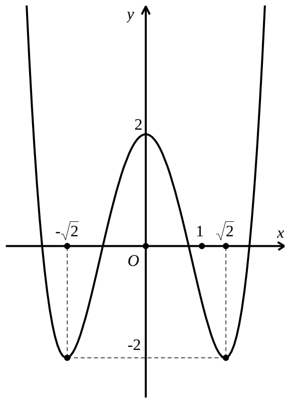
SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO NGHỆ AN
TRƯỜNG THPT THANH CHƯƠNG 1
(Đề gồm có 06 trang)

KỲ THI THỬ THPT QUỐC GIA LẦN I NĂM 2018
MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Mã đề thi 209

Họ, tên thí sinh:...*Số báo danh:*..........................

Câu 1: Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^4+4x^2+2.$ **B.** $y=x^4+4x^2+2.$

C. $y=x^4-2x^2+2.$ **D.** $y=x^4-4x^2+2.$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ hàm xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	
y	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ || -3	$\nearrow$	10

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 10.

B. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CĐ}=10$.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT}=-3$

.

D. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CĐ}=3$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Oy và đi qua điểm $M(1;1;-1)$ có phương trình là

A. $x+z=0.$ **B.** $x-y=0.$ **C.** $x-z=0.$ **D.** $y+z=0.$

Câu 4: Với số thực dương a bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 2a^2=1+2\log_2 a.$ **B.** $\log_2 2a^2=2+2\log_2 a.$

C. $\log_2 (2a)^2=2+\log_2 a.$ **D.** $\log_2 (2a)^2=1+2\log_2 a.$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$. Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng d' có một véctơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(2;0;1).$ **B.** $\vec{u}_3=(1;1;0).$ **C.** $\vec{u}_2=(-2;1;0).$ **D.** $\vec{u}_4=(2;1;0).$

Câu 6: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ bằng

A. 0. **B.** -4. **C.** -3. **D.** 1.

Câu 7: Cho số phức $z=(1-2i)^2$, số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z}=3-4i$. **B.** $\bar{z}=-3+4i$. **C.** $\bar{z}=-3-4i$. **D.** $\bar{z}=1+2i$.

Câu 8: Giải bóng đá **V-league** 2018 có 14 đội tham dự, mỗi đội gặp nhau hai lượt (lượt đi và lượt về). Tổng số trận đấu của giải diễn ra là

A. $14!$. **B.** C_{14}^2. **C.** $2.A_{14}^2$. **D.** A_{14}^2.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;-2)$. Véctơ nào dưới đây là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $\vec{n}_4=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{n}_3=(-2;2;1)$. **C.** $\vec{n}_1=(2;-2;-1)$. **D.** $\vec{n}_2=(1;1;-2)$.

Câu 10: Hình nón có thể tích bằng 16π và bán kính đáy bằng 4. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 12π. **B.** 24π. **C.** 20π. **D.** 10π.

Câu 11: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x+2)\le 0$ là

A. $S=(-\infty;-1]$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(-2;-1]$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

Câu 12: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x^2+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$ là

A. $S=8$. **B.** $S=12$. **C.** $S=10$. **D.** $S=9$.

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+e^{-x}$ là

A. $e^x+e^{-x}+C$. **B.** $e^x-e^{-x}+C$. **C.** $e^{-x}-e^x+C$. **D.** $2e^{-x}+C$.

Câu 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=a, OB=b, OC=c$. Thể tích tứ diện $OABC$ là

A. $V=\dfrac{abc}{12}$. **B.** $V=\dfrac{abc}{4}$. **C.** $V=\dfrac{abc}{3}$. **D.** $V=\dfrac{abc}{6}$.

Câu 15: Bảng biến thiên như hình vẽ bên là của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y=x^3+3x-1$.

B. $y=x^3-3x-1$.

C. $y=-x^3+3x+3$.

D. $y=x^4-2x^2+2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 16: Cho n là số nguyên dương; a, b là các số thực ($a>0$). Biết trong khai triển $\left(a-\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^n$ có số hạng chứa a^9b^4. Số hạng có số mũ của a và b bằng nhau trong khai triển $\left(a-\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^n$ là

A. $6006a^5b^5$. **B.** $5005a^8b^8$. **C.** $3003a^5b^5$. **D.** $5005a^6b^6$.

Câu 17: Thầy An có 200 triệu đồng gửi ngân hàng đã được hai năm với lãi suất không đổi 0,45%/tháng. Biết rằng số tiền lãi sau mỗi tháng được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Nhân dịp đầu Xuân một hãng ô tô có chương trình khuyễn mại trả góp 0% trong 12 tháng. Thầy quyết định lấy toàn bộ số tiền đó (cả vốn lẫn lãi) để mua một chiếc ô tô với giá 300 triệu đồng, số tiền còn nợ thầy sẽ chia đều trả góp trong 12 tháng. Số tiền thầy An phải trả góp hàng tháng gần với số nào nhất trong các số sau.

A. 6.547.000 đồng. **B.** 6.345.000 đồng. **C.** 6.432.000 đồng. **D.** 6.437.000 đồng.

Câu 18: Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $y=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{m-1}{2}x^2+mx-\ln x+2$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỷ số $k=2$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+4x-8y+4=0.$ **B.** $x^2+y^2-4x+8y+4=0.$

C. $x^2+y^2+4x-8y-4=0.$ **D.** $x^2+y^2+4x-8y+2=0.$

Câu 20: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a, gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên và $f(-2)=3$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>3$ là

A. $S=(-2;2).$

B. $S=(-\infty;-2).$

C. $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty).$

D. $S=(-2;+\infty).$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Câu 22: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. $y=x-\sqrt{x^2+1}.$ **B.** $y=\frac{1}{2x+1}.$ **C.** $y=\frac{x^2-3x+2}{x+1}.$ **D.** $y=\frac{x^2-1}{2x^2+1}.$

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^2 x+\sin x+1$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 24: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $(1+\log_2 x)\log_4 2x=2$ bằng

A. $\frac{1}{8}$. **B.** 4. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-1}$; $d_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{3}$ chéo nhau. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1;d_2$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{1}.$ **B.** $\frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-1}{1}.$

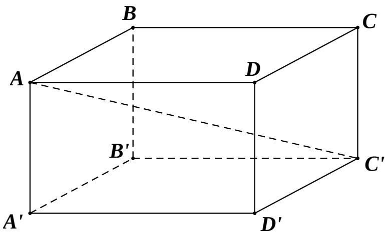
C. $\frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{1}.$ **D.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{1}.$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA=2\sqrt{2}a, AB=a, BC=2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{7}$. **C.** $\sqrt{7}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{5}$.

Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a, AD = \sqrt{3}\,\text{a}, AA' = 2a$. Góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°.
B. 45°.
C. 120°.
D. 30°.



Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(-5;1;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $-3x - 2y + z - 5 = 0$. **B.** $3x - 2y - z + 5 = 0$.
C. $3x + 2y - z + 5 = 0$. **D.** $-3x + 2y - z + 1 = 0$.

Câu 29: Tích phân $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2 - 2x + 2}dx$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $\ln\sqrt{2}$. **D.** $-\ln\sqrt{2}$.

Câu 30: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2 - 2z + 5 = 0$. Mô đun của số phức $w = 4 - z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 25.

Câu 31: Cho z là các số phức thỏa mãn điều kiện $\left|\dfrac{z+3}{1-2i} + 2\right| = 1$ và w là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z - w|$ bằng

A. $5 - \sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $1 + \sqrt{3}$.

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = (6-m)(2^{2+x} - 2^{2-x})$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $\left[f(x)\right]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 34: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1; n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$ bằng

A. $2^{20} - 20$. **B.** $2^{21} - 22$. **C.** 2^{20}. **D.** $2^{21} - 20$.

Câu 35: Biết tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}dx = a\pi + \ln b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b$.

