D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Ta có $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$.

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; -3; -4) \\ \overrightarrow{AC} = (1; -1; -4) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (8; -8; 4)$.

Gọi $D(x; y; z) \in (S) \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \\ \overrightarrow{AD} = (x; y-1; z-1) \end{cases}$.

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |8x - 8y + 4z + 4| = \frac{2}{3} |2x - 2y + z + 1|$.

Ta có: $|2x - 2y + z + 1| = |2 \cdot (x-1) - 2 \cdot y + 1 \cdot (z+1) + 2|$

Ta có: $|2(x-1) - 2y + z + 1| \leq \sqrt{(2^2 + 2^2 + 1^2)} \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2} = 6$

$\Rightarrow -6 \leq 2(x-1) - 2y + z + 1 \leq 6 \Leftrightarrow -4 \leq 2x - 2y + z + 1 \leq 8$

$\Rightarrow |2x - 2y + z + 1| \leq 8 \Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{16}{3}$

Suy ra: Giá trị lớn nhất của V_{ABCD} bằng $\frac{16}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1} > 0 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và điểm $A(3; 0; 0)$, $B(4; 2; 1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$.

A. $P = 2\sqrt{2}$.

B. $P = 3\sqrt{2}$.

C. $P = 4\sqrt{2}$.

D. $P = 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $M(x; y; z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x-3; y; z)$, $\overrightarrow{BM} = (x-4; y-2; z-1)$.

Và $(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8 \Leftrightarrow 3[(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 8] = 0$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } P &= MA + 2MB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\
 &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2 + 3[(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 - 8]} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\
 &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 24y + 4z^2 + 36} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\
 &= 2\left[\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}\right] \\
 &= 2\left[\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (2-y)^2 + (1-z)^2}\right]
 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \geq \sqrt{(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} > 0$.

$$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{(x+4-x)^2 + (y-3+2-y)^2 + (z+1-z)^2} = 2\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{x}{4-x} = \frac{y-3}{2-y} = \frac{z}{1-z} = t > 0 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4t}{t+1} \\ y = \frac{2t+3}{t+1} \\ z = \frac{t}{t+1} \\ \left(\frac{5t+1}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{-2t-1}{t+1}\right)^2 + \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4t}{t+1} \\ y = \frac{2t+3}{t+1} \\ z = \frac{t}{t+1} \\ 22t^2 - 2t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4+4\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ y = \frac{34+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ z = \frac{1+\sqrt{133}}{23+\sqrt{133}} \\ t = \frac{1+\sqrt{133}}{22} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $6\sqrt{2}$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 2; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(2; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

A. $M(2; 3; 0)$.

B. $M(1; 3; 0)$.

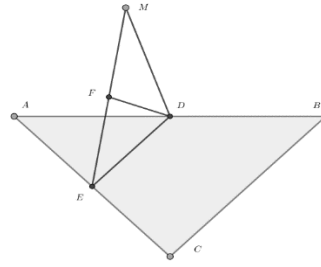
C. $M(2; -3; 0)$.

D. $M(2; 3; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1



Gọi $D; E; F$ lần lượt là trung điểm của $AB; AC; ME$. Ta có:

$$\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \left| 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CB} \right| = \left| 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ED} \right| = 2 \left| 2\overrightarrow{FD} \right| = 4.FD$$

Ta lại có: $M(x; y; 0); D\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right); E(3; 0; 0); F\left(\frac{x+3}{2}; \frac{y}{2}; 0\right)$

$$FD_{\min} \Leftrightarrow F \text{ là hình chiếu của } D \text{ trên } mp(Oxy) \Leftrightarrow x = 2; y = 3 \Leftrightarrow M(2; 3; 0)$$

