LÊ HỒNG ĐỨC và NHÓM CỰ MÔN

BÀI GIẢNG

HÌNH HỌC 12

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

BÀI GIẢNG ĐƯỢC TRÌNH BÀY CHO CÁC EM HỌC SINH BẰNG VIỆC SỬ DỤNG GIÁO ÁN ĐIỆN TỬ

Người thực hiện: LÊ HỒNG ĐỨC
Điện thoại: 0936546689
Địa chỉ: Số nhà 20 – Ngõ 86 – Đường Tô Ngọc Vân – Tây Hồ – Hà Nội

§3 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. BÀI GIẢNG

1. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định lý 1: *Trong không gian* Oxyz, *đường thẳng* (d) *đi qua điểm* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *và có vtcp* $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ *có phương trình*:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Vậy, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Phương trình (1) với điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ được gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng.

Hoạt động Chứng minh kết quả trên.

Thí dụ 1: Trong không gian Oxyz, viết phương trình đường thẳng (d), biết:

a. (d) đi qua điểm A(1; 2; 3) và có vtcp $\vec{a}(2; -1; 0)$.

b. (d) đi qua hai điểm A(2; 1; −3) và B(3; −1; 5).

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1 (*Sử dụng công thức*): Đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(1;2;3) \\ \text{vtcp } \vec{a}(2;-1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2 (*Sử dụng phương pháp quĩ tích*): Điểm M(x; y; z) ∈ (d) khi:

$$\overrightarrow{AM} // \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{a} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2t \\ y - 2 = -t \\ z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần tìm.

☞ ***Chú ý***: Lời giải trong cách 2 chính là ý tưởng để chứng minh định lí trên.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1 (*Sử dụng công thức*): Đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(2;1;-3) \\ \text{Qua } B(3;-1;5) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } A(2;1;-3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(1;-2;8) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2 (*Sử dụng phương pháp quỹ tích*): Điểm $M(x; y; z) \in (d)$ khi:

$$\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = t \\ y - 1 = -2t \\ z + 3 = 8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + 8t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần tìm.

Hoạt động Viết phương trình đường thẳng (d), biết:

a. (d) đi qua điểm $A(3; -2; -1)$ và có vtcp $\vec{a}(-3; -1; 2)$.
b. (d) đi qua hai điểm $A(-3; 2; 6)$ và $B(5; 4; -2)$.

2. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng (d) có phương trình tham số cho bởi (1) suy ra:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \qquad (2)$$

Phương trình (2) với điều kiện $a_1a_2a_3 \neq 0$ được gọi là *phương trình chính tắc* của đường thẳng.

Vậy, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0;y_0;z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1;a_2;a_3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Từ đó, đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và $M_2(x_2; y_2; z_2)$, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1;y_1;z_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2;y_2;z_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1;y_1;z_1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1;y_2 - y_1;z_2 - z_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ hoặc } (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Thí dụ 2: Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình:

$$(P): 2x + 2y + z - 4 = 0, \qquad (Q): 2x - y - z + 5 = 0.$$

a. Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau. Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).
b. Hãy tìm tọa độ của một điểm thuộc (d) và xác định tọa độ của một vtcp của (d).
c. Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng (d).

✍ *Giải*

a. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Q), ta có:

$\overrightarrow{n_P}(2;\ 2;\ 1)$, $\overrightarrow{n_Q}(2;\ -1;\ -1) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ không cùng phương

$\Leftrightarrow (P) \cap (Q) = (d)$.

b. Đường thẳng (d) gồm các điểm M(x; y; z) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;\ -1;\ 6) \in (d).$$

Gọi $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{n_Q} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-1; 4; -6).$$

c. Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(0; -1; 6) \\ \text{vtcp } \vec{u}(-1; 4; -6) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 4t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 6 - 6t \end{cases}$$

$$\text{hoặc } (d): \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-6}{-6}.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu thí dụ trên không có câu b) thì để "*Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng* (d)" ngoài cách giải như trong c) chúng ta còn có thể thực hiện theo các cách sau:

Cách 1: Tọa độ các điểm thuộc đường thẳng (d) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0;\ -1;\ 6) \in (d) \text{ và } B(-1;\ 3;\ 0) \in (d).$$

Khi đó, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Qua } B \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } A(0; -1; 6) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(-1; 4; -6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 4t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 6 - 6t \end{cases} \text{ hoặc } (d): \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-6}{-6}.$$

Cách 2: Tọa độ các điểm thuộc đường thẳng (d) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Trong hệ (I) cho x = t, ta được:

$$\begin{cases} 2y + z = 4 - 2t \\ y + z = 5 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}.$$

Vậy, phương trình tham số của đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(II)}$$

Từ hệ (II), bằng cách rút t, ta được:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{1} \\ t = \dfrac{y+1}{-4} \\ t = \dfrac{z-6}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-6}{6}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

Hoạt động	Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình: (P): $x + 2y + 3z - 6 = 0$, (Q): $3x - y - z - 1 = 0$. a. Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau. b. Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). H□y tìm tọa độ của một điểm thuộc (d) và xác định tọa độ của một vtcp của (d). c. Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng (d).

Thí dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm A(1; 2; 3), B(2; 2; 2), C(4; 1; 1) và D(4; 1; 4).

a. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.
b. Viết phương trình tham số đường cao tứ diện ABCD hạ từ D.
c. Tìm tọa độ hình chiếu H của D trên mặt phẳng (ABC).

✍ *Giải*

a. Ta có $\overrightarrow{AB}(1; 0; -1)$, $\overrightarrow{AC}(3; -1; -2)$, $\overrightarrow{AD}(3; -1; 1)$, từ đó suy ra:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-1; -1; -1),$$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AD} = (-1; -1; -1)(3; -1; 1) = -3 + 1 - 1 = -3 \neq 0$$

$\Leftrightarrow$ Ba véctơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng.

Vậy, bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b. Gọi (d) là đường cao của tứ diện hạ từ D, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua D} \\ (d) \perp (ABC) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua D} \\ \text{vtcp } \vec{a} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua D}(4;1;4) \\ \text{vtcp } \vec{a}(-1;-1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (ABC), ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (-1; -1; -1) \text{ chọn } \vec{n}\,(1; 1; 1).$$

Mặt phẳng (ABC) được cho bởi:

$$(ABC): \begin{cases} \text{Qua } A(1;2;3) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (ABC): x + y + z - 6 = 0.$$

Khi đó, hình chiếu H của D trên mặt phẳng (ABC) chính là giao điểm của (d) với (ABC), ta được:

$$(4 - t) + (1 - t) + (4 - t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3; 0; 3).$$

Hoạt động	Cho bốn điểm A(5; 3; –1), B(2; 3; –4), C(1; 2; 0), D(3; 1; –2). a. Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện. b. Viết phương trình tham số đường cao tứ diện ABCD hạ từ D. c. Tìm tọa độ hình chiếu H của D trên mặt phẳng (ABC). d. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Thí dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 1; 5) và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{và} \quad (d_2): \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}.$$

a. Viết phương trình tham số của đường thẳng (d_3) đi qua M và song song với (d_2).
b. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (d) đi qua M, vuông góc với cả (d_1) và (d_2).

✍ *Giải*

Gọi $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ theo thứ tự là vtcp của đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$\overrightarrow{u_1}\,(1; 2; 1)$ và $\overrightarrow{u_2}\,(-2; 3; 5)$.

a. Ta có ngay:

$$(d_3): \begin{cases} \text{Qua } M(1;1;5) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_2}(-2;3;5) \end{cases} \Leftrightarrow (d_3): \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường thẳng, ta có:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (7; -7; 7) \text{ chọn } \vec{u}\,(1; -1; 1).$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;1;5) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1;-1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{1}.$$

Hoạt động

Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$

a. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm M(1; 2; 3), vuông góc với cả (d_1) và (d_2).

b. Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả (d_1) và (d_2).

3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có:

- (d_1) đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vtcp $\vec{u}_1(a_1; b_1; c_1)$,
- (d_2) đi qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vtcp $\vec{u}_2(a_2; b_2; c_2)$.

Khi đó, xét ba vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ ta có kết quả:

1. (d_1) và (d_2) đồng phẳng khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ đồng phẳng. Như vậy:

   (d_1) và (d_2) đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

2. (d_1) và (d_2) cắt nhau khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và các vtcp của chúng không cùng phương. Như vậy:

   (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ và $a_1: b_1: c_1 \neq a_2: b_2: c_2$.

3. (d_1) và (d_2) song song với nhau khi và chỉ khi $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương và (d_1), (d_2) không có điểm chung. Như vậy:

   $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a_1: b_1: c_1 = a_2: b_2: c_2 \neq (x_2 - x_1): (y_2 - y_1): (y_2 - y_1)$.

4. (d_1) và (d_2) trùng nhau khi và chỉ khi $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương và (d_1), (d_2) có điểm chung. Như vậy:

   $(d_1) \equiv (d_2) \Leftrightarrow a_1: b_1: c_1 = a_2: b_2: c_2 = (x_2 - x_1): (y_2 - y_1): (y_2 - y_1)$.

5. (d_1) và (d_2) chéo nhau khi và chỉ khi ba vectơ $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ và $\overrightarrow{M_1M_2}$ không đồng phẳng. Như vậy:

   (d_1) và (d_2) chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

☞ ***Chú ý***: Nếu biết phương trình của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thì cũng có thể xét vị trí tương đối của chúng bằng cách giải hệ gồm các phương trình xác định (d_1) và (d_2) để tìm giao điểm và khi đó:

a. Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b. Nếu hệ có vô số nghiệm thì (d_1) và (d_2) trùng nhau.

c. Nếu hệ vô nghiệm thì (d_1) và (d_2) song song hoặc chéo nhau, song song nếu hai vtcp của chúng cùng phương, chéo nhau nếu hai vectơ đó không cùng phương.

Thí dụ 5: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \ (d_2): \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{4}.$$

a. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
b. Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc O và chứa đường thẳng (d_1).

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; 3; 4)$ và điểm $M_1(1; 2; 3) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 3; 4)$ và điểm $M_2(2; 5; 7) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ và $\overrightarrow{M_1M_2}(1; 3; 4)$ cùng phương.

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) trùng nhau.

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy thêm điểm $N_1(0; -1; -1) \in (d_1)$. Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua gốc O và chứa đường thẳng (d_1) tương ứng với việc đi qua ba điểm O, M_1, N_1.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$$\overrightarrow{OM_1}(1; 2; 3) \text{ và } \overrightarrow{ON_1}(0; -1; -1) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{ON_1}\right] = (1; 1; -1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - z = 0.$$

Cách 2: Lấy thêm điểm $N_1(0; -1; -1) \in (d_1)$. Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua gốc O và chứa đường thẳng (d_1) tương ứng với việc đi qua ba điểm O, M_1, N_1.

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì O, M_1, N_1 thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases} A + 2B + 3C + D = 0 \\ -B - C + D = 0 \\ D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B + 3C = 0 \\ -B - C = 0 \\ D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -C \\ B = -C \\ D = 0 \end{cases}.$$

Từ đó, ta được:

$$(P): -Cx - Cy + Cz = 0 \Leftrightarrow (P): x + y - z = 0.$$

Cách 3: Gọi (P) là mặt phẳng thỏa mãn điều kiện đầu bài thì (P) sẽ có cặp vtcp là $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{OM_1}$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{OM_1}\right] = (1; 1; -1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } O(0;0;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - z = 0.$$

Hoạt động	Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình: $$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, (d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{3}.$$ a. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1), (d_2). b. Viết phương trình mặt phẳng đi qua gốc O và chứa đường thẳng (d_2).

Thí dụ 6: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d_1) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{4},$$

và đường thẳng (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng:

$$(P_1): x + y - 1 = 0 \text{ và } (P_2): 4y + z + 1 = 0.$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng $((d_1), (d_2))$ và cách đều (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; -1; 4)$ và điểm $M_1(1; 1; 2) \in (d_1)$.
- Các mặt phẳng (P_1), (P_2) theo thứ tự có vtpt $\overrightarrow{n_1}(1; 1; 0)$, $\overrightarrow{n_2}(0; 4; 1)$. Khi đó vtcp $\overrightarrow{u_2}$ của đường thẳng (d_2) được cho bởi:

$$\overrightarrow{u_2} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (1; -1; 4).$$

Và lấy điểm $M_2(1; 0; -1) \in (d_2)$.

Suy ra, các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và không cùng phương với vectơ $\overrightarrow{M_1M_2}(0; -1; -3)$.

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

b. Đoạn thẳng M_1M_2 có trung điểm $M\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được xác định bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1}(1; -1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-1}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{4}.$$

Hoạt động Cho đường thẳng (d_1) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t \\ z = -3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

và đường thẳng (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng:

(P_1): x + y – z = 0 và (P_2): 2z – y + 2z = 0.

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.
b. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng ((d_1), (d_2)) và cách đều (d_1), (d_2).

<u>Thí dụ 7:</u> Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d_1) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

và đường thẳng (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng:

(P_1): x + 2y + 3 = 0 và (P_2): 3y – z + 10 = 0.

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau.
b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

✍ *Giải*

Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có:

a. Ta có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}$ (1; –1; 3) và điểm M_1(–1; 0; –2) ∈ (d_1),
- Các mặt phẳng (P_1), (P_2) theo thứ tự có vtpt $\overrightarrow{n_1}$ (1; 2; 0), $\overrightarrow{n_2}$ (0; 3; –1).

  Khi đó vtcp $\overrightarrow{u_2}$ của đường thẳng (d_2) được cho bởi:

  $$\overrightarrow{u_2} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-2; 1; 3).$$

  Và lấy điểm M_2(1; –2; 4) ∈ (d_2).

Suy ra các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, và ta có:

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = (-6; -9; -1).(-2; 2; -6) = 0 \Leftrightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau.}$$

b. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-6; -9; -1) \text{ chọn } \vec{n} = (6; 9; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_1(-1; 0; -2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(6; 9; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 6x + 9y + z + 8 = 0.$$

Cách 2: Ta lần lượt có:

a. Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1), (P_1) và (P_2):

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \\ x + 2y + 3 = 0 \\ 3y - z + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = -2 + 3t \\ -1 + t + 2(-t) + 3 = 0 \\ 3(-t) - (-2 + 3t) + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 1 \\ y = -2 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm $A(1; -2; 4)$.

b. Lấy các điểm $M_1(-1; 0; -2) \in (d_1)$ và $M_2(-3; 0; 10) \in (d_2)$.

Mặt phẳng (P) sẽ có cặp vtcp là $\overrightarrow{AM_1}$ và $\overrightarrow{AM_2}$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{AM_2}\right] = (24; 36; 4) \text{ chọn } \vec{n} = (6; 9; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_1(-1; 0; -2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(6; 9; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 6x + 9y + z + 8 = 0.$$

Hoạt động	Cho đường thẳng (d_1) có phương trình: $(d_1): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t, \ t \in \mathbb{R}, \\ z = 3 \end{cases}$ và đường thẳng (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng: $(P_1): x + y = 0$ và $(P_2): 2x - y + z - 15 = 0$. a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau. b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

<u>Thí dụ 8:</u> Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t - 3 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = u + 2 \\ y = -3 + 2u, \ t, u \in \mathbb{R}. \\ z = 3u + 1 \end{cases}$$

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều cách đều (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 1; 3)$ và điểm $M_1(1; 2; -3) \in (d_1)$.
- Với (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 2; 3)$ và điểm $M_2(2; -3; 1) \in (d_2)$.

suy ra các vectơ $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, khi đó:

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; -3; 3).(1; -5; 4) = 24 \Leftrightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau.}$$

b. Đoạn thẳng M_1M_2 có trung điểm $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -1\right)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được xác định bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{có cặp vtcp } \overrightarrow{u_1} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-3; -3; 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } M\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -1\right) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - z = 0.$$

Hoạt động

Cho đường thẳng (d_1) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

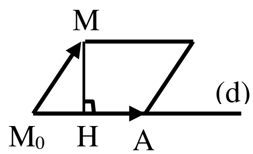
và đường thẳng (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng:

(P_1): $x + y - z + 5 = 0$ và (P_2): $2x - y + 1 = 0$.

a. Chứng tỏ rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau.
b. Viết phương trình mặt phẳng (R) song song và cách đều cách đều (d_1), (d_2).
c. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d_1) và song song với đường thẳng (d_2).
d. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d_2) và song song với đường thẳng (d_1).

4. MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍNH KHOẢNG CÁCH

Bài toán 1: Cho điểm M và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}$ và đi qua điểm M_0. Tính khoảng cách h từ điểm M đến đường thẳng (d).



✍ *Giải*

Gọi A là điểm sao cho $\overrightarrow{M_0A} = \vec{a}$.

Khi đó, diện tích hình bình hành có hai cạnh là M_0M và MA được cho bởi:

$$S = \left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right| = MH.M_0A = h.\left|\vec{a}\right| \Leftrightarrow h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}.$$

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh có thể ghi nhớ công thức trên để giải các bài toán liên quan tới khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

Thí dụ 9: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(3; −1; 3) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2},$$

a. Tính khoảng cách từ M tới đường thẳng (d).
b. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên (d).

✍ *Giải*

a. Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(1; 1; 2)$ và có vtcp $\vec{a}(1; -1; 2)$.
Ta có ngay:

$$d(M, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{|(-3; -3; 0)|}{|(1; -1; 2)|} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng (d), suy ra:

$H(1 + t; 1 - t; 2 + 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(t - 2; 2 - t; 2t - 1)$,

$MH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a} = 0$

$\Leftrightarrow 1.(t - 2) - 1.(2 - t) + 2(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 0; 4)$.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } M(3;-1;3) \\ \text{vtpt } \vec{a}(1;-1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - y + 2z - 10 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (d), suy ra $\{H\} = (d) \cap (P)$, do đó toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \\ x - y + 2z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + z = 0 \\ x - y + 2z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow H(2; 0; 4).$$

Cách 3: (Dựa vào kết quả câu a): Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng (d), suy ra:

$H(1 + t; 1 - t; 2 + 2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(t - 2; 2 - t; 2t - 1)$.

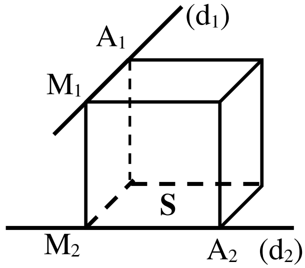
Vì độ dài $MH = \sqrt{3}$ nên ta được:

$3 = MH^2 = (t - 2)^2 + (2 - t)^2 + (2t - 1)^2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 0; 4)$.

☞ ***Nhận xét***: Thông qua lời giải của thí dụ trên các em học sinh cần ghi nhận ba phương pháp để tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên một đường thẳng.

Hoạt động	Cho điểm M(4; −3; 2) và đường thẳng (d) có phương trình: $(d)\colon \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$, a. Tính khoảng cách từ M tới đường thẳng (d). b. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên (d).

Bài toán 2: Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng chéo nhau (d_1), (d_2), biết đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và đi qua điểm M_1; đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}$ và đi qua điểm M_2.



✍ *Giải*

Gọi A_1, a_2 là các điểm sao cho:

$$\overrightarrow{M_1A_1}=\overrightarrow{u_1},\quad \overrightarrow{M_2A_2}=\overrightarrow{u_2}.$$

Khi đó, thể tích khối hộp có ba cạnh là M_1M_2, M_1A_1 và M_2A_2 được cho bởi:

$$V=\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right| = h.S = h.\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right| \Leftrightarrow h=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh có thể ghi nhớ công thức trên để giải các bài toán liên quan tới khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng.

Thí dụ 10: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_1) có phương trình:

$$(d_1)\colon \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{3},\quad (d)\colon \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=3-t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (d_1) và song song với đường thẳng (d_2).
c. Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2). Gọi H_1, H_2 theo thứ tự là giao điểm của (d) với các đường thẳng (d_1), (d_2). Xác định tọa độ các điểm H_1 và H_2.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d_1) đi qua điểm $M_1(0; 1; 6)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; 2; 3)$.
- Đường thẳng (d_2) đi qua điểm $M_2(1; -2; 3)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 1; -1)$.

Suy ra:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{|(-5;4;-1).(1;-3;-3)|}{|(-5;4;-1)|} = \frac{14}{\sqrt{42}}.$$

b. Mặt phẳng (P) sẽ có cặp vtcp là $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$. Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta được:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-5; 4; -1) \text{ chọn } \vec{n} = (5; -4; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } M_1(0;1;6) \\ \text{vtpt } \vec{n}(5;-4;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 5x - 4y + z - 2 = 0.$$

c. Chuyển phương trình của (d_1) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = u \\ y = 1 + 2u \\ z = 6 + 3u \end{cases}, u \in \mathbb{R} \Rightarrow H_1(u; 1 + 2u; 6 + 3u).$$

Vì $H_2 \in (d_2)$ nên $H_2(1 + t; t - 2; 3 - t)$, suy ra:

$$\overrightarrow{H_1H_2}(t - u + 1; t - 2u - 3; -t - 3u - 3).$$

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{H_1H_2} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{H_1H_2} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{H_1H_2}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{H_1H_2}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (t - u + 1) + 2(t - 2u - 3) - 3(t + 3u + 3) = 0 \\ (t - u + 1) + (t - 2u - 3) + (t + 3u + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ t = -1/3 \end{cases}.$$

Khi đó, bằng cách thay u, t theo thứ tự vào các phương trình tham số của (d_1), (d_2) ta được $H_1(-1; -1; 3)$, $H_2\left(\frac{2}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Hoạt động

Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng đó chéo nhau. Tìm góc giữa chúng.
b. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).
d. Viết phương trình đường thẳng song song với Oz, cắt cả (d_1) và (d_2).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Bài toán 1: Phương trình đường thẳng.

Phương pháp áp dụng

Ta có:

1. Phương trình:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t, \; t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$

là phương trình tham số của một đường thẳng khi và chỉ khi:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0.$$

Khi đó, nó đi qua một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vtcp $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

2. Phương trình:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

là phương trình chính tắc của một đường thẳng khi và chỉ khi:

$$a_1a_2a_3 \neq 0.$$

Khi đó, nó đi qua một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vtcp $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

☞ ***Chú ý***: Đi kèm với họ đường thẳng (d_m) thường có thêm các câu hỏi phụ:

Câu hỏi 1: Tìm điểm cố định mà họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua.

Câu hỏi 3: Cho điểm M có tính chất K, biện luận theo vị trí của M số đường thẳng của họ (d_m) đi qua M.

Câu hỏi 3: Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng cố định, để thực hiện yêu cầu này chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Khử m từ hệ của phương trình (d), ta được:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Khi đó (1) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước sau:

<u>Bước 1:</u> Các điểm M(x; y; z) thuộc (d_m) có tọa độ thỏa mãn phương trình:

$$\alpha[A_1(m)x + B_1(m)y + C_1(m)z + D_1(m)] + \\ + \beta[A_2(m)x + B_2(m)y + C_2(m)z + D_2(m)] = 0. \quad (2)$$

<u>Bước 2:</u> Lựa chọn các giá trị thích hợp của α, β, đưa (2) về dạng:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

<u>Bước 3:</u> Khi đó (3) chính là phương trình của mặt phẳng cố định (P) chứa các đường thẳng của họ (d_m).

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước sau:

<u>Bước 1:</u> Tìm điểm cố định $M_0(x_0; y_0; z_0)$ mà họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua.

Tìm vectơ cố định $\vec{n}(A; B; C) \neq \vec{0}$ vuông góc với họ đường thẳng (d_m).

Bước 2: Khi đó, phương trình mặt phẳng cố định (P) là:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(A; B; C) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ví dụ 1: Trong không gian Oxyz, cho phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + (m+1)t \\ y = 2 + mt \\ z = (m-1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

a. Tìm điều kiện của m để phương trình trên là phương trình của một họ đường thẳng kí hiệu là (d_m), từ đó chỉ ra điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.
b. Điểm A(3; 3; 1) có thuộc đường thẳng nào của họ (d_m) không.
c. Chứng minh rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc một mặt phẳng (P) cố định, tìm phương trình mặt phẳng (P).

☝ *Hướng dẫn*: Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (m+1)^2 + m^2 + (m-1)^2 = 3m^2 + 2 > 0, \forall m$$

Vậy với mọi m, phương trình (1) là phương trình tham số của họ đường thẳng (d_m) và dễ nhận thấy họ (d_m) luôn đi qua điểm cố định $M_0(1; 2; 0)$, ứng với t = 0 khi thay vào phương trình tham số của đường thẳng.

b. Điểm A(3; 3; 1) thuộc một đường thẳng của họ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3 = 1 + (m+1)t \\ 3 = 2 + mt \\ 1 = (m-1)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mt + t = 2 \\ mt = 1 \\ mt - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ mt = 1 \\ t = 0 \end{cases}, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, điểm A(3; 3; 1) không thuộc đường thẳng nào của họ (d_m).

c. Ta lựa chọn một trong ba cách lập luận sau:

Cách 1: Từ hệ (1) bằng cách rút theo t, ta được:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x-1}{m+1} \\ t = \dfrac{y-2}{m} \\ t = \dfrac{z}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{m+1} = \dfrac{y-2}{m} \\ \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(x - y + 1) = y - 2 \\ m(y - z - 2) = y - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x - y + 1}{y - z - 2} = 1 \Rightarrow x - 2y + z + 3 = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cố định chứa họ đường thẳng (d_m).

Cách 2: Từ hệ (1) bằng cách cộng phương trình thứ nhất với phương trình thứ ba, ta được:

$$\begin{cases} x + z = 1 + 2mt \\ y = 2 + mt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 1 + 2mt \\ 2y = 4 + 2mt \end{cases} \Rightarrow x - 2y + z + 3 = 0.$$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cố định chứa họ đường thẳng (d_m).

