CHƯƠNG 2

VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 01 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

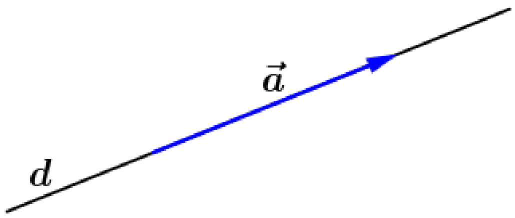
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vectơ trong không gian

Định nghĩa: Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (Hình 1).



Hình 1. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

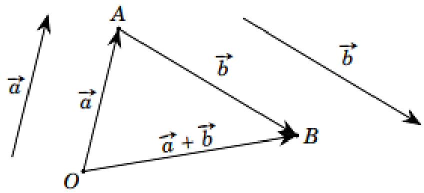
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ.
- Do đó, các vectơ không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2 Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

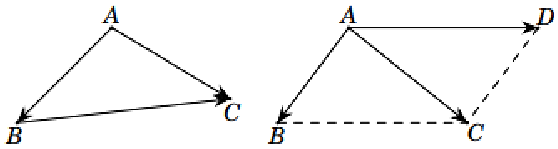
a) Tổng của hai vectơ trong không gian



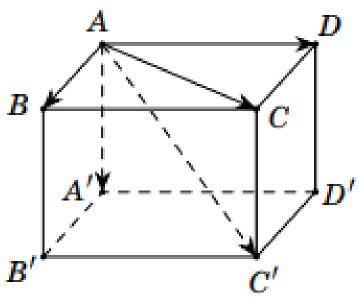
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm O bất kì và các điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{OB}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ.**

Nhận xét: Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:



- **Quy tắc ba điểm:** Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình hộp chữ nhật:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- **Tính chất giao hoán:** Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

- **Tính chất kết hợp:** Nếu $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- **Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$:** Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

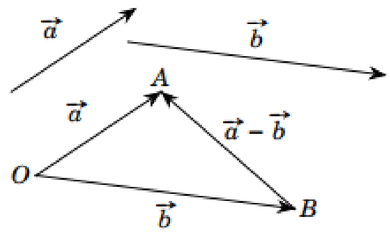
b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Vectơ đối: Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$

- Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$
- Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ *(dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ)*
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó

Định nghĩa: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét:



- Với ba điểm $O,\ A,\ B$ bất kì trong không gian thì ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

3 Tích của một số với một vectơ trong không gian

Trong không gian, tích của một số thực $k\neq 0$ với một vectơ $\vec{a}\neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

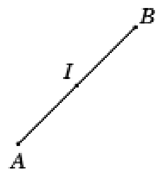
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k>0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$
- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

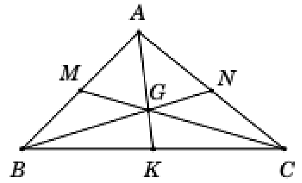
Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với một vectơ**.

Chú ý: Quy ước $k\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Nếu $k\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ a $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:





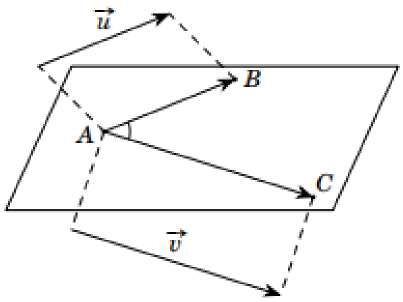
- Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;…
- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GK}$;…

Nhận xét:

- Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k, ta luôn có:
  - $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$
  - $\left(h+k\right)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$
  - $h\left(k\vec{a}\right)=\left(hk\right)\vec{a}$
  - $1.\vec{a}=\vec{a}$
  - $\left(-1\right).\vec{a}=-\vec{a}$
  - $k.\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{0}\\k=0\end{array}\right.$
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k.\vec{b}$
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

4 Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Góc giữa hai vectơ



Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì và gọi B, C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u}, \overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó, góc $BAC\left(0^\circ\le BAC\le 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

- Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0^\circ$; ngược hướng thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=180^\circ$; vuông góc thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=90^\circ$

Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

- Trong trường hợp $\vec{u}=0$ hoặc $\vec{v}=0$ ta quy ước $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\left|\vec{u}\right|^2$; $\vec{u}^2\ge 0$; $\vec{u}^2=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$;
- $\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định vectơ, chứng minh đẳng thức vectơ, độ dài vectơ

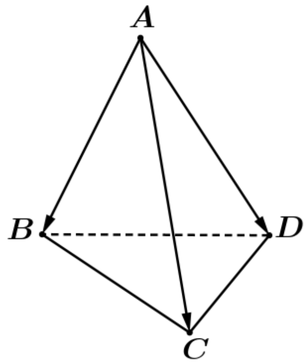
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)

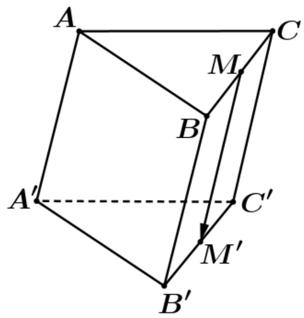
c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.



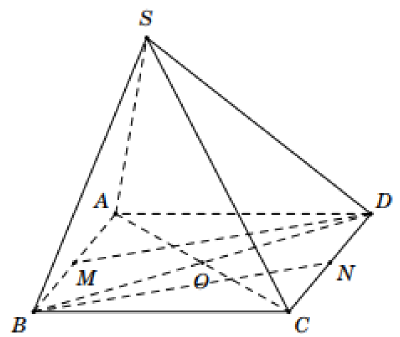
Bài tập 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.



Bài tập 3: Cho hình lăng trụ $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,O lần lượt là trung điểm AB,CD và AC. Chứng minh rằng:

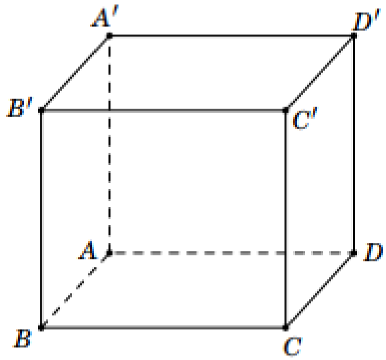


a) Hai vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ đối nhau

b) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$

c) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$

Bài tập 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$



a) Tìm vectơ $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA};\ \overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

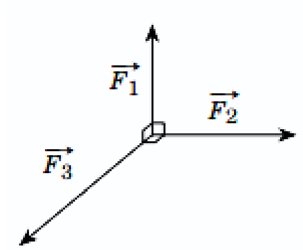
c) Chứng minh $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'D}$

d) Chứng minh $\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{BD'}$

e) Chứng minh $\overrightarrow{A'C}=3\overrightarrow{A'G}$

f) Tính độ dài $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{AA'}$

Bài tập 5: Ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ cùng tác dụng vào một vật có phương đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn lần lượt là $2\,\text{N}$, $3\,\text{N}$ và $4\,\text{N}$.



a) Tính độ lớn hợp hai lực $\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$

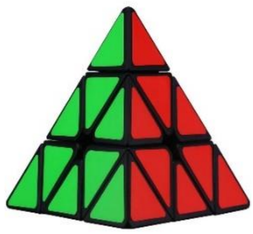
b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0$

Bài tập 6: Tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối Rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối Rubik là $8\,\text{cm}$.



Bài tập 7: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau. Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.
B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.
D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.
B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.
C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.
D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$.
B. $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$.
C. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.
D. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.
B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
C. $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véctơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$.
B. $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.
C. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$.
D. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
B. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **B.** $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$. **D.** $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD. **B.** N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.

C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$. **D.** $N\equiv A$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'. **B.** M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm CC'. **D.** M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m,n,p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng qui.

Câu 17: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các véctơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng. **B.** $\vec{x},\vec{a}$ cùng phương.

C. $\vec{x},\vec{b}$ cùng phương. **D.** $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 18: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ và $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

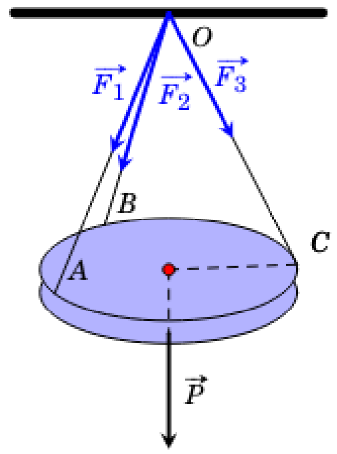
A. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vecto đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vecto đó cùng phương.

C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vecto $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

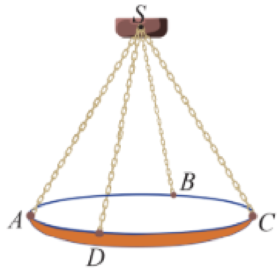
D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luông đồng phẳng với hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 20: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mối dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



A. $14\sqrt{3}$ N. **B.** $15\sqrt{3}$ N. **C.** $17\sqrt{3}$ N. **D.** $16\sqrt{3}$ N.

Câu 21: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m=5$kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $ASC=60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g=10\,\text{m}/\text{s}^2$.

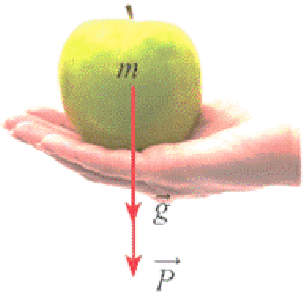


A. $\frac{15\sqrt{3}}{3}$ N. **B.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ N. **C.** $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ N. **D.** $\frac{30\sqrt{3}}{3}$ N.

Câu 22: Theo định luật II Newton *(Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60)* thì gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(m/s^2\right), \vec{F}$ là vectơ lực (N). Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0{,}5$ kg một gia tốc $50\ m/s^2$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

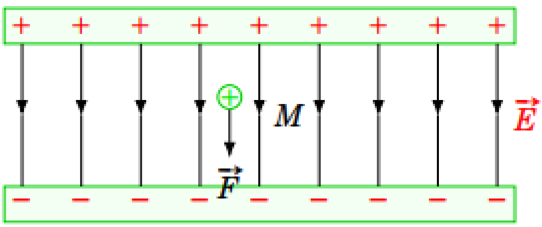
A. 10 N. **B.** 15 N. **C.** 20 N. **D.** 25 N.

Câu 23: Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8\ m/s^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 105 gam



A. 1,029 N. **B.** 1,433 N. **C.** 2,096 N. **D.** 1,477 N.

Câu 24: Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q.\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}$ C và độ lớn điện trường $E = 10^5$ (N/C)



A. 10^{-4} N. **B.** 2.10^{-6} N. **C.** 10^{-2} N. **D.** $1{,}8.10^{-6}$ N.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB,CD và G là trung điểm MN

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Câu 3: Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O.

a) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Câu 4: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}$.

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DC}$.

c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 5: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

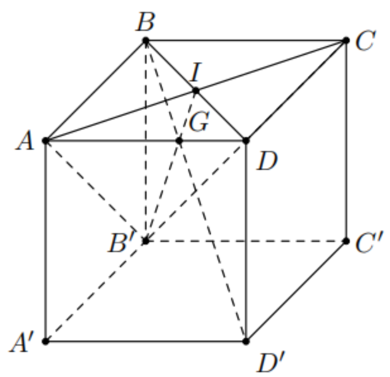
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Câu 6: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ).



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

d) $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Câu 7: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AD,BC

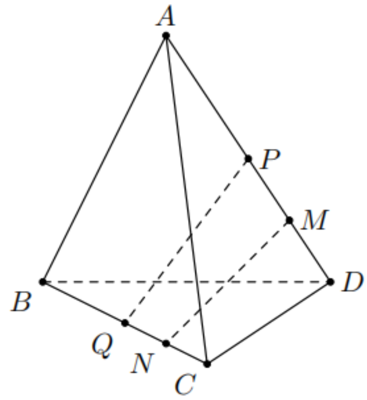
a) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

b) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

c) $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

d) $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 8: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=3MD$ và $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm AD và BC.



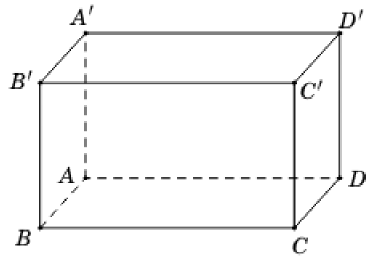
a) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a;\ AD=a\sqrt{3};\ AA'=2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



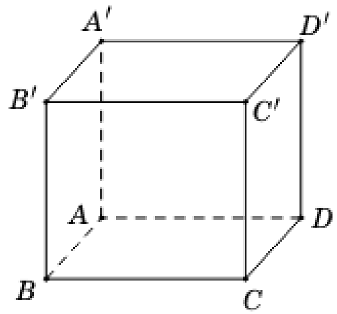
a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{5}$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$

Câu 10: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a



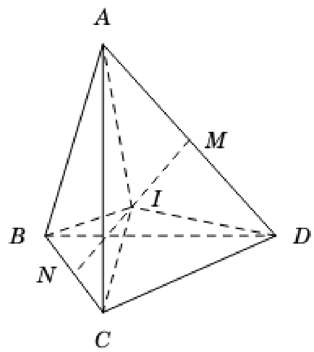
a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$

Câu 11: Trong không gian. cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN.



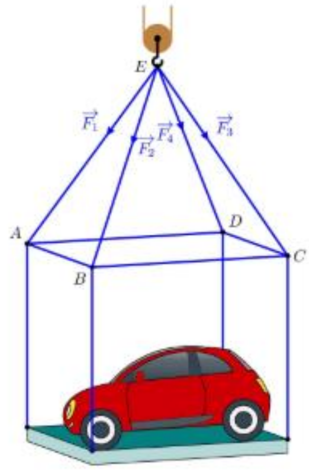
a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$

d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Câu 12: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ và trọng lượng của khung sắ là $3000\,\text{N}$



a) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$

b) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16282\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $\overrightarrow{AN}=-4\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}-2\overrightarrow{AD}$ $(k\in\mathbb{R})$ và $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}$. Tìm giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$

Câu 2: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là điểm thay đổi trên SO. Tỉ số $\dfrac{SM}{SO}$ sao cho $P=MS^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC=4BM, AC=3AP, BD=2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\dfrac{AQ}{AD}$.