A. $S = 2 + \sqrt{2}$. **B.** $S = \dfrac{11}{4}$. **C.** $S = \dfrac{5}{4}$. **D.** $S = \dfrac{3}{4}$.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left|x^3\right|-(3-m)x^2+(3m+7)\left|x\right|-1$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

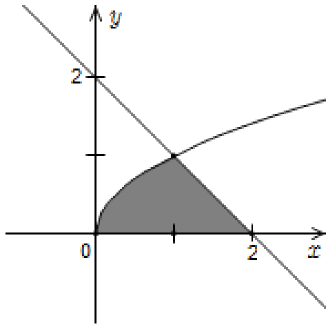
Câu 37: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, đường thẳng $y=2-x$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{7\pi}{6}$.

B. $\frac{4\pi}{3}$.

C. $\frac{5\pi}{6}$.

D. $\frac{5\pi}{4}$.



Câu 38: Cho phương trình $mx^2+4\pi^2=4\pi^2\cos x$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A.-54. **B.** 35. **C.**-35. **D.** 51.

Câu 39: Cho z_1,z_2 là các số phức thỏa mãn $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=1$ và $\left|z_1-2z_2\right|=\sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\left|2z_1+z_2\right|$.

A. $P=2$. **B.** $P=\sqrt{3}$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+z-8=0$ và điểm ba điểm $A(0;-1;0)$, $B(2;3;0)$, $C(0;-5;2)$. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA=MB=MC$. Tổng $S=x_0+y_0+z_0$ bằng

A. -12. **B.** -5. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 41: Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m^2+1)x-m+1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 9. Giá trị của S bằng

A. $S=5$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=1$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có một đáy là tam giác ABC vuông tại A; $AB=3a$, $BC=5a$. Biết khối trụ có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC, $A'B'C'$ và có thể tích bằng $2\pi a^3$. Chiều cao AA' của lăng trụ bằng

A. $3a$. **B.** $\sqrt{3}a$. **C.** $2a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

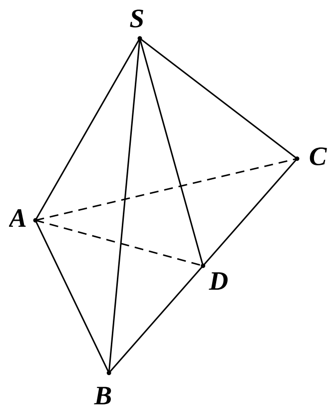
Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh đáy $AB=3,BC=4,AC=\sqrt{17}$. Gọi D là trung điểm của BC, các mặt phẳng $(SAB),(SBD),(SAD)$ cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

C. $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.



Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{3}{x^2-x-2}$, $f(-2)=2\ln 2+2$ và $f(-2)-2f(0)=4$. Giá trị của biểu thức $f(-3)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

A. $2+\ln 5$. **B.** $2+\ln\dfrac{5}{2}$. **C.** $2-\ln 2$. **D.** $1+\ln\dfrac{5}{2}$.

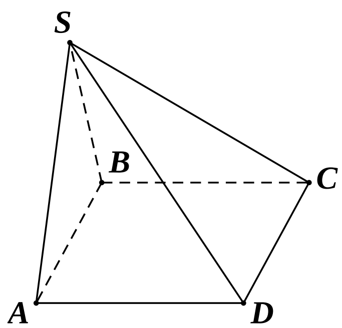
Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB=2$, $AD=3$, $SD=\sqrt{14}$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và (MBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\dfrac{43}{61}$.

C. $\dfrac{5}{7}$.

D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và điểm $A(1;0;0)\in(P)$. Đường thẳng Δ đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) và tạo với trục Oz một góc nhỏ nhất. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng $(Q): 2x+y-2z+1=0$. Tổng $S=x_0+y_0+z_0$ bằng

A. -5. **B.** 12. **C.** -2. **D.** 13.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-4=0$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-8x-6y-6z+18=0$ và điểm $M(1;1;2)\in(\alpha)$. Đường thẳng d đi qua M nằm trong mặt phẳng (α) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho dây cung AB có độ dài nhỏ nhất. Đường thẳng d có một véctơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(2;-1;-1)$. **B.** $\vec{u}_3=(1;1;-2)$. **C.** $\vec{u}_2=(1;-2;1)$. **D.** $\vec{u}_4=(0;1;-1)$.

Câu 48: Một hộp đựng 15 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên ba thẻ, xác suất để tổng ba số ghi trên ba thẻ được rút chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{25}{91}$. **B.** $\dfrac{32}{91}$. **C.** $\dfrac{31}{91}$. **D.** $\dfrac{11}{27}$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=x^3+3x^2+mx+1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1),B,C$ sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại B,C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A. $\frac{11}{5}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

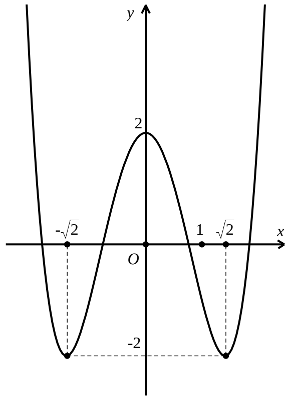
Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\pi} f(x)dx=2018$. Tích phân $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}dx$ bằng

A. 2018. **B.** 4036. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2018}$.

-----------------------**HẾT**----------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI
KỲ THI THỬ THPT QUỐC GIA MÔN TOÁN LẦN 1
TRƯỜNG THPT THANH CHƯƠNG I – NGHỆ AN

Câu 1: Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^4+4x^2+2.$ **B.** $y=x^4+4x^2+2.$

C. $y=x^4-2x^2+2.$ **D.** $y=x^4-4x^2+2.$

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Đồ thị hàm số* $y=ax^4+bx^2+c$ *với* $a\neq 0$ *có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi* $ab<0$.

Dựa vào 4 đáp án *A, B, C, D* ta thấy đồ thị hàm số có dạng $y=x^4+bx^2+2$ (do $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$).

Vì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $1.b<0\Leftrightarrow b<0$ (loại đáp án *B*).

Đồ thị hàm số đi qua điểm $\left(\sqrt{2};-2\right)$ nên ta có: $-2=\left(\sqrt{2}\right)^4+b.\left(\sqrt{2}\right)^2+2\Leftrightarrow -2=4+2b+2\Leftrightarrow b=-4$

Chọn D.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ hàm xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 10.

B. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CĐ}=10$.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT}=-3$

.

D. Giá trị cực đại của hàm số là $y_{CĐ}=3$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	||	+	
y	0 ↗		3	↘ $-\infty$	||	-3 ↗	10

Hướng dẫn giải

Đáp án D đúng vì $x=0$ là cực đại của hàm số nên $f(0)=3$ là giá trị cực đại của hàm số.

Chọn D.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa trục Oy và đi qua điểm $M(1;1;-1)$ có phương trình là

A. $x+z=0.$ **B.** $x-y=0.$ **C.** $x-z=0.$ **D.** $y+z=0.$

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Mặt phẳng (P) chứa trục Oy có phương trình $ax+cz=0$ ($a^2+c^2>0$).*

Thật vậy: Giả sử $(P): ax+by+cz+d=0$ là mặt phẳng chứa trục Oy. Vì mặt phẳng này đi qua $O(0;0;0)$ nên $d=0$. Lại có (P) chứa Oy nên véc tơ pháp tuyến của (P) vuông góc với véc tơ chỉ phương của Oy $\Leftrightarrow (a;b;c).(0;1;0)=0 \Leftrightarrow b=0$. Do đó $(P): ax+cz=0$.

(P) đi qua $M(1;1;-1)$ nên ta có: $a.1+c.(-1)=0 \Leftrightarrow a=c$. Chọn $a=c=1$ thì $(P): x+z=0$.

Chọn A.

Câu 4: Với số thực dương a bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 2a^2 = 1+2\log_2 a$.