Cách 3: Họ (d_m) có vtcp $\vec{a}$ (m + 1; m; m – 1) và với vectơ $\vec{n}$ (1; –2; 1) ta có nhận xét:

$$\vec{a}\,.\,\vec{n} = m + 1 - 2m + m - 1 = 0, \forall m \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n}, \forall m.$$

Do đó, họ (d_m) thuộc mặt phẳng (P) cố định có phương trình được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_0(1;2;0) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;-2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 2y + z + 3 = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với câu hỏi c) chúng ta đã trình bày theo ba cách:

- ***Ở cách 1***, chúng ta thực hiện việc chuyển phương trình của họ (d_m) về dạng chính tắc rồi dạng tổng quát (giao tuyến của hai mặt phẳng) và từ đó khử m để nhận được phương trình mặt phẳng cố định (P). Công việc này thực chất là khử dần các tham số t và m.
- ***Ở cách 2***, chúng ta thực hiện liên tiếp hai phép khử cho các tham số t và mt và đây là cách giải mà các em học sinh hãy ghi nhận để áp dụng cho các bài tập tương tự.
- ***Ở cách 3***, để tìm được vectơ $\vec{n}$ chúng ta thực hiện như sau:

  Giả sử $\vec{n}$ (A; B; C) và khi đó:

  $$\vec{a}\,.\,\vec{n} = 0, \forall m \Leftrightarrow A(m + 1) + Bm + C(m - 1) = 0, \forall m$$
  $$\Leftrightarrow (A + B + C)m + A - C = 0, \forall m$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 0 \\ A - C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ B = -2C \end{cases}.$$

  Từ đó, chọn C = 1 ta được $\vec{n}$ (1; –2; 1).

<u>Ví du 2:</u> Trong không gian Oxyz, cho phương trình:

$$\frac{1-x}{1} = \frac{y+1}{m} = \frac{z+2}{m-1}. \qquad (1)$$

a. Tìm điều kiện của m để phương trình (1) là phương trình chính tắc của một đường thẳng, gọi là họ (d_m). Khi đó, tìm điểm cố định mà họ (d_m) luôn đi qua.
b. Chứng tỏ rằng họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc mặt phẳng (P) cố định.
c. Tính thể tích khối tứ diện giới hạn bởi mặt phẳng (P) và các mặt phẳng toạ độ.

☝ *Hướng dẫn*: Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

a. Để phương trình (1) là phương trình chính tắc của một đường thẳng điều kiện là:

$$m(m - 1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ và } m \neq 1. \qquad (*)$$

Với điều kiện (*) ta thấy ngay họ đường thẳng (d_m) luôn đi qua điểm cố định M_0(1; –1; –2).

b. Ta lựa chọn một trong hai cách lập luận sau:

Cách 1: Từ (1), ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{1-x}{1}=\dfrac{y+1}{m}\\ \dfrac{1-x}{1}=\dfrac{z+2}{m-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m(1-x)=y+1\\ m(1-x)=-x+z+3\end{cases} \Rightarrow y + 1 = -x + z + 3$$

$\Leftrightarrow x + y - z - 2 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt phẳng (P) cố định chứa họ đường thẳng (d_m).

Cách 2: Các đường thẳng thuộc họ (d_m) có vtcp $\vec{u}\left(-1;\ m;\ m-1\right)$.

Với vectơ $\vec{n}(1;1;\ -1)$ ta có nhận xét:

$$\vec{u}.\vec{n}=-1.1+m.1+(m-1)(-1)=-1+m-m+1=0 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{n},\ \forall m.$$

Vậy, họ đường thẳng (d_m) luôn thuộc mặt phẳng cố định (P) có phương trình được cho bởi:

$$(P):\ \begin{cases}\text{Qua } M_0(1;-1;-2)\\ \text{vtpt } \vec{n}(1;1;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (P):\ x + y - z - 2 = 0.$$

c. Ta có:

$(P) \cap Ox = \{A(2;\ 0;\ 0)\}$, $(P) \cap Oy = \{B(0;\ 2;\ 0)\}$,

$(P) \cap Oz = \{C(0;\ 0;\ -2)\}$.

Thể tích khối tứ diện OABC được cho bởi:

$$V=\frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}.2.2.|-2| = \frac{4}{3}\ (\text{đvtt}).$$

☞ ***Nhận xét***: Với mặt phẳng (Q) chúng ta còn gặp một dạng toán là "*Tìm đường thẳng cố định luôn thuộc họ mặt phẳng* (Q)". Thí dụ với mặt phẳng (Q): $x + my - 3mz - m - 1 = 0$ ta thực hiện phép biến đổi:

$$(Q):\ x - 1 + m(y - 3z - 1) = 0$$

Từ đó, suy ra đường thẳng cố định thuộc họ mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(d):\ \begin{cases}x-1=0\\ y-3z-1=0\end{cases}.$$

Như vậy, để chứng minh họ mặt phẳng (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định, ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Biến đổi phương trình của họ (P_m) về dạng:

$$f(x, y, z) + mg(x, y, z) = 0.$$

<u>Bước 2:</u> Vậy, họ (P_m) luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định có phương trình:

$$(d):\ \begin{cases}f(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0\end{cases}.$$

Bài toán 2: Chuyển dạng phương trình đường thẳng.

Phương pháp áp dụng

1. Với (d) cho dưới dạng *tham số*:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (1)$$

Bằng cách rút t từ hệ, ta sẽ nhận được phương trình chính tắc của đường thẳng (d), cụ thể:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = t \\ \dfrac{y - y_0}{a_2} = t \\ \dfrac{z - z_0}{a_3} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

2. Với (d) cho dưới dạng *chính tắc*:

$$(d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (2)$$

Bằng việc sử dụng tham số trung gian t ta nhận được phương trình tham số của đường thẳng (d), cụ thể:

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} = t \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

3. Với (d) cho dưới dạng là giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau:

(P_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, (P_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Khi đó, đường thẳng (d) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Để có được phương trình dạng tham số, chính tắc của (d) ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi $\vec{u}$ là vtcp, ta có:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Bước 2: Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (d)$.

Bước 3: Vậy, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Từ đó ta có được:

- Phương trình tham số của (d).
- Phương trình chính tắc của (d).

Cách 2: Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hai điểm A, B $\in$ (d).

Bước 2: Vậy, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Từ đó ta có được:

- Phương trình tham số của (d).
- Phương trình chính tắc của (d).

Lưu ý: Với yêu cầu xác định phương trình tham số của đường thẳng (d) chúng ta có thể thực hiện đơn giản hơn bằng cách đặt x = t (hoặc y = t hoặc z = t) từ đó suy ra y và z theo t.

Ví dụ 1: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - t \end{cases}$$

a. Viết phương trình chính tắc của (d).
b. Tìm toạ độ các giao điểm A, B, C của (d) với các mặt phẳng toạ độ.
c. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác OAB và OAC.

☝ *Hướng dẫn*: Với câu a), sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Bằng cách rút t từ hệ, ta được:

$$(d): \begin{cases} x - 2 = -t \\ y - 4 = 2t \\ z - 1 = -t \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

Cách 2: Từ phương trình tham số của đường thẳng (d), ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(2;\ 4;\ 1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(-1;\ 2;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

b. Ta lần lượt:

- Toạ độ giao điểm A của (d) với mặt phẳng (Oxy) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 4 + 2 = 6 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(1;\ 6;\ 0).$$

- Toạ độ giao điểm B của (d) với mặt phẳng (Oxz) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2 = 4 \\ y = 0 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow B(4;\ 0;\ 3).$$

- Toạ độ giao điểm C của (d) với mặt phẳng (Oyz) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 2 - t = 0 \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 + 2.2 = 8 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow C(0;\ 8;\ -1).$$

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|(18;\ -3;\ -24)\right| = \frac{\sqrt{909}}{2},$$

$$S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|(-6;\ 1;\ 8)\right| = \frac{\sqrt{101}}{2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{\sqrt{909}/2}{\sqrt{101}/2} = 3.$$

Cách 2: Ta có:

$$\frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{\frac{1}{2}h_{AB}.AB}{\frac{1}{2}h_{AC}.AC} = \frac{d(O,\ AB).AB}{d(O,\ AC).AC} = \frac{d(O,\ (d)).AB}{d(O,\ (d)).AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = 3.$$

<u>Ví du 2:</u> Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{1-z}{1}.$$

a. Viết phương trình tham số của (d).
b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d) và cắt chiều dương các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho tứ diện OABC có thể tích bằng 6.

☝ *Hướng dẫn*: Với câu a), sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Bằng việc sử dụng tham số trung gian t , ta được:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{1-z}{1}=t \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

Cách 2: Từ phương trình chính tắc của đường thẳng (d), ta được:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } M(1;\,1;\,1)\\ \text{vtcp } \vec{u}(1;\,1;\,-1)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=1-t\end{cases}.$$

b. Dễ thấy đường thẳng (d) đi qua hai điểm M(1; 1; 1) và N(0; 0; 2).
Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a, b, c > 0, ta được phương trình:

$$(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow (P): bcx+acy+abz=abc. \qquad (1)$$

Ta lần lượt:

- Thể tích tứ diện OABC bằng 6, ta được:

$$V_{OABC}=6 \Leftrightarrow \frac{1}{6}OA.OB.OC=6 \Leftrightarrow \frac{1}{6}a.b.c=6 \Leftrightarrow abc=36. \qquad (2)$$

- Mặt phẳng (P) chứa (d) khi nó chứa các điểm N, M, ta được:

$$\begin{cases}2ac=abc\\ bc+ac+ab=abc\end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}c=2\\ 2b+2a+ab=36\\ ab=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=2\\ a+b=9\\ ab=18\end{cases}.$$

  Từ hệ trên, suy ra a, b là nghiệm của phương trình:

$$t^2-9t+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_1=3\\ t_2=6\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=3 \text{ và } b=6\\ a=6 \text{ và } b=3\end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với a = 3, b = 6 và c = 2 thay vào (1), ta được:
  (P_1): 6.2x + 3.2y + 3.6z = 3.6.2 ⇔ (P_1): 2x + y + 3z – 6 = 0.
- Với a = 6, b = 3 và c = 2 thay vào (1), ta được:
  (P_2): 3.2x + 6.2y + 6.3z = 6.3.2 ⇔ (P_2): x + 2y + 3z – 6 = 0.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh cần tránh sai lầm khi cho rằng đường thẳng (d) có vtcp là $\vec{u}(1;\,1;\,-1)$.

<u>Ví dụ 3:</u> Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có phương trình:

(P): x + 4y – 2z – 6 = 0, (Q): x – 2y + 4z – 6 = 0.

a. Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến (d). Hãy tìm tọa độ của một vtcp của (d).
b. Viết phương trình tham số và chính tắc của đường thẳng (d).

c. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d) và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp O.ABC là hình chóp đều.

☝ *Hướng dẫn*: Với câu a), sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

a. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Q), ta có:

$\overrightarrow{n_P}(1; 4; -2)$, $\overrightarrow{n_Q}(1; -2; 4) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ không cùng phương $\Leftrightarrow (P) \cap (Q) = (d)$.

Để tìm một vtcp $\vec{u}$ của giao tuyến (d) ta có thể sử dụng các cách sau:

Cách 1: Giao tuyến (d) gồm các điểm M(x; y; z) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 6 = 0 \\ x - 2y + 4z - 6 = 0 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Suy ra $M(6; 0; 0) \in (d)$ và $N(2; 2; 2) \in (d)$ nên $\vec{u} = \overrightarrow{MN} = (-4; 2; 2)$.

Cách 2: Gọi $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right] = (12; -6; -6) \text{ chọn } \vec{u}(2; -1; -1).$$

b. Ta còn có thể thực hiện theo các cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(6;0;0) \\ \text{Qua } N(2;2;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M(6;0;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}(-4;2;2) \text{ chọn } (2; -1; -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{hoặc } (d): \frac{x-6}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

Cách 2: Ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(6;0;0) \\ \text{vtcp } \vec{u}(2;-1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{hoặc } (d): \frac{x-6}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

Cách 3: Trong hệ (I) cho z = t, ta được:

$$\begin{cases} x + 4y - 2t - 6 = 0 \\ x - 2y + 4t - 6 = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).

Từ hệ (II), bằng cách rút t, ta được:

$$t = \frac{6-x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \frac{x-6}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Đó chính là phương trình chính tắc của đường thẳng (d).

c. Dễ thấy đường thẳng (d) đi qua hai điểm M(6; 0; 0) và N(2; 2; 2).

Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), ta được phương trình:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1)$$

Ta lần lượt:

- Hình chóp O.ABC là hình chóp tam giác đều, ta được:

$$OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|. \quad (2)$$

- Mặt phẳng (P) chứa (d) khi nó chứa các điểm N, M, ta được:

$$\begin{cases} \frac{6}{a} = 1 \\ \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 6 \\ \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} \\ |b| = |c| = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 6.$$

Vậy, mặt phẳng (P): x + y + z – 6 = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 3: Viết phương trình đường thẳng.

Phương pháp áp dụng

Để viết phương trình đường thẳng (d), ta sử dụng các kết quả:

1. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0; y_0; z_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1; a_2; a_3) \end{cases}$$

suy ra:

- Phương trình tham số của (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$

- Phương trình chính tắc của (d) có dạng:

$$(d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

2. Đường thẳng đi qua hai điểm:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2; y_2; z_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1; y_1; z_1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) \end{cases}$$

suy ra:

- Phương trình tham số của (d) có dạng:

$$(d): \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}$$

- Phương trình chính tắc của (d) có dạng:

$$(d):\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

3. Đường thẳng được coi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) chứa nó. Và khi đó các em học sinh cần thực hiện việc chuyển dạng phương trình đường thẳng.

<u>Ví dụ 1:</u> Trong không gian Oxyz, cho điểm M(3; –5; 7) và mặt phẳng:

$$(P):\ x-2y+3z-6=0.$$

a. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và vuông góc với (P).
b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) trên mỗi mặt phẳng toạ độ.
c. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d) và cắt các trục toạ độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp O.ABC là hình chóp tam giác đều.

☝ *Hướng dẫn*: Với câu a), sử dụng điều kiện mặt phẳng (P) qua M và có vtcp là vtpt của (P)

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } M\\ (d)\perp(P)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}\text{Qua } M(3;-5;7)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(1;-2;3)\end{cases}\Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=3+t\\ y=-5-2t\\ z=7+3t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

b. Ta lần lượt có:

- Hình chiếu vuông góc của (d) lên (Oxy) có phương trình:

$$(d_1):\begin{cases}x=3+t\\ y=-5-2t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$$

- Tương tự, hình chiếu vuông góc (d_2), (d_3) của (d) lên các mặt phẳng (Oyz) và (Oxz) có phương trình:

$$(d_2):\begin{cases}x=0\\ y=-5-2t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=7+3t\end{cases},\quad (d_3):\begin{cases}x=3+t\\ y=0 \qquad ,\ t\in\mathbb{R}\\ z=7+3t\end{cases}$$

c. Dễ thấy đường thẳng (d) đi qua hai điểm M(3; –5; 7) và N(1; –1; 1).
Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), ta được phương trình:

$$(Q):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (1)$$

Ta lần lượt:

- Mặt phẳng (Q) chứa (d) khi nó chứa các điểm N, M, ta được:

$$\begin{cases}\dfrac{3}{a}-\dfrac{5}{b}+\dfrac{7}{c}=1\\ \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\end{cases}. \qquad (I)$$

- Tứ diện OABC đều, ta được:

  $OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|$. (2)

  Khi đó:

  – Nếu a = b thì hệ (I) có dạng:

  $$\begin{cases} \frac{3}{a} - \frac{5}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

  loại vì không thoả mãn (2).

  – Nếu a = –b thì hệ (I) có dạng:

  $$\begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{5}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ \frac{2}{a} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 \\ \frac{1}{c} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ thoả mãn (2).}$$

Vậy, mặt phẳng (Q): x – y – z – 1 = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***:

1. Chúng ta biết rằng giao điểm H của đường thẳng (d) với mặt phẳng (P) trong câu a) chính là hình chiếu vuông góc của điểm M trên (P). Như vậy, chúng ta có thêm một phương pháp để "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm* M *trên mặt phẳng* (P) *cho trước*".
2. Điều kiện vuông góc với mặt phẳng (P) trong câu a) có thể được đổi thành "*Song song với một đường thẳng* (Δ)", ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ điều này
3. Để "*Viết phương trình tổng quát hình chiếu vuông góc của đường thẳng* (d) *trên mỗi mặt phẳng tọa độ* " chúng ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 1:</u> Chuyển phương trình đường thẳng (d) về tham số:

   $$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

   <u>Bước 2:</u> Khi đó:

   - Hình chiếu vuông góc của (d) lên (Oxy) có phương trình:

     $$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

   - Hình chiếu vuông góc của (d) lên (Oyz) có phương trình:

     $$(d): \begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Hình chiếu vuông góc của (d) lên (Oxz) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = 0 \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Tuy nhiên, khi thay mặt phẳng tọa độ bằng một mặt phẳng (P) nào đó thì chúng ta cần một phương pháp khác (sẽ được trình bày ở phía sau).

4. Câu c) của ví dụ trên còn có thể được phát biểu dưới dạng "*Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm* M, *vuông góc với* (P) *và cắt các trục toạ độ tại các điểm* A, B, C *sao cho hình chóp* O.ABC *là hình chóp tam giác đều*". Và khi đó để có được lời giải đọc lập với câu a) chúng ta thực hiện như sau:
Với ba điểm A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c), ta được phương trình mặt phẳng (Q) đi qua ba điểm A, B, C có dạng:

$$(Q): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1)$$

Ta lần lượt:

- Mặt phẳng (Q) đi qua điểm M, ta được:

$$\frac{3}{a} - \frac{5}{b} + \frac{7}{c} = 1. \quad (2)$$

- Mặt phẳng (Q) vuông góc với (P), ta được $\frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 0$. (3)
- Tứ diện OABC đều, ta được:

$$OA = OB = OC \Leftrightarrow |a| = |b| = |c|. \quad (4)$$

Khi đó:

– Nếu a = b thì hệ tạo bởi (2) và (3) có dạng:

$$\begin{cases} \frac{3}{a} - \frac{5}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} - \frac{2}{a} + \frac{3}{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ -\frac{1}{a} + \frac{3}{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

loại vì không thoả mãn (4).

– Nếu a = –b thì hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{5}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \frac{3}{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{a} + \frac{7}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 \\ \frac{1}{c} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ thoả mãn (4).}$$

Vậy, mặt phẳng (Q): x – y – z – 1 = 0 thoả mãn điều kiện đầu bài.

<u>Ví dụ 2:</u> Trong không gian Oxyz, cho điểm M(4; –2; 2) và đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

a. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và song song với (Δ).

b. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và cách (Δ) một khoảng bằng $\frac{9}{\sqrt{5}}$.

☝ *Hướng dẫn*: Ta lần lượt:

a. Với câu a) đường thẳng (d) sẽ qua M và có vtcp là vtcp của (Δ).
b. Với câu b) với phương trình tổng quát của (P) ta sử dụng các giả thiết theo thứ tự:
   - M thuộc (P).
   - Mặt phẳng (P) song song với đường thẳng (Δ).
   - Khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P).

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua M}\\ (d)//(\Delta)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}\text{Qua } M(4;-2;2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(2;1;2)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=4+2t\\ y=-2+t,\ t\in\mathbb{R}\\ z=2+2t\end{cases}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy điểm N(0; –4; –2) thuộc (d) và A(3; 2; 1) thuộc (Δ). Mặt phẳng (P) cần dựng sẽ song song với (Δ) nên chứa (d) và do đó nó đi qua điểm N.

Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta lần lượt có:

- Vì M, N thuộc (P) nên:

$$\begin{cases}4A-2B+2C+D=0\\ -4B-2C+D=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2A=-B-2C\\ D=4B+2C\end{cases}.$$

- Để d((Δ), (P)) = 1 điều kiện là:

$$d(A,(P))=\frac{9}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|3A+2B+C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$$
$$\Leftrightarrow 5(3A+2B+C+4B+2C)^2=81(A^2+B^2+C^2)$$
$$\Leftrightarrow 5(A+2B+C)^2=9(A^2+B^2+C^2)$$
$$\Leftrightarrow 5(2A+4B+2C)^2=9(4A^2+4B^2+4C^2)$$
$$\Leftrightarrow 5(-B-2C+4B+2C)^2=9(-B-2C)^2+9(4B^2+4C^2)$$
$$\Leftrightarrow 45B^2=45B^2+36BC+72C^2 \Leftrightarrow BC+2C^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}C=0\\ C=-2B\end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với C = 0 thì 2A = –B và D = 4B = –8A nên:
  (P_1): $Ax - 2Ay - 8A = 0 \Leftrightarrow$ (P_1): $x - 2y - 8 = 0$.
- Với B = –2C thì A = 0 và D = –6C nên:
  (P_2): $-2Cy + Cz - 6C = 0 \Leftrightarrow$ (P_2): $2y - z + 6 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: (Độc lập với câu a): Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta lần lượt có:

- Lấy điểm A(3; 2; 1) thuộc (Δ) và vì M thuộc (P) nên:
  $$4A - 2B + 2C + D = 0. \quad (1)$$
- Mặt phẳng (P) cần dựng sẽ song song với (Δ) nên:
  $$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow 2A + B + 2C = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B = -2A - 2C \\ D = -8A - 6C \end{cases}.$$
- Để d((Δ), (P)) = 1 điều kiện là:
  $$d(A, (P)) = \frac{9}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|3A + 2B + C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$
  $$\Leftrightarrow \frac{|3A + 2(-2A - 2C) + C - 8A - 6C|}{\sqrt{A^2 + (-2A - 2C)^2 + C^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$
  $$\Leftrightarrow \frac{|-9A - 9C|}{\sqrt{5A^2 + 4AC + 5C^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 4AC = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = 0 \\ A = 0 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với C = 0 thì B = −2A và D = −8A nên:
  (P_1): $Ax - 2Ay - 8A = 0 \Leftrightarrow (P_1)$: $x - 2y - 8 = 0$.
- Với A = 0 thì B = −2C và D = −6C nên:
  (P_2): $-2Cy + Cz - 6C = 0 \Leftrightarrow (P_2)$: $2y - z + 6 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta biết rằng "*Đường thẳng* (Δ) *có thể được coi là giao tuyến của hai mặt phẳng* (P_1) *và* (P_2)", khi đó đường thẳng (d) sẽ song song với (P_1), (P_2) và như vậy câu a) của ví dụ trên sẽ được mở rộng dưới dạng "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* M *và song song với hai mặt phẳng cắt nhau* (P_1) *và* (P_2) *cho trước*". Với yêu cầu này chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Tìm các vtpt $\overrightarrow{n_1}$ và $\overrightarrow{n_2}$ của các mặt phẳng (P_1) và (P_2).

<u>Bước 2:</u> Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:
$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right].$$

<u>Bước 3:</u> Khi đó, ta được:
$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Viết phương trình các mặt phẳng:

- (Q_1) qua A và song song với (P_1).
- (Q_2) qua A và song song với (P_2).

Bước 2: Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(Q_1)\\(Q_2)\end{cases}. \qquad (*)$$

Chuyển hệ (*) về dạng tham số.

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; −1; 2) và hai mặt phẳng (P_1), (P_2) có phương trình:

$$(P_1): x + 2y + 2z - 4 = 0,\ (P_2): x + y - 2z + 2 = 0.$$

a. Tìm góc giữa hai mặt phẳng (P_1), (P_2).
b. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M và song song với hai mặt phẳng (P_1), (P_2).
c. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa hai đường thẳng (d_1), (d_2) đi qua điểm M và theo thứ tự vuông góc với hai mặt phẳng (P_1), (P_2).

✍ *Giải*

a. Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P_1), (P_2), ta có:

$\overrightarrow{n_1}(1; 2; 2)$, $\overrightarrow{n_2}(1; 1; -2)$.

Khi đó côsin góc α tạo bởi (P_1) và (P_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{|1.1 + 2.1 + 2.(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\begin{cases}(d)//(P_1)\\(d)//(P_2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{n_1}\\\vec{u}\perp\overrightarrow{n_2}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-6; 4; -1).$$

Khi đó:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } M(1;-1;2)\\\text{vtcp } \vec{u}(-6;4;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = 1-6t\\y = -1+4t\\z = 2-t\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (Q_1), (Q_2) theo thứ tự là các mặt phẳng đi qua M và song song với (P_1), (P_2), ta lần lượt có:

- Phương trình mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases}\text{Qua } M(1;-1;2)\\\text{vtpt } \overrightarrow{n_1}(1;2;2)\end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): x + 2y + 2z - 3 = 0.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q_2) được cho bởi:

$$(Q_2): \begin{cases}\text{Qua } M(1;-1;2)\\\text{vtpt } \overrightarrow{n_2}(1;1;-2)\end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): x + y - 2z + 4 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chính là giao tuyến của (Q_1) và (Q_2), nó chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - 3 = 0 \\ x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt z = t ($t \in \mathbb{R}$), ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x + 2y + 2t - 3 = 0 \\ x + y - 2t + 4 = 0 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 + 6t \\ y = 7 - 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

c. Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\begin{cases} (Q) \supset (d_1) \perp (P_1) \\ (Q) \supset (d_2) \perp (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (Q) \perp (P_1) \\ (Q) \perp (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_1} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (-6; 4; -1) \text{ chọn } \overrightarrow{n_Q}(6; -4; 1).$$

Khi đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M(1; -1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(6; -4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 6x - 4y + z - 12 = 0.$$

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh cần lưu ý tới việc ở câu b) có thể thay đổi điều kiện song song với mặt phẳng (P_1) (hoặc (P_2)) bằng yêu cầu vuông góc với đường thẳng (d_1) (hoặc (d_2)). Để "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *và vuông góc với hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *cho trước*" chúng ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ của các đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 2: Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 3: Khi đó, ta được:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình các mặt phẳng:

- (P_1) qua A và vuông góc với (d_1).
- (P_2) qua A và vuông góc với (d_2).