Cách 2

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \Rightarrow I(2; 3; 1)$$

$$\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \left| 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} \right| = 2.MI$$

$$\left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MI \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow M \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } mp(Oxy).$$

$$\text{Vì } I(2; 3; 1) \Rightarrow M(2; 3; 0)$$

Cách 3

Gọi $M(x; y; 0)$. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (4 - 2x; 6 - 2y; -1) \Rightarrow \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 53}$$

$$\text{Thế tọa độ điểm } M \text{ ở đáp án A vào ta được } \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = 1$$

$$\text{Thế tọa độ điểm } M \text{ ở đáp án B vào ta được } \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \sqrt{17}$$

$$\text{Thế tọa độ điểm } M \text{ ở đáp án C vào ta được } \left| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| = \sqrt{145}$$

Điểm M ở đáp án D không thuộc (Oxy) nên bị loại.

Cách 4

Gọi $M(x; y; 0)$. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = (4 - 2x; 6 - 2y; -1) \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 53}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 53} = \sqrt{(2x - 4)^2 + (2y - 6)^2 + 1} \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2; y = 3$. Khi đó $M(2; 3; 0)$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5; 3; -2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

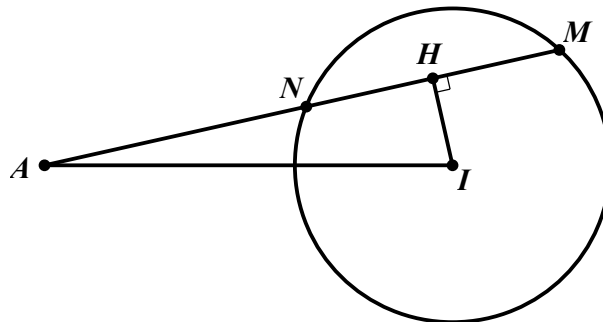
A. $S_{\min} = 30$. **B.** $S_{\min} = 20$. **C.** $S_{\min} = \sqrt{34} - 3$. **D.** $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$, bán kính $R = 3$.

$AI = \sqrt{34} > R \Rightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu (S) .



Do hai điểm M, N nằm ở vị trí hai đầu một dây cung nên để $S_{\min}$ thì N nằm giữa A và M .

Gọi H là trung điểm $MN \Rightarrow IH \perp MN, NH = \frac{1}{2}MN$

$$S = 4(AH - NH) + AH + NH = 5AH - 3NH$$

$$S = 5\sqrt{AI^2 - IH^2} - 3\sqrt{R^2 - IH^2} = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, x = IH$$

Xét hàm số $f(x) = 5\sqrt{34 - x^2} - 3\sqrt{9 - x^2}, (0 \leq x < 3)$

$$f'(x) = \frac{-5x}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3x}{\sqrt{9 - x^2}} = x \left(\frac{-5}{\sqrt{34 - x^2}} + \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} \right)$$

$$\text{Xét } \left(\frac{-5}{\sqrt{34-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{9-x^2}} \right) > 0 \Leftrightarrow 5\sqrt{9-x^2} < 3\sqrt{34-x^2}$$

$$\Leftrightarrow 225 - 25x^2 < 9 \cdot 34 - 9x^2 \Leftrightarrow 16x^2 + 81 > 0$$

Suy ra ; $f'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 3), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; 3)$

Suy ra $\min_{[0;3)} f(x) = f(0) = 5\sqrt{34} - 9.$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 10$ và hai điểm $A(1; 2; -4)$ và $B(1; 2; 14)$. Điểm M thay đổi trên mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của $(MA + 2MB)$ bằng

A. $2\sqrt{82}$.

B. $3\sqrt{79}$.

C. $5\sqrt{79}$.

D. $3\sqrt{82}$.

Lời giải

Chọn D

(S) có tâm $I(1; 0; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có $IA = 2\sqrt{10} = 2R$ nên tồn tại điểm C cố định sao cho $MA = 2MC \quad \forall M \in (S)$ (1).