B. $\log_2 2a^2 = 2+2\log_2 a$.

C. $\log_2 (2a)^2 = 2+\log_2 a$.

D. $\log_2 (2a)^2 = 1+2\log_2 a$.

Hướng dẫn giải

$\log_2 2a^2 = \log_2 2+\log_2 a^2 = 1+2\log_2 a$; $\log_2 (2a)^2 = 2\log_2 2a = 2(1+\log_2 a) = 2+2\log_2 a$

Chọn A.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$. Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng d' có một vécto chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(2;0;1)$.

B. $\vec{u}_3=(1;1;0)$.

C. $\vec{u}_2=(-2;1;0)$.

D. $\vec{u}_4=(2;1;0)$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Hình chiếu của điểm $M(a;b;c)$ lên mặt phẳng Oxy là điểm $H(a;b;0)$. Thật vậy: $\overrightarrow{HM}=(0;0;c)$ nên $\overrightarrow{HM}$ cùng phương với véc tơ pháp tuyến của Oxy, do đó $HM \perp (Oxy)$, ngoài ra $H \in (Oxy)$ nên H là hình chiếu của M lên Oxy.*

Gọi $I(1;0;2)$ là điểm bất kỳ thuộc *d*. Hình chiếu vuông góc của *I* xuống *(Oxy)* là $H(1;0;0)$; Ngoài ra *d* cắt mặt phẳng *Oxy* tại $H'(5;2;0)$ nên d' là đường HH' có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{HH'}=(4;2;0)$

Chọn D.

Câu 6: $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ bằng

A. 0.

B. -4.

C. -3.

D. 1.

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-3)=-1-3=-4$. **Chọn B.**

Câu 7: Cho số phức $z=(1-2i)^2$, số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=3-4i.$ **B.** $\overline{z}=-3+4i.$ **C.** $\overline{z}=-3-4i.$ **D.** $\overline{z}=1+2i.$

Hướng dẫn giải

$z=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=1-4i-4=-3-4i$. Do đó $\overline{z}=-3+4i$. **Chọn B.**

Câu 8: Giải bóng đá **V-league** 2018 có 14 đội tham dự, mỗi đội gặp nhau hai lượt (lượt đi và lượt về). Tổng số trận đấu của giải diễn ra là

A. $14!$. **B.** C_{14}^2. **C.** $2.A_{14}^2$. **D.** A_{14}^2.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn ra 2 đội trong 14 đội để lập thành 1 cặp đấu là C_{14}^2.

Với mỗi cặp đấu, ta có 2 trận đấu (lượt đi và lượt về) nên tổng số trận đấu là: $2C_{14}^2=A_{14}^2$

Chọn D.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;-2)$. Véctơ nào dưới đây là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC)?

A. $\vec{n}_4=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{n}_3=(-2;2;1)$. **C.** $\vec{n}_1=(2;-2;-1)$. **D.** $\vec{n}_2=(1;1;-2)$.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;0)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;0;-2)$. Do đó: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-2;1)$. **Chọn A.**

Câu 10: Hình nón có thể tích bằng 16π và bán kính đáy bằng 4. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. 12π. **B.** 24π. **C.** 20π. **D.** 10π.

Hướng dẫn giải

Hình nón có: $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2.h=16\pi$; $r=4\Rightarrow h=3$. Độ dài đường sinh: $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Diện tích xung quanh: $S_{xq}=\pi rl=\pi.4.5=20\pi$. **Chọn C.**

Câu 11: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(x+2)\le 0$ là

A. $S=(-\infty;-1]$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(-2;-1]$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Hàm $\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, nên $\log_2(x+2)\le 0\Leftrightarrow 0<x+2\le 1\Leftrightarrow -2<x\le -1$.

Chọn C.

Câu 12: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là

A. $S = 8$. **B.** $S = 12$. **C.** $S = 10$. **D.** $S = 9$.

Hướng dẫn giải

$I = \int_0^2 (3x^2 + 1)\,dx = 10$. **Chọn C.**

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + e^{-x}$ là

A. $e^x + e^{-x} + C$. **B.** $e^x - e^{-x} + C$. **C.** $e^{-x} - e^x + C$. **D.** $2e^{-x} + C$.

Hướng dẫn giải

$\int (e^x + e^{-x})\,dx = \int e^x dx + \int e^{-x} dx = e^x - e^{-x} + C$. **Chọn B.**

Câu 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = a, OB = b, OC = c$. Thể tích tứ diện $OABC$ là

A. $V = \frac{abc}{12}$. **B.** $V = \frac{abc}{4}$. **C.** $V = \frac{abc}{3}$. **D.** $V = \frac{abc}{6}$.

Hướng dẫn giải

$V_{OABC} = \frac{1}{3} OA.S_{OBC} = \frac{1}{3} OA.\frac{1}{2} OB.OC = \frac{1}{6} OA.OB.OC$. **Chọn D.**

Câu 15: Bảng biến thiên như hình vẽ bên là của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = x^3 + 3x - 1$.

B. $y = x^3 - 3x - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x + 3$.

D. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Hướng dẫn giải

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$. Kết hợp với $y(1) = -3$, ta thấy chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x - 1$. thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 16: Cho n là số nguyên dương; a, b là các số thực ($a > 0$). Biết trong khai triển $\left(a - \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^n$ có số hạng chứa a^9b^4. Số hạng có số mũ của a và b bằng nhau trong khai triển $\left(a - \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^n$ là

A. $6006a^5b^5$. **B.** $5005a^8b^8$. **C.** $3003a^5b^5$. **D.** $5005a^6b^6$.

Hướng dẫn giải

Xét khai triển: $\left(a-\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}(-1)^k\dfrac{b^k}{\sqrt{a}^k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k a^{n-k}.\dfrac{b^k}{a^{\frac{k}{2}}}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k a^{n-\frac{3k}{2}}b^k$

Vì có số hạng chứa a^9b^4 nên khi $k=4$ thì $n-\dfrac{3k}{2}=9\Leftrightarrow n=15$. Ta có

$\left(a-\dfrac{b}{\sqrt{a}}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^k(-1)^k a^{15-\frac{3k}{2}}b^k$; $15-\dfrac{3k}{2}=k\Leftrightarrow k=6$. Do đó số hạng có số mũ của a và b bằng nhau là $C_{15}^6.(-1)^6a^6b^6=5005a^6b^6$. **Chọn D.**

Câu 17: Thầy An có 200 triệu đồng gửi ngân hàng đã được hai năm với lãi suất không đổi 0,45%/tháng. Biết rằng số tiền lãi sau mỗi tháng được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Nhân dịp đầu Xuân một hãng ô tô có chương trình khuyễn mại trả góp 0% trong 12 tháng. Thầy quyết định lấy toàn bộ số tiền đó (cả vốn lẫn lãi) để mua một chiếc ô tô với giá 300 triệu đồng, số tiền còn nợ thầy sẽ chia đều trả góp trong 12 tháng. Số tiền thầy An phải trả góp hàng tháng gần với số nào nhất trong các số sau.

A. 6.547.000 đồng. **B.** 6.345.000 đồng. **C.** 6.432.000 đồng. **D.** 6.437.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Sau hai năm, số tiền thầy An có là : $200.(1+0,45\%)^{24}\simeq 222,756$ (triệu đồng).