Bước 2: Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases}. \qquad (*)$$

Chuyển hệ (*) về dạng tham số.

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 2; 1) và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{2-z}{1}, \quad (d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{1}.$$

a. Tìm góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1), (d_2).
b. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A và vuông góc với cả (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{v_1}(1; 1; -1)$ và đi qua điểm $M_1(0; 1; 2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{v_2}(1; -2; 1)$ và đi qua điểm $M_2(1; 1; 0)$.

Khi đó, ta lần lượt có:

- Côsin góc α giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|.\left|\overrightarrow{v_2}\right|} = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{18}}.$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right]\right|} = \frac{|(-1; -2; -3)(1; 0; -2)|}{|(-1; -2; -3)|} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

b. Gọi (d) là đường thẳng cần dựng, ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử (d) có vtcp $\vec{u}$, ta có:

$$\begin{cases} (d) \perp (\Delta_1) \\ (d) \perp (\Delta_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{v_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{v_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right] = (-1; -2; -3) \text{ chọn } \vec{u}(1; 2; 3).$$

Từ đó, ta có:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1;2;3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1+3t \end{cases}$$

Cách 2: Ta lần lượt:

- Gọi (P_1) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_1) thì:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_1}(1;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): x + y - z - 2 = 0.$$

- Gọi (P_2) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d_2) thì:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_2}(1;-2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): x - 2y + z + 2 = 0.$$

Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x-2y+z+2=0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ t + y - z - 2 = 0 \\ t - 2y + z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

☞ ***Chú ý***: Để "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *cắt hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2) *chéo nhau cho trước*", ta có thể lựa chọn một trong các cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử đường thẳng (d) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại B, C. Khi đó toạ độ B, C theo thứ tự thoả mãn các phương trình của (d_1) và (d_2).

Bước 2: Từ điều kiện A, B, C thẳng hàng ta xác định được toạ độ B, C.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A, B.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P_1) thoả mãn điều kiện:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_1) \in (P_1) \end{cases}.$$

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P_2) thoả mãn điều kiện:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_2) \in (P_2) \end{cases}.$$

Bước 3: Đường thẳng (d) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P_1) và (P_2). Và từ đây, chúng ta đã biết các cách xác định dạng phương trình cho đường thẳng (d).

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn điều kiện:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d_1) \subset (P) \end{cases}.$$

Bước 2: Xác định giao điểm C của (d_2) và (P).

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AC} \end{cases}.$$

Điều kiện đi qua điểm A trong bài toán trên có thể được thay bởi điều kiện song song với một đường thẳng (Δ) hoặc vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

Ví du 5: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

(P): 3x + 3y − 4y = 0,

$$(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{1}, \quad (d_2): \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-2}.$$

a. Tính côsin góc giữa mặt phẳng (P) với các đường thẳng (d_1), (d_2).

b. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng (d_1), (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(3;\,3;\,-4)$.
- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1;\,2;\,1)$ và đi qua điểm $M_1(1;\,3;\,-2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(3;\,-1;\,-2)$ và đi qua điểm $M_2(2;\,1;\,1)$.

Ta lần lượt:

- Gọi α là góc giữa (d_1) với (P) thì:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{\left|1.3+2.3+1(-4)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}.\sqrt{3^2+3^2+(-4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{476}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{25}{476}} = \sqrt{\frac{451}{476}}.$$

- Gọi β là góc giữa (d_1) với (P) thì:

$$\sin\beta = \frac{\left|\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{n_P}\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|.\left|\overrightarrow{n_P}\right|} = \frac{\left|3.3-1.3-2(-4)\right|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}.\sqrt{3^2+3^2+(-4)^2}} = \frac{7}{\sqrt{119}}$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{49}{119}} = \sqrt{\frac{70}{119}} = \sqrt{\frac{10}{17}}.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+2t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ z = -2+t \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = 2+3u \\ y = 1-u \quad (u \in \mathbb{R}). \\ z = 1-2u \end{cases}$$

Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) và (d_2) theo thứ tự tại các điểm E, F. Khi đó:

- Điểm $E \in (d_1)$ suy ra $E(1 + t;\, 3 + 2t;\, t - 2)$.
- Điểm $F \in (d_2)$ suy ra $F(2 + 3u;\, 1 - u;\, 1 - 2u)$.
- Vì EF vuông góc với mặt phẳng (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(3;\,3;\,-4)$ ta được:

$$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \frac{3u-t+1}{3} = \frac{-u-2t-2}{3} = \frac{-2u-t+3}{-4}$$
$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow E\left(2;5;-1\right).$$

Khi đó, đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2;5;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}\left(3;3;-4\right) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 5+3t \quad ,\, t \in \mathbb{R}. \\ z = -1-4t \end{cases}$$

Cách 2: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng, khi đó (Δ) là giao tuyến của hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2), trong đó:

$$(Q_1): \begin{cases}(P)\perp(Q_1)\\(d_1)\subset(Q_1)\end{cases} \text{ và } (Q_2): \begin{cases}(P)\perp(Q_2)\\(d_2)\subset(Q_2)\end{cases}.$$

- Phương trình mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases}\text{Qua } M_1(1;3;-2)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_1}\end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases}\text{Qua } M_1(1;3;-2)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q1}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (11;-7;3)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_1): $11x - 7y + 3z + 16 = 0$.

- Phương trình mặt phẳng (Q_2) được cho bởi:

$$(Q_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(2;1;1)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_2}\end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(2;1;1)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q2}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (-10;-6;-12)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_2): $5x + 3y + 6z - 19 = 0$.

Vậy, đường thẳng (Δ) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}11x-7y+3z+16=0\\5x+3y+6z-19=0\end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Bằng việc đặt x = 3t + 2, ta biến đổi hệ (I) về dạng:

$$\begin{cases}x=3t+2\\11(3t+2)-7y+3z+16=0\\5(3t+2)+3y+6z-19=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2+3t\\y=5+3t\\z=-1-4t\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (Δ) cần dựng.

Cách 3: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_2) tại F.

- Gọi (Q_1) là mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa (d_1), ta có:

$$(Q_1): \begin{cases}\text{Qua } M_1(1;3;-2)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_1}\end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): \begin{cases}\text{Qua } M_1(1;3;-2)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q1}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}] = (11;-7;3)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_1): $11x - 7y + 3z + 16 = 0$.

- Tọa độ điểm F là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}\\11x-7y+3z+16=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5-3y\\z=2y-1\\11(5-3y)-7y+3(2y-1)+16=0\end{cases} \Rightarrow F(-1;2;3).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases}\text{Qua } F(-1;2;3)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;3;-4)\end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-4}.$$

Cách 4: Giả sử (Δ) là đường thẳng cần dựng và (Δ) cắt (d_1) tại E.

- Gọi (Q_2) là mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa (d_2), ta có:

$$(Q_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(2;1;1)\\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{n_P} \text{ và } \overrightarrow{u_2}\end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(2;1;1)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{Q2}} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_2}] = (-10;-6;-12)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (Q_2): 5x + 3y + 6z – 19 = 0.

- Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{1} \\ 5x + 3y + 6z - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = x - 3 \\ 5x + 3(2x+1) + 6(x-3) - 19 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow E(2; 5; -1)$.

Vậy, phương trình đường thẳng (Δ) có dạng:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2;5;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3;3;-4) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{-4}.$$

☞ ***Chú ý***: Kết hợp điều kiện vuông góc và cắt đường thẳng chúng ta nhận được dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc với đường thẳng* (d_1) *và cắt đường thẳng* (d_2) *chéo nhau cho trước*", ví dụ sẽ sau minh hoạ phương pháp thực hiện.

<u>Ví du 6:</u> Trong không gian Oxyz, cho điểm M(2; 2; 1) và hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}, \quad (d_2): \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.

b. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua M vuông góc với (d_1) và cắt (d_2).

c. Tìm các điểm A, B thuộc (d) sao cho ΔOAB cân tại O và có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{v_1}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm $M_1(0; 1; 2)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{v_2}(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $M_2(3; 2; 0)$.

Nhận xét rằng:

$$\left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; -2; 3)(3; 1; -2) = -11 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau.}$$

b. Gọi (d) là đường thẳng cần dựng, ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d_2) về dạng tham số:

$$(d_2): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Giả sử (d) cắt (d_2) tại điểm N, khi đó:

- Điểm N $\in$ (d_2) suy ra N(3 + t; 2 + 2t; 3t).
- Điều kiện để (d) vuông góc với đường thẳng (d_1) là:

$$\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{v_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{v_1} = 0 \Leftrightarrow 2(1 + t) + 2t + 2(3t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow N(3; 2; 0).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M(2;2;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}(1;0;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với (d_1) thì:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M(2;2;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_1}(2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x + y + 2z - 8 = 0.$$

- Gọi (R_2) là mặt phẳng đi qua M và chứa (d_2) thì:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M(2;2;1) \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{MM_2} \text{ và } \overrightarrow{v_2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (R_2): \begin{cases} \text{Qua } M(2;2;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{v_2}] = (2;-4;2) \text{ chọn } \overrightarrow{n_2}(1;-2;1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (R_2)$: $x - 2y + z + 1 = 0$.

Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z - 8 = 0 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ 2t + y + 2z - 8 = 0 \\ t - 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

☞ ***Lưu ý***: Chúng ta có thể tối ưu lời giải trong cách 2 như sau:

Giả sử (d) với vtcp $\vec{u}$ là đường thẳng cần dựng, khi đó (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng (R_1) và (R_2), trong đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d_1) \perp (R_1) \end{cases} \text{ và } (R_2): \begin{cases} \text{Qua A} \\ (d_2) \subset (R_2) \end{cases}.$$

- Mặt phẳng (R_1) có vtpt $\overrightarrow{v_1}(2; 1; 2)$.
- Mặt phẳng (R_2) có vtpt $\overrightarrow{n_2}$ được cho bởi:

  $\overrightarrow{n_2} = [\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{v_2}] = (2;-4;2)$ chọn $\overrightarrow{n_2} = (1;-2;1)$.
- vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) được cho bởi:

  $\vec{u} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (5; 0; -5)$ chọn $\vec{u} = (1;0;-1)$.

Khi đó, đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } M(2;2;1)\\ \text{vtcp } \vec{u}(1;0;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=2+t\\ y=2\\ z=1-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

Cách 3: Ta lần lượt:

- Gọi (R_1) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với (d_1) thì:

$$(R_1):\begin{cases}\text{Qua } M(2;2;1)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{v_1}(2;1;2)\end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x + y + 2z - 8 = 0.$$

- Mặt phẳng (R_1) cắt (d_2) tại điểm N thì toạ độ của N là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{3}\\ 2x+y+2z-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-4\\ z=3x-9\\ 2x+y+2z-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\ y=2\\ z=0\end{cases}$$

$\Rightarrow N(5; 0; -2).$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } M(2;2;1)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{MN}(1;0;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=2+t\\ y=2\\ z=1-t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

c. Các điểm A, B thuộc (d) nên:

$A(2 + t_1; 2; 1 - t_1)$ và $B(2 + t_2; 2; 1 - t_2)$ với $t_1 \neq t_2$.

Ta lần lượt:

- ΔOAB cân tại O khi OA = OB do đó:

$$OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow (2 + t_1)^2 + 4 + (1 - t_1)^2 = (2 + t_2)^2 + 4 + (1 - t_2)^2$$
$$\Leftrightarrow 2t_1^2 + 2t_1 = 2t_2^2 + 2t_2 \Leftrightarrow (t_1 - t_2)(t_1 + t_2 + 1) = 0$$
$$\overset{t_1\neq t_2}{\Leftrightarrow} t_1 + t_2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

- ΔOAB có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ khi:

$$\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\right\| = \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow \left|(2t_1 - 2t_2; -3t_1 + 3t_2; 2t_1 - 2t_2)\right| = \sqrt{17}$$
$$\Leftrightarrow (t_1 - t_2)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t_1 - t_2 = 1\\ t_1 - t_2 = -1\end{array}\right. \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}t_1 = 1 \text{ và } t_2 = 0\\ t_1 = 0 \text{ và } t_2 = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A(3; 2; 0) \text{ và } B(2; 2; 1)\\ A(2; 2; 1) \text{ và } B(3; 2; 0)\end{array}\right.$$

Vậy, hai điểm A(3; 2; 0) và B(2; 2; 1) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Kết hợp điều kiện vuông góc và cắt với một đường thẳng chúng ta nhận được dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc và cắt đường thẳng* (Δ) *cho trước*", ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Nhận xét rằng đường thẳng (d) cần dựng sẽ đi qua hình chiếu vuông góc H của A trên (Δ).

Bước 2: Xác định toạ độ H bằng hai cách đã biết.
Bước 3: Suy ra đường thẳng (AH) là đường thẳng cần dựng.
Ngoài ra, ta cũng có thể thực hiện theo các bước:
Bước 1: Viết phương trình các mặt phẳng:
- (P) qua A và chứa (Δ).
- (Q) qua A và vuông góc với (Δ).

Bước 3: Khi đó, đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}. \qquad (*)$$

Chuyển hệ (*) về dạng tham số.

Ví dụ 7: Trong không gian Oxyz, cho điểm M(1; 2; −1) và hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình:

$$(P): x + y + z - 3 = 0, \quad (Q): y + z - 1 = 0.$$

a. Chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến (d). Viết phương trình tham số của đường thẳng (d).
b. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng (d). Từ đó, suy ra tọa độ điểm M_1 đối xứng với M qua (d).
c. Lập phương trình đường thẳng đi qua M vuông góc với (d) và cắt (d).

✍ *Giải*

a. Gọi $\overrightarrow{n_P}$, $\overrightarrow{n_Q}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (P), (Q), ta có:

$\overrightarrow{n_P}(1; 1; 1)$, $\overrightarrow{n_Q}(0; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{n_Q}$ không cùng phương $\Leftrightarrow (P) \cap (Q) = (d)$.

Để viết phương trình tham số của(d) ta có thể sử dụng các cách sau:
Cách 1: Giao tuyến (d) gồm các điểm A(x; y; z) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y+z-3=0\\y+z-1=0\end{cases}. \qquad (I)$$

Trong hệ (I) cho y = t (t ∈ ℝ), ta được:

$$\begin{cases}y=t\\x+t+z-3=0\\t+z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=t\\z=1-t\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d).
Cách 2: Điểm A(2; 0; 1) thuộc (P) và (Q) nên thuộc (d).
Gọi $\vec{u}$ là một vtcp của đường thẳng (d), ta có:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_P}\right] = (0; 1; -1).$$

Ta có:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } A(2;0;1)\\\text{vtcp } \vec{u}(0;-1;1)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x=2\\y=t\\z=1-t\end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng (d), suy ra:

$H(2;\ t;\ 1-t) \Rightarrow \overrightarrow{MH}(1;\ t-2;\ 2-t)$,

$MH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow t-2+t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow H(2;\ 2;\ -1)$.

Vì H là trung điểm của MM_1 nên ta có $M_1(3;\ 2;\ -1)$.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;-1) \\ \text{vtpt } \vec{u}(0;\ 1;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (P):\ y - z - 3 = 0.$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (d), suy ra $\{H\} = (d) \cap (P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 - t \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow H(2;\ 2;\ -1).$$

Vì H là trung điểm của MM_1 nên ta có $M_1(3;\ 2;\ -1)$.

c. Phương trình đường thẳng đi qua M vuông góc với (d) và cắt (d) là:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(1;2;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MH}(1;0;0) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

☞ ***Chú ý***: Để tăng độ khó cho dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc và cắt đường thẳng* (Δ) *cho trước*", người ta thường thay điều kiện <u>*vuông góc*</u> bằng <u>*tạo với* (Δ) *một góc* α</u>, khi đó ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Tìm vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ của (Δ) và một điểm B thuộc (Δ).

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a;\ b;\ c)$.

<u>Bước 2:</u> Ta lần lượt có:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (Δ) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:

  $$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB},\ \vec{u}\right].$$

- Vì (d) cắt (Δ) nên nằm trong (P), do đó:

  $$\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0. \qquad (1)$$

- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng α điều kiện là:

  $$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) chúng ta sẽ nhận được toạ độ của vectơ $\overrightarrow{u_d}$.

<u>Bước 3:</u> Viết phương trình đường thẳng (d) qua A có vtcp $\overrightarrow{u_d}$.

Ngoài ra, trong một vài trường hợp đặc biệt chúng ta còn có thể sử dụng phương pháp tìm điểm.

Ví dụ 8: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(4; 1; −1) và đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta):\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng tỏ rằng điểm A không thuộc đường thẳng (Δ).

b. Lập phương trình đường thẳng đi qua A cắt (Δ) và tạo với (Δ) một góc bằng 45^0.

✍ *Giải*

a. Thay toạ độ của A vào phương trình tham số của (Δ), ta được:

$$\begin{cases} 4 = 0 \\ 1 = 1 + t \\ -1 = 1 + t \end{cases}, \text{ vô nghiệm } \Rightarrow A \notin (\Delta).$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (Δ) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:

  $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] = (-2; 4; -4)$ chọn $\overrightarrow{n_P}(1; -2; 2)$.

- Vì (d) cắt (Δ) nên nằm trong (P), do đó:

  $\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow a - 2b + 2c = 0 \Leftrightarrow a = 2b - 2c.$ (1)

- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^9 điều kiện là:

  $$\cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

  $\Leftrightarrow (b + c)^2 = (2b - 2c)^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 5bc + 2c^2 = 0$

  $\Leftrightarrow b = 2c$ hoặc $c = 2b$.

Khi đó:

- Với $b = 2c$ thì $a = 2c$ nên $\overrightarrow{u_d}(2c; 2c; c)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(2; 2; 1)$, từ đó:

  $$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4; 1; -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(2; 2; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $c = 2b$ thì $a = -2b$ nên $\overrightarrow{u_d}(-2b; b; 2b)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(-2; 1; 2)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $B(0; 1; 1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ), ta lần lượt có:

- Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (Δ), ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): y + z = 0.$$

- Vì $\{H\} = (\Delta) \cap (Q)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow H(0; 0; 0).$$

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại $M(0; 1 + t; 1 + t)$ thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$HM = HA \Leftrightarrow HM^2 = HA^2 \Leftrightarrow (1 + t)^2 + (1 + t)^2 = 4^2 + 1^2 + (-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + t)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + t = -3 \\ 1 + t = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -4 \\ t_2 = 2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;4;2) \text{ chọn } (2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;2;4) \text{ chọn } (-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $B(0; 1; 1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Ta lần lượt có:

- Khoảng cách d từ A đến (Δ) được cho bởi:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \sqrt{18}.$$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ) và giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại M(0; 1 + t; 1 + t) thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$AM = AH\sqrt{2} \Leftrightarrow AM^2 = 2AH^2 \Leftrightarrow (-4)^2 + t^2 + (2 + t)^2 = 2.18$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -4 \text{ hoặc } t_2 = 2.$$

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;4;2) \text{ chọn } (2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;1;-1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;2;4) \text{ chọn } (-2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 4: Điểm và đường thẳng.

Phương pháp áp dụng

Để tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ y = z_0 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ (có vtcp } \vec{u}(a; b; c)\text{)}.$$

Bước 2: Điểm M $\in$ (d), suy ra $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$

Bước 3: Thiết lập tính chất K cho điểm M.

Cách 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó:

$$(d) \cap (L) = \{M\}.$$

Chúng thường gặp:

1. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất (hoặc được phát biểu dưới dạng "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (d)").

Khi đó, nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2 + (z_0 + ct)^2$$

$$= At^2 + Bt + C \geq \frac{\Delta}{4A}$$

Vậy, ta được $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = -\frac{\Delta}{4A}$ đạt được khi $t = -\frac{b}{2A} \Rightarrow$ M.

2. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d).
Khi đó:

- Nếu sử dụng cách 1 thì bước 3 có nội dung:

$$AM \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0 \Rightarrow \text{Giá trị } t \Rightarrow \text{Toạ độ } H.$$

- Nếu sử dụng cách 2 thì thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{a}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (P) thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases}.$$

Bước 3: Hình chiếu vuông góc M của A lên đường thẳng (d) là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (d), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm M thuộc (d) sao cho độ dài AM ngắn nhất.

- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Suy ra toạ độ điểm A_1 từ điều kiện M là trung điểm của AA_1.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Xác định vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d).

Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{x+x_A}{2}; \dfrac{y+y_A}{2}; \dfrac{z+z_A}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với (d) và cắt (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Suy ra đường thẳng (AM) là đường thẳng cần dựng.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và chứa đường thẳng (d).

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với đường thẳng (d).

Bước 3: Đường thẳng cần tìm chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (d), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d).

Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$\text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R=AM} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) thì ta có:

$$R = d(A, (d)).$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$\text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt (d) tại hai điểm E, F sao cho EF = l, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc M của A lên (d). Ta có M là trung điểm của đoạn EF.

Bước 2: Mặt cầu (S) cần dựng được xác định bởi:

$$\text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính } R=AE=\sqrt{AM^2+EM^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{AM^2+\left(\dfrac{EF}{2}\right)^2} \end{cases}.$$

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (d) (khi đó M là trung điểm của đoạn EF) và R là bán kính mặt cầu (S) cần dựng thì ta có:

$$R=AE=\sqrt{AM^2+EM^2} = \sqrt{d^2(A, (d))+\left(\frac{EF}{2}\right)^2}.$$

Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$\text{(S)}: \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

Ví dụ 1: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(2; 6; 2) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

a. Tìm trên đường thẳng (d) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho tổng $x_M^2+y_M^2+z_M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng (d).
c. Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua đường thẳng (d).
d. Viết phương trình chính tắc đường thẳng đi qua điểm A vuông góc với (d) và cắt (d).
e. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (d).
f. Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt đường thẳng (d) tại hai điểm E, F sao cho EF = 6.

☝ *Hướng dẫn*: Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Điểm M ∈ (d), suy ra M(3 − 2t ; 1 + t; 1 + 2t).

Khi đó:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (3 - 2t)^2 + (1 + t)^2 + (1 + 2t)^2 = 9t^2 - 6t + 11$$
$$= (3t - 1)^2 + 10 \geq 10.$$

Từ đó, suy ra $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = 10$ đạt được khi:

$$3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{Toạ độ điểm } M\left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng (d), ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$.

Vì H ∈ (d) nên H(3 − 2t ; 1 + t; 1 + 2t), suy ra $\overrightarrow{AH}(1 - 2t; t - 5; 2t - 1)$.

Để H là hình chiếu vuông góc của A lên (d) điều kiện là:

$$AH \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$$
$$\Leftrightarrow -2(1 - 2t) + (t - 5) + 2(2t - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 2; 3).$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$.

Gọi (P) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (P) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 6; 2) \\ \text{vtpt } \vec{u}(-2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x - y - 2z + 6 = 0.$$

Vì {H} = (d) ∩ (P) nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \\ 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 2t \\ 9t - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 2; 3).$$

c. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Vì H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(0; -2; 4)$.

Cách 2: (Độc lập với câu b): Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-2; 1; 2)$ và giả sử điểm $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm H của } AA_1 \text{ thuộc (d)} \\ AA_1 \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+2}{2}; \dfrac{y+6}{2}; \dfrac{z+2}{2}\right) \in (d) \\ \overrightarrow{AA_1}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+2}{2} = 3 - 2t \\ \dfrac{y+6}{2} = 1 + t \\ \dfrac{z+2}{2} = 1 + 2t \\ -2(x-2) + (y-6) + 2(z-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 2t - 4 \\ z = 4t \\ t - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1(0; -2; 4).$$

d. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Gọi (d') là đường thẳng cần dựng thì:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{Qua H} \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 6; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{HA}(1; 4; -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d'): \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Gọi (d') có vtcp $\vec{u'}$ là đường thẳng cần dựng.

Lấy điểm B(3; 1; 1) thuộc (d) và gọi (P) = (A, (d)) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:

$$\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] = (-9; 0; -9) \text{ chọn } \overrightarrow{n_P}(1; 0; 1).$$

Khi đó, ta nhận thấy:

$$\begin{cases} (d') \subset (P) \\ (d') \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u'} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \vec{u'} \perp \vec{u} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u'} = \left[\overrightarrow{n_P}, \vec{u}\right] = (-1; -4; 1).$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 6; 2) \\ \text{vtcp } \vec{u'}(-1; -4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-2}{1}.$$

e. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(2; 6; 2) \\ \text{Bán kính } R = AH = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 18.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 2; -2)$ và đi qua điểm B(3; 1; 1). Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (d), ta có:

$$R = d(A, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{18}.$$

Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(2; 6; 2) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 18.$$

f. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R = AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{AH^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T): \begin{cases} \text{Tâm } A(2; 6; 2) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{27} \end{cases} \Leftrightarrow (T): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

Cách 2: (Độc lập với câu b): Vì H là trung điểm của EF nên mặt cầu (T) cần dựng có bán kính R được xác định bởi:

$$R=AE=\sqrt{AM^2 + EM^2}\ \sqrt{d^2(A, (d)) + \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{18+9} = \sqrt{27}.$$

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(T): \begin{cases} \text{Tâm } A(2; 6; 2) \\ \text{Bán kính } R=\sqrt{27} \end{cases} \Leftrightarrow (T): (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 27.$$

☞ ***Chú ý***: Tiếp tục ứng dụng hình chiếu vuông góc của điểm trên đường thẳng chúng ta xét các dạng toán sau:

- *Cho hai điểm* A, B *và đường thẳng* (d). *Tìm toạ độ điểm* M *trên đường thẳng* (d) *để*:
  a. $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*
  b. $MA^2 + MB^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

  Khi đó:

  a. Chúng ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = 2MI.$$

  Từ đó, ta thấy $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu vuông góc của I trên (d).