Câu 4: Trong không gian, cho tứ diện $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=2, BC=2\sqrt{2}$. Hãy tính $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}$.

Câu 5: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Cho $AB=2a,\ CD=2b,\ EF=2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2+MB^2=k.ME^2+l.a^2$. Tính $k+l$.

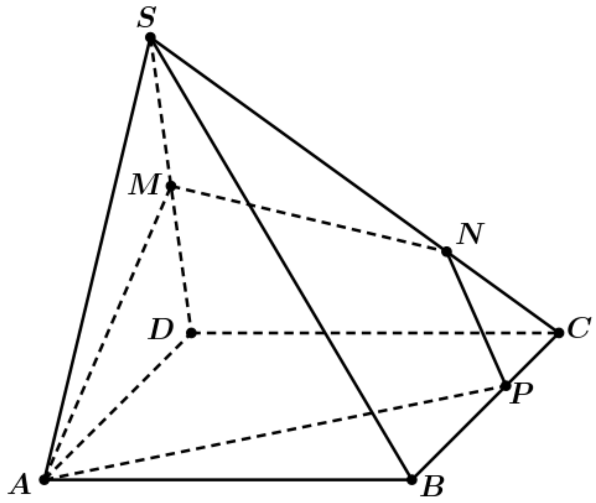
Câu 6: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k+l$ có giá trị là bao nhiêu?

Câu 7: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $G_1;G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác BDA_1 và CB_1D_1. Biết $\overrightarrow{AC_1}=a\overrightarrow{AG_1}+b\overrightarrow{AG_2}$. Tính $a+b$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA=3,SB=4,SC=5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA,SB,SC tại các điểm A_1,B_1,C_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{SA_1^2}+\dfrac{1}{SB_1^2}+\dfrac{1}{SC_1^2}$.

Câu 9: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\overrightarrow{AI}=a\overrightarrow{AA'}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b+c$.

Câu 10: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M và N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MS}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính tỉ số $\dfrac{SP}{SC}$.



-----------------HẾT-----------------

CHƯƠNG 2

VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 01 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

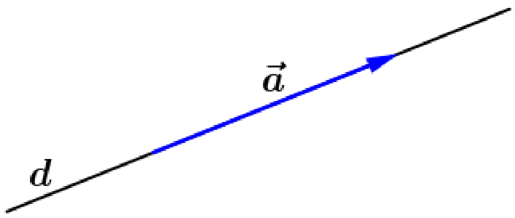
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vectơ trong không gian

Định nghĩa: Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\vec{y},\ldots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (Hình 1).



Hình 1. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

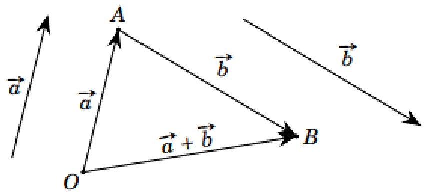
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ không có độ dài là 0, cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ.
- Do đó, các vectơ không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

2 Tổng và hiệu của hai vectơ trong không gian

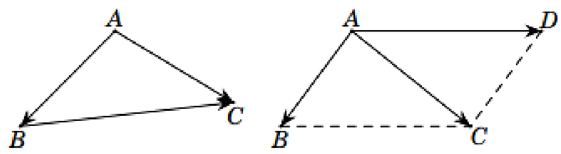
a) Tổng của hai vectơ trong không gian



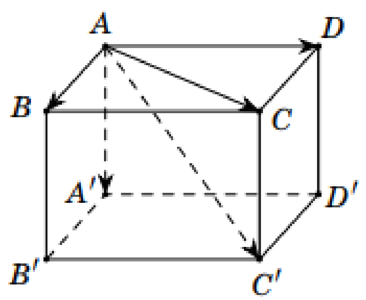
Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm O bất kì và các điểm A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{OB}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ký hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ.**

Nhận xét: Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:



- **Quy tắc ba điểm:** Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Quy tắc hình bình hành:** Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



- **Quy tắc hình hộp chữ nhật:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

  Hệ thức tương tự: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- **Tính chất giao hoán:** Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

- **Tính chất kết hợp:** Nếu $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.
- **Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$:** Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

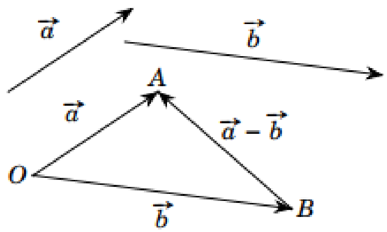
b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Vectơ đối: Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$

- Vectơ đối của $\vec{a}$ kí hiệu là $-\vec{a}$
- Vectơ đối của $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{BA}$, nghĩa là $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$ *(dùng để làm mất dấu trừ trước vectơ)*
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó

Định nghĩa: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét:



- Với ba điểm $O,\ A,\ B$ bất kì trong không gian thì ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$

3 Tích của một số với một vectơ trong không gian

Trong không gian, tích của một số thực $k\neq 0$ với một vectơ $\vec{a}\neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

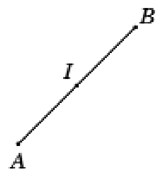
- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k>0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$
- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

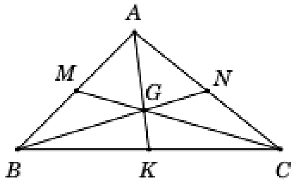
Phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là **phép nhân một số với một vectơ**.

Chú ý: Quy ước $k\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Nếu $k\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ a $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Hệ thức trung điểm, trọng tâm:





- Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$; $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;…
- Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$; $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GK}$;…

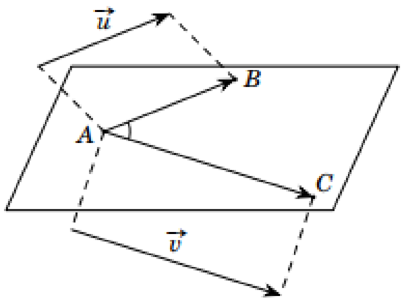
Nhận xét:

- Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số h và k, ta luôn có:
  - $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$
  - $\left(h+k\right)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$
  - $h\left(k\vec{a}\right)=\left(hk\right)\vec{a}$
  - $1.\vec{a}=\vec{a}$
  - $\left(-1\right).\vec{a}=-\vec{a}$
  - $k.\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\vec{a}=\vec{0}\\ k=0\end{array}\right.$
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k.\vec{b}$
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số $k\neq 0$ sao cho $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

4 Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Góc giữa hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì và gọi B, C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u}, \overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó, góc $BAC\left(0^\circ\leq BAC\leq 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.



- Nếu $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}$ thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0^\circ$; ngược hướng thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=180^\circ$; vuông góc thì $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=90^\circ$

Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức: $\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$.

- Trong trường hợp $\vec{u}=0$ hoặc $\vec{v}=0$ ta quy ước $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$
- $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^2=\left|\vec{u}\right|^2$; $\vec{u}^2\geq 0$; $\vec{u}^2=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$
- Với hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

Tính chất: Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số thực k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$;
- $\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định vectơ, chứng minh đẳng thức vectơ, độ dài vectơ

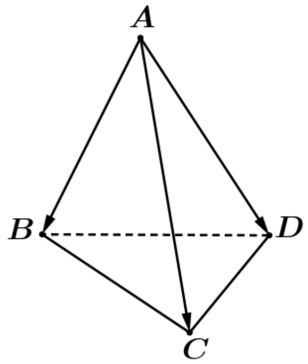
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC)

c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.



Lời giải

a) Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

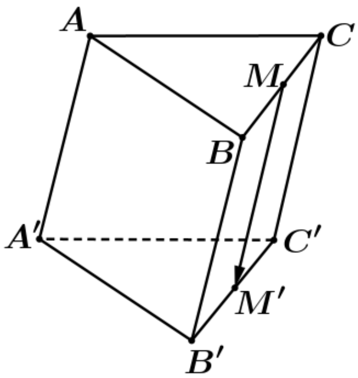
b) Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vectơ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC).

c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = 1$.

Bài tập 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ thì vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.



Lời giải

a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA'//CC'$ và $AA'=CC'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

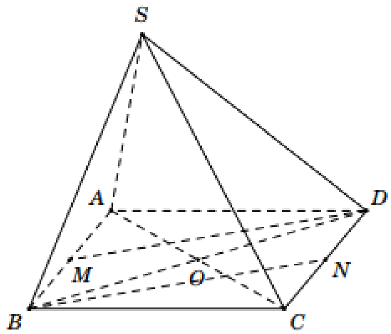
b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'//BB'$ và $MM'=BB'$.

Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'//BB'$ và $AA'=BB'$, suy ra $MM'//AA'$ và $MM'=AA'$.

Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.

Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,O lần lượt là trung điểm AB,CD và AC. Chứng minh rằng:



a) Hai vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ đối nhau

b) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$

c) $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SC}$

Lời giải

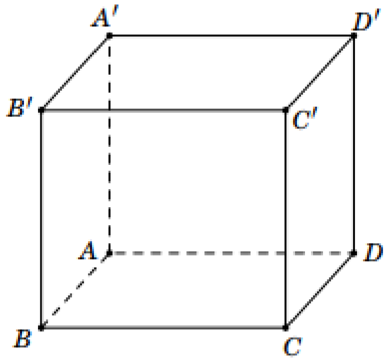
a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB=CD$ và AB song song với $CD \Rightarrow BM=DN$

Suy ra $BM//DN$ nên tứ giác là hình bình hành. Hai vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{DN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng đối nhau.

b) Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$ suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$

c) Từ câu a ta có $\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{DM}$ suy ra $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{SC}$

Bài tập 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$



a) Tìm vectơ $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

c) Chứng minh $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'D}$

d) Chứng minh $\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{BD'}$

e) Chứng minh $\overrightarrow{A'C}=3\overrightarrow{A'G}$

f) Tính độ dài $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{AA'}$

Lời giải

a) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CB}$

Suy ra $\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA'}$.

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

c) Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'}$ và $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'A'}$ do đó $\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{B'D}$

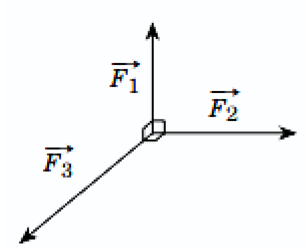
d) Ta có $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{C'B'}-\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{BB'}-\left(\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{C'B'}\right)=\overrightarrow{BB'}-\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{BB'}+\left(-\overrightarrow{D'B'}\right)$

$=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BD}$

e) Do G là trọng tâm tam giác $AB'D'$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$. Khi đó theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{A'G}+\overrightarrow{GD'}=3\overrightarrow{A'G}$

f) Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$. Suy ra $|\vec{u}|=AC=a\sqrt{3}$

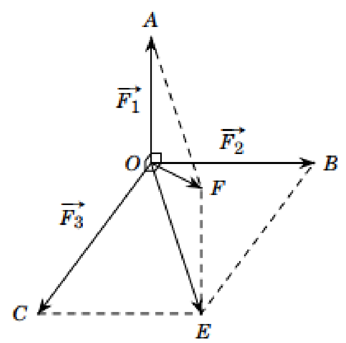
Bài tập 5: Ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ cùng tác dụng vào một vật có phương đôi một vuông góc với nhau và có độ lớn lần lượt là $2\,\text{N}$, $3\,\text{N}$ và $4\,\text{N}$.



a) Tính độ lớn hợp hai lực $\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$

b) Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho

Lời giải



a) Gọi O là vị trí trên vật mà ba lực cùng tác động vào. Gọi A, B, C là các điểm sao cho $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{OA}$ $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{OC}$. Khi đó $\left|\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=OE=\sqrt{3^2+4^2}=5\,\text{N}$

b) Dựng các hình chữ nhật $OBEC$ và $OEFA$ thì ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}\\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}\end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OF}$

Vậy độ lớn hợp lực của cả ba lực là:

$\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right|=OF=\sqrt{OA^2+OE^2}=\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$ N.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB,CD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$ b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=0$

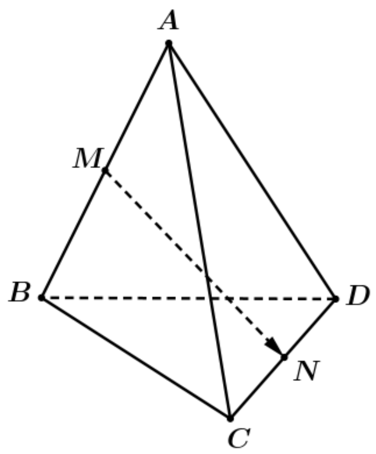
Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$.

Do đó $2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\right)$.

Vì M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}=\vec{0}$.

Suy ra $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$, hay $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

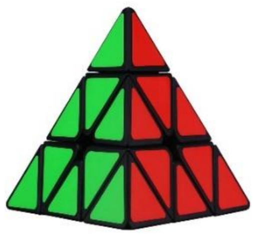


b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}=0$.

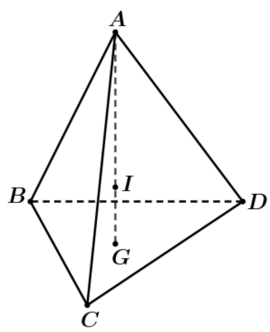
Vì vậy

$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}=0$.

Bài tập 6: Tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối Rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối Rubik là 8cm.



Lời giải



Giả sử khối Rubik (đồng chất) hình tứ diện đều được mô phỏng như hình vẽ.

Vì G là trọng tâm $DBCD$ nên I là trọng tâm của tứ diện.

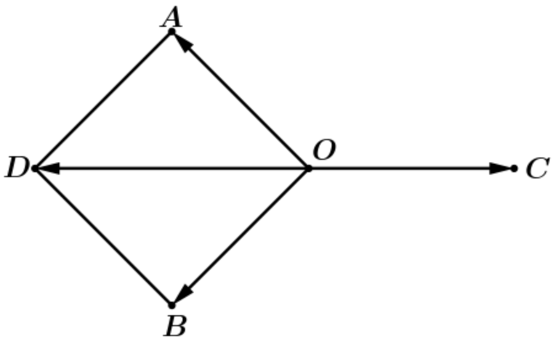
Vì $ABCD$ là hình tứ diện đều nên $AG \perp (BCD)$ và $AG = 8\,\text{cm}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ nên 3 điểm A, I, G thẳng hàng và $IG = \frac{1}{4}AG$.