Số tiền thầy An còn nợ sau khi mua xe là : $300-222,756=77,244$ (triệu đồng)

Số tiền trả góp mỗi tháng là : $\dfrac{77,244}{12}\simeq 6,437$ (triệu đồng). **Chọn D.**

Câu 18: Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{m-1}{2}x^2+mx-\ln x+2$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=x^3-2x^2-(m-1)x+m-\dfrac{1}{x}$;

$y'\ge 0\ \ \forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow x^3-2x^2-(m-1)x+m-\dfrac{1}{x}\ge 0\ \ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^4-2x^3-(m-1)x^2+mx-1\ge 0\ \ \forall x\in(2;+\infty)\Leftrightarrow x^4-2x^3+x^2-mx^2+mx-1\ge 0\ \ \forall x\in(2;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x^2-x)^2-m(x^2-x)-1\ge 0\ \ \forall x\in(2;+\infty)$. Đặt $t=x^2-x$, với $x\in(2;+\infty)$, ta có $t\in(2;+\infty)$

Cần tìm m để $t^2-mt-1\ge 0\ \ \forall t\in(2;+\infty)\Leftrightarrow t^2-1\ge mt\ \ \forall t\in(2;+\infty)\Leftrightarrow t-\dfrac{1}{t}\ge m\ \forall t\in(2;+\infty)$ (1)

Xét hàm $f(t)=t-\dfrac{1}{t};\ f'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}>0\ \ \forall t\in(2;+\infty)$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$. Mà $f(t)$ liên tục trên $[2;+\infty)$ nên $f(t)>f(2)=\dfrac{3}{2}\ \ \forall t\in(2;+\infty)$. Do đó $(1)\Leftrightarrow m\le\dfrac{3}{2}$. Mà $m\in N$ nên $m\in\{0;1\}$. **Chọn C**

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-4y+1=0$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O tỷ số $k=2$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+4x-8y+4=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+8y+4=0$.

C. $x^2+y^2+4x-8y-4=0$. **D.** $x^2+y^2+4x-8y+2=0$.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $r=\sqrt{1^2+2^2-1}=2$

Gọi $I'(a;b)$ là ảnh của I qua phép tị tự $\Rightarrow \overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2.(-1) \\ b=2.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$.

Gọi r' là bán kính đường tròn $(C)'$, ta có $r'=kr=2r=4$.

Do đó, phương trình $(C)'$: $(x+2)^2+(y-4)^2=16 \Leftrightarrow x^2+y^2+4x-8y+4=0$. **Chọn A.**

Câu 20: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a, gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (ABC) bằng

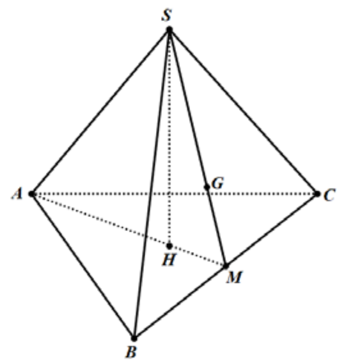
A. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$

Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $SM=3GM$ nên $d_{G/(ABC)}=d_{S/(ABC)}$. Gọi H là chân đường vuông góc của S xuống (ABC).

$$AM=\sqrt{AC^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\Rightarrow AH=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$



$SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}a$. Do đó $d_{G/(ABC)}=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}a=\frac{\sqrt{6}}{9}a$. **Chọn A.**

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên và $f(-2)=3$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>3$ là

A. $S=(-2;2)$.

B. $S=(-\infty;-2)$.

C. $S=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

D. $S=(-2;+\infty)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hướng dẫn giải

Tập nghiệm của phương trình $f(x)>3$ là tập hợp tất cả các giá trị của x để đồ thị hàm số $y=f(x)$ nằm trên đường thẳng $y=3$. **Chọn B.**

Câu 22: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. $y=x-\sqrt{x^2+1}$. **B.** $y=\dfrac{1}{2x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2x+1}$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{1}{2}$ và tiệm cận ngang $y=0$. **Chọn B.**

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\cos^2 x+\sin x+1$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y=1-\sin^2 x+\sin x+1=-\sin^2 x+\sin x+2=-\left(\sin x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\le\dfrac{9}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin x=\dfrac{1}{2}$. **Chọn D.**

Câu 24: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $(1+\log_2 x)\log_4 2x=2$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện : $x>0$. Đặt $\log_2 x=t$, ta có $\log_4 2x=\dfrac{1}{2}\log_2 2x=\dfrac{1}{2}(1+\log_2 x)=\dfrac{t+1}{2}$

Phương trình tương đương với : $(1+t)\dfrac{t+1}{2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t+1=2\\t+1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{8}\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$; $d_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-6}{3}$ chéo nhau. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1;d_2$ có phương trình là

A. $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$.

C. $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z-3}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{1}$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ:

Để viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2, ta làm như sau:

Bước 1: *Xét mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2. Tìm véc tơ pháp tuyến của (P).*

Bước 2: *Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_1 và vuông góc với (P).*

Bước 3: *Tìm giao điểm của d_2 với (Q), gọi điểm này là M.*

Bước 4: *Viết phương trình đường vuông góc chung, qua M và vuông góc với (P).*

Mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 có hai cặp véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1}$ và $\vec{u}_{d_2}$ suy ra:

$$\vec{n}_P = \left[\vec{u}_{d_1};\vec{u}_{d_2}\right] = \left[(1;1;-1);(1;2;3)\right] = (5;-4;1).$$

Mặt phẳng (Q) chứa d_1 và vuông góc với (P) có cặp véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1}$ và $\vec{n}_P$, suy ra:

$$\vec{n}_Q = \left[\vec{u}_{d_1};\vec{n}_P\right] = \left[(1;1;-1);(5;-4;1)\right] = (-3;-6;-9)$$

Phương trình mặt phẳng (Q): $-3(x-1)-6(y+2)-9(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-6=0$

Giả sử d_2 giao (Q) tại $M(t;1+2t;6+3t)$, vì $M \in (Q)$ nên $t+2(1+2t)+3(6+3t)-6=0 \Leftrightarrow t=-1$

Do đó: $M(-1;-1;3)$. Đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là đường thẳng vuông góc với (P) nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = \vec{n}_P = (5;-4;1)$ và đi qua điểm M. **Chọn C.**

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = 2\sqrt{2}a, AB = a, BC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}a}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}a}{7}$. **C.** $\sqrt{7}a$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{5}$.

Hướng dẫn giải

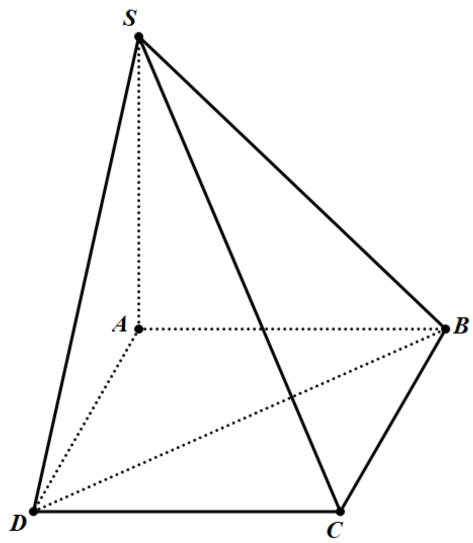
Ghi nhớ: *Công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau:*

- *Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ và đi qua điểm M_1*
- *Đường thẳng d' có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}$ và đi qua điểm M_2*

$$d(d_1,d_2) = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_2}.\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 1$.

Xét hệ trục tọa độ *Oxyz* với $O\left(0;0;0\right) \equiv A$; $B\left(1;0;0\right)$; $D\left(0;2;0\right)$; $S\left(0;0;2\sqrt{2}\right)$.



Khi đó $C\left(1;2;0\right)$.

Đường thẳng *BD* đi qua điểm $B\left(1;0;0\right)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BD} = \left(-1;2;0\right)$.

Đường thẳng *SC* đi qua điểm $C\left(1;2;0\right)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{SC} = \left(1;2;-2\sqrt{2}\right)$.

Do đó khoảng cách giữa 2 đường thẳng BD và SC là:

$d = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC}.\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right]\right|} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **Chọn A.**

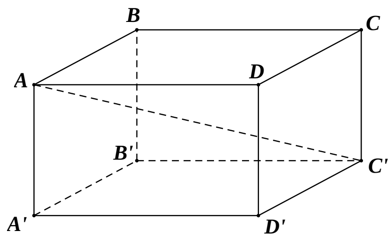
Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3a, AD = \sqrt{3}\,\text{a}, AA' = 2a$. Góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°.