  Bước 2: Tìm toạ độ của M.

b. Ta có thể lựa chọn các cách giải sau:

Cách 1: Chúng ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$$

$$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Từ đó, ta thấy $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu vuông góc của I trên (d).

<u>Bước 2:</u> Tìm toạ độ của M.

Cách 2: Sử dụng phương trình tham số (giả sử là t) của đường thẳng (d) chúng ta biến đổi biểu thức $MA^2 + MB^2$ về dạng (ta luôn có a > 0):

$$MA^2 + MB^2 = at^2 + bt + c \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Từ đó, ta thấy $(MA^2 + MB^2)_{Min} = -\frac{\Delta}{4a}$, đạt được khi $t = -\frac{b}{2a}$, suy ra toạ độ điểm M.

- Mở rộng với ba điểm A, B, C không thẳng hàng (hoặc tứ diện ABCD) chúng ta sử dụng trọng tâm G của ΔABC ((hoặc trọng tâm G của tứ diện ABCD)). Cụ thể "*Cho ba điểm* A, B, C *không thẳng hàng và đường thẳng* (d). *Tìm toạ độ điểm* M *trên đường thẳng* (d) *để*:

a. $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

b. $MA^2 + MB^2 + MC^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

Ở đây, chúng ta thực hiện phép biến đổi:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 =$$

$$= \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

<u>Ví dụ 2:</u> Trong không gian Oxyz, cho ba điểm A(3; −1; 3), B(1; −3; 3), C(−10; 4; 9) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

a. Tìm toạ độ điểm M trên đường thẳng (d) để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b. Tìm toạ độ điểm N trên đường thẳng (d) để $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

✍ *Giải*

a. Ta có thể lựa chọn các cách giải sau:

Cách 1: Đoạn thẳng AB có trung điểm I(2; −2; 3), ta có:

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$$

$$= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2$$

$$= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \frac{AB^2}{2} = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Từ đó, ta thấy $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức M là hình chiếu vuông góc của I trên (d).

Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow M(2 + t;\ 1 - 2t;\ 3 + t) \Rightarrow \overrightarrow{IM}\left(t;\ 3 - 2t;\ t\right).$$

Từ điều kiện:

$$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t - 2(3 - 2t) + t = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; -1; 4).$$

Vậy, với điểm M(3; −1; 4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases} \Rightarrow M(2 + t;\ 1 - 2t;\ 3 + t).$$

Ta có:

$$MA^2 + MB^2 = (t - 1)^2 + (2 - 2t)^2 + t^2 + (1 + t)^2 + (4 - 2t) + t^2$$

$$= 12t^2 - 24t + 22 = 12(t - 1)^2 + 10 \geq 10.$$

Từ đó, ta thấy $(MA^2 + MB^2)_{Min} = 10$, đạt được khi:

$$t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; -1; 4).$$

Vậy, với điểm M(3; −1; 4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Tam giác ABC có trọng tâm G(−2; 0; 5), ta có:

$$\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right| = 3\left|\overrightarrow{NG}\right| = 3NG.$$

Từ đó, ta thấy $\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi NG nhỏ nhất, tức N là hình chiếu vuông góc của G trên (d). Ta lần lượt:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua G và vuông góc với (d), khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } G(-2;0;5) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_d}(1;\ -2;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x - 2y + z - 3 = 0.$$

- Vì (P) $\cap$ (d) = {N} nên toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{1} \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - z = -1 \\ x - 2y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow N(2;\ 1;\ 3).$$

☞ ***Chú ý***: Để tăng độ khó cho dạng toán "*Viết phương trình đường thẳng* (d) *đi qua điểm* A *vuông góc và cắt đường thẳng* (Δ) *cho trước*", người ta thường thay điều kiện *vuông góc* bằng *tạo với (Δ) một góc* α, khi đó ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ của (Δ) và một điểm B thuộc (Δ).

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a;\ b;\ c)$.

Bước 2: Ta lần lượt có:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (Δ) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB},\ \vec{u}\right]$.
- Vì (d) cắt (Δ) nên nằm trong (P), do đó:

$$\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0. \quad (1)$$

- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng α điều kiện là:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) chúng ta sẽ nhận được toạ độ của vectơ $\overrightarrow{u_d}$.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d) qua A có vtcp $\overrightarrow{u_d}$.

Ngoài ra, trong một vài trường hợp đặc biệt chúng ta còn có thể sử dụng phương pháp tìm điểm.

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(4; −1; 1) và đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

a. Chứng tỏ rằng điểm A không thuộc đường thẳng (Δ).
b. Lập phương trình đường thẳng đi qua A cắt (Δ) và tạo với (Δ) một góc bằng 45^0.

✍ *Giải*

a. Thay toạ độ của A vào phương trình tham số của (Δ), ta được:

$$\begin{cases} 4 = 0 \\ -1 = 1 + t,\ \text{vô nghiệm} \Rightarrow A \notin (\Delta). \\ 1 = 1 + t \end{cases}$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa (Δ) thì (P) có vtpt $\overrightarrow{n_P}$ được cho bởi:

  $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] = (-2; -4; 4)$ chọn $\overrightarrow{n_P}(1; 2; -2)$.

- Vì (d) cắt (Δ) nên nằm trong (P), do đó:

  $\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow a + 2b - 2c = 0 \Leftrightarrow a = -2b + 2c.$ (1)

- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^9 điều kiện là:

$$\cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+1^2}}$$

$\Leftrightarrow (b + c)^2 = (-2b + 2c)^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2b^2 - 5bc + 2c^2 = 0$

$\Leftrightarrow b = 2c$ hoặc $c = 2b$.

Khi đó:

- Với $b = 2c$ thì $a = -2c$ nên $\overrightarrow{u_d}(-2c; 2c; c)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(-2; 2; 1)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(-2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

- Với $c = 2b$ thì $a = 2b$ nên $\overrightarrow{u_d}(2b; b; 2b)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(2; 1; 2)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm B(0; 1; 1) và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ), ta lần lượt có:

- Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (Δ), ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): y + z = 0.$$

- Vì $\{H\} = (\Delta) \cap (Q)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow H(0; 0; 0).$$

Giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại M(0; 1 + t; 1 + t) thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$HM = HA \Leftrightarrow HM^2 = HA^2 \Leftrightarrow (1 + t)^2 + (1 + t)^2 = 4^2 + (-1)^2 + 1^2$$

$\Leftrightarrow (1+t)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+t=-3 \\ 1+t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-4 \\ t_2=2 \end{array}\right.$.

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;2;4) \text{ chọn } (2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;4;2) \text{ chọn } (-2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4-2t \\ y = -1+2t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 3: Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $B(0; 1; 1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1)$.

Ta lần lượt có:

- Khoảng cách d từ A đến (Δ) được cho bởi:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} = \sqrt{18}.$$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (Δ) và giả sử đường thẳng (d) cần dựng cắt (Δ) tại $M(0; 1 + t; 1 + t)$ thì ΔHAM vuông cân tại H, suy ra:

$$AM = AH\sqrt{2} \Leftrightarrow AM^2 = 2AH^2 \Leftrightarrow (-4)^2 + (2+t)^2 + t^2 = 2.18$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-4 \\ t_2=2 \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với $t_1 = -4$ thì $M_1(0; -3; -3)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{M_1A}(4;2;4) \text{ chọn } (2;1;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} x = 4+2t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $t_2 = 2$ thì $M_1(0; 3; 3)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases} \text{Qua } A(4;-1;1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AM_2}(-4;4;2) \text{ chọn } (-2;2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} x = 4-2t \\ y = -1+2t \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Yêu cầu***: Các em học sinh hãy đề xuất phương pháp để thực hiện yêu cầu "*Tìm điểm* M *trên đường thẳng* (d) *sao cho tổng* MA + MB *nhỏ nhất, với* A, B *cho trước*".

Bài toán 5: Điểm và mặt phẳng.

Phương pháp áp dụng

Để tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình ban đầu của mặt phẳng.

Cách 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó:

$$(P) \cap (L) = \{M\}.$$

Chúng thường gặp:

1. Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của điểm A lên mặt phẳng (P). Khi đó:

- Nếu sử dụng cách 1 thì:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử H(x; y; z) là chiếu vuông góc H của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH} // \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ của H.}$$

- Nếu sử dụng cách 2 thì:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Viết phương trình đường thẳng (d) thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtcp } \vec{n} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình tham số (d).

Bước 3: Hình chiếu vuông góc H của A lên (P) chính là giao điểm của (d) và (P).

Từ việc xác định được toạ độ hình chiếu vuông góc của A lên (P), chúng ta thực hiện được việc:

- Tìm toạ độ điểm H thuộc (P) sao cho độ dài AH ngắn nhất.
- Tìm toạ độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).

Bước 2: Suy ra toạ độ A_1 từ điều kiện H là trung điểm của AA_1.

Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

Bước 1: Xác định vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Bước 2: Giả sử $A_1(x; y; z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm M của } AA_1 \text{ thuộc } (P) \\ AA_1 \perp (P) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+x_A}{2}; \dfrac{y+y_A}{2}; \dfrac{z+z_A}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{AA_1} // \vec{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ } A_1.$$

- Tìm trên mặt phẳng (P) điểm M(x_M; y_M; z_M) sao cho $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ nhỏ nhất bởi nó được phát biểu lại dưới dạng "*Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc* M *của* O *trên* (P)").

- Cho hai điểm A, B và mặt phẳng (P). Tìm trên (P) điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Gọi I là trung điểm của AB, suy ra toạ độ của I.
  Bước 2: Nhận xét rằng:
  $$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI}| = 2MI.$$
  Từ đó:
  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI nhỏ nhất
  $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).
  Bước 3: Xác định toạ độ điểm M.

  Mở rộng với ba điểm A, B, C không thẳng hàng (hoặc tứ diện ABCD) chúng ta sử dụng trọng tâm G của ΔABC ((hoặc trọng tâm G của tứ diện ABCD)). Cụ thể "*Cho ba điểm* A, B, C *không thẳng hàng và mặt phẳng* (P). *Tìm toạ độ điểm* M *trên* (O) *để*:

  a. $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

  b. $MA^2 + MB^2 + MC^2$ *đạt giá trị nhỏ nhất.*

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (P), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P).
  Bước 2: Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) được xác định bởi:
  $$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R=AH} \end{cases}.$$

  Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:
  Bước 1: Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) thì ta có:
  R = d(A, (P)).
  Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:
  $$(S): \begin{cases} \text{Tâm A} \\ \text{Bán kính R} \end{cases}.$$

- Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua A và tiếp xúc với (P). Khi đó, mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu đường kính AH.

- Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn. Khi đó, mặt cầu cần dựng chính là mặt cầu tâm H bán kính AH.

- Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó), cụ thể ta thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của A lên (P). Ta có H là tâm đường tròn (C).

  Bước 2: Mặt cầu (S) cần dựng được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{AH^2 + r^2} \end{cases}.$$

  Tuy nhiên, yêu cầu này còn có thể thực hiện bằng cách:

  Bước 1: Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên (P) (khi đó M là tâm đường tròn (C)) và R là bán kính mặt cầu (S) cần dựng thì ta có:

$$R = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \sqrt{d^2(A, (P)) + r^2}.$$

  Bước 2: Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A \\ \text{Bán kính } R \end{cases}.$$

2. Tìm điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho:

a. MA + MB đạt giá trị nhỏ nhất.

b. $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

Ví dụ 1: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm A(4; 3; 6), B(−2; 3; 8) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(P): x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

a. Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P).

b. Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).

c. Tìm trên mặt phẳng (P) điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ sao cho tổng $x_M^2 + y_M^2 + z_M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

d. Tìm trên (P) điểm N sao cho $|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

e. Tìm trên (P) điểm E sao cho EA + EB đạt giá trị nhỏ nhất.

f. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (P).

g. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua A và tiếp xúc với (P).

h. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất đi qua A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.

i. Viết phương trình mặt cầu tâm A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{42}$.

Hướng dẫn: Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 2; 3)$.

Giả sử H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của A lên (P), suy ra:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ AH \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{AH}(x-4;\ y-3;\ z-6) /\!/ \vec{n}(1;\ 2;\ 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z - 14 = 0 \\ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-6}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y = 5 \\ 3x - z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 1;\ 3).$$

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1;\ 2;\ 3)$. Gọi (d) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (d) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} \text{Qua } A(4;\ 3;\ 6) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\ 2;\ 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\{H\} = (d) \cap (P)$ nên toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 6 + 3t \\ x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 3 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 1;\ 3).$$

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu a): Vì H là trung điểm của AA_1 nên $A_1(2;\ -1;\ 0)$.

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1;\ 2;\ 3)$ và giả sử $A_1(x;\ y;\ z)$, suy ra:

$$\begin{cases} \text{Trung điểm } H \text{ của } AA_1 \text{ thuộc } (P) \\ AA_1 \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H\left(\dfrac{x+4}{2};\dfrac{y+3}{2};\dfrac{z+6}{2}\right) \in (P) \\ \overrightarrow{AA_1} /\!/ \vec{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+4}{2} + 2.\dfrac{y+3}{2} + 3.\dfrac{z+6}{2} - 14 = 0 \\ \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-6}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y = 5 \\ 3x - z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_1(2;\ -1;\ 0)$.

c. Nhận xét rằng:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = (x_M - 0)^2 + (y_M - 0)^2 + (z_M - 0)^2 = OM^2.$$

Từ đó, suy ra:

$\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} \Leftrightarrow$ OM nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của O trên (P).

Gọi (Δ) là đường thẳng thoả mãn:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } O \\ (\Delta) \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{Qua } O(0;\ 0;\ 0) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\ 2;\ 3) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Vì $\{M\} = (\Delta) \cap (P)$ nên bằng cách phương trình tham số của (Δ) vào phương trình của (P), ta được:

$$t + 4t + 9t - 14 = 0 \Leftrightarrow 14t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 2; 3).$$

Vậy, với điểm M(1; 2; 3) thì $\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)_{Min} = 14$.

d. Gọi I là trung điểm của AB, suy ra I(1; 3; 7). Nhận xét rằng:

$$\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\right| = \left|2\overrightarrow{NI}\right| = 2NI.$$

Từ đó:

$\left|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ NI nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ N là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

- Xác định toạ độ điểm N: Gọi (d') là đường thẳng thoả mãn:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } I \\ (d') \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{Qua } I(1; 3; 7) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; 2; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases}.$$

Vì $\{N\} = (d') \cap (P)$ nên bằng cách phương trình tham số của (d') vào phương trình của (P), ta được:

$$(1 + t) + 2(3 + 2t) + 3(7 + 3t) - 14 = 0 \Leftrightarrow 14t + 14 = 0$$
$$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow N(0; 1; 4).$$

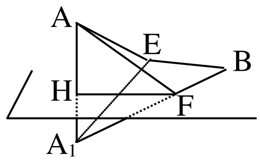
Vậy, với điểm N(0; 1; 4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. (Dựa vào kết quả câu b): Nhận xét rằng:

$$t_A.t_B = 14.14 = 196 > 0 \Leftrightarrow A, B \text{ ở về cùng một phía với (P).}$$

Phân tích: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (P) và $\{F\} = (A_1B) \cap (P)$, khi đó với điểm E bất kỳ thuộc (P), ta có:

$$EA + EB = EA_1 + EB \geq A_1B = FA + FB.$$



Vậy, ta được EA + EB nhỏ nhất khi $E \equiv F$.

Phương trình đường thẳng (A_1B) được xác định bởi:

$$(A_1B): \begin{cases} \text{Qua } A_1(2; -1; 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1B}(-4; 4; 8) \text{ chọn } (-1; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1B): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}.$$

Khi đó, để tìm toạ độ F ta thay x, y, z từ phương trình tham số của (A_1B) vào phương trình của (P) được:

$$2 - t + 2(-1 + t) + 6t - 14 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow F(0; 1; 4).$$

Vậy, điểm E(0; 1; 4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Dựa vào kết quả câu a): Mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(4; 3; 6) \\ \text{Bán kính } R = AH = \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 + (z - 6)^2 = 14.$$

Cách 2: (Độc lập với câu a): Gọi R là bán kính mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với (P) thì ta có:

$R = d(A, (P)) = \sqrt{14}$.

Phương trình mặt cầu (S) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(4; 3; 6) \\ \text{Bán kính } R = AH = \sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 14.$$

g. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất đi qua A và tiếp xúc với (P) chính là mặt cầu đường kính AH, ta có ngay:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AH} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AH}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5}{2}; \dfrac{9}{2}\right) \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{\sqrt{14}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}.$$

h. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất đi qua A và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn chính là đường tròn tâm H và bán kính AH nên:

$(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 14.$

i. Mặt cầu (T) cần dựng có bán kính là:

$R^2 = d(A, (P)) + r^2 = 14 + 42 = 56 \Leftrightarrow R = 2\sqrt{14}$.

Phương trình mặt cầu (T) được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } A(4; 3; 6) \\ \text{Bán kính } R = 2\sqrt{14} \end{cases} \Leftrightarrow (S): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 56.$$

Bài toán 6: Điểm và mặt cầu.

Phương pháp áp dụng

Để tìm điểm M thuộc mặt cầu (S) thoả mãn điều kiện K, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình ban đầu của mặt cầu.

Cách 2: Thiết lập điều kiện để M là giao điểm của một đối tượng khác đối với mặt cầu (thường là đường thẳng).

Ví du 1: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(4; 3; 4) và mặt cầu (S) có phương trình:

$(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3.$

a. Chứng tỏ rằng điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).
b. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A cắt (S) tại hai điểm B, C sao cho BC có độ dài lớn nhất.
c. Tìm điểm M thuộc (S) sao cho MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.
d. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng lớn nhất.
e. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (S).

f. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S).
g. Viết phương trình mặt cầu có bán kính lớn nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S).

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(1; 0; 1) và bán kính $R = \sqrt{3}$, ta có:

$$IA^2 = (4-1)^2 + 3^2 + (4-1)^2 = 27 \Leftrightarrow IA = 3\sqrt{3} > R.$$

Vậy, điểm A nằm ngoài mặt cầu (S).

b. Hai điểm B, C thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi BC là một đường kính của (S), do đó đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(4;3;4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(3;3;3) \text{ chọn } (1;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$MA \geq |IA - IM| = |IA - R| = |3\sqrt{3} - \sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \Rightarrow MA_{Min} = 2\sqrt{3},$$

đạt được khi M, I, A thẳng hàng.

$$MA \leq IA + IM = IA + R = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow MA_{Max} = 4\sqrt{3},$$

đạt được khi M, I, A thẳng hàng.

Tức trong cả hai trường hợp $\{M\} = (IA) \cap (S) = (d) \cap (S)$.

Thay phương trình tham số của (d) vào (S), ta được:

$$t^2 + t^2 + t^2 = 3 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(2;1;2) \\ M_2(0;-1;0) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} AM_1 = 2\sqrt{3} \\ AM_2 = 4\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy, ta có kết luận:

- $MA_{Min} = 2\sqrt{3}$, đạt được tại điểm $M_1(2; 1; 2)$.
- $MA_{Max} = 4\sqrt{3}$, đạt được tại điểm $M_2(0; -1; 0)$.

d. Mặt phẳng (P) cần dựng tiếp xúc với (S) và cách A một khoảng lớn nhất chính là mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm M_2, do đó:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_2(0;-1;0) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(3;3;3) \text{ chọn } (1;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y + z + 1 = 0.$$

e. Mặt cầu tâm A có thể tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài với (S), nên ta có:

- Mặt cầu (T_1) tâm A tiếp xúc ngoài với (S) được cho bởi:

$$(T_1): \begin{cases} \text{Tâm } A(4;3;4) \\ \text{Bán kính } R = AM_1 = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_1): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 12.$$

- Mặt cầu (T_2) tâm A tiếp xúc trong với (S) được cho bởi:

$$(T_2): \begin{cases} \text{Tâm } A(4;3;4) \\ \text{Bán kính } R = AM_2 = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (T_2): (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 48.$$

f. Mặt cầu (S_1) có bán kính nhỏ nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S) chính là mặt cầu đường kính AM_1, do đó:

$$(S_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1 \text{ là trung điểm } AM_1\\ \text{Bán kính } R_1=\dfrac{AM_1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (S_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1(3;\,2;\,3)\\ \text{Bán kính } R_1=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_1): (x-3)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=3.$$

g. Mặt cầu (S_2) có bán kính lớn nhất, đi qua A và tiếp xúc với (S) chính là mặt cầu đường kính AM_2, do đó:

$$(S_2):\begin{cases}\text{Tâm } I_2 \text{ là trung điểm } AM_2\\ \text{Bán kính } R_2=\dfrac{AM_2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow (S_2):\begin{cases}\text{Tâm } I_2(2;\,1;\,2)\\ \text{Bán kính } R_2=2\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_2): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=12.$$

☞ ***Chú ý***: Nếu điểm A nằm trong hoặc nằm trên mặt cầu (S) thì mọi đường thẳng hoặc mặt phẳng đi qua A đều cắt (S). Nhận định này gợi ý một cách chứng minh đường thẳng hoặc mặt phẳng cắt mặt cầu.

<u>Ví du 2:</u> Trong không gian Oxyz, cho điểm A(2; 1; 2) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9.$$

a. Chứng tỏ rằng mọi đường thẳng đi qua điểm A đều cắt mặt cầu (S).
b. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A cắt (S) theo thiết diện là đường tròn có bán kính nhỏ nhất.
c. Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (S) tại hai điểm B, C sao cho BC có độ dài lớn nhất.
d. Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$ và cắt (S) tại hai điểm E, F sao cho $EF = 3\sqrt{2}$.

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 1) và bán kính R = 3, ta có:

$$IA^2 = 2^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2 = 5 \Leftrightarrow IA = \sqrt{5} < R.$$

Vậy, mọi đường thẳng đi qua điểm A đều cắt mặt cầu (S).

b. Gọi r là bán kính của đường tròn (C), ta có nhận xét:

$$r^2 = R^2 - d^2(I, (P)) \le R^2 - IA^2 = 4 \Leftrightarrow r \le 2.$$

Suy ra $r_{Min} = 2$, đạt được khi:

$$d(I, (P)) = IA \Leftrightarrow IA \perp (P).$$

Do đó, mặt phẳng (P) cần dựng được cho bởi:

$$(P):\begin{cases}\text{Qua } A(2;\,1;\,2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;\,0;\,1)\end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + z - 6 = 0.$$

c. Hai điểm B, C thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi BC là một đường kính của (S), do đó đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(2;1;2)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2;0;1)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=2+2t\\ y=1\\ z=2+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

d. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}(a;b;c)$, ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) vuông góc với (Δ) với vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(2;-1;1)$ khi:

  $\vec{u}\perp\overrightarrow{u_\Delta} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow 2a-b+c=0 \Leftrightarrow b=2a+c.$
- Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d):\begin{cases}\text{Qua } A(2;1;2)\\ \text{vtcp } \vec{u}(a;b;c)\end{cases} \Leftrightarrow (d):\begin{cases}x=2+at\\ y=1+bt\\ z=2+ct\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

- Toạ độ các điểm E, F được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d) và (S), ta có:

  $(at+2)^2+b^2t^2+(ct+1)^2=9$

  $\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)t^2+2(2a+c)t-4=0.$ (1)

  Phương trình có hai nghiệm t_1, t_2 thoả mãn:

$$\begin{cases}t_1+t_2=-\dfrac{2(2a+c)}{a^2+b^2+c^2}\\ t_1t_2=-\dfrac{4}{a^2+b^2+c^2}\end{cases}.$$

- Với $E(at_1+2; bt_1+1; ct_1+2)$ và $F(at_2+2; bt_2+1; ct_2+2)$ thì:

  $EF=3\sqrt{2}$

  $\Leftrightarrow 18=EF^2=(at_1-at_2)^2+(bt_1-bt_2)^2+(ct_1-ct_2)^2$

  $=(a^2+b^2+c^2)(t_1-t_2)^2=(a^2+b^2+c^2)[(t_1+t_2)^2-4t_1t_2]$

  $$=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{4(2a+c)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}+\frac{16}{a^2+b^2+c^2}\right]=\frac{4(2a+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+16$$

  $\Leftrightarrow 1=\dfrac{2(2a+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \Leftrightarrow a^2+c^2+(2a+c)^2=2(2a+c)^2$

  $\Leftrightarrow 3a^2+4ac=0 \Leftrightarrow a=0$ hoặc $a=-\dfrac{4}{3}c$.

Khi đó:

- Với $a=0$ thì $b=c$ nên $\vec{u}(0;c;c)$ chọn $\vec{u}(0;1;1)$, do đó ta được:

$$(d_1):\begin{cases}x=2\\ y=1+t\\ z=2+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

- Với $a = -\frac{4}{3}c$ thì $b = -\frac{5}{3}c$ nên $\vec{u}\left(-\frac{4}{3}c; -\frac{5}{3}c; c\right)$ chọn $\vec{u}(4; 5; -3)$, do đó ta được:

$$(d_2): \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho điểm A(2; 2; 4) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(S): x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9.$$

a. Chứng tỏ rằng điểm A nằm trên mặt cầu (S).
b. Tìm điểm B thuộc (S) sao cho AB đạt giá trị lớn nhất.
c. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A.
d. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (S) tại A và vuông góc với vectơ $\vec{v}(1; 0; -1)$.
e. Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (S) tại A và tạo với đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ một góc 45^0.
f. Viết phương trình đường thẳng đi qua A vuông góc với đường thẳng $(a): \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và cắt (S) tại điểm B sao cho $AB = 2\sqrt{5}$.