Do đó $IG \perp (BCD) \Rightarrow d(I,(BCD)) = IG = \frac{1}{4}AG = 2\,\text{cm}$.

Bài tập 7: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau. Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao?

Lời giải



Giả sử lực kéo trên mỗi sợi dây được biểu diễn bởi các vecto $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ với là đầu chung của ba sợi dây. Khi ba sợi dậy cân bằng thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Vẽ hình bình hành $OADB$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD}$.

Hay O là trung điểm của CD. Do đó các điểm O, A, B, C cùng thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra ba sợi dây cùng nằm trong mặt phẳng đó.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

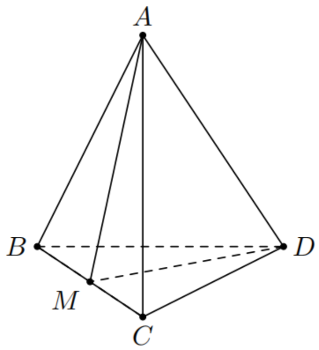
A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

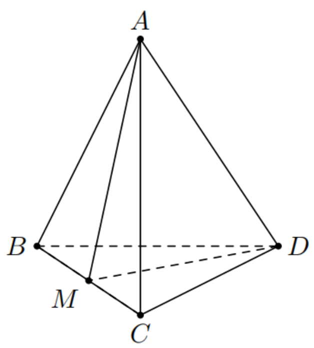
A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Lời giải



Vì M là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

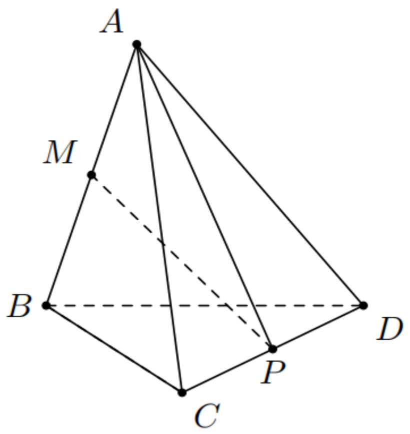
A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.

B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Lời giải



Vì M,P lần lượt là trung điểm của $AB,CD\Rightarrow\begin{cases}2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AP}\end{cases}$

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây đúng?

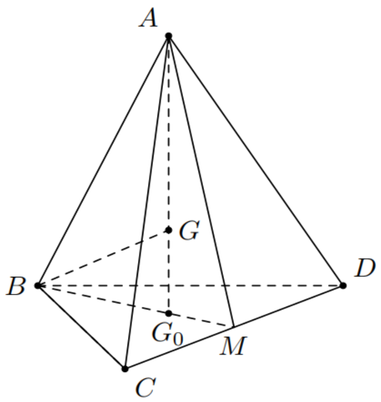
A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$.

B. $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$.

C. $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.

D. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Lời giải



Vì G_0 là giao điểm của AG và mặt phẳng $(BCD)\Rightarrow G_0$ là trọng tâm tam giác BCD.

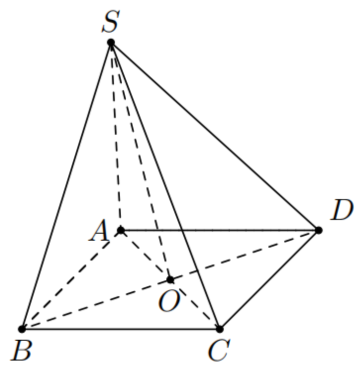
$\Rightarrow \overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}$ mà $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_0}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}+\overrightarrow{G_0D}=\vec{0}$

Suy ra $\Rightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GG_9}=\vec{0}\rightarrow \overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}+\vec{d}$.

Lời giải

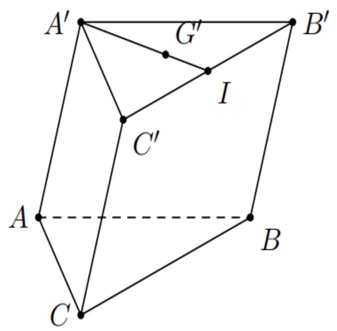


Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c}\\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d}\end{cases}\Rightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véctơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm $B'C'$. Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$

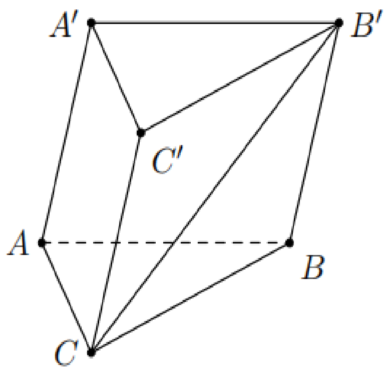
$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải



Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên $\Rightarrow \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$

$= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Vì M là trung điểm $BB' \to \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}BB' = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó:

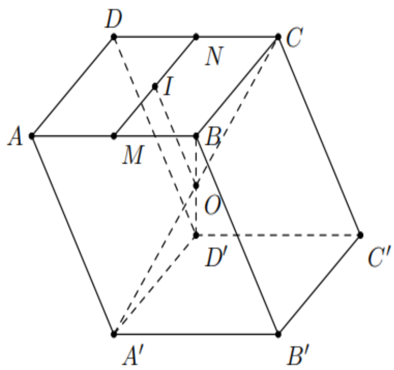
A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$.

B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$.

D. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm $AB, CD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}$.

Vì I là trung điểm $MN \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow 2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right)=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Lời giải

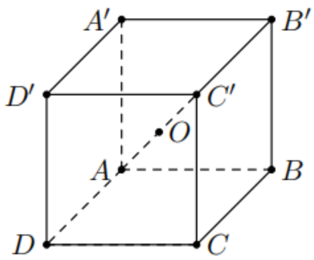
Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\vec{d}=\vec{c}-\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. <u>**B**</u>. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Lời giải



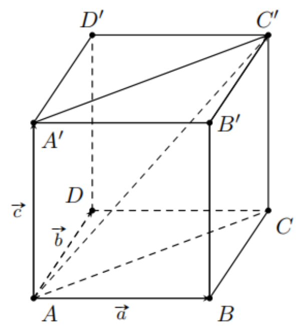
Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

Mặt khác O là trung điểm $AC'\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. <u>**C**</u>. $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD. **B.** N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.

<u>**C**</u>. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$. **D.** $N\equiv A$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{DC}$.

Suy ra N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.

B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.

C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Gọi $O=AC\cap BD$ và $O'=A'C'\cap B'D'\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\\ \overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'C'}+\overrightarrow{O'D'}=\vec{0}\end{cases}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{MO}\\ \overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=4\overrightarrow{MO'}+\overrightarrow{O'A'}+\overrightarrow{O'B'}+\overrightarrow{O'C'}+\overrightarrow{O'D'}=4\overrightarrow{MO'}\end{cases}.$$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MO}+4\overrightarrow{MO'}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MO'}=\vec{0}\Rightarrow M$ là trung điểm của OO'.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

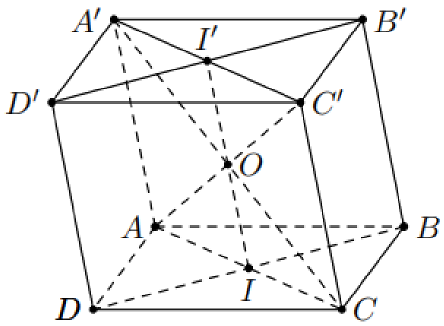
A. M là trung điểm BB'.

B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.

C. M là trung điểm CC'.

D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải



Gọi I,I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD,A'B'C'D'\Rightarrow O$ là trung điểm II'.

Mặt khác $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{IB}$.

Suy ra M là trung điểm BB'.

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m,n,p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng qui.

Lời giải

Xét $m=n=p=0$ ta luôn có $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Xét $m+n+p\neq 0$ thì chắc chắn có một trong ba số m,n,p khác 0.

Giả sử $m\neq 0 \rightarrow m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0} \leftrightarrow \vec{a}=-\dfrac{n}{m}\vec{b}-\dfrac{p}{m}\vec{c} \rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 17: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các véctơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng. **B.** $\vec{x},\vec{a}$ cùng phương.

C. $\vec{x},\vec{b}$ cùng phương. **D.** $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Giả sử ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng khi đó $\rightarrow \vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.

$\Leftrightarrow 2\vec{a}+\vec{b}=m\vec{a}-(m+3n)\vec{b}-(m+2n)\vec{c} \leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m+3n=-1 \\ m+2n=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}.$

Vậy $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 18: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ và $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Ta có $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m,n: \vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.

Với $\begin{cases} \vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c} \\ \vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c} \\ \vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c} \end{cases} \Rightarrow \vec{x}=\dfrac{4}{3}\vec{y}+\dfrac{5}{3}\vec{z} \rightarrow \vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

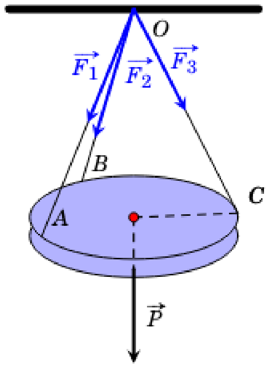
C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luông đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

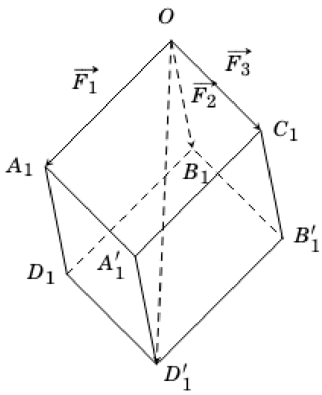
Giả sử cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$ khi đó:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM}$ không đồng phẳng với $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$.

Câu 20: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



A. $14\sqrt{3}$ N. **B.** $15\sqrt{3}$ N. **C.** $17\sqrt{3}$ N. **D.** $16\sqrt{3}$ N.

Lời giải



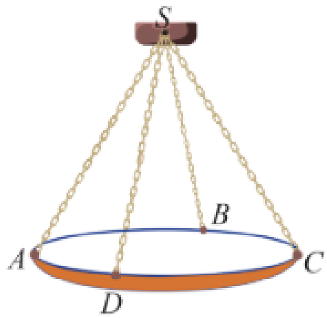
Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}$.

Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = \left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 15(\text{N})$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

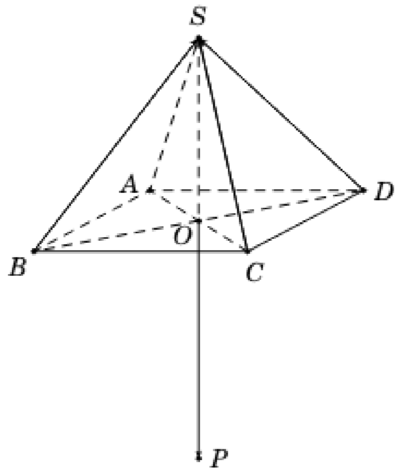
Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trong lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $|\vec{P}| = \left|\overrightarrow{OD_1'}\right| = 15\sqrt{3}\text{N}$

Câu 21: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\text{kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $ASC = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10\,\text{m}/\text{s}^2$.



A. $\frac{15\sqrt{3}}{3}$N. **B.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$N. **C.** $\frac{25\sqrt{3}}{3}$N. **D.** $\frac{30\sqrt{3}}{3}$N.

Lời giải



Ta có $\vec{P}=m\vec{g}$ nên $\left|\vec{P}\right|=m\left|\vec{g}\right|=5.10=50\,\text{N}$.

Vậy độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là $50\,\text{N}$.

Gọi O là trọng tâm của chiếc đèn chùm cũng là chân đường cao hình chóp đều $S.ABCD$.

Vẽ $\overrightarrow{OP}$ biểu diễn trọng lực tác động lên đèn chùm với $OP\perp(ABCD)$.

Khi đó lực căng mỗi sợi xích sẽ là $\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BS},\overrightarrow{CS},\overrightarrow{DS}$.

Chiếc đèn chùm đứng yên nên $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}\Rightarrow SO=\frac{1}{4}OP=\frac{50}{4}=\frac{25}{2}$

Tam giác SAC cân tại S có $\cos OSA=\frac{SO}{SA}$

Suy ra lực căng của mỗi sợi dây xích là: $SA=\frac{SO}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{25}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{25\sqrt{3}}{3}$ N

Câu 22: Theo định luật II Newton *(Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60)* thì gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$ trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(\mathrm{m/s^2}\right), \vec{F}$ là vectơ lực (N). Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5$ kg một gia tốc $50\ \mathrm{m/s^2}$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

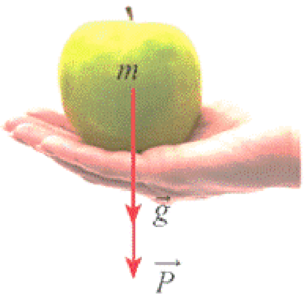
A. $10\,\mathrm{N}$. **B.** $15\,\mathrm{N}$. **C.** $20\,\mathrm{N}$. **D.** $25\,\mathrm{N}$.

Lời giải

Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$ suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5.50 = 25(\mathrm{N})$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5$ kg một gia tốc $50\ \mathrm{m/s^2}$ thì cần một lực đá có độ lớn là 25 N.

Câu 23: Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8\ \mathrm{m/s^2}$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 105 gam



A. $1,029\,\mathrm{N}$. **B.** $1,433\,\mathrm{N}$. **C.** $2,096\,\mathrm{N}$. **D.** $1,477\,\mathrm{N}$.

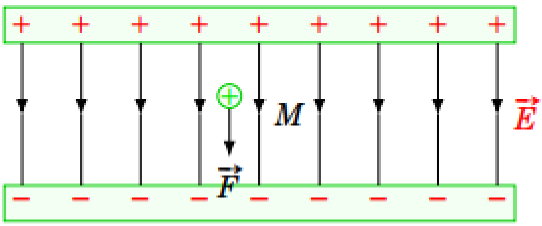
Lời giải

Đổi $105\,\mathrm{g} = 0,105$ kg.

Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo là:

$$|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 0,105.9,8 = 1,029\ \mathrm{N}$$

Câu 24: Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q.\vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}\mathrm{C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5$ (N/C)



A. 10^{-4} N. **B.** 2.10^{-6} N. **C.** 10^{-2} N. **D.** $1,8.10^{-6}$ N.

Lời giải

Độ lớn của lực tĩnh điện là $\left|\vec{F}\right| = q.\left|\vec{E}\right| = 10^{-9}.10^{5} = 10^{-4}$ N.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

c) $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Lời giải

a) Đúng: Theo công thức vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) Đúng: Ta có:

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

c) Đúng: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BG}$

d) Sai: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

$$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm MN

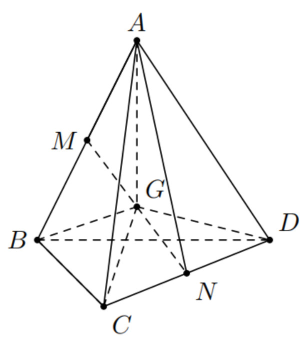
a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

c) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Lời giải



a) Đúng: Vì M, N lần lượt là trung điểm $AB, CD \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM} \\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN} \end{cases}$

Mặt khác G là trung điểm $MN \rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0} \leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

b) Đúng: Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{MG}$

c) Sai: Dễ chứng minh được $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$. Do đó: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Câu 3: Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O.

a) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

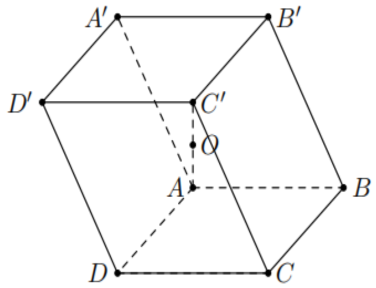
c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Lời giải

a) Đúng: Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$. Do đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.



c) Sai: Vì $\begin{cases} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'} \end{cases}$ mà $\overrightarrow{AB'}\neq\overrightarrow{AD'} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$; $\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC'}$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$

Câu 4: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

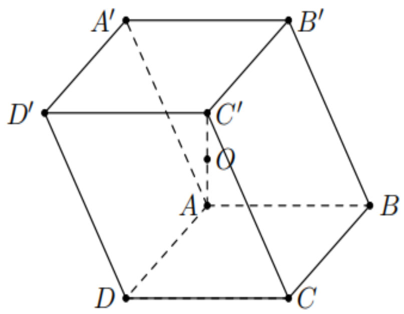
a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}$.

b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DC}$.

c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{B'D'}$ mà $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}$

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{DC}$

c) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

d) Sai: Vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BD'}\neq\overrightarrow{BC}$

Câu 5: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

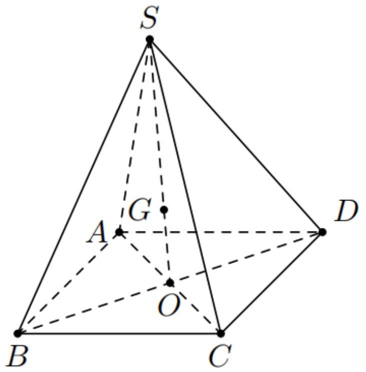
a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

d) $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải



a) Sai: Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

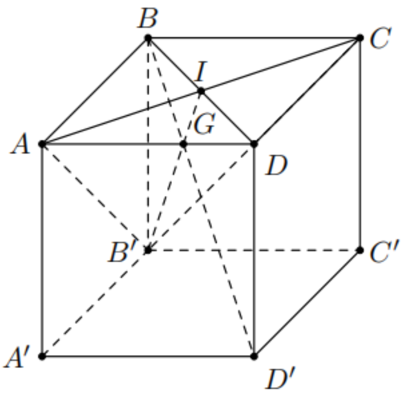
b) Đúng: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$; $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$

Câu 6: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ).



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

d) $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

a) Đúng: Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$

b) Sai: G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$

d) Sai: Ta có $\Delta BIG \sim \Delta D'B'G \Rightarrow \dfrac{BG}{D'G}=\dfrac{BI}{D'B'}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{BG}{BD'}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$

Câu 7: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AD,BC

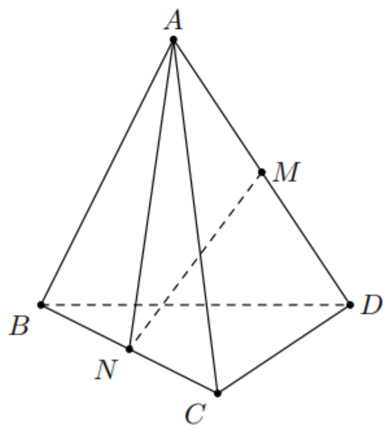
a) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

b) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

c) $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

d) $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải



a) Đúng: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

b) Đúng: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng vì MN không nằm trong (ABC)

c) Sai: $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng sai vì AN không nằm trong (MNC)

d) Đúng: $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

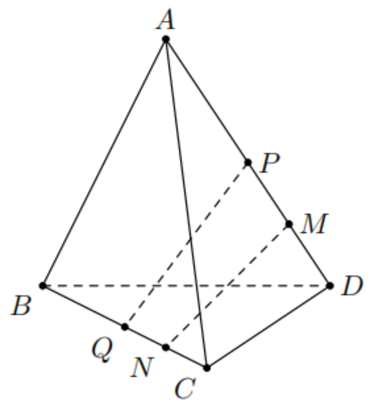
Câu 8: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=3MD$ và $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm AD và BC.

a) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



Lời giải

a) Sai: Dễ chứng minh được $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ nên A sai

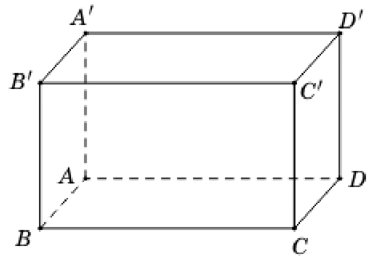
b) Đúng: Theo giả thuyết ta có M, N là trung điểm của PD, QC

c) Đúng: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}\end{cases}$.

d) Đúng: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ 3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{BN}\end{cases}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

Câu 9: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB=a;\ AD=a\sqrt{3};\ AA'=2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$

c) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{5}$

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$

Lời giải

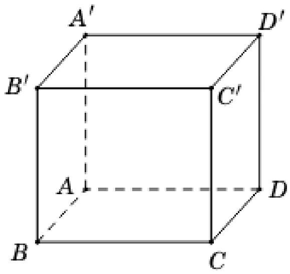
a) Sai: $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}\neq\vec{0}$

b) Đúng: $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$

c) Sai: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$

d) Đúng: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=AC'=\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}=2\sqrt{2}a$

Câu 10: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a



a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$

Lời giải

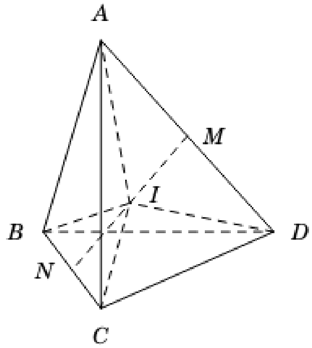
a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+\left(-\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}.$

b) Sai: Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$

c) Sai: $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\overrightarrow{BD'}\right|=BD'=a\sqrt{3}$

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'C}$. Do đó $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=C'C=a$

Câu 11: Trong không gian. cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN.



a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$

d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Lời giải

a) Sai: Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}.$$

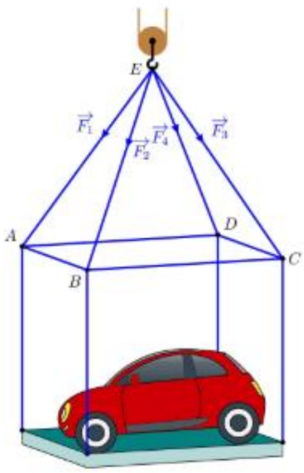
b) Đúng: Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$

c) Đúng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$

d) Đúng: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Câu 12: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ và trọng lượng của khung sắ là $3000\,\text{N}$



a) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$

b) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị)

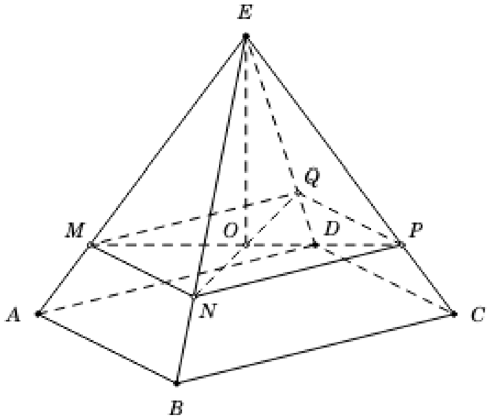
d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16282\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Lấy các điểm M,N,P,Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{F_4}.$

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ nên $EM=EN=EP=EQ=4700$.



a) Sai: Ta có: $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}=2\overrightarrow{EH}$, với H là trung điểm của MN

$\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EK}$, với K là trung điểm của PQ suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\neq\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EP}=2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP

$\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EQ}=2\overrightarrow{EO},$ với O là trung điểm của MP suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.

c) Đúng: $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=|2\overrightarrow{EO}|=2EO$. Theo giả thiết, góc giữa EA với $\left(ABCD\right)$ bằng 60° nên góc giữa EM với $\left(MNPQ\right)$ cũng bằng 60° hay $SMO=60^\circ$.

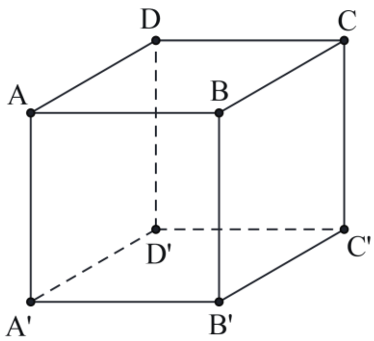
Xét ΔEMO có $EM=4700, SMO=60^\circ$ suy ra $EO=EM\sin 60^\circ=2350\sqrt{3}$.

d) Đúng: Từ đây ta tính được $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=2EO=8141\text{N}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng $\overrightarrow{AN}=-4\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}-2\overrightarrow{AD}$ $\left(k\in\mathbb{R}\right)$ và $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}$. Tìm giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN}\perp\overrightarrow{AM}$

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AB=AA'=AD$

Các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AD}$ đôi một vuông góc với nhau.

Do đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}=0$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$; $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}=0$.

Để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$ thì $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow \left(-4\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}-2\overrightarrow{AD}\right).\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}\right)=0$

$\Leftrightarrow -8\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}+12\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{AA'}.\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}\right)-2\overrightarrow{AD}.\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}-3\overrightarrow{AD}\right)=0$

$\Leftrightarrow -8\left(\overrightarrow{AB}\right)^2-0+0+2k\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AA'}-3k\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'}+6\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=0$

$\Leftrightarrow -8\left(\overrightarrow{AB}\right)^2-0+0+0+k\left(\overrightarrow{AA'}\right)^2-0-0-0+6\left(\overrightarrow{AD}\right)^2=0$

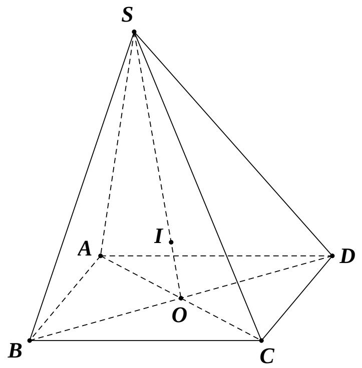
$\Leftrightarrow -8AB^2+kAA'^2+6AD^2=0$ (mà $AB=AA'=AD$)

$\Leftrightarrow -8AB^2+kAB^2+6AB^2=0 \Leftrightarrow (-8+k+6)AB^2=0 \Leftrightarrow -8+k+6=0 \Leftrightarrow k-2=0 \Leftrightarrow k=2$.

Vậy giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$ là $k=2$.

Câu 2: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là điểm thay đổi trên SO. Tỉ số $\dfrac{SM}{SO}$ sao cho $P=MS^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SI}=4\overrightarrow{IO}$.

Suy ra: $P=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

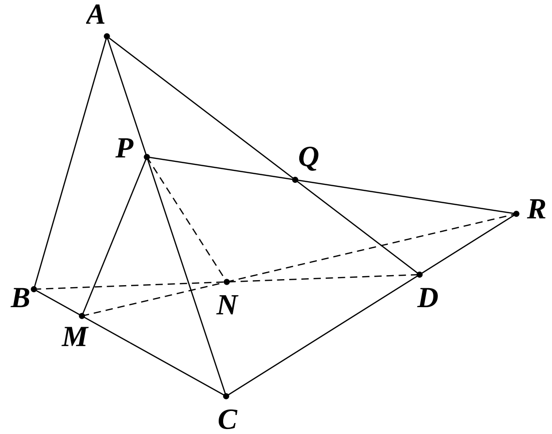
$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IS}+4\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$. Vậy $P_{\min}$ khi $M \equiv I \Rightarrow \dfrac{SM}{SO}=\dfrac{4}{5}$.

Câu 3: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD và AC sao cho $BC=4BM, AC=3AP, BD=2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\dfrac{AQ}{AD}$.

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AD}=\vec{c},\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AD}=k\vec{c}$

Theo đề bài, ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b};\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right);\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{b}$.

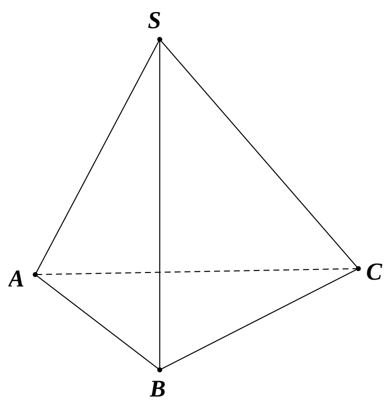
Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\\ \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{12}\vec{b}\\ \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+k\vec{c}\end{cases}$

Vì M,N,P,Q đồng phẳng nên $x\overrightarrow{MN}+y\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}\Leftrightarrow\begin{cases}0,25x+0,75y=0,75\\ 0,25x-\frac{1}{12}y=0,25\\ 0,5x=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{6}{5}\\ y=\frac{3}{5}\\ k=\frac{3}{5}\end{cases}$.