B. 45°.

C. 120°.

D. 30°.



Hướng dẫn giải

Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là góc $C'AC$.

$$\tan\alpha = \frac{CC'}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{\left(3a\right)^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^o$$ **Chọn D.**

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;0)$, $B(-5;1;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $-3x - 2y + z - 5 = 0.$ **B.** $3x - 2y - z + 5 = 0.$

C. $3x + 2y - z + 5 = 0.$ **D.** $-3x + 2y - z + 1 = 0.$

Hướng dẫn giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng *AB* đi qua $I\left(-2;-1;1\right)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = \left(-6;4;2\right)$.

Chọn B.

Câu 29: Tích phân $\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$ bằng

A. $\ln 2$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $\ln\sqrt{2}$. **D.** $-\ln\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Sử dụng máy tính Casio, ta thấy $I \simeq -0,3466$, trùng với đáp án D. **Chọn D.**

Cách 2: Đặt $x^2-2x+2=t$ thì $dt=\left(2x-2\right)dx=2\left(x-1\right)dx$

$I=\frac{1}{2}\int\limits_2^1 \frac{dt}{t}=-\ln\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 30: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-2z+5=0$. Mô đun của số phức $w=4-z_1^{\ 2}+z_2^{\ 2}$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 25.

Hướng dẫn giải

Sử dụng máy tính Casio, ta tính được $z_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i; z_2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$.

Do đó: $z_1^2=-2+\frac{3}{2}i$; $z_2^2=-2-\frac{3}{2}i$, $w=4-3i \Rightarrow |w|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. **Chọn B.**

Câu 31: Cho z là các số phức thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{z+3}{1-2i}+2\right|=1$ và w là số thuần ảo. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|z-w\right|$ bằng

A. $5-\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Gọi M_1 và M_2 là các điểm biểu diễn số phức z_1 và z_2 trên mặt phẳng tọa độ Oxy.*

Khi đó: $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ *với* $z_2\neq 0$; $|z_1|=OM_1$; $|z_1-z_2|=M_1M_2$

Đặt $z=a+bi$, $M\left(a;b\right)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*.

$\left|\frac{z+3}{1-2i}+2\right|=1 \Leftrightarrow \left|\frac{z+3+2-4i}{1-2i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|z-(-5+4i)\right|=|1-2i| \Leftrightarrow \left|z-(-5+4i)\right|=\sqrt{5}$

Điểm $I\left(-5;4\right)$ biểu diễn số phức $-5+4i$ nên $\left|z-(-5+4i)\right|=IM=\sqrt{5}$. Do đó M thuộc đường tròn $I\left(-5;4\right)$, bán kính $r=\sqrt{5}$.

Đặt $w=ci$, $N\left(0;c\right)$ là điểm biểu diễn số phức w. Ta có $\left|z-w\right|=MN$

Dễ thấy $MN\geq EC$ và

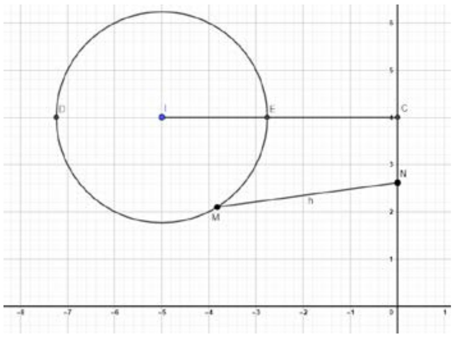
Hình chiếu vuông góc của I lên trục Oy cắt đường tròn $\left(I;\sqrt{5}\right)$ tại E và cắt trục Oy tại C (như hình vẽ).

Dễ thấy $MN \geq EC$ và $EC = IC - IE = 5 - \sqrt{5}$

Do đó $MN \geq 5 - \sqrt{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv E; N \equiv C$.

Chọn A.



Lưu ý 1: *Việc chỉ ra M thuộc đường tròn* $\left(I;\sqrt{5}\right)$ *có thể chỉ ra bằng cách:*

$$\left|\frac{z+3}{1-2i}+2\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a+bi+3+2-4i}{1-2i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{(a+5)+(b-4)i}{1-2i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|(a+5)+(b-4)i\right| = \left|1-2i\right|$$

$\Leftrightarrow (a+5)^2 + (b-4)^2 = 5$. Do đó M thuộc đường tròn $I(-5;4)$, bán kính $r = \sqrt{5}$.

Lưu ý 2: *Việc chứng minh $MN \geq EC$ có thể chứng minh bằng cách: Gọi M' là hình chiếu của M lên IC. Khi đó $M'C$ là hình chiếu của MN lên IC nên $MN \geq M'C$, mà M' thuộc IE nên $M'C \geq EC$. Do đó $MN \geq EC$.*

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $4^{1+x} + 4^{1-x} = (6-m)(2^{2+x} - 2^{2-x})$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Phương trình tương đương với: $4.4^x + \dfrac{4}{4^x} = (6-m)\left(4.2^x - \dfrac{4}{2^x}\right) \Leftrightarrow 4\left(4^x + \dfrac{1}{4^x}\right) = 4(6-m)\left(2^x - \dfrac{1}{2^x}\right)$ (1).

Đặt $2^x - \dfrac{1}{2^x} = t$, ta có: $t' = 2^x \ln 2 + \dfrac{1}{\left(2^x\right)^2}.2^x \ln 2 > 0$ với mọi x. Do đó với $x \in [0;1]$, $t(0) \leq t \leq t(1)$

$\Leftrightarrow 0 \leq t \leq \dfrac{3}{2}$. Khi đó: $t^2 = 4^x + \dfrac{1}{4^x} - 2 \Rightarrow 4^x + \dfrac{1}{4^x} = t^2 + 2$.

Do đó: $(1) \Leftrightarrow 4\left(t^2+2\right) = 4(6-m)t \Leftrightarrow \dfrac{t^2+2}{t} = 6-m$ (do $t=0$ không làm nghiệm). (2).

Xét hàm số $f(t) = t + \dfrac{2}{t}$ trên $\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$. Ta có $f'(t) = 1 - \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)}{t^2}$

Với $0 < t < \sqrt{2} \Rightarrow f'(t) < 0$, $\sqrt{2} < t \leq \dfrac{3}{2}$ thì $f'(t) > 0$. Do đó $f(t) \geq f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Ngoài ra $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = +\infty$ nên $f(t) \in \left[2\sqrt{2};+\infty\right)$.

Để (1) có nghiệm $x \in [0;1]$ thì (2) có nghiệm $t \in \left(0;\dfrac{3}{2}\right]$, hay $6 - m \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m \leq 6 - 2\sqrt{2}$.

Mà $m \in Z^+$ nên $m \in \{1;2;3\}$. **Chọn B.**

Câu 33: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Số nghiệm của phương trình $\left[f(x)\right]^3 - 3f(x) + 1 = 0$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta thấy phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt là $x_1 \in (-2;-1)$; $x_2 \in (0;1)$ và $x_3 \in (1;2)$. Ngoài ra $f(x)$ có giá trị cực đại là 3 và giá trị cực tiểu là -1.

Ta có: $\left[f(x)\right]^3 - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = x_1 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = x_3 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x_1$, hàm số này có giá trị cực đại là $3 - x_1 > 0$ và giá trị cực tiểu là $-1 - x_1 > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $h(x) = f(x) - x_2$, hàm số này có giá trị cực đại là $3 - x_2 > 0$ và giá trị cực tiểu là $-1 - x_2 < 0$ nên phương trình $h(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $v(x) = f(x) - x_3$, hàm số này có giá trị cực đại là $3 - x_3 > 0$ và giá trị cực tiểu là $-1 - x_3 < 0$ nên phương trình $v(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Rõ ràng các nghiệm của các phương trình $g(x) = 0, h(x) = 0$ và $v(x) = 0$ khác nhau. Do đó phương trình $f(f(x)) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt. **Chọn B.**

Luyện tập: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 0$.
(Đáp án: 7 nghiệm).