✍ *Giải*

a. Mặt cầu (S) có tâm I(0; 1; 2) và bán kính R = 3, ta có:

$$IA^2 = 2^2 + 1^2 + 2^2 = 9 \Leftrightarrow IA = 3 = R.$$

Vậy, điểm A nằm trên mặt cầu (S).

b. Điểm B thuộc (S) có độ dài lớn nhất khi AB là một đường kính của (S), do đó B đối xứng với A qua tâm I, suy ra B(–2; 0; 0).

c. Mặt phẳng (P) cần dựng được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 2; 4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IA}(2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 2x + y + 2z - 14 = 0.$$

d. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}$, ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{IA} \\ \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{IA}, \vec{v}\right] = (-1; 4; -1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(2; 2; 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(-1; 4; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

e. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_d}(a;\ b;\ c)$, ta lần lượt có:

- Vì (d) tiếp xúc với (S) tại A nên:

  $\overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow 2a + b + 2c = 0 \Leftrightarrow b = -2a - 2c.$

- Để góc giữa (d) và (Δ) bằng 45^9 điều kiện là:

$$\cos 45^0 = \frac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{u_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|2a+2b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 9[a^2 + (-2a - 2c)^2 + c^2] = 2[2a + 2(-2a - 2c) - c]^2$$

$$\Leftrightarrow 9[5a^2 + 8ac + 5c^2] = 2(-2a - 5c)^2$$

$$\Leftrightarrow 37a^2 + 32bc - 5c^2 = 0 \Leftrightarrow a = -c \text{ hoặc } a = \frac{5}{37}c.$$

Khi đó:

- Với $a = -c$ thì $b = 0$ nên $\overrightarrow{u_d}(-c;\ 0;\ c)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(-1;\ 0;\ 1)$, từ đó:

$$(d_1): \begin{cases}\text{Qua } A(2;2;4)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(-1;0;1)\end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases}x = 2 - t\\ y = 2\\ z = 4 + t\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

- Với $a = \frac{5}{37}c$ thì $b = -\frac{84}{37}c$ nên $\overrightarrow{u_d}\left(\frac{5}{37}c;\ -\frac{84}{37}c;\ c\right)$ chọn $\overrightarrow{u_d}(5;\ -84;\ 37)$, từ đó:

$$(d_2): \begin{cases}\text{Qua } A(2;2;4)\\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_d}(5;-84;37)\end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases}x = 2 + 5t\\ y = 2 - 84t\\ z = 4 + 37t\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Giả sử đường thẳng (d) cần dựng có vtcp $\vec{u}(a;\ b;\ c)$, ta lần lượt có:

- Đường thẳng (d) vuông góc với (a) với vtcp $\overrightarrow{u_a}(1;\ 2;\ -1)$ khi:

  $\vec{u} \perp \overrightarrow{u_a} \Leftrightarrow \vec{u}.\overrightarrow{u_a} = 0 \Leftrightarrow a + 2b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + 2b.$

- Phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } A(2;\ 2;\ 4)\\ \text{vtcp } \vec{u}(a;\ b;\ c)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = 2 + at\\ y = 2 + bt\\ z = 4 + ct\end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

- Toạ độ điểm B (B ≠ A) được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (d) và (S), ta có:

$$(at + 2)^2 + (bt + 1)^2 + (ct + 2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t^2 + 2(2a + b + 2c)t = 0 \overset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} t = -\frac{2(2a+b+2c)}{a^2+b^2+c^2}.$$

- Với A(2; 2; 4) và B(at + 2; bt + 2; ct + 4) thì:

  $AB = 2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow 20 = AB^2 = a^2t^2 + b^2t^2 + (c^2t^2 = (a^2 + b^2 + c^2)t^2$

$$= \left(a^2+b^2+c^2\right).\frac{4(2a+b+2c)^2}{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2} = \frac{4(2a+b+2c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$\Leftrightarrow 5[a^2 + b^2 + (a + 2b)^2] = [2a + b + 2(a + 2b)]^2$

$\Leftrightarrow 5(2a^2 + 5b^2 + 4ab) = (4a + 5b)^2$

$\Leftrightarrow 6a^2 + 20ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = -\frac{10}{3}b$.

Khi đó:

- Với $a = 0$ thì $c = 2b$ nên $\vec{u}(0; b; 2b)$ chọn $\vec{u}(0; 1; 2)$, do đó ta được:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $a = -\frac{10}{3}b$ thì $c = -\frac{4}{3}b$ nên $\vec{u}\left(-\frac{10}{3}b; b; -\frac{4}{3}b\right)$ chọn $\vec{u}(10; -3; 4)$, do đó ta được:

$$(d_2): \begin{cases} x = 2 + 10t \\ y = 2 - 3t \\ z = 4 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (d_1) và (d_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 7: Vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Phương pháp áp dụng

Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2):

(d_1): $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$

$\Rightarrow$ có vtcp $\overrightarrow{u_1}$ $(a_1; b_1; c_1)$ và đi qua $M_1(x_1; y_1; z_1)$,

(d_2): $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$

$\Rightarrow$ có vtcp $\overrightarrow{u_2}$ $(a_2; b_2; c_2)$ và đi qua $M_2(x_2; y_2; z_2)$,

để xét vị trí tương đối của (d_1) và (d_2) ta sử dụng các kết quả sau:

a. (d_1) và (d_2) đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

- (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2 \end{cases}$.
- (d_1) và (d_2) song song với nhau

  $\Leftrightarrow a_1: b_1: c_1 = a_2: b_2: c_2 \neq (x_1 - x_2): (y_1 - y_2): (z_1 - z_2)$.

- (d_1) và (d_2) trùng nhau

  $\Leftrightarrow a_1: b_1: c_1 = a_2: b_2: c_2 = (x_1 - x_2): (y_1 - y_2): (z_1 - z_2)$.

b. (d_1) và (d_2) chéo nhau $\Leftrightarrow [\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

Như vậy, với yêu cầu " *Xét vị trí tương đối của 2 đường thẳng* (d_1) *và* (d_2)", thuật toán được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện:

- Với đường thẳng (d_1) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_1}$ và điểm $M_1 \in (d_1)$.
- Với đường thẳng (d_2) chỉ ra vtcp $\overrightarrow{u_2}$ và điểm $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Kiểm tra:

- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ cùng phương thì kết luận (d_1) và (d_2) trùng nhau.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ cùng phương và không cùng phương với $\overrightarrow{M_1M_2}$ thì kết luận (d_1) và (d_2) song song với nhau.
- Nếu $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương, thực hiện bước 3.

Bước 3: Xác định $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2}$, khi đó:

- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} = 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) cắt nhau.
- Nếu $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$ thì kết luận (d_1) và (d_2) chéo nhau.

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) và (d_2), biết:

a. $(d_1): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. $(d_1): \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z+3}{-3}$ và (d_2) là giao tuyến của hai mặt phẳng:

c. (P): $x + y - z + 2 = 0$ và (Q): $2x - y + 2z - 3 = 0$.

d. $(d_1): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-7}{1} = \dfrac{z-3}{4}$ và $(d_2): \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

e. $(d_1): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{2} = \dfrac{z}{1}$ và $(d_2): \begin{cases} x = -2t \\ y = -8 + 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 4 + t \end{cases}$

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; 2; -2)$ và đi qua điểm $M_1(1; 2; 3)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(-1; -2; 2)$ và đi qua điểm $M_2(0; 0; 5)$.

Nhận xét rằng các vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{M_1M_2}(-1; -2; 2)$ cùng phương nên hai đường thẳng (d_1) và (d_2) trùng nhau.

b. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; -4; -3)$ và đi qua điểm $M_1(0; -3; -3)$.
- Các mặt phẳng (P), (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_P}(1;1;-1)$, $\overrightarrow{n_Q}(2;-1;2)$ nên đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}$ được cho bởi:

$$\overrightarrow{u_2} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right] = (1; -4; -3) \Rightarrow \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2}. \quad (1)$$

Đường thẳng (d_2) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases}. \quad (I)$$

Nhận xét rằng toạ độ điểm M_1 không thoả mãn hệ (I) nên $M_1 \notin (d_2)$.
Từ đó kết hợp với (1) suy ra (d_1) và (d_2) song song với nhau.

c. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 1; 4)$ và đi qua điểm $M_1(1; 7; 3)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(3; -2; 1)$ và đi qua điểm $M_2(6; -1; -2)$.

Nhận xét rằng:

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ cắt nhau.}$$

d. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; -2; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 2; 0)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(-2; 3; 1)$ và đi qua điểm $M_2(0; -8; 4)$.

Nhận xét rằng:

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 54 \Rightarrow (d_1) \text{ và } (d_2) \text{ chéo nhau.}$$

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2), chúng ta có ngay:

$$d((d_1), (d_2)) = d(M_1, (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|},$$

với $M_1 \in (d_1)$, $M_2 \in (d_2)$ và $\overrightarrow{u_2}$ là một vtcp của (d_2).

2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2), chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

<u>Cách 1</u>: Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d_1) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

<u>Bước 2:</u> Mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{M_1M_2} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Bước 3: Vì ba điểm A, $M_1, M_2 \in (P) \Rightarrow$ Phương trình của (P).

3. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và cách (d_2) một khoảng bằng h, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy A, $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, điều kiện $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Bước 3: Vì điểm A, $M_1 \in (P)$ và $d(M_2, (P)) = h$, suy ra phương trình của (P).

4. Viết phương trình đường thẳng (d) thuộc mặt phẳng chứa (d_1), (d_2) và song song, cách đều (d_1), (d_2), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\overrightarrow{u_1}$ là vtcp của (d_1) và lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$.

Suy ra tọa độ trung điểm M của M_1M_2.

Bước 2: Đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1} \end{cases}.$$

5. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d_1) tại điểm E và tiếp xúc với (d_2), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi F là hình chiếu vuông góc của E trên (d_2) thì mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính EF.

Bước 2: Ta lần lượt:

- Tìm toạ độ điểm F.
- Viết phương trình mặt cầu đường kính EF.

6. Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng (R) song song, cách đều (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Viết phương trình mặt phẳng (R).

Bước 2: Khi đó:

- Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ).
- Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, (d_1))$.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S).

Lưu ý: Chúng ta còn có một phương pháp tổng quát để thực hiện yêu cầu này sẽ được tổng kết lại trong chú ý của hai đường thẳng chéo nhau.

Ví dụ 2: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau. Tính khoảng cách giữa (d_1) và (d_2).
b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và cách (d_2) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.
d. Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) và song song, cách đều (d_1), (d_2).
e. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (d_1) và tiếp xúc với (d_2) tại điểm B(4; 2; 3).
f. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng $(\Delta): \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 1; 1)$ và đi qua điểm $M_1(1; 2; 3)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; 1; 1)$ và đi qua điểm $M_2(2; 1; 2)$.

Nhận xét rằng các vectơ $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương và điểm M_1 không thuộc (d_2) nên hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Ta có:

$$d((d_1), (d_2)) = d(M_1, (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|(0; -3; 3)|}{|(2; 1; 1)|} = \sqrt{3}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{M_1M_2} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2}\right] = (0; -3; 3) \text{ chọn } \overrightarrow{n_P}(0; 1; -1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;2;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P}(0;1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): y - z + 1 = 0.$$

Cách 2: Lấy thêm điểm A(3; 3; 4) thuộc (d_1), giả sử mặt phẳng (P) có:

(P): Ax + By + Cz + D = 0, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Từ điều kiện M_1, M_2, A thuộc (P) ta được:

$$\begin{cases} A+2B+3C+D=0 \\ 2A+B+2C+D=0 \\ 3A+3B+4C+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+2B+3C+D=0 \\ A-B-C=0 \\ A+2B+2C=0 \end{cases} \overset{\text{Chọn } C=1}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-1 \\ C=1 \\ D=1 \end{cases}.$$

Khi đó, ta được phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$(P): -y + z - 1 = 0 \Leftrightarrow (P): y - z + 1 = 0.$$

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Lấy thêm điểm A(3; 3; 4) thuộc (d_1), giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình:

$$(Q): Ax + By + Cz + D = 0, \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Ta lần lượt có:

- Vì A, M_1 thuộc (Q) nên:

$$\begin{cases} A + 2B + 3C + D = 0 \\ 3A + 3B + 4C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B + 3C + D = 0 \\ 2A + B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 5A + B \\ C = -2A - B \end{cases}.$$

- Để $d((d_2), (Q)) = 1$ điều kiện là:

$$d(M_2, (Q)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|2A + B + 2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (2A + B - 4A - 2B + 5A + B)^2 = 3\left[A^2 + B^2 + (-2A - B)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow A^2 + 2AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = -B.$$

Khi đó chọn A = 1 ta được B = −1, C = −1 và D = 4 nên:

$$(Q): x - y - z + 4 = 0.$$

Cách 2: Từ giả thiết ta thấy:

$$\sqrt{3} = d((d_1), (d_2)) = d((Q), (d_2)) \Rightarrow \begin{cases} (d_1) \subset (Q) \\ (P) \perp (Q) \end{cases}.$$

Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-2; 2; 2) \text{ chọn } \overrightarrow{n_Q}(1; -1; -1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M_1(1;2;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1;-1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - y - z + 4 = 0.$$

d. Gọi M là trung điểm M_1M_2, suy ra $M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Phương trình đường thẳng (d) cần dựng được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_1}(2; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - \frac{3}{2}}{2} = \frac{y - \frac{3}{2}}{1} = \frac{z - \frac{5}{2}}{1}.$$

e. Gọi A là hình chiếu vuông góc của B trên (d_1) thì mặt cầu (S) cần dựng chính là mặt cầu đường kính AB. Ta lần lượt:

- *Xác định toạ độ điểm* A bằng việc sử dụng một trong các cách sau:
  Cách 1: Ta có:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua } B \\ (R) \perp (d_1) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): \begin{cases} \text{Qua } B(4;2;3) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_1}(2;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): 2x + y + z - 13 = 0.$$

  Vì {A} = $(d_1) \cap (P')$ nên toạ độ B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \\ 2x + y + z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow A(3;\ 3;\ 4) \text{ và } AB = \sqrt{3}.$$

  Cách 2: Vì A $\in (d_1)$ nên:

$$A(1 + 2t\ ;\ 2 + t\ ;\ 3 + t) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(2t - 3;\ t;\ t).$$

  Từ điều kiện $\overrightarrow{AB} \perp (d_1)$ ta có:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 3) + t + t = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Rightarrow A(3;\ 3;\ 4) \text{ và } \overrightarrow{AB}(-1;\ 1;\ 1) \text{ nên } AB = \sqrt{3}.$$

- *Phương trình mặt cầu đường kính* AB được xác định bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm AB} \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(\dfrac{7}{2}; \dfrac{5}{2}; \dfrac{7}{2}\right) \\ R = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Lưu ý: Phương trình mặt cầu đường kính AB còn được xác định bằng phương pháp quĩ tích – *Đề nghị bạn đọc tự thực hiện bằng cách xem lại bài học 1.*

f. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Vì (d_1) và (d_2) song song với nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng (R) song song, cách đều (d_1), (d_2) và vuông góc với mặt phẳng chứa (d_1), (d_2).

Ta lần lượt:

- Phương trình mặt phẳng (R) được cho bởi:

$$(R): \begin{cases} \text{Qua } M\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1;\ -1;\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow (R): 2x - 2y - 2z + 5 = 0.$$

  Vì {I} = $(\Delta) \cap (R)$ nên toạ độ I là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x + 2}{-1} = \dfrac{y - 1}{-2} = \dfrac{z + 1}{2} \\ 2x - 2y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -5 \\ y + z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2};\ 0;\ 0\right).$$

- Độ dài bán kính R của mặt cầu (S) được cho bởi:

$$R = d(I, (d_1)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1I}, \overrightarrow{u_1}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

- Phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(-\frac{5}{2}; 0; 0\right) \\ R = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}.$$

Cách 2: Chuyển phương trình đường thẳng (d_2) và (Δ) về dạng tham số:

$$(d_2): \begin{cases} x = 2 + 2u \\ y = 1 + u \\ z = 2 + u \end{cases}, \ (\Delta): \begin{cases} x = v - 2 \\ y = 1 - 2v \\ z = 2v - 1 \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}.$$

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra:

$I(v - 2; 1 - 2v; 2v - 1)$, $A(1 + 2t; 2 + t; 3 + t)$, $B(2 + 2u; 1 + u; 2 + u)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AI}(v - 2t - 3; -2v - t - 1; 2v - t - 4) \\ \overrightarrow{BI}(v - 2u - 4; -2v - u; 2v - u - 3) \end{cases}.$$

Ta lần lượt có các điều kiện:

- (S) tiếp xúc với (d_1) tại A khi:

$$AI \perp (d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{u_1} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(v - 2t - 3) - 2v - t - 1 + 2v - t - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2v - 6t - 11 = 0 \Leftrightarrow 2v = 6t + 11. \qquad (1)$$

- (S) tiếp xúc với (d_2) tại B khi:

$$BI \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{u_2} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2(v - 2u - 4) - 2v - u + 2v - u - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2v - 6u - 11 = 0 \Leftrightarrow 2v = 6u + 11 \overset{(1)}{\Rightarrow} u = t. \qquad (2)$$

- (S) tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) khi:

$$AI = BI \Leftrightarrow AI^2 = BI^2$$
$$\Leftrightarrow (v - 2t - 3)^2 + (-2v - t - 1)^2 + (2v - t - 4)^2 =$$
$$= (v - 2u - 4)^2 + (-2v - u)^2 + (2v - u - 3)^2$$
$$\Leftrightarrow (v - 2t - 3)^2 + (-2v - t - 1)^2 + (2v - t - 4)^2 =$$
$$= (v - 2t - 4)^2 + (-2v - t)^2 + (2v - t - 3)^2$$
$$\Leftrightarrow 2v + 1 = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = -2 \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; 0; 0\right) \text{ và } A(-3; 0; 1).$$

Phương trình mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm } I\left(-\dfrac{5}{2}; 0; 0\right) \\ R = IA = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{5}{4}.$$

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau tại M, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính góc giữa (d_1) và (d_2), chúng ta có ngay:
   - Với (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}$ (a_1; b_1; c_1) và (d_2) có vtcp là $\overrightarrow{u_2}$ (a_2; b_2; c_2).
   - Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ($0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$), ta có:

   $$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

   Lưu ý: Để (d_1) $\perp$ (d_2) $\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2), chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

   Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Xác định các vtcp $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ của đường thẳng (d_1) và (d_2).

   Bước 2: Mặt phẳng (P) được cho bởi:

   $$(P): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{Cặp vtcp } \overrightarrow{u_1} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

   Cách 2: Thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Lấy hai điểm $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$ không trùng với giao điểm M của (d_1) và (d_2).

   Bước 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

   (P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

   Vì ba điểm M, M_1, $M_2 \in$ (P), suy ra phương trình của (P).

3. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và tạo với (d_2) một góc lớn nhất, chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Ta có nhận xét:

   $g((d_2), (Q)) \le g((d_2), (d_1))$

   do đó $\text{Max}[g((d_2), (Q))] = g((d_2), (d_1))$ đạt được khi (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d_2) trên (Q), tức là:

   $$(Q) \perp ((d_1), (d_2)) = (P) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{n_P}\right].$$

   Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M với vtpt $\overrightarrow{n_Q}$.

4. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và tạo với (d_2) một góc α, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt phẳng (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Vì (d_1) thuộc (Q) nên:

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{u_1} = 0. \quad (1)$$

- Vì $g((d_2), (Q)) = \alpha$ nên:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) chúng ta nhận được vectơ $\overrightarrow{n_Q}$.

Bước 2: Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M với vtpt $\overrightarrow{n_Q}$.

5. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (d_1) và (d_2), chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2).
Lấy điểm $A \in (d_1)$, với $A \neq M$.

Bước 2: Lấy điểm $B \in (d_2)$ thoả mãn AI = BI, Từ đó, nhận được toạ độ hai điểm B_1, B_2.

Bước 3: Ta có:

- Với B_1 thì suy ra toạ độ trung điểm K_1 của AB_1.
Khi đó, phương trình đường phân giác thứ nhất là:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_1} \end{cases}.$$

- Với B_2 thì suy ra toạ độ trung điểm K_2 của AB_2.
Khi đó, phương trình đường phân giác thứ hai là:

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_2} \end{cases}.$$

Lưu ý: Với cách giải này, ta có các lưu ý sau:

1. Ta có kết quả:
   a. Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB_1} > 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc nhọn, góc tù của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
   b. Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB_1} < 0$ thì (Δ_1) và (Δ_2) theo thứ tự là phương trình đường phân giác góc tù, góc nhọn của góc tạo bởi (d_1), (d_2).
2. Nếu bài toán yêu cầu lập phương trình mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi (d_1), (d_2), ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua M} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tạo độ giao điểm M của (d_1) và (d_2).

Lấy $A \in (d_1)$ và $B \in (d_2)$, với $A, B \neq I$.

Bước 2: Gọi K_1, K_2 theo thứ tự là chân đường vuông góc ngoài, trong hạ từ M xuống AB.

Ta lần lượt có:

- Điểm $K_1(x_1; y_1; z_1)$ chia AB theo tỉ số $t = \frac{IA}{IB}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AK_1}}{\overrightarrow{BK_1}} = \frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{Toạ độ } K_1.$$

Khi đó, phương trình đường phân giác ngoài được xác định bởi:

$$(IK_1): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_1} \end{cases}.$$

- Điểm $K_2(x_2; y_2; z_2)$ chia AB theo tỉ số $-\frac{IA}{IB}$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AK_2}}{\overrightarrow{BK_2}} = -\frac{IA}{IB} \Rightarrow \text{Toạ độ } K_2.$$

Khi đó, phương trình đường phân giác trong được xác định bởi:

$$(IK_2): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{IK_2} \end{cases}.$$

6. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d_1), (d_2) tại điểm M, chúng ta thấy ngay đó chính là "*Mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với mặt phẳng* (P) *tại điểm* M" và đây là dạng toán chúng ta đã biết cách thực hiện.
7. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Vì (d_1) và (d_2) cắt nhau nên tâm I của mặt cầu (S) thuộc mặt phẳng phân giác (Q) của góc tạo bởi (d_1), (d_2).

Viết phương trình mặt phẳng (Q).

Bước 2: Khi đó:

- Tâm I chính là giao điểm của (Q) và (Δ).
- Bán kính của mặt cầu là $R = d(I, (d_1))$.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S).

Lưu ý: Chúng ta còn có một phương pháp tổng quát để thực hiện các yêu cầu dạng (7), (8) sẽ được trình bày trong chú ý của hai đường thẳng chéo nhau.

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } (d_2): \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 2 + u \\ z = 4 + 2u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng minh rằng (d_1) cắt (d_2) tại điểm M. Tìm toạ độ của M và tính góc giữa (d_1), (d_2).
b. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) và (d_2).
c. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và tạo với (d_2) một góc lớn nhất.
d. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa (d_1) và tạo với (d_2) một góc α biết $\sin\alpha = \frac{4}{9}$.
e. Viết phương trình đường phân giác của góc tạo bởi (d_1) và (d_2).
f. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{17}$ tiếp xúc với (d_1), (d_2) tại điểm M.
g. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; 2; 1)$ và đi qua điểm $M_1(-1; -1; 1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm $M_2(3; 2; 4)$.

a. Bằng cách thay phương trình tham số của (d_2) vào (d_1), ta được:

$$\begin{cases} -1 + 2t = 3 + 2u \\ -1 + 2t = 2 + u \\ 1 + t = 4 + 2u \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow (d_1) \cap (d_2) = \{M(1; 1; 2)\}.$$

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2), ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{8}{9}.$$

b. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\overrightarrow{n_P}$ là một vtpt của mặt phẳng (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (3; -2; -2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P) được cho bởi:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1; -1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P}(3; -2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (P): 3x - 2y - 2z + 3 = 0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (P) có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Từ điều kiện M, M_1, M_2 thuộc (P) ta được:

$$\begin{cases} A + B + 2C + D = 0 \\ -A - B + C + D = 0 \\ 3A + 2B + 4C + D = 0 \end{cases} \overset{\text{Chọn } A=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} B + 2C + D = -1 \\ -B + C + D = 1 \\ 2B + 4C + D = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C = \dfrac{2}{3} \\ D = 1 \end{cases}.$$

Khi đó, ta được phương trình mặt phẳng (P): $3x - 2y - 2z + 3 = 0$.

c. Ta có nhận xét:

$$g((d_2), (Q)) \le g((d_2), (d_1))$$

do đó $\text{Max}[g((d_2), (Q))] = g((d_2), (d_1))$ đạt được khi (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d_2) trên (Q), tức là:

$$(Q) \perp ((d_1), (d_2)) = (P) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{n_P} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_1}\right] = (2; -7; 10).$$

Phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1; -1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(2; -7; 10) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - 7y + 10z - 15 = 0.$$

d. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a; b; c)$, ta lần lượt có:

- Vì (d_1) thuộc (R) nên:

$$\overrightarrow{n_R} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{u_1} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - 2b. \quad (1)$$

- Vì $g((d_2), (R)) = \alpha$ có $\sin\alpha = \dfrac{4}{9}$ nên:

$$\frac{4}{9} = \frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|2a + b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow 16(a^2 + b^2 + c^2) = 9(2a + b + 2c)^2$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 16(a^2 + b^2) + 16(-2a - 2b)^2 = 9\left[2a + b + 2(-2a - 2b)\right]$$

$$\Leftrightarrow 44a^2 + 20ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = -2a \text{ hoặc } b = 22a.$$

Khi đó:

- Với $b = -2a$ thì $c = 2a$ nên $\overrightarrow{n_R}(a; -2a; 2a)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1; -2; 2)$, từ đó ta được:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1; -1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1; -2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): x - 2y + 2z - 3 = 0.$$

- Với $b = 22a$ thì $c = -46a$ nên $\overrightarrow{n_R}(a; 22a; -46a)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1; 22; -46)$, từ đó ta được:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M_1(-1; -1; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1; 22; -46) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): x + 22y - 46z + 69 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Gọi $N \in (d_2)$ sao cho $MN = MM_1$, ta lần lượt có:

$N(3 + 2u; 2 + u; 4 + 2u)$,

$MN^2 = MM_1^2 \Leftrightarrow (2u + 2)^2 + (u + 1)^2 + (2u + 2)^2 = 9 \Leftrightarrow 9(u + 1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow u + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow u_1 = 0$ hoặc $u_2 = -2$.