Vậy $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\frac{AQ}{AD}=\frac{3}{5}$.

Câu 4: Trong không gian, cho tứ diện $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=2,BC=2\sqrt{2}$. Hãy tính $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}$.

Lời giải



Ta có: $BC^2 = SB^2 + SC^2 \left(2.2^2 = 2^2 + 2^2\right) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S.

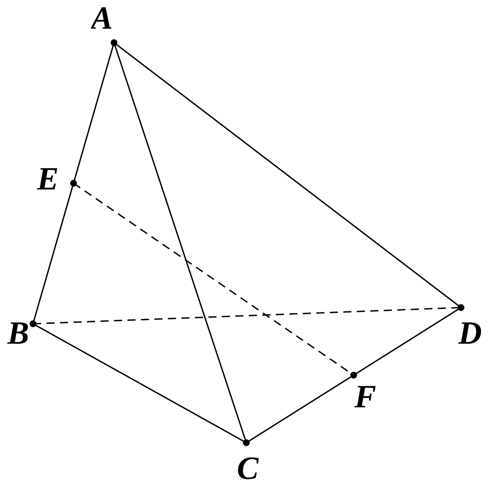
Mặt khác: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.

$$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = 0 - SC.SA.\cos ASC = -2.2.\cos 60^\circ = -\frac{2^2}{2} = -2.$$

Vậy $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = -2$.

Câu 5: Trong không gian, cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Cho $AB = 2a,\ CD = 2b,\ EF = 2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2 + MB^2 = k.ME^2 + l.a^2$. Tính $k + l$.

Lời giải

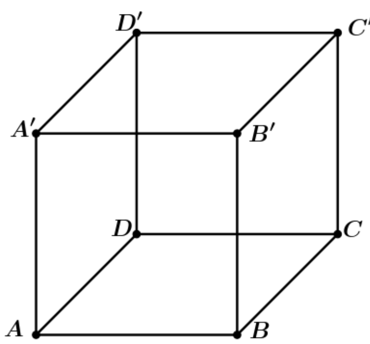


Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} = 2ME^2 + 2a^2.$$ Vậy $k + l = 2 + 2 = 4$.

Câu 6: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k + l$ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA'} = k.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{-k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}}{1 - k}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{NC}=l.\overrightarrow{ND}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$.

Suy ra: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\left(-\dfrac{k}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{a}+\left(-\dfrac{k}{1-k}-1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{c}$.

Hơn nữa: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Vì $MN//BD'$ nên $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{BD'}\Leftrightarrow\dfrac{3k+1}{1-k}=-2\Leftrightarrow k=-3\Rightarrow l=-1$. Vậy $k+l=-4$.

Câu 7: Trong không gian, cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có $G_1;G_2$ lần lượt là trọng tâm tam giác BDA_1 và CB_1D_1. Biết $\overrightarrow{AC_1}=a\overrightarrow{AG_1}+b\overrightarrow{AG_2}$. Tính $a+b$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{G_1B}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{G_1D}$; $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{G_1A_1}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=3\overrightarrow{AG_1}$ mà $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC_1}$ suy ra $\overrightarrow{AC_1}=3\overrightarrow{AG_1}$ (1)

Ta lại có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2C}$; $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2B_1}$; $\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AG_2}+\overrightarrow{G_2D_1}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD_1}=3\overrightarrow{AG_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=3\overrightarrow{AG_2}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC_1}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG_2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AC_1}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG_1}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG_2}$. Suy ra $a+b=\dfrac{9}{4}$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ với $SA=3,SB=4,SC=5$. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của $S.ABC$ cắt các cạnh SA,SB,SC tại các điểm A_1,B_1,C_1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{SA_1^2}+\dfrac{1}{SB_1^2}+\dfrac{1}{SC_1^2}$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của $S.ABC$ khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$.

Từ đó $\overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)(1)$.

Do A_1,B_1,C_1 thuộc các tia SA,SB,SC nên $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SA_1}$ cùng hướng, $\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SB_1}$ cùng hướng, $\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SC_1}$ cùng hướng, từ đó $\dfrac{\overrightarrow{SA}}{SA}=\dfrac{\overrightarrow{SA_1}}{SA_1},\dfrac{\overrightarrow{SB}}{SB}=\dfrac{\overrightarrow{SB_1}}{SB_1},\dfrac{\overrightarrow{SC}}{SC}=\dfrac{\overrightarrow{SC_1}}{SC_1}$.

Vậy (1) tương đương với $\overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{SA}{SA_1}\overrightarrow{SA_1}+\dfrac{SB}{SB_1}\overrightarrow{SB_1}+\dfrac{SC}{SC_1}\overrightarrow{SC_1}\right)(2)$

Do G, A_1, B_1, C_1 thuộc một mặt phẳng nên từ (2) ta có $\frac{1}{4}\left(\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}\right)=1$

Hay $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=4$ trong đó $x=SA_1, y=SB_1, z=SC_1$.

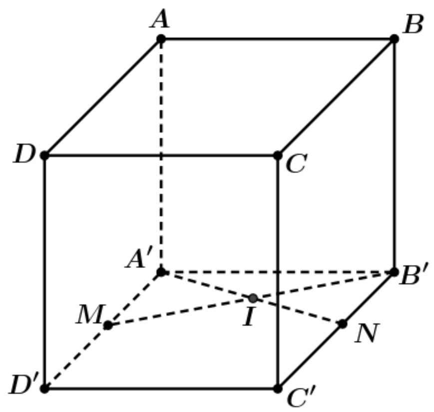
Vậy bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$ trong điều kiện $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=4$ và

$0<x<3; 0<x<4; 0<z<5$. Ta có $16=\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}\right)^2 \le \left(3^2+4^2+5^2\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$.

Suy ra $P=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \ge \frac{8}{25}$

Câu 9: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là điểm thỏa $\overrightarrow{C'N}=2\overrightarrow{NB'}$, M là trung điểm của $A'D'$, I là giao điểm của $A'N$ và $B'M$. Biết $\overrightarrow{AI}=a\overrightarrow{AA'}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AD}$. Tính $a+b+c$.

Lời giải



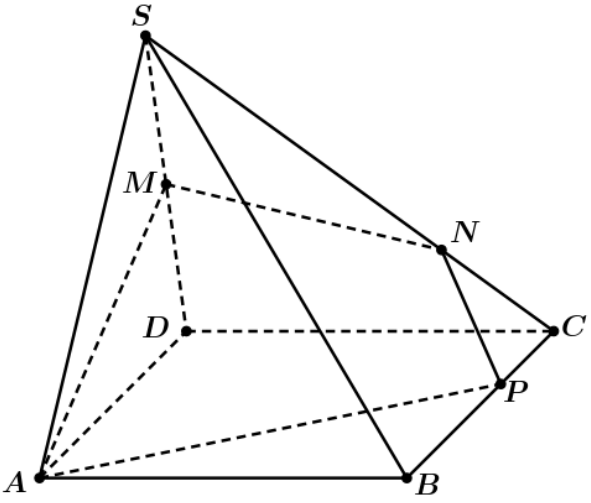
Ta có tam giác $IA'M$ đồng dạng với tam giác INB' nên suy ra:

$$\frac{IA'}{IN}=\frac{A'M}{B'N}=\frac{\frac{1}{2}A'D'}{\frac{1}{3}A'D'}=\frac{3}{2} \Rightarrow A'I=\frac{3}{5}A'N$$

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\overrightarrow{A'N}=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'N}\right)=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$. Suy ra $a+b+c=\frac{9}{5}$

Câu 10: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành. Gọi M và N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MS}=\vec{0}$, $\overrightarrow{NB}+2\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$.



Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{y}$, $\overrightarrow{AS}=\vec{z}$ và $\overrightarrow{SP}=k\overrightarrow{SC}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AS}\right)=\frac{1}{2}\vec{y}+\frac{1}{2}\vec{z}$; $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}$.

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{AS}+k\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{AS}+k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}\right)=\overrightarrow{AS}+k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AS}\right)=k\vec{x}+k\vec{y}+(1-k)\vec{z}$

Vì 3 véc tơ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}$ đồng phẳng nên $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AM}+n\overrightarrow{AP}$.

Khi đó: $k\vec{x}+k\vec{y}+(1-k)\vec{z}=m\left(\frac{1}{2}\vec{y}+\frac{1}{2}\vec{z}\right)+n\left(\vec{x}+\frac{2}{3}\vec{y}\right)=n\vec{x}+\left(\frac{m}{2}+\frac{2n}{3}\right)\vec{y}+\frac{m}{2}\vec{z}$

Suy ra $\begin{cases} n=k \\ \frac{m}{2}+\frac{2n}{3}=k \\ \frac{m}{2}=1-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=k \\ 1-k+\frac{2k}{3}=k \\ \frac{m}{2}=1-k \end{cases}$, từ phương trình $1-k+\frac{2k}{3}=k \Leftrightarrow k=\frac{3}{4}$.

Vậy $\frac{SP}{SC}=\frac{3}{4}$.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Xác định góc và tính tích vô hướng của hai vectơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$.

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$

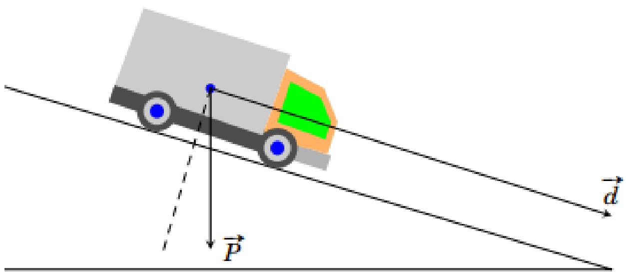
Bài tập 4 : Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5

a) Tìm góc giữa các cặp vectơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$

b) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BD}$

c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$

Bài tập 5: Cho biết A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A=\vec{F}.\vec{d}$ trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị: mét) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêm $5°$ so với phương ngang. Tính công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài $30\,\text{m}$ (làm trong kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P}=m.\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9,8\text{m/s}^2$.



Bài tập 6: Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$. Các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ có giá nằm trong (α) và $\left(\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}\right)=135°$, còn lực $\overrightarrow{F_3}$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=180^\circ$. **B.** $\alpha=0^\circ$. **C.** $\alpha=90^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3.$ Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha=30^\circ$. **B.** $\alpha=45^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=120^\circ$.

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^\circ$. **B.** $\alpha=180^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=3.$ Độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** 8. **D.** 124.

Câu 6: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;|\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\frac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^0$.

Câu 7: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4;|\vec{b}|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}\ \vec{x}=\vec{a}-2\vec{b},$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 8: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=26;|\vec{b}|=28;|\vec{a}+\vec{b}|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $BAC=BAD=60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $ASB=BSC=CSA$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN,SC) bằng:

A. 45° **B.** 30° **C.** 90° **D.** 60°

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC, AB \perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $BAC = BAD = 60^0, CAD = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

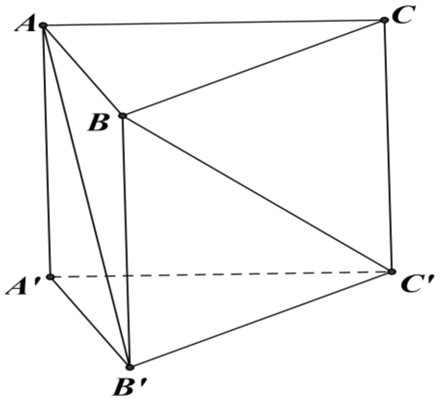
A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau **B.** AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng **D.** AB và CD cắt nhau

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 18: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC, thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - BC^2}$

B. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

C. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

D. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD, CAB = DAB = 60^0, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60^0$. **C.** $\varphi = 30^0$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45°.

a) $\vec{a}.\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\left(\vec{a} + 3\vec{b}\right).\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = -5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2 + \sqrt{2}$.

d) $\left|\vec{a} - \sqrt{2}\vec{b}\right| = 0$.

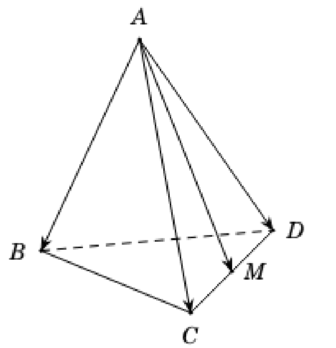
Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} = 0$.

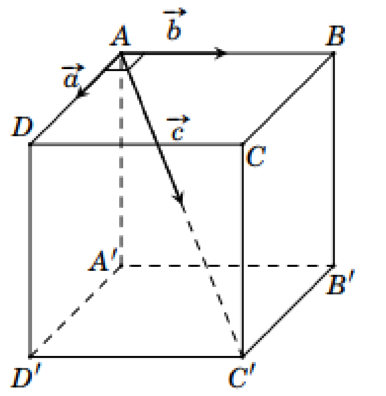
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

d) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -\frac{a^2}{2}$.



Câu 3: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N}$, $10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.



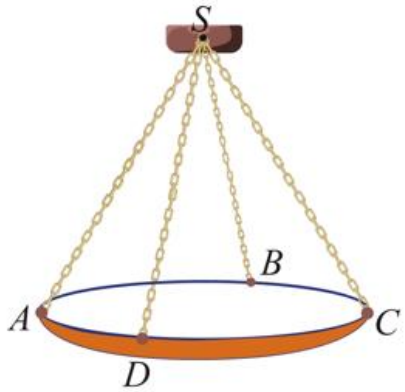
a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=20\,\text{N}$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

d) $|\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=32,59\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 4: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m=5kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA,SB,SC,SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $ASC=60^\circ$. Biết $\vec{P}=m.\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn $10\,\text{m/s}^2$, $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn bị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Khi đó:



a) $\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

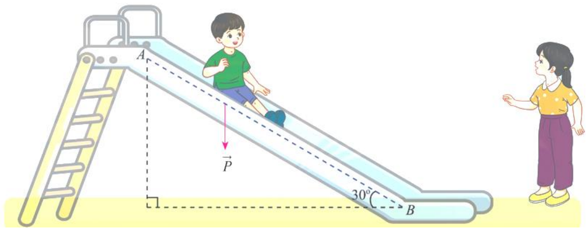
c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng $50\,N$

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}N$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)$

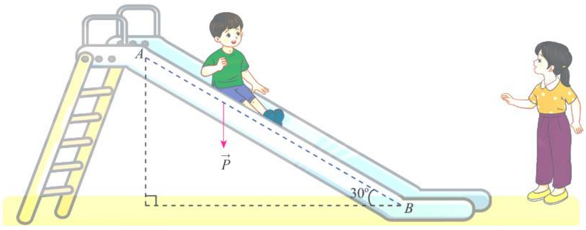
Câu 2: Một em nhỏ cân nặng $m=25$ kg trượt trên cầu trượt dài $3,5$ m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là $30°$.



Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g=9,8\,\text{m/s}^2$.

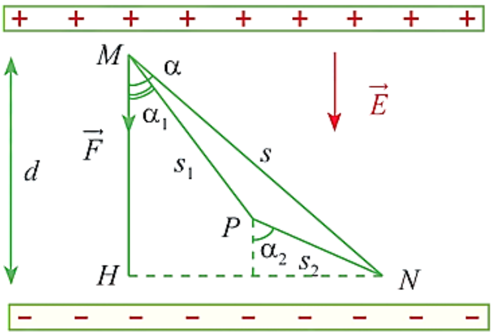
Câu 3: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Câu 4: Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ kg trượt trên cầu trượt dài $3,5$ m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là $30°$

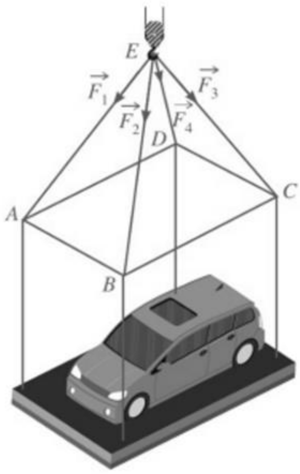


Độ lớn của trọng lực là $\vec{P} = m.\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8\,\text{m/s}^2$. Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F}.\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

Câu 5: Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP. Biết $q = 2.10^{-12}$ (C) và vectơ cường độ điện trường có độ lớn $E = 1,8.10^5$ (N/C) và $d = MH = 5$ (mm). Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Câu 6: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$, $\vec{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,N$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,N$.



----------------HẾT-----------------

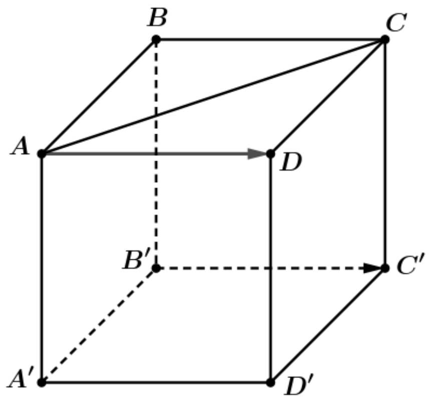
Dạng 2: Xác định góc và tính tích vô hướng của hai vectơ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

Lời giải



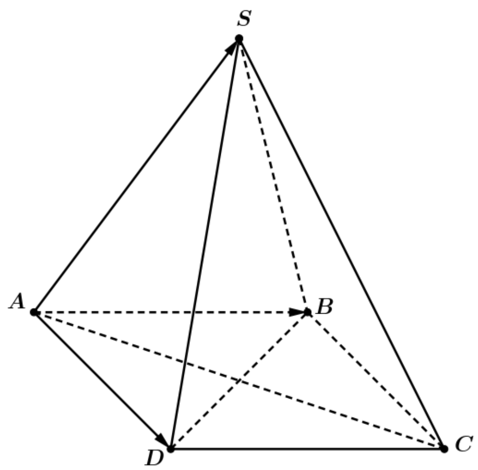
a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{B'C'}\right)=0^\circ$.

b) Tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}$. Do đó $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'D'}\right)=(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=CAD$

Tam giác ADC vuông cân tại D nên $CAD=45^\circ$. Vì vậy $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'D'}\right)=45^\circ$.

Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$.



Lời giải

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều suy ra $SAD=60^\circ$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ suy ra $\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD}\right)=SAD=60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AS}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos 60^\circ=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$.
Tam giác SAC có $SA=SC=a$ và $AC=\sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S

Suy ra $SAC=45^\circ$, do đó $\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AS}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos SAC=a.\sqrt{2}a.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

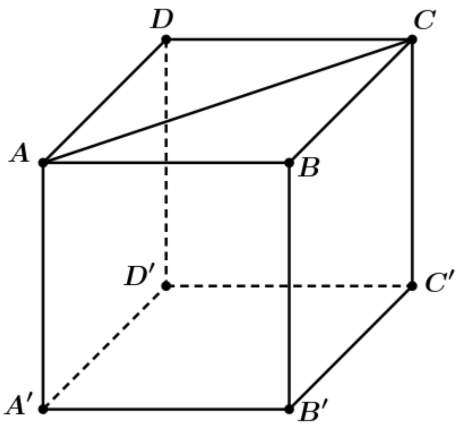
Bài tập 3: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$

b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$

Lời giải



a) Vì $AA'//CC'$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng nhau.

Suy ra $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=180^\circ$. Do đó: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{C'C}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{C'C}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=2.2.\cos 180^\circ=-4$

b) Vì $A'ADD'$ là hình chữ nhật nên $A'AD=90^\circ$
vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Do đó $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=\overline{A'AD}=90^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=2.1.\cos 90^\circ=0$

c) Vì $A'ABB'$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{BA}$.
Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $CAB=45^\circ$ và $AC=\sqrt{2}$
Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'A'}=-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=-\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\sqrt{2}.1.\cos 45^\circ=-1$.

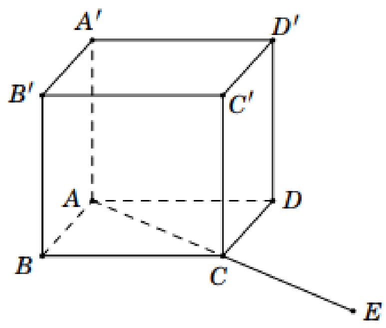
Bài tập 4 : Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5

a) Tìm góc giữa các cặp vectơ sau: $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{BD}$

b) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}$; $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BD}$

c) Chứng minh $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$

Lời giải



a) Ta có: $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=CAB=45^\circ$; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{B'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD'}\right)=90^\circ$

$\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}\right)=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ (E là điểm đối xứng của A qua C)

$\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{BC'}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AD'},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BC'},\overrightarrow{BD}\right)=C'BD$ mà tam giác $C'BD$ là tam giác đều nên khi đó ta có $C'BD=60^\circ$.

b) Ta có $AC=BD=B'D'=5\sqrt{2}$ suy ra:

- $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AC.AB.\cos45^\circ=25$
- Do AC vuông góc với $B'D'$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{B'D'}=0$
- $\overrightarrow{AD'}.\overrightarrow{BD}=AD'.BD.\cos60^\circ=5\sqrt{2}.\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}=25$

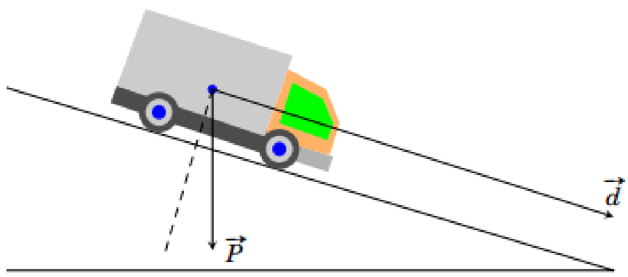
c) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD}=0$

Ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right).\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}=5^2-5^2=0$

Suy ra $\overrightarrow{AC'}$ vuông góc với $\overrightarrow{BD}$ (điều phải chứng minh)

Bài tập 5: Cho biết A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A=\vec{F}.\vec{d}$ trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị: mét) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng $1{,}5$ tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêm 5° so với phương ngang. Tính công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài $30\,\text{m}$ (làm trong kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P}=m.\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g=9{,}8\,\text{m/s}^2$.



Lời giải

Ta có 1,5 tấn $=1500$ kg.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên xe là: $\left|\vec{P}\right|=m.\left|\vec{g}\right|=1500.9,8=14700\,\text{N}$

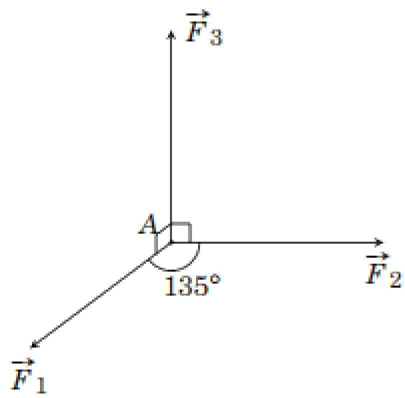
Vectơ $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chueyenr của xe có độ dài là: $\left|\vec{d}\right|=30\left(\text{m}\right)$ và $\left(\vec{P},\vec{d}\right)=90°-5°=85°$

Công sinh ra bởi trọng lực khi xe đi hết đoạn đường dốc là:

$A=\vec{P}.\vec{d}=\left|\vec{P}\right|.\left|\vec{d}\right|.\cos\left(\vec{P},\vec{d}\right)=14700.30.\cos 85°\approx 38436$ (J)

Bài tập 5: Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$. Các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ có giá nằm trong (α) và $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=135°$, còn lực $\overrightarrow{F_3}$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định cường độ hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.

Lời giải



Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của các lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ tức là $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$ ta có:

$\left|\vec{F}\right|^2=\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}\right)^2=\overrightarrow{F_1}^2+\overrightarrow{F_2}^2+\overrightarrow{F_3}^2+2.\overrightarrow{F_1}.\overrightarrow{F_2}+2.\overrightarrow{F_2}.\overrightarrow{F_3}+2.\overrightarrow{F_3}.\overrightarrow{F_1}$

$=20^2+15^2+10^2+2.20.25.\cos 135°=725-300\sqrt{2}$

Vậy $\left|\vec{F}\right|=\sqrt{725-300\sqrt{2}}\approx 17,34\,\text{N}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Lời giải

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^0\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1$. Vậy $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=180^\circ$. **B.** $\alpha=0^\circ$. **C.** $\alpha=90^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

Lời giải

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$, suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3.$ Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha=30^\circ$. **B.** $\alpha=45^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=120^\circ$.

Lời giải

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3}{3.2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^0$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^\circ$. **B.** $\alpha=180^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\vec{a}^2-\dfrac{13}{5}\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^2=0\xrightarrow{\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1}\vec{a}\vec{b}=-1$

Suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=-1\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^0$

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ và $\vec{a}.\vec{b}=3.$ Độ dài vectơ $3\vec{a}+5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** 8. **D.** 124.

Lời giải

$\left(3\vec{a}+5\vec{b}\right)^2=9\vec{a}^2+30\vec{a}\vec{b}+25\vec{b}^2=9+90+25=124\Rightarrow\left|3\vec{a}+5\vec{b}\right|=\sqrt{124}$

Câu 6: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha=\dfrac{3}{8}$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\alpha=60^0$.

Lời giải

Ta có $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{9}{2}$. Do đó: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{3}{8}$.

Câu 7: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$, . Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Ta có $\vec{x}.\vec{y}=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\right)^2+2\left(\vec{b}\right)^2-3\vec{a}.\vec{b}=4$.

$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\left(\vec{x}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+4\left(\vec{b}\right)^2-4\vec{a}.\vec{b}}=2\sqrt{3}$.

$\left|\vec{y}\right|=\sqrt{\left(\vec{y}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2-2\vec{a}.\vec{b}}=\sqrt{5}$.

Khi đó $\cos\alpha=\dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$

Câu 8: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=26;\left|\vec{b}\right|=28;\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Lời giải

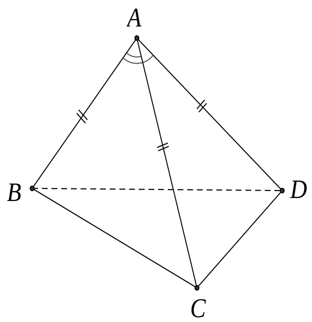
Ta có: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}=2\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$

$=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2\left(26^2+28^2\right)-48^2=616\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{616}.$

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $BAC=BAD=60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

Lời giải



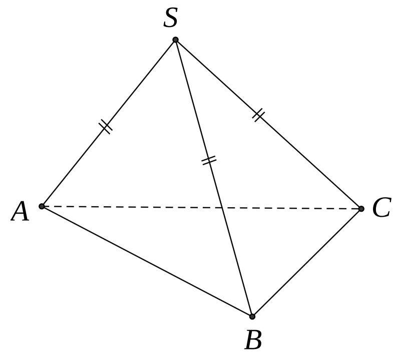
Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0=0$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90^0$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $ASB=BSC=CSA$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=SA.SC.\cos ASC-SA.SB.\cos ASB=0$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right)=90^0$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN,SC) bằng:

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

Lời giải

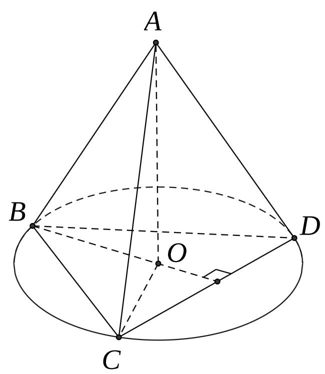
Ta có: $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow AC^2=2a^2=SA^2+SC^2\Rightarrow\Delta SAC$ vuông tại S.

Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{NM},\overrightarrow{SC}\right)=90°\Rightarrow(MN,SC)=90°$

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=CO.CD.\cos 30^0-CA.CD.\cos 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{2}=0.$

Suy ra $AO\perp CD$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB\perp AC,\ AB\perp BD$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

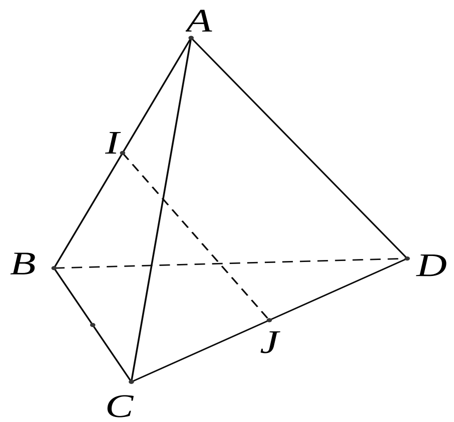
Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}\Rightarrow AB\perp PQ$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $BAC=BAD=60^0, CAD=90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD. Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

Vì tam giác ABC có $AB=AC$ và $BAC=60°$ nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI\perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI\perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau **B.** AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng **D.** AB và CD cắt nhau

Lời giải

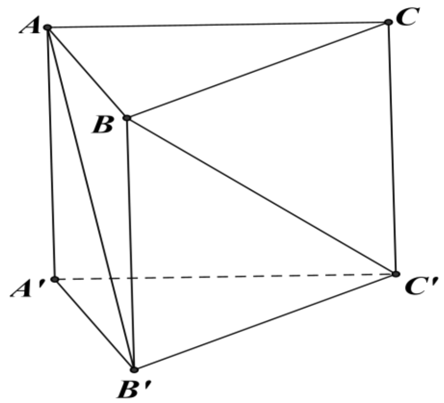
Chọn B

Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0 - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0 = a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2} = 0$

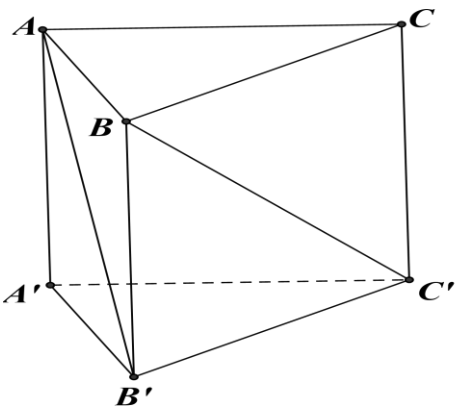
Vậy $AB \perp CD$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

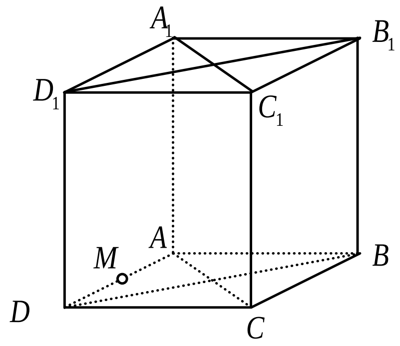
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \frac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(AB', BC'\right) = 60°$.

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $\frac{3}{2}a^2$.

Lời giải



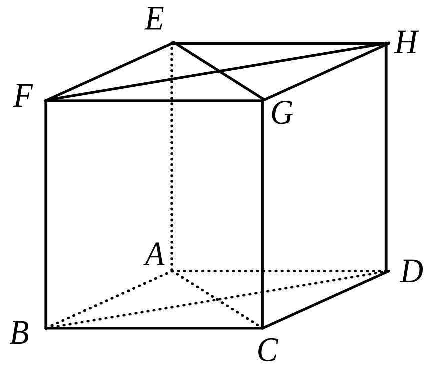
Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}\right)$

$= \overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD} = -a^2 + a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$

Câu 18: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Lời giải



Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = BAC = 45°$

Câu 19: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AD},\ \vec{c} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a,\ \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{4}a^2 + \dfrac{1}{4}a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = a^2 - \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 = a^2 \Rightarrow \cos\left(MN; AC'\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AC'}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2.6}{16}} = a\frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right) = 0 + AA'.CM = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \frac{\left|\frac{3a^2}{4}\right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC, thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - BC^2}$ **B.** $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

C. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$ **D.** $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Lời giải

$S_{ABC} = \frac{1}{2}ABAC\sin A = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AB^2\sin^2 A} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2\left(1-\cos^2 A\right)}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - \left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

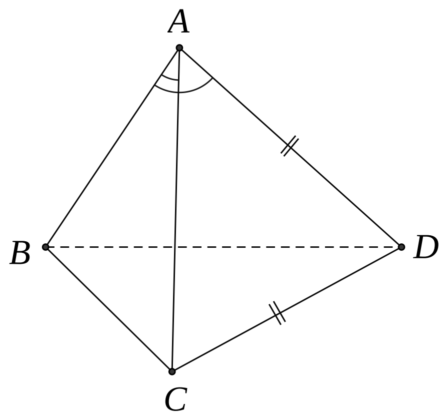
Lời giải

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ $(\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) = a^2$ (do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$)

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC = \frac{3}{2}AD, CAB = DAB = 60^0, CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60^0$. **C.** $\varphi = 30^0$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

Lời giải



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

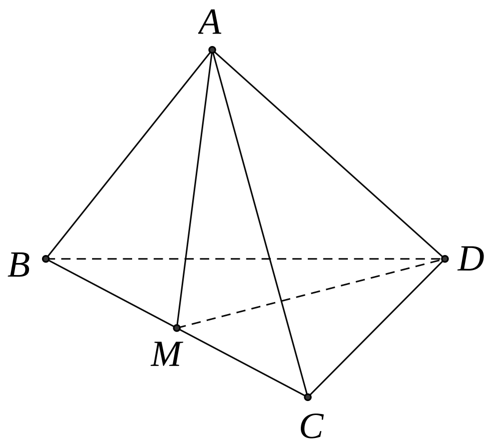
$=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0=AB.AD.\dfrac{1}{2}-AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}AB.AD=-\dfrac{1}{4}AB.CD.$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{4}AB.CD}{AB.CD}=-\dfrac{1}{4}$. Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Giả sử cạnh của tứ diện là a. Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AM.\cos 30^0-AB.AD.\cos 60^0$

$=a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\frac{1}{2}=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}$.

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\left(AB,DM\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45°.

a) $\vec{a}.\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=-5+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=2+\sqrt{2}$.

d) $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=0$.

Lời giải

a) Đúng: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Đúng: $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2+\vec{a}.\vec{b}-6\left|\vec{b}\right|^2=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-6=-5+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Sai: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1+2.\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}$ suy ra $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

d) Sai: $\left(\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\sqrt{2}\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}^2=1+2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}+2=2$ suy ra $\left|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}\right|=\sqrt{2}$.

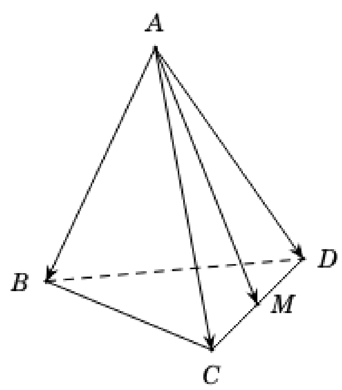
Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$

d) $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=-\frac{a^2}{2}$.



Lời giải

a) Đúng: Tam giác ACD đều suy ra AM vuông góc với CD nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}=0$.

b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}$.

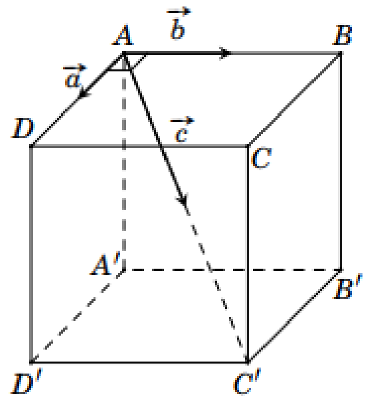
Mặt khác AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=90^\circ$.

d) Ta có $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}.\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}\right)=\dfrac{a^2}{2}$

Câu 3: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N}$, $10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.



a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=20\,\text{N}$.

c) $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

d) $|\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=32,59\,\text{N}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\vec{a}\perp\vec{b}$; $\cos\left(\vec{a},\vec{c}\right)=\cos DAC'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\cos BAC'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Sai: Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$

b) Sai: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Đúng: Ta có $\vec{a}+\vec{c}^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}.\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=10^2+2.10.20.\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$.

Mặt khác $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{b}.\vec{c}+\left|\vec{c}\right|^2=10^2+2.10.20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\left|\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{500+\dfrac{400\sqrt{3}}{3}}$. Vậy $\left|\vec{a}+\vec{c}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$.

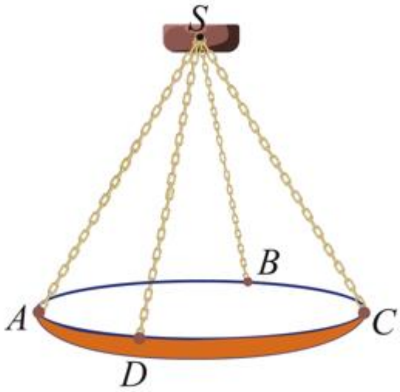
d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Do đó: $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \Leftrightarrow |\vec{m}|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2 \Leftrightarrow |\vec{m}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}.\vec{b}+2\vec{b}.\vec{c}+2\vec{c}.\vec{a}$

$$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=10^2+10^2+20^2+0+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=10^2+10^2+20^2+0+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}}+2.10.20.\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |\vec{m}|\approx 32,59.$$

Câu 4: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m=5\,kg$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $ASC=60^\circ$. Biết $\vec{P}=m.\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2, $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn bị là N , m là khối lượng của vật có đơn vị kg . Khi đó:



a) $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng $50\,N$

d) Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\dfrac{25\sqrt{3}}{2}N$

Lời giải

a) Đúng: $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng

b) Đúng: $\left|\overrightarrow{SA}\right|=\left|\overrightarrow{SB}\right|=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\left|\overrightarrow{SD}\right|$

c) Đúng: Độ lớn trọng lực tác động lên đèn chùm là: $P=mg=5.10=50\,N$

d) Sai: Ta có $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều => $SA=SB=SC=SD$ mà $ASC=60^\circ$

Vậy tam giác SAC đều. Gọi O là trung điểm AC .

Hợp lực của 4 sợi xích là: $\vec{F}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}+2\overrightarrow{SO}=4\overrightarrow{SO}$

Để đèn chùm đứng yên thì hợp lực của các sợi xích phải cân bằng với trọng lực hay $4\overrightarrow{SO}=\vec{P}$ hay $4SO=P \Leftrightarrow SO=12,5$

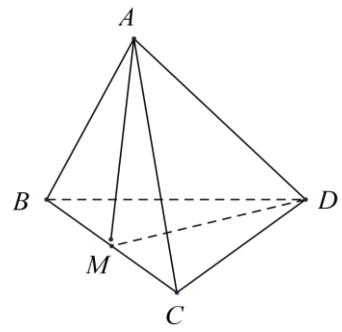
Xét tam giác đều SAC có $SA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}SO=\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$

Vậy độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích là $\dfrac{25\sqrt{3}}{4}N$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)$

Lời giải



Xét tứ diện $ABCD$ cạnh a ta có: $DM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

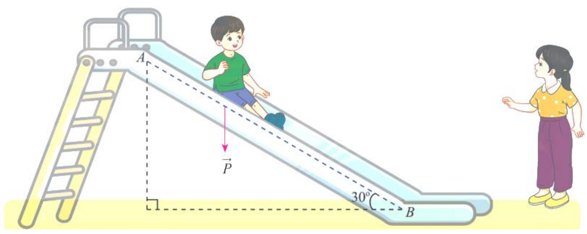
Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DM}}{a^2}$.

Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}$: ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{4}$.

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 2: Một em nhỏ cân nặng $m=25$ kg trượt trên cầu trượt dài $3{,}5$ m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là $30°$.



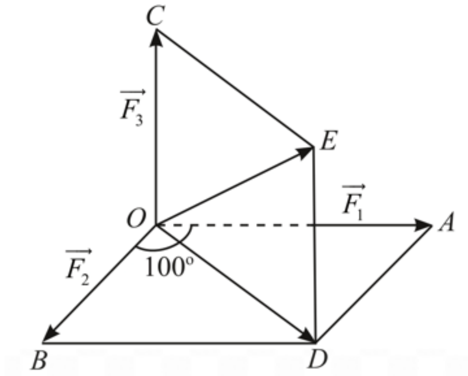
Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P}=m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g=9{,}8\,\text{m/s}^2$.

Lời giải

Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là: $P=mg\cos 60°=25.9{,}8\cdot\dfrac{1}{2}=122{,}5\,\text{N}$

Câu 3: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc $100°$ và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Lời giải



Gọi $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là $25\,N, 12\,N, 4\,N$.

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{F_1}, \overrightarrow{OB} = \vec{F_2}, \overrightarrow{OC} = \vec{F_3}$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là $\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2.BD.OB.\cos OBD = OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100°$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$ suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

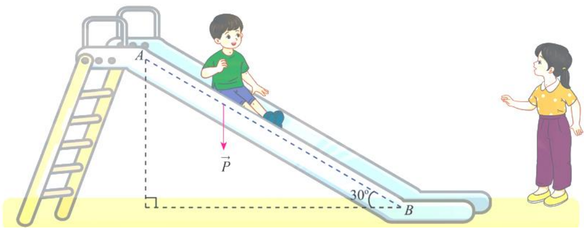
Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100°$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2.OA.OB.\cos 100°}$

$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26{,}092.$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26\,N$.