Thật vậy, gọi $(a; b; c)$ là tọa độ điểm C . Khi đó, với mọi điểm

$M(x; y; z) \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 4z + 5$, ta có:

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 21$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2x - 4y + 8z + 21 = -4y + 12z + 26.$$

$$MC^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2$$

$$= 2x + 4z + 5 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 = (2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5.$$

Nên (1) $\Leftrightarrow MA^2 = 4MC^2 \quad \forall M \in (S)$

$$\Leftrightarrow -4y + 12z + 26 = 4[(2-2a)x - 2by + (4-2c)z + a^2 + b^2 + c^2 + 5] \quad \forall x, y, z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2-2a) = 0 \\ 4(-2b) = -4 \\ 4(4-2c) = 12 \\ 4(a^2 + b^2 + c^2 + 5) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow C\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Lúc này, $IC = \frac{\sqrt{10}}{2} < R < IB = 2\sqrt{37}$ nên C nằm trong (S) còn B nằm ngoài (S) và

$$MA + 2MB = 2MC + 2MB = 2(MC + MB) \geq 2BC = 3\sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn BC và mặt cầu (S) .

Vậy $\min(MA + 2MB) = 3\sqrt{82}$.

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ và các điểm $A(4; 0; 0)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0; 0\right)$, $C(1; 4; 0)$, $D(4; 4; 0)$. Gọi M

là điểm thay đổi trên (S_1) , N là điểm thay đổi trên (S_2) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC$ là

A. $2\sqrt{265}$.

B. $\sqrt{265}$.

C. $3\sqrt{265}$.

D. $4\sqrt{265}$.

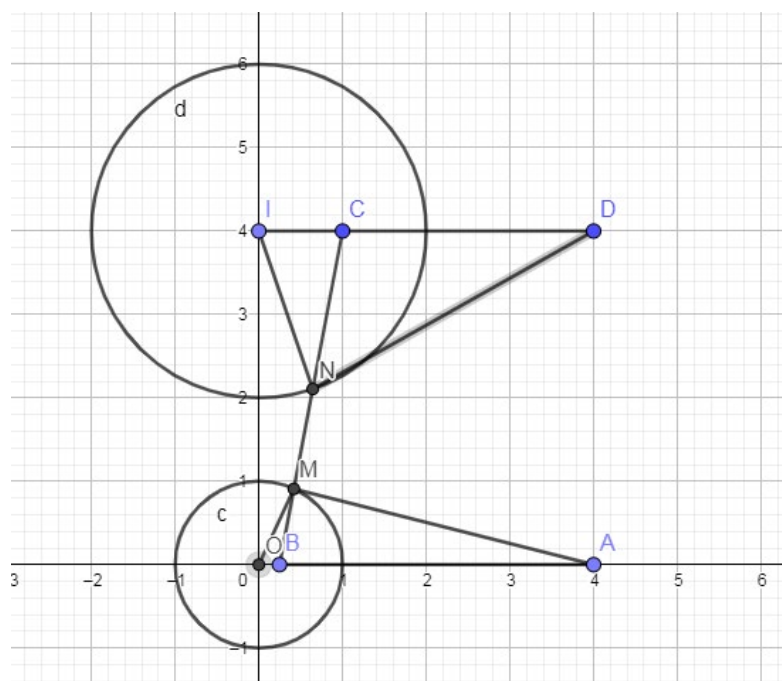
Lời giải

Chọn A

$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên (S_1) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R_1 = 1$

$(S_2): x^2 + (y-4)^2 + z^2 = 4$ nên (S_2) có tâm $I(0;4;0)$ và bán kính $R_2 = 2$

Vậy các điểm $A(4;0;0)$, $B\left(\frac{1}{4};0;0\right)$, $C(1;4;0)$, $D(4;4;0)$, $O(0;0;0)$ và $I(0;4;0)$ cùng thuộc (Oxy)



Nhận thấy $OB.OA = OM^2$ suy ra OM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB

Do đó $\triangle MOB$ đồng dạng $\triangle AOM$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{OA}{OM} = 4 \Rightarrow MA = 4MB$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự } \frac{ND}{NC} = \frac{DI}{NI} = 2 \Rightarrow ND = 2NC$$

$$Q = MA + 2ND + 4MN + 4BC = 4(MB + NC + MN) + 4BC \geq 4BC + 4BC = 8BC = 2\sqrt{265}$$

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;3;-1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;0;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxz) để $S = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-1;0;\frac{7}{3}\right)$.