Câu 34: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1; n \geq 2 \end{cases}$. Tổng $S = u_1 + u_2 + ... + u_{20}$ bằng

A. $2^{20} - 20$. **B.** $2^{21} - 22$. **C.** 2^{20}. **D.** $2^{21} - 20$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết $u_n = 2u_{n-1} + 1 \Leftrightarrow \left(u_n + 1\right) = 2\left(u_{n-1} + 1\right)$.

Xét dãy số $v_n = u_n + 1$, ta có $v_n = 2v_{n-1}$ nên $\left(v_n\right)$ là 1 cấp số nhân có $v_1 = u_1 + 1 = 2$ và công bội $q = 2$ nên công thức tổng quát $v_n = 2.q^{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n$. Do đó $u_n = v_n - 1 = 2^n - 1$.

$S = u_1 + u_2 + ... + u_{20} = \left(2^1 - 1\right) + \left(2^2 - 1\right) + ... + \left(2^{20} - 1\right) = \left(2 + 2^2 + ... + 2^{20}\right) - 20$

$= \dfrac{2^{21} - 1}{2 - 1} - 21 = 2^{21} - 22$. **Chọn B.**

Câu 35: Biết tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + \ln b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a + b$.

A. $S = 2 + \sqrt{2}$. **B.** $S = \dfrac{11}{4}$. **C.** $S = \dfrac{5}{4}$. **D.** $S = \dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Để tích tích phân* $I=\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx$ *với* $f(x)$ *và* $g(x)$ *là các hàm số có dạng* $a\sin x+b\cos x$ $\left(a^2+b^2>0\right)$. *Ta làm như sau:*

Bước 1: *Dùng hệ số bất định, tìm hai số thực m và n để* $mg(x)+ng'(x)=f(x)$

Bước 2: *Thay vào:* $I=\int_a^b \frac{mg(x)+ng'(x)}{g(x)}dx=\int_a^b mdx+n\int_a^b \frac{d(g(x))}{g(x)}$

Ta có: $3(\sin x+\cos x)-2(\cos x-\sin x)=5\sin x+\cos x$.

Do đó: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(\sin x+\cos x)-2(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3dx-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\frac{3}{4}\pi-\ln 2=\frac{3}{4}\pi+\ln\frac{1}{2}$

Do đó: $S=a+b=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$. **Chọn C.**

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}\left|x^3\right|-(3-m)x^2+(3m+7)\left|x\right|-1$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-(3-m)x^2+(3m+7)x-1$, ta có $f'(x)=x^2-2(3-m)x+3m+7$; $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Với $x>0$, $f\left(\left|x\right|\right)=f\left(x\right)$, ngoài ra hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận *Oy* làm trục đối xứng. Do đó đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ được tạo bằng cách vẽ đồ thị hàm số $y=f(x)$, bỏ đi phần bên trái trục tung ($x<0$) và lấy đối xứng với phần bên phải trục tung ($x>0$).

Để hàm số có 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị đều nằm bên phải trục tung. Điều này xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương x_1,x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-9m+2>0\\ 2\left(3-m\right)>0\\ 3m+7>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\frac{9+\sqrt{73}}{2}\\ m<\frac{9-\sqrt{73}}{2}\end{array}\right.\\ -\frac{7}{3}<m<3\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{3}<m<\frac{9-\sqrt{73}}{2}$$

Mà $m\in Z$ nên $m\in\left\{-2;-1;0\right\}$. **Chọn A.**

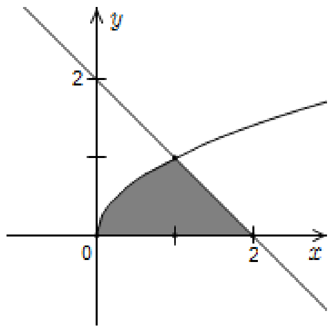
Câu 37: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, đường thẳng $y=2-x$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng trên khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{7\pi}{6}$.

B. $\frac{4\pi}{3}$.

C. $\frac{5\pi}{6}$.

D. $\frac{5\pi}{4}$.



Hướng dẫn giải

Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị là nghiệm của phương trình $\sqrt{x}=2-x\Leftrightarrow x=1$

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng trên quanh trục *Ox*:

$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx+\pi\int_1^2(2-x)^2dx=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{3}\pi=\frac{5}{6}\pi$. **Chọn C.**

Câu 38: Cho phương trình $mx^2+4\pi^2=4\pi^2\cos x$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A.-54. **B.** 35. **C.**-35. **D.** 51.

Hướng dẫn giải

Ta có: $mx^2+4\pi^2=4\pi^2\cos x$ có nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow mx^2=4\pi^2\left(\cos x-1\right)$ có nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{\cos x-1}{x^2}=\frac{m}{4\pi^2}$ có nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Xét hàm số $f(x)=\frac{\cos x-1}{x^2}$, $f(x)$ liên tục trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ có

$f'(x)=\frac{-x^2\sin x-2x.\left(\cos x-1\right)}{x^4}=\frac{2-x\sin x-2\cos x}{x^3}$.

Xét hàm số $g(x)=x\sin x+2\cos x; g'(x)=\sin x+x\cos x-2\sin x=x\cos x-\sin x$,

Xét hàm số $h(x)=\tan x-x$, $h(x)$ liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ có $h'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}>0$ với mọi

$x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, do đó $h(x)\geq h(0)=0$ suy ra $\tan x>x\quad\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\sin x>x\cos x\quad\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow g'(x)<0\quad\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow g(x)$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó $g(x)\leq g\left(0\right)=2$ nên $f'(x)>0$ với mọi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Lại có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = -\dfrac{1}{2}; \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \dfrac{-4}{\pi^2}$. Do đó để phương trình có nghiệm thuộc $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{m}{4\pi^2} < -\dfrac{4}{\pi^2} \Leftrightarrow -2\pi^2 < m < -16$. Mà $m \in Z$ nên $m \in \{-19;-18;-17\}$.

Chọn A.

Câu 39: Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$. **B.** $P = \sqrt{3}$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 1$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Với $z_1; z_2$ là 2 số phức bất kỳ, m, n là 2 số thực bất kỳ, ta luôn có:*

$|mz_1 + nz_2|^2 + |nz_1 - mz_2|^2 = (m^2+n^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Chứng minh: *Đặt $z_1 = a + bi; z_2 = a' + b'i$. Ta có:*

$mz_1 + nz_2 = m(a+bi) + n(a'+b'i) = (ma + na') + (mb + nb')i \Rightarrow |mz_1 + nz_2|^2 = (ma+na')^2 + (mb+nb')^2$

Tương tự: $|nz_1 - mz_2|^2 = (na - ma')^2 + (nb - mb')^2$. *Do đó:*

$|mz_1 + nz_2|^2 + |nz_1 - mz_2|^2 = m^2a^2 + n^2a'^2 + m^2b^2 + n^2b'^2 + n^2a^2 + m^2a'^2 + n^2b^2 + m^2b'^2$

$= m^2(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2) + n^2(a^2 + b^2 + a'^2 + b'^2) = (m^2+n^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Hệ quả: *Khi $m = n = 1$, ta có:* $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Ta có: $P^2 + 6 = |2z_1 + z_2|^2 + |z_1 - 2z_2|^2 = (2^2 + 1^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 10 \Rightarrow P = 2$. **Chọn A.**

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 8 = 0$ và điểm ba điểm $A(0;-1;0)$, $B(2;3;0)$, $C(0;-5;2)$. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB = MC$. Tổng $S = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. -12. **B.** -5. **C.** 12. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Ta có: $MA^2 = x_0^2 + (y_0+1)^2 + z_0^2$; $MB^2 = (x_0-2)^2 + (y_0-3)^2 + z_0^2$; $MC^2 = x_0^2 + (y_0+5)^2 + (z_0-2)^2$

Theo đề bài:

$MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow x_0 + 2y_0 = 3$; $MA^2 = MC^2 \Leftrightarrow 2y_0 - z_0 = -7$

Lại có $M \in (P) \Rightarrow x_0 + 2y_0 + z_0 = 8$. Do đó $x_0 = 5; y_0 = -1; z_0 = 5$. **Chọn D.**

Câu 41: Gọi S là tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2+1)x - m + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 9. Giá trị của S bằng

A. $S = 5$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = -5$. **D.** $S = 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = 3x^2 + (m^2+1) > 0$ với mọi x.