Khi đó:

- Với $u_1 = 0$ thì $N_1(3; 2; 4)$ và trung điểm của M_1N_1 là $K_1\left(1; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$, từ đó ta được phương trình đường phân giác (Δ_1):

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_1}(0; 1/2; -1/2) \text{ chọn vtcp } (0; 1; -1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với $u_2 = -2$ thì $N_2(-1; 0; 0)$ và trung điểm của M_1N_2 là $K_2\left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, từ đó ta được phương trình đường phân giác (Δ_2):

$$(\Delta_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{MK_2}(2; 3/2; 3/2) \text{ chọn vtcp } (4; 3; 3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

f. Mặt cầu (S) cần dựng với tâm I sẽ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại M.
Gọi (Δ) là đường thẳng qua M và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_P}(3; -2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì tâm I thuộc (Δ) nên $I(1 + 3t; 1 - 2t; 2 - 2t)$, từ đó:

$IM = R \Leftrightarrow IM^2 = R^2 \Leftrightarrow 9t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 17 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t_{1,2} = \pm 1$.

Khi đó:

- Với $t_1 = 1$ thì $I_1(4; -1; 0)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(4; -1; 0) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x - 4)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 17.$$

- Với $t_2 = -1$ thì $I_2(-2; 3; 4)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(-2; 3; 4) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 16.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

g. Ta lần lượt:

- Với đường phân giác (Δ_1) ta có phương trình mặt phẳng phân giác (Q_1):

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{M_1N_1}(4; 3; 3) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_1): 4x + 3y + 3z - 13 = 0.$$

Khi đó, ta có:

- Toạ độ tâm T_1 của mặt cầu (T_1) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \\ 4x + 3y + 3z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 0 \\ z = 19 \\ v = 9 \end{cases} \Rightarrow T_1(-11; 0; 19).$$

- Bán kính R_1 được cho bởi:

$$R_1 = d(T_1, (d_1)) = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{M_1T_1}, \overrightarrow{u_1}\right]\right\|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|} = \sqrt{424}.$$

Từ đó, ta có phương trình mặt cầu (T_1) như sau:

$$(T_1): (x + 11)^2 + y^2 + (z - 19)^2 = 424.$$

- Với đường phân giác (Δ_2) ta có phương trình mặt phẳng phân giác (Q_2):

$$(Q_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{M_1N_2}(0; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q_2): y - z + 1 = 0.$$

Khi đó, ta có:

- Toạ độ tâm T_2 của mặt cầu (T_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -2 + v \\ y = 0 \\ z = 1 - 2v \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2(-2; 0; 1).$$

- Bán kính R_2 được cho bởi:

$$R_1 = d(T_2, (d_1)) = \frac{\left\|\left[\overrightarrow{M_1T_2}, \overrightarrow{u_1}\right]\right\|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|} = \sqrt{2}.$$

Từ đó, ta có phương trình mặt cầu (T_2) như sau:

$$(T_2): (x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1), (T_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Với hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau, chúng ta thường gặp thêm các yêu cầu:

1. Tính góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2), chúng ta thực hiện tương tự như trong phần chú ý về hai đường thẳng cắt nhau.

2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2), chúng ta có kết quả:
   - (d_1) đi qua điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_1}(a_1; b_1; c_1)$.
   - (d_2) đi qua điểm $M_2(x_2; y_2; z_2)$ và có vtcp $\overrightarrow{u_2}(a_2; b_2; c_2)$.

   Khi đó, khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}.$$

   Ngoài ra, còn có thể sử dụng kết quả trong yêu cầu (3) hoặc yêu cầu (6).

3. Viết phương trình mặt phẳng (Q_1) chứa (d_1) và song song với (d_2), chúng ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 1:</u> Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2) và lấy điểm $M_1 \in (d_1)$.

   <u>Bước 2:</u> Mặt phẳng (Q_1) được cho bởi:

$$(Q_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

   Mở rộng yêu cầu trên là "Viết phương trình các mặt phẳng (Q_1), (Q_2) theo thứ tự chứa (d_1), (d_2) và song song với nhau".

4. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều (d_1), (d_2), chúng ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 1:</u> Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2).
   Lấy $M_1 \in (d_1)$ và $M_2 \in (d_2)$, suy ra tọa độ trung điểm M của M_1M_2.

   <u>Bước 2:</u> Mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \end{cases}.$$

5. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), chúng ta có thể lựa chọn những cách giải sau để thực hiện:

   <u>Cách 1</u>: Ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 1:</u> Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).

   <u>Bước 2:</u> Chuyển phương trình (d_1) và (d_2) về dạng tham số, suy ra tọa độ của A, B theo phương trình tham số của (d_1) và (d_2).

   <u>Bước 3:</u> Từ điều kiện:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \\ u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Toạ độ A, B}$$

   <u>Bước 4:</u> Khi đó phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua B} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB} \end{cases}.$$

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2). Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d), ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = [\vec{u}, \overrightarrow{u_1}] \end{cases} \Rightarrow (P_1).$$

Bước 3: Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2 \in (d_2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua } M_2 \in (d_2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = [\vec{u}, \overrightarrow{u_2}] \end{cases} \Rightarrow (P_2).$$

Bước 4: Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} (P_1) \\ (P_2) \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).}$$

Cách 3: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$ là vtcp của (d_1) và (d_2). Gọi $\vec{u}$ là vtcp của đường vuông góc chung (d), ta có:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].$$

Bước 2: Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } M_1 \in (d_1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = [\vec{u}, \overrightarrow{u_1}] \end{cases} \Rightarrow (P_1).$$

Bước 3: Giả sử $(d) \cap (d_2) = \{B\}$ suy ra $(P_1) \cap (d_2) = \{B\} \Rightarrow$ toạ độ B.

Bước 4: Khi đó phương trình đường thẳng (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{qua B} \\ \text{vtcp } \vec{u} \end{cases}.$$

Cách 4: (Áp dụng trong trường hợp hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau và vuông góc với nhau): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P_1) thoả mãn:

$$\begin{cases} (d_1) \subset (P_1) \\ (P_1) \perp (d_2) \end{cases}.$$

Bước 2: Dựng mặt phẳng (P_2) thoả mãn:

$$\begin{cases} (d_2) \subset (P_2) \\ (P_2) \perp (d_1) \end{cases}.$$

Bước 3: Đường thẳng chung (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) nên gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases}(P_1)\\(P_2)\end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình tham số hoặc chính tắc của (d).}$$

6. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2), chúng ta đi viết phương trình mặt cầu đường kính AB với A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2).
7. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng (Δ), chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình các đường thẳng (Δ), (d_1) và (d_2) về dạng tham số và tìm các vtcp tương ứng $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$.

Bước 2: Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra toạ độ I, A, B theo các phương trình tham số.

Bước 3: Ta có điều kiện:

$$\begin{cases}\overrightarrow{IA} \perp (d_1)\\\overrightarrow{IB} \perp (d_2)\\IA = IB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{u_2}\\IA = IB\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_1} = 0\\\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{u_2} = 0\\IA^2 = IB^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Toạ độ I}\\R = IA\end{cases}$$

Bước 4: Mặt cầu (S) được cho bởi:

$$(S): \begin{cases}\text{Tâm I}\\\text{Bán kính R}\end{cases}.$$

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{2}, \quad (d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{3}.$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) chéo nhau. Tính góc giữa chúng.
b. Viết phương trình mặt phẳng (P_2) chứa (d_2) và song song với (d_1).
c. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song và cách đều (d_1), (d_2).
d. Viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2).
e. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).
f. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2).

✍ *Giải*

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(1; 1; 2)$ và đi qua điểm $M_1(2; 3; 5)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(2; 1; 3)$ và đi qua điểm $M_2(1; 3; -2)$.

Nhận xét rằng:

$$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 6 \Rightarrow (\Delta_1) \text{ và } (\Delta_2) \text{ chéo nhau.}$$

Côsin góc α giữa hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{9}{\sqrt{84}}.$$

b. Gọi $\vec{n}$ là vectơ thoả mãn:

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (1; 1; -1).$$

Khi đó, ta có:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1; 3; -2) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): x + y - z - 6 = 0.$$

c. Gọi M là trung điểm M_1M_2 thì $M\left(\frac{3}{2}; 3; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M\left(\frac{3}{2}; 3; \frac{3}{2}\right) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x + y - z - 3 = 0.$$

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình của (d_1), (d_2) về dạng tham số:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + 2u \\ y = 3 + u \\ z = -2 + 3u \end{cases}, (t, u \in \mathbb{R}).$$

Giả sử A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2) thì:

$A(2 + t; 3 + t; 5 + 2t)$ và $B(1 + 2u; 3 + u; -2 + 3u)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(2u - t - 1; u - t; 3u - 2t - 7)$.

Từ điều kiện:

$$\begin{cases} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 2t = 5 \\ 14u - 9t = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow A(1; 2; 3)$ và $B(3; 4; 1)$.

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 2; 3) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AB}(2; 2; -2) \text{ chọn } (1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 2: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2), khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn:

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{u_1} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (1; 1; -1).$$

Ta lần lượt:

- Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;3;5) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;3;5) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (3; -3; 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P_1): $x - y + 1 = 0$.

- Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;3;-2) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2} \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{Qua } M_2(1;3;-2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (4; -5; -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P_2): $4x - 5y - z + 9 = 0$.

Vì (d) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) nên đường thẳng (d) cần dựng chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 4x - 5y - z + 9 = 0 \end{cases}. \qquad (*)$$

Bằng việc đặt x = t, ta biến đổi hệ (*) về dạng:

$$\begin{cases} x = t \\ t - y + 1 = 0 \\ 4t - 5y - z + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Đó chính là phương trình tham số của đường thẳng (d) cần dựng.

Cách 3: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1), (d_2) và giả sử (d) cắt (d_2) tại B, khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (1; 1; -1).$$

Ta lần lượt:

- Gọi (P_1) là mặt phẳng chứa (d) và (d_1), khi đó:

$$(P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;3;5) \\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{Qua } M_1(2;3;5) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_1} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_1}\right] = (3; -3; 0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P_1): $x - y + 1 = 0$.

- Vì (P_1) $\cap$ (d_2) = {B} nên toạ độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+2}{3} \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -5 \\ z - 3y = -11 \\ x - y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(3; 4; 1).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } B(3; 4; 1) \\ \text{vtcp } \vec{u}(1; 1; -1) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cách 4: Gọi (d) là đường vuông góc chung của (d_1), (d_2) và giả sử (d) cắt (d_1) tại A, khi đó một vtcp $\vec{u}$ của (d) thỏa mãn:

$$\begin{cases}\vec{u} \perp \overrightarrow{u_1}\\ \vec{u} \perp \overrightarrow{u_2}\end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (1;\ 1;\ -1).$$

Ta lần lượt:

- Gọi (P_2) là mặt phẳng chứa (d) và (d_2), khi đó:

$$(P_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(1;3;-2)\\ \text{Cặp vtcp } \vec{u} \text{ và } \overrightarrow{u_2}\end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases}\text{Qua } M_2(1;3;-2)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_2} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{u_2}\right] = (4;\ -5;\ -1)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (P_2): $4x - 5y - z + 9 = 0$.

- Vì (P_2) $\cap$ (d_1) = {A} nên toạ độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-5}{2}\\ 4x - 5y - z + 9 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = y - 1\\ z = 2y - 1\\ 4x - 5y - z + 9 = 0\end{cases} \Rightarrow A(1;\ 2;\ 3).$$

Khi đó, phương trình đường vuông góc chung (d) được cho bởi:

$$(d): \begin{cases}\text{Qua } A(1;\ 2;\ 3)\\ \text{vtcp } \vec{u}(1;\ 1;\ -1)\end{cases} \Leftrightarrow (d): \begin{cases}x = 1 + t\\ y = 2 + t\ ,\ t \in \mathbb{R}.\\ z = 3 - t\end{cases}$$

e. Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1),(d_2)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = 2\sqrt{3}$$

hoặc $d((d_1),(d_2)) = d(M_1, (P_2)) = 2\sqrt{3}$

f. Mặt cầu (S) đường kính AB với A, B theo thứ tự là chân đường vuông góc chung trên (d_1) và (d_2) chính là mặt cầu cần dựng. Để viết phương trình mặt cầu (S) ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) với đường kính AB có:

$$(S): \begin{cases}\text{Tâm I là trung điểm AB}\\ \text{Bán kính } R = AB/2\end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases}\text{Tâm } I(2;\ 3;\ 2)\\ R = \sqrt{3}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Cách 2: Mặt cầu (S) với đường kính AB gồm:

$M(x;\ y;\ z) \in (S) \Leftrightarrow AM \perp BM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1;\ y - 2;\ z - 3).(x - 3;\ y - 4;\ z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) + (y - 2)(y - 4) + (z - 3)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z - 14 = 0$.

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Mặt cầu (S) với đường kính AB gồm:

$M(x; y; z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta MAB$ vuông tại $M \Leftrightarrow AM^2 + BM^2 = AB^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 4z - 14 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Ví dụ 5: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad (d_2): \begin{cases} x = 1 + u \\ y = 3 + 2u \\ z = 3 - u \end{cases}, (t, u \in \mathbb{R}).$$

a. Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1), (d_2) chéo nhau.Tính góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

b. Viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với cả (d_1), (d_2) và có tâm thuộc đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$.

Giải

a. Ta có:

- Đường thẳng (d_1) có vtcp $\overrightarrow{u_1}(2; -1; 1)$ và đi qua điểm $M_1(2; 4; 1)$.
- Đường thẳng (d_2) có vtcp $\overrightarrow{u_2}(1; 2; -1)$ và đi qua điểm $M_2(1; 3; 3)$.

Nhận xét rằng:

$\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 8 \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) chéo nhau.

Côsin góc α giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) được cho bởi:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|} = \frac{|2-2-1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{1}{6}.$$

b. Chuyển phương trình đường thẳng (Δ) về dạng tham số:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + v \\ y = 2 - v \\ z = 1 + v \end{cases}, v \in \mathbb{R}.$$

Giả sử (S) có tâm I và tiếp xúc với (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A và B, suy ra:

$I(1 + v; 2 - v; 1 + v)$, $A(2 + 2t; 4 - t; 1 + t)$, $B(1 + u; 3 + 2u; 3 - u)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}(v - 2t - 1; -v + t - 2; v - t)$ và $\overrightarrow{BI}(v - u; -v - 2u - 1; v + u - 2)$.

Ta lần lượt có các điều kiện:

- (S) tiếp xúc với (d_1) tại A khi:

$AI \perp (d_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{u_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{u_1} = 0$

$\Leftrightarrow 2(v - 2t - 1) - (-v + t - 2) + (v - t) = 0 \Leftrightarrow 2v = 3t$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{2}{3}v \Rightarrow \overrightarrow{AI}\left(-\dfrac{v}{3} - 1; -\dfrac{v}{3} - 2; \dfrac{v}{3}\right).$

- (S) tiếp xúc với (d_2) tại B khi:

$$BI \perp (d_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} \perp \overrightarrow{u_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{u_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (v-u) + 2(-v-2u-1) - (v+u-2) = 0 \Leftrightarrow v = -3u \Leftrightarrow u = -\frac{1}{3}v$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BI}\left(\frac{4v}{3}; -\frac{v}{3}-1; -\frac{2v}{3}-2\right).$$

- (S) tiếp xúc với cả (d_1) và (d_2) khi:

$$AI = BI \Leftrightarrow AI^2 = BI^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{v}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{v}{3}+2\right)^2 + \left(\frac{v}{3}\right)^2 = \left(\frac{4v}{3}\right)^2 + \left(\frac{v}{3}+1\right)^2 + \left(\frac{2v}{3}+2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (v+6)^2 + v^2 = 16v^2 + (2v+6)^2 \Leftrightarrow 18v^2 + 12v = 0$$

$$\Leftrightarrow v_1 = 0 \text{ hoặc } v_2 = -\frac{2}{3}.$$

Khi đó:

- Với $v_1 = 0$ thì $t = 0$ nên $I_1(1; 2; 1)$, $A(2; 4; 1)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(1; 2; 1) \\ \text{Bán kính } R = IA = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5.$$

- Với $v_2 = -\frac{2}{3}$ thì $t = -\frac{4}{9}$ nên $I_2\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $A\left(\frac{10}{9}; \frac{40}{9}; \frac{5}{9}\right)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right) \\ \text{Bán kính } R = IA = \frac{\sqrt{309}}{9} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{103}{27}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài toán 8: Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng.

Phương pháp áp dụng

Để xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) (hoặc xác định điều kiện về vị trí tương đối giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng (P)), ta thường lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (***Phương pháp đại số***): Thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P).

<u>Bước 2:</u> Biện luận:

- Nếu hệ có nghiệm duy nhất , khi đó $(d) \cap (P) = \{A\}$ có toạ độ là nghiệm của hệ.
- Nếu hệ vô nghiệm, khi đó $(d) \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow (d) // (P)$.
- Nếu hệ có vô số nghiệm, khi đó $(d) \subset (P)$.

Cách 2: (***Phương pháp hình học***): Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử:

- (d) có vtcp $\vec{u}$ (a; b; c) và đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$.
- (P) có vtpt $\vec{n}$ (A; B; C).

Bước 2: Khi đó:

1. Để (d) cắt (P) điều kiện là:
$$\vec{u}.\vec{n} \neq 0 \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc \neq 0.$$
2. Để (d) song song với (P) điều kiện là:
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}.$$
3. Để (d) nằm trong (P) điều kiện là:
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa + Bb + Cc = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases}.$$
Hoặc có thể lấy hai điểm phân biệt M, N thuộc (d) và thiết lập điều kiện M, N thuộc (P).
4. Để (d) vuông góc với (P) điều kiện là a: b: c = A: B: C.

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và đường thẳng (d), biết:

a. (P): x + y + 2z – 1 = 0 và (d): $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. (P): 2x + 5y + z – 1 = 0 và $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

c. (P): x + y + z – 6 = 0 và (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng:
(P_1): x + 2y + z – 8 = 0 và (P_2): x + z – 4 = 0.

☝ *Hướng dẫn*: Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Thay phương trình của (d) vào (P), ta được:
$$t + 1 + t + 2(2 - 3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow -4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$
Thay t = 1 vào phương trình tham số của (d) ta kết luận (d) cắt (P) tại M(1; 2 ; –1).

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 2)$ và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 1; -3)$, ta có:
$$\vec{u}.\vec{n} = 1.1 + 1.1 + 2(-3) = -4 \neq 0.$$
Suy ra (d) cắt (P).

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{1-y}{1} = \dfrac{z-2}{1} \\ 2x+5y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ y+z=3 \\ 2x+5y+z=1 \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

Hệ (I) vô nghiệm, do đó (d) song song với (P).

Cách 2: Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2;\ 5;\ 1)$ và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(2;-1;1)$, ta có:

$$\vec{u}.\vec{n} = 2.2 + 5(-1) + 1.1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}. \qquad (1)$$

Lấy $A(-1;\ 1;\ 2) \in (d)$, ta có nhận xét $A \notin (P)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (d) song song với (P).

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+2y+z-8=0 \\ x+z-4=0 \end{cases}.$$

Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) là:

$$\begin{cases} x+2y+z-8=0 \\ x+z-4=0 \\ x+y+z-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x+z-4=0 \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

Hệ (II) có vô số nghiệm, do đó (d) nằm trong (P).

Cách 2: Đường thẳng (d) chứa các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x+2y+z-8=0 \\ x+z-4=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Hai điểm } A(1;\ 2;\ 3) \text{ và } B(3;\ 2;\ 1) \text{ thuộc (d).}$$

Nhận xét rằng A, B cũng thuộc (P) nên (d) nằm trong (P).

Cách 3: Các mặt phẳng (P), (P_1), (P_2) có vtpt $\vec{n}(1;\ 1;\ 1)$, $\overrightarrow{n_1}(1;\ 2;\ 1)$, $\overrightarrow{n_2}(1;\ 0;\ 1)$.

Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}$ được cho bởi:

$$\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (2;\ 0;\ -2).$$

Nhận xét rằng:

$$\vec{u}.\vec{n} = 2.1 - 2.1 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}. \qquad (3)$$

Lấy $A(1;\ 2;\ 3) \in (d)$, ta có nhận xét $A \in (P)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra (d) nằm trong (P).

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm các các yêu cầu:

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).
   Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right].$$

Bước 2: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases}\text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}\end{cases}.$$

2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một vtcp $\vec{u}$ của đường thẳng (d) và lấy điểm A thuộc (d).

Tìm một vtpt $\vec{n}$ của mặt phẳng (P).

Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ (a; b; c) là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0. \qquad (1)$$

$$g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha. \qquad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{n_Q}$.

Bước 2: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases}\text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}\end{cases}.$$

3. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) và (P) tại điểm M thì bài toán được chuyển về dạng "*Viết phương trình mặt cầu có bán kính* R *tiếp xúc với* (P) *tại điểm* M", đây là dạng toán mà chúng ta đã biết cách thực hiện.
4. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn, chúng ta có thể lựa chọn một trong các cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S), khi đó:

$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lập phương trình tham số của đường thẳng (Δ) nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M.

Bước 2: Giả sử I là tâm mặt cầu (S), khi đó: toạ độ tâm I thoả mãn phương trình tham số của (Δ).

Sử dụng điều kiện:

$$MI = R \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng r, chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S), khi đó:

$$\begin{cases} MI \perp (d) \\ MI = R \\ d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \end{cases} \Rightarrow \text{Toạ độ tâm I.}$$

Bước 2: Viết phương trình mặt cầu (S) với tâm I bán kính R.

Ví dụ 2: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): 2x + y + 2z - 1 = 0,\ (d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P).
b. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).
c. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa (d) và tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
d. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{18}$ tiếp xúc với (d) tại điểm M(0; 1; 0) và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn.
e. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{2}$ tiếp xúc với (d) tại điểm N(−1; 1; 1) và cắt (P) theo thiết diện là đường tròn có bán kính bằng $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

✍ *Giải*

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Xét hệ phương trình tạo bởi (d) và (P) bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$$2(1 - t) + 1 + 2(-1 + t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Tức hệ có vô số nghiệm, do đó (d) nằm trong (P).

Cách 2: Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(1; 1; −1) và B(0; 1; 0).

Nhận xét rằng A, B cũng thuộc (P) nên (d) nằm trong (P).

Cách 3: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-1; 0; 1)$ và đi qua điểm A(1; 1; −1).

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2; 1; 2)$.

Nhận xét rằng:

$$\vec{u}.\vec{n} = -1.2 + 1.2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n}. \qquad (1)$$

$$2 + 1 - 2 - 1 = 0 \Rightarrow A \in (P). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra (d) nằm trong (P).

b. Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(-1; 0; 1)$ và đi qua điểm A(1; 1; −1).
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2; 1; 2)$.

Mặt phẳng (Q) có vtpt $\overrightarrow{n_Q}$ thoả mãn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\vec{n}, \vec{u}\right] = (1; -4; 1).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1; -4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x - 4y + z + 4 = 0.$$

c. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a; b; c) \neq \vec{0}$, ta lần lượt:

- Để (R) chứa (d) điều kiện là:

$$\overrightarrow{n_R} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -a + c = 0 \Leftrightarrow c = a.$$

- (R) tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ điều kiện là:

$$\frac{|2a + b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \frac{|2a + b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow (4a + b)^2 = 6(2a^2 + b^2) \Leftrightarrow 4a^2 + 8ab - 5b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}b \text{ hoặc } a = -\frac{5}{2}b.$$

Khi đó:

- Với $a = \frac{1}{2}b$ thì chọn b = 2 ta được a = c = 1 nên $\overrightarrow{n_R}(1; 2; 1)$, từ đó:

$$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1; 2; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): x + 2y + z - 2 = 0.$$

- Với $a = -\frac{5}{2}b$ thì chọn b = −2 ta được a = c = 5 nên $\overrightarrow{n_R}(5; -2; 5)$, từ đó:

$$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 1; -1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(5; -2; 5) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): 5x - 2y + 5z + 2 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

d. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Giả sử I(x; y; z) là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó:

$$\begin{cases} I \in (P) \\ MI \perp (d) \\ MI = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in (P) \\ \overrightarrow{MI}.\vec{u} = 0 \\ IM^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z - 1 = 0 \\ -x + z = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 4x \\ z = x \\ x^2 + (1 - 4z - 1)^2 + x^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 4x \\ z = x \\ 18x^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1,\ y = -3,\ z = 1 \\ x = -1,\ y = 5,\ z = -1 \end{array}\right.$$

Khi đó:

- Với $I_1(1; -3; 1)$, từ đó ta được mặt cầu:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(1; -3; 1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 18.$$

- Với $I_2(-1; 5; -1)$, từ đó ta được mặt cầu:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(-1; 5; -1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 18.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử I là tâm mặt cầu (S) cần dựng, khi đó I thuộc đường thẳng (Δ) có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ nằm trong (P) và vuông góc với (d) tại M.

Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u_\Delta} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (1; -4; 1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } M(0;1;0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(1; -4; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Từ đó tâm I(t; 1 – 4t; t) và điều kiện:

$$MI = R \Leftrightarrow MI^2 = R^2 \Leftrightarrow t^2 + 16t^2 + t^2 = 18 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Khi đó:

- Với t = 1 thì $I_1(1; -3; 1)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(1; -3; 1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 18.$$

- Với t = –1 thì $I_2(-1; 5; 1)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(-1; 5; -1) \\ \text{Bán kính } R = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 18.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Giả sử K(x; y; z) là tâm mặt cầu (T) cần dựng, khi đó ta lần lượt có:

- Vì $NK \perp (d)$ nên:

  $\overrightarrow{NK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow -(x + 1) + z - 1 = 0 \Leftrightarrow x - z + 2 = 0.$ (3)
- Vì NK = R nên $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2.$ (4)
- Vì $d(K, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2}$ nên:

$$\frac{|2x + y + 2z - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \sqrt{2 - \frac{2}{9}} \Leftrightarrow \frac{|2x + y + 2z - 1|}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + y + 2z - 1 = 4 \\ 2x + y + 2z - 1 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + y + 2z = 5 \\ 2x + y + 2z = -3 \end{array}\right..$$

Từ đó:

- Với 2x + y + 2z = 5 kết hợp với (3) ta được:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 5 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + 2 \\ y = 1 - 4x \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

  Thay (I) vào (4) ta được:

$$(x + 1)^2 + (-4x)^2 + (x + 1)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -\frac{2}{9}.$$

  Khi đó:

  - Với x = 0 thì y = 1 và z = 2 nên $K_1(0; 1; 2)$, suy ra mặt cầu:

    (T_1): $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 2.$
  - Với $x = -\frac{2}{9}$ thì $y = \frac{17}{9}$ và $z = \frac{16}{9}$ nên $K_2\left(-\frac{2}{9}; \frac{17}{9}; \frac{16}{9}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_2): \left(x + \frac{2}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{17}{9}\right)^2 + \left(z - \frac{16}{9}\right)^2 = 2.$$

- Với 2x + y + 2z = –3 kết hợp với (4) ta được:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -3 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + 2 \\ y = -4x - 7 \end{cases}. \qquad \text{(II)}$$

  Thay (II) vào (5) ta được:

$$(x + 1)^2 + (-4x - 8)^2 + (x + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow 9x^2 + 34x + 32 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = -\frac{16}{9}.$$

  Khi đó:

  - Với x = –2 thì y = 1 và z = 0 nên $K_3(-2; 1; 0)$, suy ra mặt cầu:

    (T_3): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2.$
  - Với $x = -\frac{16}{9}$ thì $y = \frac{2}{9}$ và $z = \frac{1}{9}$ nên $K_4\left(-\frac{16}{9}; \frac{2}{9}; \frac{1}{9}\right)$, suy ra mặt cầu:

$$(T_4): \left(x + \frac{16}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{9}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{9}\right)^2 = 2.$$

Vậy, tồn tại bốn mặt cầu (T_1), (T_2), (T_3), (T_4) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính khoảng cách giữa (d) và (P), chúng ta có ngay:

   d(d, (P)) = d(A, (P)), với A ∈ (d).

2. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và song song với (P), chúng ta có ngay:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A \in (d) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_P} \end{cases}.$$

3. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P), chúng ta có các cách giải sau:

   Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Lấy điểm A ∈ (d), từ đó xác định toạ độ điểm H_A là hình chiếu vuông góc của A lên (P).

   Bước 2: Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } H_A \\ (d_1) // (d) \end{cases}.$$

   Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

   Bước 2: Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α, chúng ta thực hiện tương tự như trong trong hợp đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P).

5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm M, chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Gọi (S) là mặt cầu cần dựng, suy ra (S) chính là mặt cầu đường kính MN với N là hình chiếu vuông góc của M trên (P).

   Bước 2: Xác định toạ độ điểm N.

   Bước 3: Viết phương trình mặt cầu đường kính MN.

6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M, chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I, bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại N.

   Vì N ∈ (d) nên thoả mãn phương trình tham số của (d).

   Bước 2: Viết phương trình tham số của đường thẳng (Δ) qua M và vuông góc với (P).

   Vì I ∈ (Δ) nên thoả mãn phương trình tham số của (Δ).

   Bước 3: Thiết lập điều kiện IN ⊥ (d) và R = IM = IN chúng ta sẽ nhận được toạ độ tâm I và độ dài bán kính R.

   Bước 4: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P)", chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(a; b; c), khi đó I thuộc mặt phẳng:

$$(P_M): \begin{cases} \text{Qua } M \\ (P_M) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_M): \begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_d} \end{cases}.$$

Bước 2: Ta lần lượt có:

$I \in (P_M)$.

$MI = R \Leftrightarrow MI^2 = R^2$.

$d(I, (P)) = R$.

Từ đây suy ra toạ độ tâm I.

Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

Ví dụ 3: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): x + y - 6 = 0,\ (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P). Tính khoảng cách giữa (d) và (P).
b. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và song song với (P).
c. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
d. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.
e. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm A(1; 1; 1).
f. Viết phương trình mặt cầu có bán kính $R = 2\sqrt{2}$ tiếp xúc với (P) và tiếp xúc với (d) tại điểm A(1; 1; 1).
g. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm E(5; 1; 1).

✍ *Giải*

Ta có:

- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; 1; 0)$.
- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(0; 0; 1)$ và đi qua điểm M(1; 1; 4).

a. Ta lần lượt:

- Để chứng minh (d) song song với (P) ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta thấy:

$1 + 1 - 6 = 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow$ (d) song song với (P).

Cách 2: Ta có:

$\vec{n}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$. (1)

Nhận xét $M \notin (P)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra (d) song song với (P).

- Khoảng cách giữa (d) và (P) được cho bởi:

$$d(d, (P)) = d(M, (P)) = \frac{|1+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}.$$

b. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, khi đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } M(1;\ 1;\ 4) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x + y - 2 = 0.$$

c. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$(MH): \begin{cases} \text{Qua } M(1;1;4) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 \end{cases}$$

Vì $\{H\} = (MH) \cap (P)$, toạ độ H là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 4 \\ x+y-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 3;\ 4).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } H(3;\ 3;\ 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \quad ,t \in \mathbb{R}. \\ z = 4+t \end{cases}$$

Cách 2: Gọi H(x; y; z) là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} // \vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH} = k\vec{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-6 = 0 \\ x-1 = k \\ y-1 = k \\ z-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;\ 3;\ 4).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (R) được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } H(3;\ 3;\ 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \quad ,t \in \mathbb{R}. \\ z = 4+t \end{cases}$$

Cách 3: Gọi (P') với vtpt $\overrightarrow{n'}$ là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n'} \perp \vec{n} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n'} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (-1; 1; 0).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (P') được cho bởi:

$$(P'): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n'}(-1; 1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (P'): x - y = 0.$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) gồm các điểm M(x; y; z) thoả mãn hệ:

$$\begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3.$$

Vậy, đường thẳng (d') luôn có phương trình tham số là:

$$(d'): \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d. Giả sử mặt phẳng (R) có vtpt $\overrightarrow{n_R}(a; b; c)$ thoả mãn điều kiện đầu bài, ta lần lượt:

- Để (R) chứa (d) điều kiện là:
  $$\overrightarrow{n_R} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_R}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$
- (P) tạo với (P) một góc α có $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ điều kiện là:

$$\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow 5(a + b)^2 = 9(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b \\ b = 2a \end{array}\right..$$

Khi đó:

- Với a = 2b thì $\overrightarrow{n_R}(2b; b; 0)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(2; 1; 0)$, từ đó:
  $$(R_1): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(2; 1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (R_1): 2x + y - 3 = 0.$$
- Với b = 2a thì $\overrightarrow{n_R}(a; 2a; 0)$ chọn $\overrightarrow{n_R}(1; 2; 0)$, từ đó:
  $$(R_2): \begin{cases} \text{Qua } M(1; 1; 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_R}(1; 2; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (R_2): x + 2y - 3 = 0.$$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (R_1), (R_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

e. Gọi (S) là mặt cầu cần dựng, suy ra (S) chính là mặt cầu đường kính AA' với A' là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Ta lần lượt:

- *Xác định toạ độ điểm* A'(x; y; z) bằng việc sử dụng một trong các cách sau:
Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} A' \in (P) \\ AA' \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' \in (P) \\ \overrightarrow{AA'}(x-1;\ y-1;\ z-1) // \vec{n}(1;\ 1;\ 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-6=0 \\ x-1=t \\ y-1=t \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)+(t+1)-6=0 \\ x=t+1 \\ y=t+1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A'(3;\ 3;\ 1).$$

Cách 2: Phương trình đường thẳng (AA') được cho bởi:

$$(AA'): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (AA') \perp (P) \end{cases} \Leftrightarrow (AA'): \begin{cases} \text{Qua } A(1;\ 1;\ 1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;\ 1;\ 0) \end{cases} \Leftrightarrow (AA'): \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}.$$

Vì {A'} = (AA') ∩ (P) nên toạ độ A' được xác định bằng cách thay phương trình tham số của (AA') vào phương trình của (P), ta được:

$1 + t + 1 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow A'(3;\ 3;\ 1).$

- *Phương trình mặt cầu đường kính* AA' được xác định bằng một trong các cách sau:
Cách 1: Ta có:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm } AA' \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{AA'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (S): \begin{cases} \text{Tâm } I(2;\ 2;\ 1) \\ R = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2.$$

Cách 2: Mặt cầu (S) với đường kính AA' gồm các điểm:

$N(x;\ y;\ z) \in (S) \Leftrightarrow AN \perp A'N \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{A'N} = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1;\ y - 1;\ z - 1).(x - 3;\ y - 3;\ z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) + (y - 1)(y - 3) + (z - 1)(z - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 7 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

Cách 3: Mặt cầu (S) với đường kính AA' gồm:

$N(x;\ y;\ z) \in (S) \Leftrightarrow \Delta NAA'$ vuông tại $N \Leftrightarrow AN^2 + A'N^2 = AA'^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 7 = 0.$

Đó chính là phương trình mặt cầu (S) cần tìm.

f. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(a; b; c), khi đó I thuộc mặt phẳng:

$$(P_A): \begin{cases} \text{Qua } A \\ (P_A) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): \begin{cases} \text{Qua } A(1;\ 1;\ 1) \\ \text{vtpt } \vec{u}(0;\ 0;\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): z - 1 = 0.$$

Ta lần lượt có:

$I \in (P_A) \Rightarrow c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1.$

$AI = R \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 8$

$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 = 8.$ (*)

$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{|a+b-6|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |a+b-6| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 10-a \\ b = 2-a \end{array}\right.$.

Từ đó:

- Với b = 10 – a thay vào (*) ta được:
  $(a-1)^2 + (9-a)^2 = 8 \Leftrightarrow 2a^2 - 20a + 76 = 0$, vô nghiệm.
- Với b = 2 – a thay vào (*) ta được:
  $(a-1)^2 + (1-a)^2 = 8 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 4$
  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow I_1(3;-1;1) \\ a = -1 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow I_2(-1;3;1) \end{array}\right.$.

Khi đó:

- Với tâm $I_1(3; -1; 1)$ ta được mặt cầu (S_1) có phương trình:
  $(S_1): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$
- Với tâm $I_2(-1; 3; 1)$ ta được mặt cầu (S_2) có phương trình:
  $(S_2): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 8.$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

g. Giả sử mặt cầu (T) cần dựng có tâm I, bán kính R và tiếp xúc với (d) tại F.
Vì $F \in (d)$ nên F(1; 1; 4 + t).
Gọi (Δ) là đường thẳng qua E và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(5;1;1) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 5+u \\ y = 1+u \\ z = 1 \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

Vì $I \in (\Delta)$ nên I(u + 5; u + 1; 1), ta lần lượt có:

- Vì $FI \perp (d)$ nên:
  $\overrightarrow{FI} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{FI}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow F(1; 1; 1).$
- Vì FI = IE nên:
  $FI^2 = IE^2 \Leftrightarrow (u+4)^2 + u^2 = u^2 + u^2 \Leftrightarrow 8u + 16 = 0 \Leftrightarrow u = -2.$

Từ đó, mặt cầu (T) với tâm T(3; –1; 1), bán kính $R = 2\sqrt{2}$ có dạng:

$(T): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 8.$

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tính góc giữa (d) và (P), chúng ta có ngay:
   - Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(A; B; C)$.
   - Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a;b;c)$.

   Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P), chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm A của (d) và (P)

Bước 2: Lấy điểm M $\in$ (d), từ đó xác định toạ độ điểm H_M là hình chiếu vuông góc của M lên (P).

Bước 3: Phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) là đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH_M} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa (d) và vuông góc với (P).

Bước 2: Khi đó, hình chiếu vuông góc của đường thẳng (d) lên mặt phẳng (P) chính là giao tuyến của (P) và (Q).

3. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d), chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right].$$

Bước 2: Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua A} \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết phương trình mặt phẳng (R) qua A và vuông góc với (d).

Bước 2: Khi đó, đường thẳng (Δ) chính là giao tuyến của (P) và (R).

4. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất, chúng ta có các cách giải sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$$
$$\Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Bước 2: Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\vec{u} = 0. \quad (1)$$

$$g((P), (Q)) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{n_Q}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{n_Q}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \cos\alpha. \quad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1), (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{n_Q}$.

Bước 3: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q):\ \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \geq g((d), (P))$$

$$\Rightarrow \text{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Bước 2: Gọi $\overrightarrow{n_Q}$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta có:

$$\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}\right].$$

Bước 3: Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q):\ \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q} \end{cases}.$$

5. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R, tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P), chúng ta thực hiện theo các bước:

   Bước 1: Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I.
   Vì $I \in (d)$ nên thoả mãn phương trình tham số của (d).

   Bước 2: Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là $d(I, (P)) = R \Rightarrow$ Toạ độ tâm I.

   Bước 3: Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I bán kính R.

6. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với (d) và tiếp xúc với (P) tại điểm M, thực hiện tương tự như trong trường hợp (d) song song với (P).
7. Viết phương trình mặt cầu có bán kính R tiếp xúc với (d) tại điểm M và tiếp xúc với (P), thực hiện tương tự như trong trường hợp (d) song song với (P).

Ví du 4: Trong không gian, cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 - 4t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 5t \end{cases},\quad (P): x - 2y + 2z - 10 = 0.$$

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm toạ độ A, tính góc giữa (d) và (P).
b. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).
c. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A, nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng (d).
d. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tạo với (P) một góc có số đo nhỏ nhất.
e. Viết phương trình mặt cầu có bán kính bằng 10/3, tâm thuộc đường thẳng (d) và tiếp xúc với (P).
f. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm E(2; −2; 2).
g. Viết phương trình mặt cầu có bán kính bằng 3 tiếp xúc với (d) tại điểm B(0; 2; 2) và tiếp xúc với (P).

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) đi qua điểm M(0; 2; 2) và có vtcp $\vec{u}(2; -4; 5)$.
- Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(1; -2; 2)$.

a. Bằng cách thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta thấy:

$$2t - 2(2 - 4t) + 2(2 + 5t) - 10 = 0 \Leftrightarrow 20t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vậy, ta thấy (d) cắt (P) tại điểm $A\left(1; 0; \frac{9}{2}\right)$.

Gọi α là góc tạo bởi (d) và (P), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|2.1 - 4(-2) + 5.2|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 5^2}.\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (P), ta có:

$$(MH): \begin{cases} \text{Qua } M(0;2;2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1;-2;2) \end{cases} \Leftrightarrow (MH): \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Vì {H} = (MH) $\cap$ (P) nên bằng cách thay phương trình tham số của (MH) vào (P), ta được:

$$t - 2(2 - 2t) + 2(2 + 2t) - 10 = 0 \Leftrightarrow 9t - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{10}{9} \Rightarrow H\left(\frac{10}{9}; -\frac{2}{9}; \frac{38}{9}\right).$$

Từ đó, phương trình đường thẳng (d_1) là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Qua } H \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A\left(1;0;\frac{9}{2}\right) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}\left(\frac{1}{9}; -\frac{2}{9}; -\frac{5}{18}\right) \text{chọn} (2;-4;-5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z - \frac{9}{2}}{-5}.$$

c. Gọi $\overrightarrow{u_\Delta}$ là một vtcp của đường thẳng (Δ), ta có:

$$\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{u}, \vec{n}\right] = (2; 1; 0).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } A\left(1;0;\frac{9}{2}\right) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}(2;1;0) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 9/2 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

d. Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, nhận xét rằng:

$$g((Q), (P)) \le g((d), (P)) \Rightarrow \mathrm{Min}[g((Q), (P))] = g((d), (P)) = \alpha.$$

Gọi $\overrightarrow{n_Q}(a; b; c)$ là một vtpt của mặt phẳng (Q), ta lần lượt có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_Q} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \vec{u}\right] = (5; -10; -10) \text{ chọn } \overrightarrow{n_Q}(1; -2; -2).$$

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A\left(1; 0; \dfrac{9}{2}\right) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_Q}(1; -2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): 2x - 4y - 4z + 7 = 0.$$

e. Mặt cầu (S) cần dựng có tâm I, vì I ∈ (d) nên I(2t; 2 – 4t; 2 + 5t).

Để (S) tiếp xúc với (P) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2t - 2(2 - 4t) + 2(2 + 5t) - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow |20t - 10| = 10 \Leftrightarrow |2t - 1| = 1 \Leftrightarrow t_1 = 0 \text{ hoặc } t_2 = 1.$$

Khi đó:

- Với $t_1 = 0$ thì $I_1(0; 2; 2)$, từ đó ta được:

$$(S_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(0; 2; 2) \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (S_1): x^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = \frac{100}{9}.$$

- Với $t_2 = 1$ thì $I_2(2; 3; 2)$, từ đó ta được:

$$(S_2): \begin{cases} \text{Tâm } I_2(2; 3; 2) \\ \text{Bán kính } R = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow (S_2): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = \frac{100}{9}.$$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (S_1), (S_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

f. Giả sử mặt cầu (T) cần dựng có tâm I, bán kính R và tiếp xúc với đường thẳng (d) tại F.

Vì F ∈ (d) nên F(2t; 2 – 4t; 2 + 5t).

Gọi (Δ) là đường thẳng qua E và vuông góc với (P), ta có:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } E(2; -2; 2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(1; -2; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2 + u \\ y = -2 - 2u, \ u \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2u \end{cases}$$

Vì I ∈ (Δ) nên I(u + 2; –2u – 2; 2u + 2), ta lần lượt có:

- Vì FI ⊥ (d) nên:

$$\overrightarrow{FI} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{FI}.\vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(u - 2t + 2) - 4(-2u + 4t - 4) + 5(2u - 5t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 20u - 45t + 20 = 0 \Leftrightarrow 4u = 9t - 4. \qquad (*)$$

- Vì FI = EI nên:

  $(u - 2t + 2)^2 + (-2u + 4t - 4)^2 + (2u - 5t)^2 = u^2 + 4u^2 + 4u^2$

  $\Leftrightarrow (u - 2t + 2)^2 + 4(u - 2t + 2)^2 + (2u - 5t)^2 = 9u^2$

  $\Leftrightarrow 5(u - 2t + 2)^2 + (2u - 5t)^2 = 9u^2.$

  Nhân hai vế của đẳng thức với 16, ta được :

  $5(4u - 8t + 8)^2 + 4(4u - 10t)^2 = 9(4u)^2$

  $\overset{(*)}{\Leftrightarrow} 5(9t - 4 - 8t + 8)^2 + 4(9t - 4 - 10t)^2 = 9(9t - 4)^2$

  $\Leftrightarrow 5(t + 4)^2 + 4(t + 4)^2 = 9(9t - 4)^2 \Leftrightarrow (t + 4)^2 = (9t - 4)^2$

  $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9t - 4 = t + 4 \\ 9t - 4 = -t - 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4/5 \\ t = 0 \end{array}\right..$

Khi đó:

- Với $t = \frac{4}{5}$ thì $u = \frac{4}{5}$ nên tâm $I_1\left(\frac{14}{5}; -\frac{18}{5}\ \frac{18}{5}\right)$ và bán kính $R_1 = I_1E = \frac{12}{5}$, ta được mặt cầu (T_1) có phương trình:

  $$(T_1): \left(y - \frac{14}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{18}{5}\right)^2 + \left(z - \frac{18}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}.$$

- Với t = 0 thì u = –1 nên tâm $I_2(0; 2; 2)$ và bán kính $R_2 = I_2E = 3$, ta được mặt cầu (T_2) có phương trình:

  (T_2): $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9.$

Vậy, tồn tại hai mặt cầu (T_1), (T_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

g. Giả sử mặt cầu (S) cần dựng có tâm I(a; b; c), khi đó I thuộc mặt phẳng:

  $$(P_B): \begin{cases} \text{Qua B} \\ (P_B) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_B): \begin{cases} \text{Qua } B(0; 2; 2) \\ \text{vtpt } \vec{u}(2; -4; 5) \end{cases}$$

  $\Leftrightarrow (P_B)$: $2x - 4y + 5z - 2 = 0.$

  Ta lần lượt có:

  $I \in (P_B) \Rightarrow 2a - 4b + 5c - 2 = 0 \Leftrightarrow 2a - 4b + 5c = 2.$ (1)

  $BI = R \Leftrightarrow a^2 + (b - 2)^2 + (c - 2)^2 = 9.$ (*)

  $$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|a - 2b + 2c - 10|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3 \Leftrightarrow |a - 2b + 2c - 10| = 9$$

  $$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 2b + 2c - 10 = 9 \\ a - 2b + 2c - 10 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2b - 2c + 19 \\ a = 2b - 2c + 1 \end{array}\right..$$

  Từ đó:

- Với a = 2b – 2c + 19 thay vào (1) thì c = –36, thay vào (*) ta được:

  $a^2 + (b - 2)^2 + 38^2 = 9$, vô nghiệm.

- Với a = 2b – 2c + 1 thay vào (1) thì c = 0 nên a = 2b + 1, thay vào (*) ta được:

  $(2b + 1)^2 + (b - 2)^2 + 4 = 9 \Leftrightarrow 5b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow a = 1.$

  Ta được tâm I(1; 0; 0) nên mặt cầu (S) có phương trình:

  (S): $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 9.$

Bài toán 9: Vị trí tương đối của mặt cầu với đường thẳng.

Phương pháp áp dụng

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

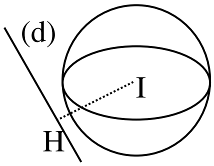
Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tâm I và tính bán kính R của mặt cầu (S), từ đó

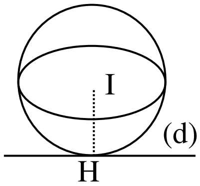
$d = d(I, (d))$.

Bước 2: So sánh d với R để đưa ra kết luận:

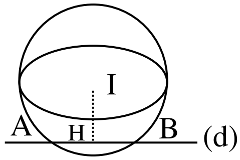
- Nếu $d > R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$ (Hình 1).
- Nếu $d = R \Leftrightarrow$ (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại H (Hình 2).
- Nếu $d < R \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ (Hình 3).



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Cách 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình (d) về dạng tham số theo t.

Bước 2: Thay x, y, z của (d) vào (S), ta được:

$$At^2 + Bt + C = 0 \qquad (1)$$

Bước 3: Kết luận:

- Nếu (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow (d) \cap (S) = \varnothing$.
- Nếu (1) có nghiệm kép $t_0 \Leftrightarrow$ (S) tiếp xúc với (d) tại điểm $H(x(t_0), y(t_0), z(t_0),)$.
- Nếu (1) có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 \Leftrightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}$ với $A(x(t_1), y(t_1), z(t_1),)$ và $B(x(t_2), y(t_2), z(t_2),)$.

☞ ***Chú ý***: Với các bài toán không chứa tham số, khi sử dụng cách 1 chúng ta dễ dàng kết luận được về vị trí tương đối của (d) và (S), tuy nhiên:

- Trong trường hợp $(d) \cap (S) = \{A, B\}$ chúng ta không nhận được toạ độ của A và B.
- Với các bài toán có chứa tham số khi sử dụng cách 1 sẽ rất phức tạp.

Do vậy, tốt nhất hãy chọn cách 2.

Ví dụ 1: Trong không gian, cho đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t,\ t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Xét vị trí tương đối của đường thẳng (d) và mặt cầu (S), biết:

a. (S): $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

b. (S): $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 6$.

c. (S): $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$.

☝ *Hướng dẫn*: Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 1; -1)$ và đi qua điểm M(2; 2; −1).

a. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm O(0; 0; 0) và bán kính $R = \sqrt{3}$, suy ra:

$$d(O, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{6} > \sqrt{3} \Rightarrow (d) \cap (S) = \varnothing.$$

Cách 2: Thay phương trình của (d) vào (S), ta được:

$$(1 + t)^2 + (2 - t)^2 + (1 + t)^2 = 3 \Leftrightarrow 3t^2 + 3 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, đường thẳng (d) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

b. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm I(2; 4; 2) và bán kính $R = \sqrt{6}$, ta có:

$$d(I, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{6} = R \Rightarrow (d) \text{ tiếp xúc với } (S).$$

Cách 2: Thay phương trình của (d) vào (S), ta được:

$$(t - 1)^2 + (-t - 2)^2 + (t - 1)^2 = 6 \Leftrightarrow 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Vậy, đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A(1; 2; 1).

c. Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm I(0; 2; 0) và bán kính R = 3, ta có:

$$d(I, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{2} < R \Rightarrow (d) \text{ cắt } (S) \text{ tại hai điểm A, B.}$$

Cách 2: Thay phương trình của (d) vào (S), ta được:

$$(1 + t)^2 + t^2 + (1 + t)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 1 \quad \Rightarrow A(2; 1; 2) \\ t_2 = -\dfrac{7}{3} \Rightarrow B\left(-\dfrac{4}{3}; \dfrac{13}{3}; -\dfrac{4}{3}\right) \end{array}\right..$$

Vậy, đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Tìm toạ độ A, B (hoặc độ dài đoạn AB), chúng ta sử dụng cách 2.
2. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất thì đường thẳng (Δ) cần dựng sẽ đi qua I và song song với (d).