B. $M(0;3;0)$.

C. $M\left(1;0;\frac{7}{3}\right)$.

D. $M\left(-\frac{1}{2};0;2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , suy ra $G(1;2;1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-x=4(-1-x) \\ 3-y=4(0-y) \\ -1-z=4(2-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow H(-2;-1;3).$$

Nhận thấy G và H nằm về hai phía đối với mặt phẳng (Oxz) ; $HG = \sqrt{22}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \\ &= |\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA} - 4\overrightarrow{MH} - 4\overrightarrow{HC}| + |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}| = |-3\overrightarrow{MH}| + |3\overrightarrow{MG}| \\ &= 3(MH + MG) \geq 3GH = 3\sqrt{22}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi H, M, G thẳng hàng theo thứ tự.

Lại do $M \in (Oxz)$ nên S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng GH với mặt phẳng (Oxz) .

$$\text{Đường thẳng } GH \text{ có phương trình } \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+3t \\ z=1-2t \end{cases}; \text{ mặt phẳng } (Oxz) \text{ có phương trình } y=0.$$

$$M \in GH \Rightarrow M(1+3t; 2+3t; 1-2t).$$

$$M \in (Oxz) \Rightarrow 2+3t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } M\left(-1; 0; \frac{7}{3}\right).$$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ và hai điểm $A(4;2;4)$, $B(1;4;2)$. MN là dây cung của mặt cầu thỏa mãn $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0;1;1)$ và $MN = 4\sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$.

A. $\sqrt{41}$.

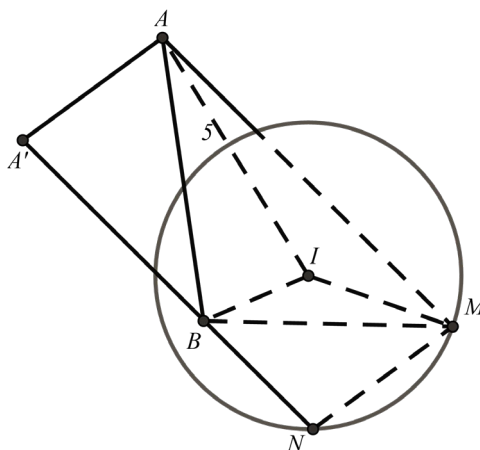
B. $4\sqrt{2}$.

C. 7.

D. $\sqrt{17}$.

Lời giải

Chọn C



Tâm $I(1; 2; 0)$, bán kính $R = 3$.

Ta có $\overrightarrow{IA} = (3; 0; 4) \Rightarrow IA = 5$, $\overrightarrow{IB} = (0; 2; 2) \Rightarrow IB = 2\sqrt{2}$ nên điểm $A(4; 2; 4)$ nằm ngoài mặt cầu (S) và điểm $B(1; 4; 2)$ nằm trong mặt cầu (S) .

Do $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{u} = (0; 1; 1)$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (0; k; k)$, $k > 0$ do $MN = 4\sqrt{2}$ suy ra $\overrightarrow{MN} = (0; 4; 4)$.

Gọi $A' = T_{\overrightarrow{MN}}(A)$, suy ra $A' = (4; 6; 8)$. Khi đó $AMNA'$ là hình bình hành nên $AM = A'N$

Ta có $|AM - BN| = |A'N - BN| \leq A'B$, dấu bằng xảy ra khi A', N, B thẳng hàng $\Leftrightarrow N$ là giao điểm của mặt cầu với đường thẳng $A'B$.

$\overrightarrow{A'B} = (-3; -2; -6)$ suy ra $A'B = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = 7$. Vậy $|AM - BN|_{\min} = A'B = 7$.