Do đó $\underset{[0;1]}{Max}\, y = y(1) = 1 + (m^2+1) - m + 1 = m^2 - m + 3$.

Theo đề bài: $m^2 - m + 3 = 9 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-2 \end{array}\right.$. Do đó $S=1$. **Chọn D.**

Câu 42: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có một đáy là tam giác ABC vuông tại A; $AB = 3a$, $BC = 5a$. Biết khối trụ có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hai tam giác ABC, $A'B'C'$ và có thể tích bằng $2\pi a^3$. Chiều cao AA' của lăng trụ bằng

A. $3a$. **B.** $\sqrt{3}a$. **C.** $2a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Công thức tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC:* $r = \dfrac{S}{p}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a=1$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{5^2-3^2} = 4$. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}(AB+BC+CA)} = \dfrac{3.4}{3+4+5} = 1$.

Thể tích khối trụ bằng $2\pi a^3$ nên ta có: $V = h.\pi r^2 = \pi h = 2\pi a^3 = 2\pi \Rightarrow h = 2$

Do đó chiều cao AA' của lăng trụ là $2a$. **Chọn C.**

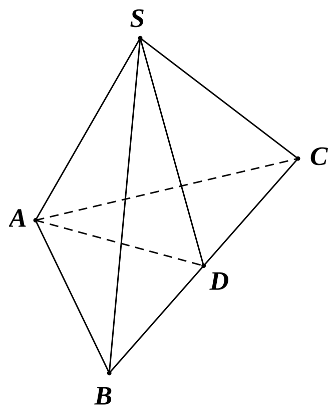
Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh đáy $AB = 3, BC = 4, AC = \sqrt{17}$. Gọi D là trung điểm của BC, các mặt phẳng $(SAB),(SBD),(SAD)$ cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

C. $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.



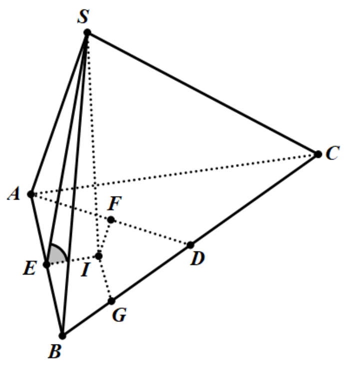
Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Cho tam giác ABC các cạnh bằng a, b, c; p là nửa chu vi, bán kính đường tròn nội tiếp bằng r*

Khi đó: $S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Trung tuyến AM *tính bằng công thức:* $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy. E, F, G lần lượt là hình chiếu của I lên AD, BD, AB.



Ta có:

$\widehat{SEI} = 60^o \Rightarrow \dfrac{IE}{SI} = \cot 60 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow IE = \dfrac{SI}{\sqrt{3}}$

Tương tự: $IF = IG = \dfrac{SI}{\sqrt{3}}$ nên điểm I cách đều các cạnh AB, AD và BD. Do đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD.

Áp dụng công thức đường trung tuyến: $AD^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{3^2 + 17}{2} - \dfrac{4^2}{4} = 9 \Rightarrow AD = 3$.

Tam giác ABD có $AD = 3, AB = 3, BD = \dfrac{BC}{2} = 2$ nên $IE = r = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó $SI = \sqrt{3}IE = \sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $S_{ABC} = 2S_{ABD} = 4\sqrt{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{6}}{2}.4\sqrt{2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

Chọn B.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \dfrac{3}{x^2 - x - 2}$, $f(-2) = 2\ln 2 + 2$ và $f(-2) - 2f(0) = 4$. Giá trị của biểu thức $f(-3) + f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ bằng

A. $2 + \ln 5$. **B.** $2 + \ln\dfrac{5}{2}$. **C.** $2 - \ln 2$. **D.** $1 + \ln\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(-2) - f(-3) = \int_{-3}^{-2} f'(x)dx = \int_{-3}^{-2} \dfrac{3}{x^2 - x - 2}dx = 3\ln 2 - \ln 5$

$\Rightarrow f(-3) = f(-2) - 3\ln 2 + \ln 5 = 2\ln 2 + 2 - 3\ln 2 + \ln 5 = \ln 5 - \ln 2 + 2$

Lại có: $f\left(\dfrac{1}{2}\right) - f(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{3}{x^2 - x - 2}dx = -\ln 2$

$\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(0) - \ln 2 = \dfrac{f(-2) - 4}{2} - \ln 2 = -1$

Do đó: $f(-3) + f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{5}{2} + 1$. **Chọn D.**

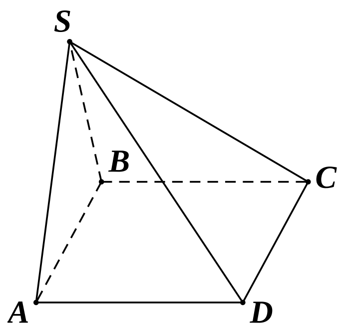
Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB = 2$, $AD = 3$, $SD = \sqrt{14}$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của SC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và (MBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\dfrac{43}{61}$.

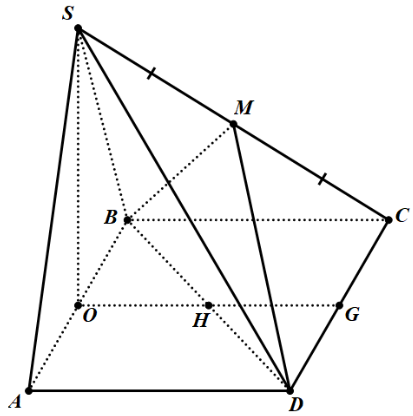
C. $\dfrac{5}{7}$.

D. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



Hướng dẫn giải

Gọi O là trung điểm của AB. Theo đề bài, $SO \perp (ABCD)$.



Ta có: $DO = \sqrt{OA^2 + AD^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SD^2 - DO^2} = \sqrt{14 - 10} = 2$.

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O(0;0;0)$; $A(0;1;0)$; $S(0;0;2)$; điểm G là trung điểm của CD có tọa độ $(3;0;0)$.

Khi đó: điểm H là trung điểm của OG có tọa độ $\left(\dfrac{3}{2};0;0\right)$.

$B(0;-1;0)$ nên véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBD):

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{SB};\overrightarrow{SH}\right] = \left(2;-3;\dfrac{3}{2}\right)$

Lại có $C(3;-1;0)$ nên $M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};1\right)$. Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (MBD):

$\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MH}\right] = \left(1;-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{4}\right)$.

Góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBD) và (MBD) là α.

$\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{43}{61}$. **Chọn B.**

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và điểm $A(1;0;0) \in (P)$. Đường thẳng Δ đi qua A nằm trong mặt phẳng (P) và tạo với trục Oz một góc nhỏ nhất. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là giao điểm của đường thẳng Δ với mặt phẳng $(Q): 2x + y - 2z + 1 = 0$. Tổng $S = x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. -5. **B.** 12. **C.** -2. **D.** 13.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Khai thác yếu tố góc nhỏ nhất:

Giao điểm của trục Oz với (P) là điểm $M(0;0;-1)$.