3. Viết phương trình các mặt phẳng (P_A), (P_B) tiếp xúc với (S) theo thứ tự tại các điểm A, B, chúng ta có ngay:
   - Mặt phẳng (P_A) đi qua A và có vtpt $\overrightarrow{IA}$.
   - Mặt phẳng (P_B) đi qua B và có vtpt $\overrightarrow{IB}$.

   Lưu ý: Nếu chỉ với yêu cầu tính góc α giữa (P_A), (P_B) thì α = g(IA, IB).

4. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).

   Chúng ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 1:</u> Ta có:
   - Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(a;\ b;\ c)$.
   - Mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

   <u>Bước 2:</u> Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng, thì vì (P) vuông góc với (d) nên:
   $$(P): ax + by + cz + \underline{D} = 0.$$

   <u>Bước 3:</u> Ta lần lượt:

   a. Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:
   $$d(I, (P)) = R \Rightarrow \underline{D}$$
   $\Rightarrow$ Phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2).

   b. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) điều kiện là:
   $$I \in (P)) \Rightarrow \underline{D} \Rightarrow \text{Phương trình mặt phẳng } (P).$$

   c. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là:
   $$d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \underline{D}$$
   $\Rightarrow$ Phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2).

5. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S), khi đó:
   $$(Q) = (I, (d)) = (IAB)$$
   và chúng ta đã biết hai cách để viết được phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn nhận AB làm đường kính, chúng ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 1:</u> Gọi H là trung điểm AB, suy ra toạ độ của H.

   <u>Bước 2:</u> Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng thì IH $\perp$ (Q). Do đó:
   $$(Q): \begin{cases} \text{Qua H} \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IH} \end{cases}.$$

7. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó), chúng ta thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Gọi (Q) là mặt phẳng cần dựng, giả sử:

$$(Q): Ax + By + Cz + D = 0.$$

Vì (Q) chứa (d) nên A, B thuộc (Q). (1)

<u>Bước 2:</u> Để (Q) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r điều kiện là $d(I, (Q)) = \sqrt{R^2 - r^2}$. (2)

Từ (1), (2) chúng ta nhận được giá trị tương ứng của A, B, C, D.

Ngoài ra chúng ta còn có thể gặp thêm các câu hỏi:

1. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và vuông góc với đường thẳng (d).
2. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và tạo với đường thẳng (d) một góc α.

Phương pháp chung để thực hiện chúng sẽ được trình bày trong phần chú ý của trường hợp đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu.

<u>Ví dụ 2:</u> Trong không gian, cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(d): \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2},$$

$$(S): (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 18.$$

1. Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B. Tính độ dài AB.
2. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
3. Viết phương trình các mặt phẳng (P_A), (P_B) tiếp xúc với (S) theo thứ tự tại các điểm A, B. Tính sin góc giữa hai mặt phẳng (P_A), (P_B).
4. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có diện tích bằng 2π.
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn nhận AB làm đường kính.
7. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C') có bán kính bằng $\sqrt{27/2}$.

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(2; 1; 2)$ và đi qua điểm M(3; 1; 3).
- Mặt cầu (S) có tâm I(1; 3; 4) và bán kính $R = 3\sqrt{2}$.

1. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Chuyển phương trình đường thẳng (d) về dạng tham số:

$$(d):\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \quad, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Thay phương trình tham số của (d) vào (S), ta được:

$$(2t + 2)^2 + (t - 2)^2 + (2t - 1)^2 = 18 \Leftrightarrow 9t^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \Rightarrow A(1; 0; 1) \\ t = 1 \quad \Rightarrow B(5; 2; 5) \end{array}\right.$$

Khi đó:

$$AB^2 = (5 - 1)^2 + 2^2 + (5 - 1)^2 = 36 \Leftrightarrow AB = 6.$$

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$d = d(I, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MI}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 3 < R \Rightarrow (d) \cap (S) = \{A, B\}.$$

Khi đó, với là trung điểm AB thì:

$$AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{18 - 9} = 6.$$

2. Đường thẳng (Δ) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F biết EF có độ dài lớn nhất khi (Δ) đi qua tâm I của mặt cầu (S). Do đó, ta có:

$$(\Delta):\begin{cases} \text{Qua } I(1; 3; 4) \\ \text{vtcp } \vec{u}(2; 1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z - 4}{2}.$$

3. Ta lần lượt có:

- Mặt phẳng (P_A) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A là:

$$(P_A):\begin{cases} \text{Qua } A(1; 0; 1) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{AI}(0; 3; 3) \text{ chọn } (0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_A): y + z - 1 = 0.$$

- Mặt phẳng (P_B) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B là:

$$(P_B):\begin{cases} \text{Qua } B(5; 2; 5) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IB}(4; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P_B): 4x - y + z - 23 = 0.$$

Khi đó, ta được:

$$\cos\alpha = \frac{|-1 + 1|}{\sqrt{1 + 1}.\sqrt{16 + 1 + 1}} = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = 1.$$

4. Gọi (P) là mặt phẳng cần dựng, thì vì (P) vuông góc với (d) nên có vtpt là $\vec{u}$ do đó có phương trình:

$$(P): 2x + y + 2z + D = 0.$$

Suy ra:

$$d(I, (P)) = \frac{|2 + 3 + 8 + D|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|D + 13|}{3}.$$

a. Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|D+13|}{3} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |D+13| = 9\sqrt{2} \Leftrightarrow D = -13 \pm 9\sqrt{2}.$$

Khi đó:

- Với $D = -13 + 9\sqrt{2}$, ta được mặt phẳng (P_1) có phương trình:

  $(P_1): 2x + y + 2z - 13 + 9\sqrt{2} = 0.$
- Với $D = -13 - 9\sqrt{2}$, ta được mặt phẳng (P_1) có phương trình:

  $(P_2): 2x + y + 2z - 13 - 9\sqrt{2} = 0.$

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

b. Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) điều kiện là:

$I \in (P)) \Leftrightarrow 2.1 + 3 + 2.4 + D = 0 \Leftrightarrow D = -13.$

Vậy, ta được phương trình mặt phẳng (P): $2x + y + 2z - 13 = 0$.

c. Gọi r là bán kính của đường tròn (C), ta có:

$S_{(C)} = 2\pi \Leftrightarrow \pi r^2 = 2\pi \Leftrightarrow r = \sqrt{2}..$

Để (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{2}$ điều kiện là:

$$d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} \Leftrightarrow \frac{|D+13|}{3} = 4$$

$$\Leftrightarrow |D+13| = 12 \Leftrightarrow D = -1 \text{ hoặc } D = -25.$$

Khi đó:

- Với $D = -1$, ta được mặt phẳng (P_3): $2x + y + 2z - 1 = 0$.
- Với $D = -25$, ta được mặt phẳng (P_4): $2x + y + 2z - 25 = 0$.

Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (P_3) và (P_4) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

5. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S) thì (Q) = (IAB). Tới đây, chúng ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (Q), ta được:

$\vec{n} = \left[\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right] = (6; 12; -12)$ chọn $\vec{n}\,(1; 2; -2)$.

Khi đó, phương trình mặt phẳng (Q) được cho bởi:

$$(Q): \begin{cases} \text{Qua } A(1; 0; 1) \\ \text{vtpt } \vec{n}(1; 2; -2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x + y - 2z + 1 = 0.$$

Cách 2: Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình:

(Q): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. (1)

Vì I, A, B thuộc (Q), ta được:

$$\begin{cases} A + 3B + 4C + D = 0 \\ A + C + D = 0 \\ 5A + 2B + 5C + D = 0 \end{cases} \overset{\text{chọn } A=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3B + 4C + D = -1 \\ C + D = -1 \\ 2B + 5C + D = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = -2 \\ D = 1 \end{cases}.$$

Thay A, B, C, D vào (1), ta được (Q): $x + y - 2z + 1 = 0$.

6. Gọi H là trung điểm AB, suy ra H(3; 3; 1).
   Gọi (R) là mặt phẳng cần dựng thì (R) vuông góc với IH, do đó:
   $$(R):\begin{cases}\text{Qua } H(3;1;3)\\ \text{vtpt } \overrightarrow{HI}(2;-2;-1)\end{cases} \Leftrightarrow (R): 2x - 2y - z - 1 = 0.$$
7. Giả sử mặt phẳng (T) cần dựng có phương trình:
   (T): $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.
   Vì A, B thuộc (T), ta được:
   $$\begin{cases}A+C+D=0\\ 5A+2B+5C+D=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}B=-2A-2C\\ D=-A-C\end{cases}.$$
   Để (T) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C') có bán kính $r=\sqrt{\frac{27}{2}}$

điều kiện là:
$$d(I,(T))=\sqrt{R^2-r^2} \Leftrightarrow \frac{|A+4B+3C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\sqrt{18-\frac{27}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{|A+4B+3(-2A-2B)+(-A-B)|}{\sqrt{A^2+B^2+(-2A-2B)^2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2(6A+3B)^2=9(5A^2+8AB+5B^2) \Leftrightarrow 27A^2-27B^2=0 \Leftrightarrow A=\pm B.$$
   Khi đó:
   - Với $A = B$ thì chọn $A = 1$ suy ra $B = 1$, $C = -4$ và $D = -2$, ta được mặt phẳng:
     (T_1): $x + y - 4z - 2 = 0$.
   - Với $A = -B$ thì chọn $A = 1$ suy ra $B = -1$, $C = D = 0$, ta được mặt phẳng:
     (T_2): $x - y = 0$.

   Vậy, tồn tại hai mặt phẳng (T_1) và (T_2) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) (tâm I, bán kính R) tại điểm A chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:
1. Tìm toạ độ tiếp điểm A, sử dụng cách 2 trong phương pháp xét vị trí tương đối của đường thẳng với mặt cầu.
2. Viết phương trình đường thẳng song song với (d) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm E, F sao cho EF có độ dài lớn nhất.
   Thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.
3. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).

   Thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.

4. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với (S), ta thấy ngay mặt phẳng (P) cần dựng sẽ đi qua A và có vtpt là $\overrightarrow{IA}$.
5. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
6. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
   Thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.
7. Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt mặt cầu (S) tại điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất, ta thực hiện viết phương trình đường thẳng (IA).
8. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và vuông góc với đường thẳng (d), chúng ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 3:</u> Giả sử đường thẳng (d') cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u'}$, ta có:

$$\begin{cases}(d') \perp (d)\\(d') \perp IA\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{u'} \perp \vec{u}\\\overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{IA}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u'} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{IA}\right].$$

   <u>Bước 4:</u> Khi đó, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases}\text{Qua } A\\\text{vtcp } \overrightarrow{u'}\end{cases}.$$

9. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và tạo với đường thẳng (d) một góc α, chúng ta thực hiện theo các bước:

   <u>Bước 3:</u> Giả sử đường thẳng (Δ) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}$ (a; b; c), ta có:

$$\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{IA} = 0. \qquad (1)$$

$$g((\Delta), (d)) = \alpha \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \cos\alpha. \qquad (2)$$

   Giải hệ tạo bởi (1) và (2) chúng ta nhận được toạ độ của $\overrightarrow{u_\Delta}$.

   <u>Bước 4:</u> Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases}\text{Qua } A\\\text{vtcp } \overrightarrow{u_\Delta}\end{cases}.$$

<u>Ví dụ 3:</u> Trong không gian, cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(d): \begin{cases}x = 1 + t\\y = 2 + t\\z = 4 + 2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}, \ (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3.$$

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A. Tìm toạ độ tiếp điểm A.
b. Viết phương trình mặt phẳng chứa (d) và tiếp xúc với (S).

c. Viết phương trình đường thẳng qua A và cắt mặt cầu (S) tại điểm B sao cho AB có độ dài lớn nhất.
d. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và vuông góc với đường thẳng (d).
e. Viết phương trình đường thẳng qua A tiếp xúc với (S) và tạo với đường thẳng (d) một góc 30^0.

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 1; 2)$ và đi qua điểm M(1; 2; 4).
- Mặt cầu (S) có tâm I(1; 2; 1) và bán kính $R = \sqrt{3}$.

a. Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình (S), ta được:

$$t^2 + t^2 + (2t + 3)^2 = 3 \Leftrightarrow 6t^2 + 12t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow A(0; 1; 2).$$

Vậy, đường thẳng (d) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm A(0; 1; 2).

b. Giả sử (P) là mặt phẳng cần dựng, ta thấy ngay:

$$(P): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-1; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (P): x + y - z + 1 = 0.$$

c. Giả sử (d_1) là đường thẳng cần dựng, ta thấy ngay:

$$(d_1): \begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{Qua } I \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{IA}(-1; -1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

d. Giả sử đường thẳng (d') cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u'}$, ta có:

$$\begin{cases} (d') \perp (d) \\ (d') \perp IA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u'} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{IA} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u'} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{IA}\right] = (3; -3; 0) \text{ chọn } \overrightarrow{u'}(1; -1; 0).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d') được cho bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u'}(1; -1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, \; t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 \end{cases}$$

e. Giả sử đường thẳng (Δ) cần dựng có vtcp $\overrightarrow{u_\Delta}(a; b; c) \neq \vec{0}$, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{IA} = 0 \Leftrightarrow a + b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + b.$$

$$g((\Delta), (d)) = 30^0 \Leftrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{u_\Delta}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \cos 30^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a.1 + b.1 + c.2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{|a + b + 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\left[a + b + 2(a + b)\right]^2 = 9\left[a^2 + b^2 + (a + b)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ hoặc } a = 0.$$

Khi đó:

- Với b = 0 thì a = c ta được $\overrightarrow{u_\Delta}$ (a; 0; a) chọn $\overrightarrow{u_\Delta}$ (1; 0; 1), từ đó:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(1; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Với a = 0 thì c = b ta được $\overrightarrow{u_\Delta}$ (0; b; b) chọn $\overrightarrow{u_\Delta}$ (0; 1; 1), từ đó:

$$(\Delta_1): \begin{cases} \text{Qua } A(0; 1; 2) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{u_\Delta}(0; 1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vậy, tồn tại hai đường thẳng (Δ_1), (Δ_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong trường hợp đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S) (tâm I bán kính R) chúng ta thường gặp thêm câu hỏi:

1. Viết phương trình mặt phẳng vuông góc với (d) và:
   a. Tiếp xúc với mặt cầu (S).
   b. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   c. Cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).

   Thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn lớn của (S).
   Thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.
3. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn (C) có bán kính bằng r (hoặc biết chu vi đường tròn hoặc biết diện tích hình tròn đó).
   Thực hiện tương tự như trong các trường hợp đường thẳng cắt hoặc tiếp xúc với mặt cầu.
4. Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S). Giả sử các tiếp điểm là T_1, T_2, hãy viết phương trình đường thẳng (T_1T_2), chúng ta thực hiện theo các bước lớn sau:
   Bước 1: Lập phương trình các mặt phẳng (P_1), (P_2) chứa (d) và tiếp xúc với (S).
   Bước 2: Tìm toạ độ các tiếp điểm T_1, T_2 với cách hiểu chúng chính là hình chiếu vuông góc của I trên các mặt phẳng (P_1), (P_2).
   Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

Ví dụ 4: Trong không gian, cho đường thẳng (d) và mặt cầu (S) có phương trình:

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{-2}, \quad (S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9.$$

a. Chứng minh rằng đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S).

b. Viết phương trình các mặt phẳng chứa đường thẳng (d) và tiếp xúc với mặt cầu (S).

c. Giả sử các tiếp điểm của (S) với các mặt phẳng trong câu b) là T_1, T_2, hãy viết phương trình đường thẳng (T_1T_2).

✍ *Giải*

Ta có:

- Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(2; -3; -2)$ và đi qua điểm M(1; 3; 1).
- Mặt cầu (S) có tâm I(0; 0; 2) và bán kính R = 3

a. Chuyển phương trình của (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

Thay phương trình tham số của (d) vào phương trình (S), ta được:

$(1 + 2t)^2 + (3 - 3t)^2 + (-2t - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow 17t^2 - 10t + 2 = 0$, vô nghiệm.

Vậy, đường thẳng (d) không cắt mặt cầu (S).

b. Lấy thêm điểm N(3; 0; −1) thuộc (d) và giả sử mặt phẳng (P) cần dựng có phương trình:

(P): $Ax + By + Cz + D = 0$, với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta lần lượt có:

- Vì M, N thuộc (P) nên:

$$\begin{cases} A + 3B + C + D = 0 \\ 3A - C + D = 0 \end{cases} 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2C = 2A - 3B \\ 2D = -4A - 3B \end{cases}. \qquad \text{(I)}$$

- Để (P) tiếp xúc với (S) điều kiện là:

$$d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2C + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow (2C + D)^2 = 9(A^2 + B^2 + C^2).$$

Để tiện tính toán, ta nhân hai vế của đẳng thức trên với 4:

$$(4C + 2D)^2 = 36(A^2 + B^2) + 9(2C)^2$$

$$\Leftrightarrow (4A - 6B - 4A - 3B)^2 = 36(A^2 + B^2) + 9(2A - 3B)^2$$

$$\Leftrightarrow 81B^2 = 72A^2 + 117B^2 - 108AB \Leftrightarrow 2A^2 - 3AB + B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow B = 2A \text{ hoặc } A = B.$$

Khi đó:

- Với B = 2A thì chọn A = 1 suy ra B = 2, C = −2, D = −5, ta được:

  (P_1): $x + 2y - 2z - 5 = 0$.

- Với A = B thì chọn A = 1 suy ra B = 1, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -\frac{7}{2}$, ta được:

$$(P_2): x + y - \frac{1}{2}z - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow (P_2): 2x + 2y - z - 7 = 0.$$

Vậy, có hai mặt phẳng (P_1), (P_2) thoả mãn điều kiện đầu bài.

c. Ta lần lượt có:

- Xác định toạ độ T_1: Phương trình đường thẳng (IT_1) được cho bởi:

$$(IT_1): \begin{cases} \text{Qua } I \\ (IT_1) \perp (P_1) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_1): \begin{cases} \text{Qua } I(0;0;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_1}(1;2;-2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (IT_1): \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Vì $(IT_1) \cap (P_1) = \{T_1\}$, do đó:

$t + 4t - 2(2 - 2t) - 5 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow T_1(1; 2; 0)$.

- Xác định toạ độ T_2: Phương trình đường thẳng (IT_2) được cho bởi:

$$(IT_2): \begin{cases} \text{Qua } I \\ (IT_2) \perp (P_2) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_2): \begin{cases} \text{Qua } I(0;0;2) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{n_2}(2;2;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (IT_2): \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Vì $(IT_2) \cap (P_2) = \{T_2\}$, do đó:

$4t + 4t - (2 - t) - 7 = 0 \Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow T_2(2; 2; 1)$.

- Phương trình đường thẳng (T_1T_2) được cho bởi:

$$(T_1T_2): \begin{cases} \text{Qua } T_1(1; 2; 0) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{T_1T_2}(1; 0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow (T_1T_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 10: Góc và khoảng cách.

Phương pháp áp dụng

1. Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2), theo thứ tự có vtcp là:

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$.

- Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

- Lấy M_1, M_2 theo thứ tự thuộc (d_1) và (d_2), khoảng cách giữa (d_1), (d_2) được cho bởi:

$$d((d_1), (d_2)) = \frac{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|}.$$

Lưu ý:

Điều kiện cần và đủ để $(d_1) \perp (d_2)$ là:

$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

- Trong nhiều bài toán ta lại áp dụng kết quả sau của hình không gian, bằng cách thực hiện theo các bước:

  Bước 1: Tìm góc, ta đi tìm điểm I nào đó thoả mãn:

$$\begin{cases} IA // (d_1) \\ IB // (d_2) \end{cases}$$

  Khi đó, ta có g((d$_1$), (d$_2$)) = $\widehat{AIB}$.

  Bước 2: Tính góc:

  - Nếu biết được toạ độ của $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ thì sử dụng công thức.
  - Sử dụng tỉ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lí cosin trong tam giác thường.

2. Cho:
   - Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}$ $(n_1; n_2; n_3)$.
   - Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$.

   Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), β là góc giữa đường thẳng (d) và đường thẳng chứa vtpt $\vec{n}$ ($0 \le \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2}$), thì:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta,$$

   ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

   Chú ý: Điều kiện để (d) // (P) (hoặc thuộc (P)) là:

$$\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = 0.$$

3. Cho điểm M và đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}$ và đi qua điểm M_0. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d) được cho bởi:

$$d(M, (d)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}.$$

<u>**Ví dụ 1:**</u> Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng (d$_1$) và (d$_2$) có phương trình cho bởi:

a. (d$_1$): $\frac{x+2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$, (d$_2$): $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

b. (d$_1$): $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t + 1 \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và (d$_2$): $\begin{cases} x = u - 1 \\ y = 5 + 2u \\ z = 3u + 2 \end{cases}, u \in \mathbb{R}$.

☝ *Hướng dẫn*: Sử dụng kiến thức trong phần phương pháp giải toán.

✍ *Giải*

a. Gọi $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\overrightarrow{a_1}(-2; 1; 3)$, $\overrightarrow{a_2}(1; -1; 3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|(-2).1 + 1.(-1) + 3.3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{151}}.$$

b. Gọi $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ theo thứ tự là vtcp của (d_1) và (d_2), ta có:

$\overrightarrow{a_1}(2; 1; 3)$; $\overrightarrow{a_2}(1; 2; 3)$.

Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) $(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}_1.\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|.|\vec{a}_2|} = \frac{|2.1 + 1.2 + 3.3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}.\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{13}{14}.$$

<u>Ví dụ 2:</u> Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(P): x + 2y - z + 5 = 0, \ (d): \frac{x+3}{2} = y + 1 = z - 3.$$

a. Tính toạ độ giao điểm của (d) và (P).
b. Tính góc giữa (d) và (P).
c. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) lên (P).
d. Viết phương trình đường thẳng (Δ), nằm trên (P) đi qua giao điểm của (d) và (P) và vuông góc với (d).

✍ *Giải*

a. Chuyển phương trình (d) về dạng tham số, được:

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Thay x, y, z từ phương trình tham số của (d) vào phương trình (P), ta được:

$(2t - 3) + 2(t - 1) - (t + 3) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(-1; 0; 4)$.

b. Gọi $\vec{a}$ là vtcp của đường thẳng (d), ta có $\vec{a}(2; 1; 1)$.

Gọi $\vec{n}$ là vtpt của mặt phẳng (P), ta có $\vec{n}(1; 2; -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (d), ta có:

$$\sin\alpha = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{4+1+1}.\sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy, góc giữa (d) và (P) bằng $\frac{\pi}{6}$.

c. Lấy $A(-3; -1; 3) \in (d)$.

Goi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P), ta có:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } A(-3;-1;3) \\ \text{hai vtcp } \vec{a}(2;1;1) \,\&\, \vec{n}(1;2;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } A(-3;-1;3) \\ \text{vtpt } \vec{m}(-3;3;3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (Q): x - y - z - 5 = 0$$

Khi đó, hình chiếu vuông góc (d_1) của (d) lên (P) chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x + 2y - z + 5 = 0 \\ x - y - z - 5 = 0 \end{cases}.$$

d. Gọi $\vec{b}$ là vtcp của đường thẳng (Δ), từ giả thiết:

$$\begin{cases} \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{b}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3;\ 3;\ 3) \text{ chọn } (-1;\ 1;\ 1).$$

Vậy đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{Qua } I(-1;\ 0;\ 4) \\ \text{vtcp } \vec{b}(-1;1;1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{1}.$$

☞ ***Chú ý***: Có thể lập luận như sau:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ (\Delta) \subset (P) \\ (\Delta) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ \vec{b} \perp \vec{n} \\ \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} \text{qua } I(-1;0;4) \\ \vec{b} \,//\, \vec{m} \end{cases}.$$

Bài toán 11: Phương pháp toạ độ hóa.

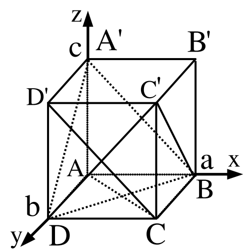
Phương pháp áp dụng

Sử dụng kiến thức về thiết lập hệ tọa độ đã được trình bày trong chủ đề 1.

Ví dụ 1: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' với AB = a, BC = b, CC' = c.

a. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (A'BD).
b. Tính khoảng cách từ điểm A' tới đường thẳng C'D.
c. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

☝ *Hướng dẫn*: Thiết lập hệ toạ độ Axyz với B, D, A' theo thứ tự thuộc Ox, Oy, Oz.



✍ *Giải*

Chọn hệ tọa độ Axyz với B, D, A' theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy, Oz, ta được:

A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; b; 0), D(0; b; 0)
A'(0; 0; c), B'(a; 0; c), C'(a; b; c), D'(0; b; c)

a. Sử dụng phương trình mặt chắn, ta được phương trình mặt phẳng (A'BD) có dạng:

$$(A_1BD): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow (A'BD): bcx + acy + abz - abc = 0$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BD) được cho bởi:

$$d = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}.$$

b. Ta có:

$$d(A', C'D) = \frac{\left|[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'D}]\right|}{\left|\overrightarrow{C'D}\right|} = \frac{\left|[(a;\ b;\ 0), (-a;\ 0;\ -c)]\right|}{\left|(-a;\ 0;\ -c)\right|} = \frac{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

c. Ta có:

$$d(BC', CD') = \frac{\left|[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}].\overrightarrow{BC}\right|}{\left|[\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CD'}]\right|} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}.$$