Gọi l đường thẳng qua M và song song với Δ. Ta có góc hợp bởi Δ và Oz là góc hợp bởi l và Oz.

$O(0;0;0)$ là 1 điểm bất kỳ thuộc Oz. Hình chiếu vuông góc của O xuống l là K. Hình chiếu vuông góc của O xuống (P) là H. Ta luôn có $OK \geq OH$.

Gọi góc hợp bởi Δ và trục Oz là α, ta có: $\sin\alpha = \frac{OK}{OM} \geq \frac{OH}{OM}$ không đổi. Do đó để góc hợp bởi Δ và trục Oz nhỏ nhất thì $K \equiv H$

Bước 2: Xác định Δ:

Đường thẳng OH qua O và có véc tơ chỉ phương $(1;1;-1)$ nên có phương trình $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$

H là giao điểm của OH và (P) nên $H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

l là đường thẳng đi qua điểm M và H nên l có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, đây cũng là véc tơ chỉ phương của Δ. Đường thẳng Δ đi qua A nên phương trình đường thẳng Δ: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$

Bước 3: Tìm M và tính S.

M là giao điểm của Δ với (Q) nên $M(4;3;6)$. Do đó $S = 13$. **Chọn D.**

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 6z + 18 = 0$ và điểm $M(1;1;2) \in (\alpha)$. Đường thẳng d đi qua M nằm trong mặt phẳng (α) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho dây cung AB có độ dài nhỏ nhất. Đường thẳng d có một véctơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (2;-1;-1)$. **B.** $\vec{u}_3 = (1;1;-2)$. **C.** $\vec{u}_2 = (1;-2;1)$. **D.** $\vec{u}_4 = (0;1;-1)$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Cho đường tròn tâm O, bán kính R và 1 điểm M nằm trong đường tròn. Dây cung AB bất kỳ đi qua M. Khi đó tích $MA.MB$ không đổi khi AB thay đổi, và $MA.MB = R^2 - MO^2$.*

(Đây là phương tích của điểm M với (O)).

Mặt cầu (S) có tâm $I(4;3;3)$ và bán kính $R = 4$.

Bước 1: Tìm hình chiếu của I lên (α).

Đường thẳng Δ qua I vuông góc với (α) có phương trình: $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Gọi $I'(4+t;3+t;3+t)$ là hình chiếu của I lên (α), ta có:

$4+t+3+t+3+t-4 = 0 \Leftrightarrow 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2$. Do đó: $I'(2;1;1)$.

Bước 2: Xác định d để $MA + MB$ bé nhất

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt cầu (S). Vì $IM = \sqrt{14} < 4 = R$ nên M nằm trong mặt cầu (S) nên M thuộc (C).

Do đó: $MA.MB = I'M^2 - r^2$ không đổi $\Rightarrow MA + MB \geq 2\sqrt{MA.MB} = 2\sqrt{I'M^2 - r^2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $AB \perp MI'$. Do đó đường thẳng d vuông góc với $\overrightarrow{MI'}$ và Δ

$\Rightarrow \vec{u}_d = \left[\overrightarrow{MI'}; \vec{u}_\Delta\right] = \left[(1;0;-1);(1;1;1)\right] = (1;-2;1)$. **Chọn C.**

Câu 48: Một hộp đựng 15 cái thẻ được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên ba thẻ, xác suất để tổng ba số ghi trên ba thẻ được rút chia hết cho 3 bằng

A. $\frac{25}{91}$. **B.** $\frac{32}{91}$. **C.** $\frac{31}{91}$. **D.** $\frac{11}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chia các số từ 1 tới 15 thẻ thành 3 tập hợp:

$S_1 = \{1;4;7;10;13\}$ là tập hợp các số chia 3 dư 1

$S_2 = \{2;5;8;11;14\}$ là tập hợp các số chia 3 dư 2

$S_3 = \{3;6;9;12;15\}$ là tập hợp các số chia hết cho 3.

Để 3 số rút ra trên 3 thẻ chia hết cho 3 thì ta có các trường hợp sau:

- Cả 3 số cùng thuộc 1 tập hợp S_1 hoặc S_2 hoặc S_3: Số cách chọn là $3C_5^3$
- Một số thuộc S_1, một số thuộc S_2, một số thuộc S_3: Số cách chọn là $C_5^1.C_5^1.C_5^1 = 5^3$

Không gian mẫu: C_{15}^3. Do đó xác suất cần tính là: $\frac{3C_5^3 + 5^3}{C_{15}^3} = \frac{31}{91}$. **Chọn C.**

Câu 49: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1), B, C$ sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B, C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A. $\frac{11}{5}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{9}{5}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$, $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x\left(x^2 + 3x + m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

Phương trình này có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0, điều này xảy ra khi $\begin{cases} \Delta = 3^2 - 4m > 0 \\ f(0) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Giả sử nghiệm của (1) là x_B và x_C ($x_B \neq x_C \neq 0$). Theo đề bài, tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B và C vuông góc với nhau nên tích các hệ số góc của các tiếp tuyến này bằng -1.

Điều này xảy ra khi $f'(x_B).f'(x_C) = -1 \Leftrightarrow \left(3x_B^2 + 6x_B + m\right)\left(3x_C^2 + 6x_C + m\right) = -1 \quad (2)$

Mà x_B và x_C là nghiệm của (1) nên $x_B^2 + 3x_B + m = 0 \Leftrightarrow x_B^2 = -3x_B - m \Leftrightarrow 3x_B^2 = -9x_B - 3m$

Do đó $3x_B^2+6x_B+m=-9x_B-3m+6x_B+m=-3x_B-2m$.

Tương tự: $3x_C^2+6x_C+m=-9x_C-3m+6x_C+m=-3x_C-2m$

Do đó (2) $\Leftrightarrow\left(-3x_B-2m\right)\left(-3x_C-2m\right)=-1\Leftrightarrow\left(x_B+\frac{2m}{3}\right)\left(x_C+\frac{2m}{3}\right)=\frac{-1}{9}$

$\Leftrightarrow x_Bx_C+\frac{2m}{3}\left(x_B+x_C\right)+\left(\frac{2m}{3}\right)^2=\frac{-1}{9}$. Theo định lý Viet: $\begin{cases}x_B+x_C=-3\\x_Bx_C=m\end{cases}$

Do đó: $m+\frac{2m}{3}.\left(-3\right)+\left(\frac{2m}{3}\right)^2=-\frac{1}{9}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{9+\sqrt{65}}{8}\\m=\frac{9-\sqrt{65}}{8}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $S=\frac{9}{4}$. **Chọn D.**

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-\pi;\pi]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\pi}f(x)dx=2018$. Tích phân $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}dx$ bằng

A. 2018. **B.** 4036. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2018}$.

Hướng dẫn giải

Ghi nhớ: *Hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\left[-a;a\right]$ thì $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx$.*

Chứng minh: Đặt $t=-x$, ta có $dx=-dt$, $\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx=\int\limits_a^0 f(-t).\left(-dt\right)=\int\limits_0^a f(t)dt=\int\limits_0^a f(x)dx$.

Do đó $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx+\int\limits_0^a f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx$.

Đặt $t=-x$, ta có $dt=-dx$.

$$I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}dx=\int\limits_{\pi}^{-\pi}\frac{f(-t)}{2018^{-t}+1}.\left(-dt\right)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{\frac{1}{2018^t}+1}dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^t.f(t)}{2018^t+1}dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(x)}{2018^x+1}dx$$

Do đó: $2I=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{2018^x+1}dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2018^x f(x)}{2018^x+1}dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int\limits_0^{\pi}f(x)dx=2.2018=4036$.

$\Rightarrow I=2018$. **Chọn A.**

-----------------------HẾT----------------------