Câu 4: Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ kg trượt trên cầu trượt dài $3{,}5$ m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là $30°$



Độ lớn của trọng lực là $\vec{P} = m.\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$. Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F}.\vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

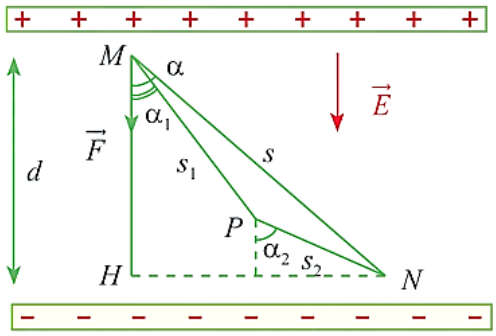
Lời giải

Độ lớn trọng lực tác dụng lên em nhỏ là: $P = mg\cos 60° = 25.9,8\cdot\dfrac{1}{2} = 122,5\,\text{N}$

Công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt là:

$A = \vec{F}.\vec{d} = Pd\cos 60° = 122,5.3,5.\dfrac{1}{2} = 214,375\,(\text{J})$

Câu 5: Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP. Biết $q = 2.10^{-12}$ (C) và vectơ cường độ điện trường có độ lớn $E = 1,8.10^{5}$ (N/C) và $d = MH = 5$ (mm). Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Lời giải

Đổi $5\text{ mm} = 0,005\,\text{m}$

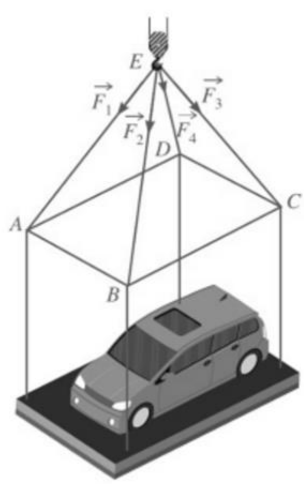
Gọi K là điểm thuộc MH sao cho $PK \perp MH$, L là điểm thuộc HN sao cho $PL \perp HN$

Ta có: $A_{MNP} = A_{MP} + A_{PN} = F_d.MP\cos\alpha_1 + F_d.PN\cos\alpha_2$

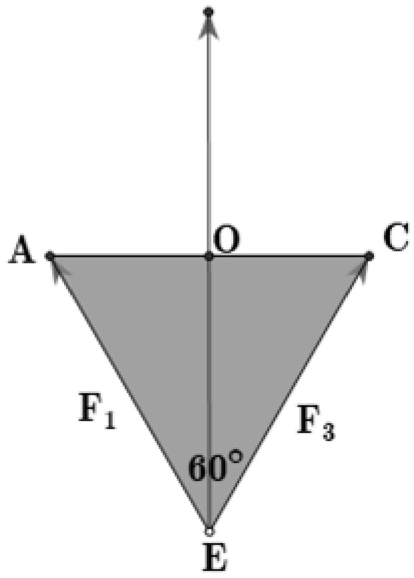
$\Leftrightarrow A_{MNP} = qE.\dfrac{MK}{\cos\alpha_1}.\cos\alpha_1 + qE.\dfrac{PL}{\cos\alpha_2}.\cos\alpha_2$

$\Leftrightarrow A_{MNP} = qE(MK + PL) = qE(MK + KH) = qE.MH = 2.10^{-12}.1,8.10^{5}.0,005 = 1,8.10^{-9}\,(\text{J})$

Câu 6: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng $60°$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$, $\vec{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,N$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,N$.



Lời giải



Ta có $AEC = 60^\circ$

Ta có $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=2\overrightarrow{EO}\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=2\left|\overrightarrow{EO}\right|\Rightarrow\left|\overrightarrow{F_1}\right|\sqrt{3}=4700\sqrt{3}$

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}=\left|\overrightarrow{F_2}\right|\sqrt{3}=4700\sqrt{3}$

Vậy trọng lực ôtô là: $\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right)-$(trọng lực khung sắt) $\approx 13281\left(N\right)$

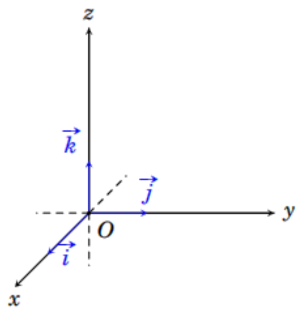
----------------HẾT-----------------

BÀI 02 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hệ trục toạ độ trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.



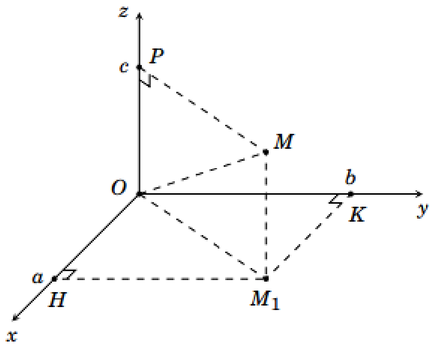
Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$ hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.
- Điểm O được gọi là gốc toạ độ.
- Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2 Toạ độ của điểm

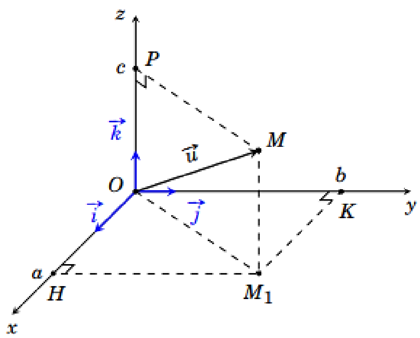
Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm M. Toạ độ điểm M được xác định như sau:



- Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy tìm hoành độ a, tung độ b của điểm M_1.
- Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.
- Bộ số $(a;b;c)$ là toạ độ điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a;b;c)$

3 Toạ độ của vectơ

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$



- Toạ độ điểm M cũng là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$
- Cho $\vec{u}$. Dựng điểm $M(a;b;c)$ thoả mãn $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ thì toạ độ của điểm M là toạ độ của $\vec{u}$.
  Theo hình vẽ thì $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$
  Suy ra $\vec{u} = (a;b;c) = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$
- Toạ độ các vectơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Toạ độ điểm, toạ độ vectơ

Khi xác định toạ độ điểm, toạ độ vectơ thì ta cần chú ý đến các kết quả sau:

- $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (a;b;c)$
- $\vec{u}(u_1;u_2;u_3) = \vec{v}(v_1;v_2;v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$
- $\overrightarrow{OM} = (a;b;c)$ thì $M(a;b;c)$
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- Chiếu điểm $M(a;b;c)$ lên mặt phẳng toạ độ hoặc hệ trục toạ độ thì thành phần bị khuyết bằng 0

  Chẳng hạn: $M(1;2;3)$ chiếu lên Oxy thì $z = 0$ nên hình chiếu khi đó là $M_1(1;2;0)$
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3;-2;-1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các mặt phẳng toạ độ. Tìm toạ độ các điểm A_1, A_2, A_3

Bài tập 2: Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định tọa độ các điểm A, B, B'.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 8, AD = 6$, $AA' = 4$. Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2;-1;4), B(3;5;-1), C(-1;1;2)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Tìm toạ độ điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$

Bài tập 6: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ lên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;2;0)$. **B.** $(0;0;5)$. **C.** $(1;0;0)$. **D.** $(0;2;5)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;-1;3)$ trên mặt phẳng Oyz là

A. $(0;-1;0)$ **B.** $(-2;0;0)$ **C.** $(0;-1;3)$ **D.** $(-2;-1;0)$

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy). Toạ độ của H là

A. $H(-1;-2;3)$. **B.** $H(0;0;3)$. **C.** $H(1;0;0)$. **D.** $H(1;2;0)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz).

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(1;1;0)$. **D.** $(0;1;1)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

A. $(-2;-1;-3)$. **B.** $(-3;2;-1)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vector $\vec{a}(1;1;-2),\vec{b}=(-2;1;4)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$.

A. $(5;-1;-10)$. **B.** $(0;3;0)$. **C.** $(-3;3;6)$. **D.** $(5;-1;10)$.

Câu 8: Cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$. **B.** $N(0;-1;1)$. **C.** $P(0;-1;0)$. **D.** $Q(0;0;1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên mặt Oxz có tọa độ là

A. $(0;2;5)$. **B.** $(0;2;0)$. **C.** $(1;0;5)$. **D.** $(0;0;5)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-2;1),\vec{b}=(0;1;3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

A. $(2;-3;2)$. **B.** $\left(1;-\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $(2;-1;4)$. **D.** $(-2;3;2)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Véctơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

A. $(3;0;-2)$. **B.** $(-1;-2;6)$. **C.** $(1;0;-6)$. **D.** $(1;2;-6)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(1;0;3)$. **B.** $(1;0;0)$. **C.** $(1;-2;0)$. **D.** $(0;-2;3)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véctơ là $\vec{u}=(2;1;-1)$ và $\vec{v}=(1;3;1)$. Tọa độ của véctơ $(\vec{u}+2\vec{v})$ tương ứng là

A. $(3;4;0)$. **B.** $(1;-2;-2)$. **C.** $(4;7;1)$. **D.** $(5;5;-1)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và điểm $B(3;1;1)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua B là

A. $(1;-2;-4)$. **B.** $(0;3;-1)$. **C.** $(4;3;2)$. **D.** $(0;-1;3)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(2;-3;1)$. **B.** $(1;-3;2)$. **C.** $(2;1;-3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

A. $M=(0;2;1)$. **B.** $M=(1;2;0)$. **C.** $M=(2;1;0)$. **D.** $M=(2;0;1)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có toạ độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $D(1;1;0)$. **B.** $D(0;2;-1)$. **C.** $D(4;4;1)$. **D.** $D(1;3;-1)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$ và $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$

A. $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(-1;-2;3)$. **C.** $\vec{u}=(-1;6;3)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;7)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$ và $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$

A. $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(-1;-2;3)$. **C.** $\vec{u}=(-1;6;3)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;7)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;0;0)$; $N(0;-3;0)$; $P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

A. $(-2;-3;4)$. **B.** $(-2;-3;-4)$. **C.** $(2;3;4)$. **D.** $(3;4;2)$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1), B(-1;2;1)$. Tìm tọa độ của điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B?

A. $A'(3;4;-3)$. **B.** $A'(-4;3;1)$. **C.** $A'(1;3;2)$. **D.** $A'(5;0;1)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4;1;-5)$, $B(2;-4;7)$, $C(3;-2;9)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là

A. $D(2;3;-3)$. **B.** $D(-3;3;-3)$. **C.** $D(-3;-3;3)$. **D.** $D(-6;5;-12)$.

Câu 23: Trong không gia $Oxyz$, cho véctơ $\vec{a}=(-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ là:

A. $(-1;-8;2)$. **B.** $(7;4;-4)$. **C.** $(1;8;-2)$. **D.** $(-7;-4;4)$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm M qua trục Oy.

A. $M'(2;1;-3)$. **B.** $M'(-2;-1;3)$. **C.** $M'(2;-1;-3)$. **D.** $M'(-2;-1;-3)$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;3;5)$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+2b+2c$ bằng:

A. $\frac{25}{2}$. **B.** $-\frac{25}{2}$. **C.** 50. **D.** $\frac{27}{2}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tìm toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

A. $M\left(4;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$. **B.** $M\left(4;\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$. **C.** $M\left(4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(-4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tìm m để 4 điểm O,A,B,C đồng phẳng.

A. $m=-7$. **B.** $m=-14$. **C.** $m=7$. **D.** $m=14$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Điểm D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $D(-4;8;-3)$. **B.** $D(-2;8;-3)$. **C.** $D(-4;8;-5)$. **D.** $D(-2;2;5)$.

Câu 29: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;2;-1); B(2;1;5); C(1;6;2)$ và hai điểm M,N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$. Đường thẳng MN luôn đi qua điểm I có tọa độ

A. $(2;3;5)$. **B.** $(2;0;3)$. **C.** $(2;-1;3)$. **D.** $(1;3;2)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3)$, $B(1;0;2)$, $C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\frac{11}{5}$. **D.** $x+y=\frac{11}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(-2;1;-3), \vec{b}=(-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

a) Tọa độ vectơ $\vec{a}-2\vec{b}=(0;1;-1)$.

b) Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0),\vec{c}=(1;1;1)$.

a) Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

b) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

c) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

d) Tọa độ vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ bằng $(-2;4;-1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có toạ độ $A(2;1;0),C(0;3;0),C'(-1;2;1),D'(0;-2;0)$.

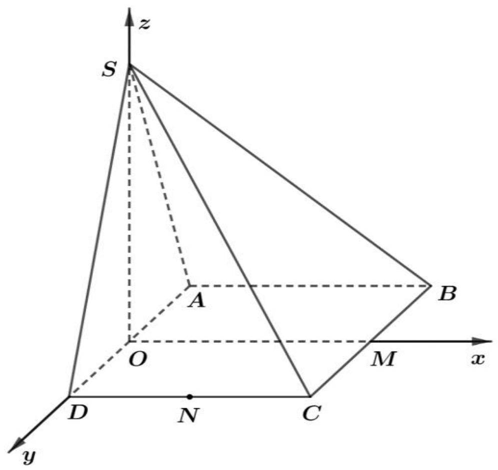
a) Tọa độ các điểm A',B' là $A'(1;0;-1),B'(0;4;2)$.

b) Tọa độ các điểm B,D là $B(1;5;1),D(1;-1;-1)$.

c) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O,M và N lần lượt là trung điểm của AD,BC và CD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



a) Tọa độ các điểm A,B là $A\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right),B\left(1;-\dfrac{1}{2};0\right)$.

b) Tọa độ các điểm C,D là $C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right),D\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$.

c) Tọa độ điểm S là $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Tọa độ các điểm M,N là $M(1;0;0),N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}-4\vec{j}$ và $\vec{b}=(m-n;4m-6n;n^2-3m+2)$, với m,n là tham số.

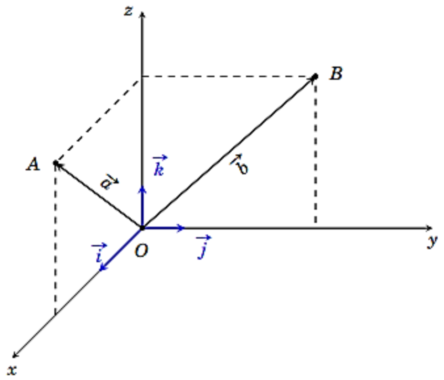
a) Tọa độ $\vec{a}=(1;3;-4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì $A(1;-4;3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ thì $m+n=9$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;2;0),\vec{b}=\ 2\vec{j}+2\vec{k}$. Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



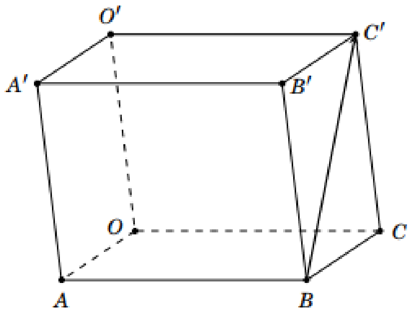
a) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$.

b) Toạ độ $\vec{b}=(0;2;2)$.

c) Toạ độ $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)$

d) Góc $AOB=45^{\circ}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1),B(0;3;0),\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)$ Gọi H,K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.



a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$

b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.

c) Tọa độ véc to $\overrightarrow{AB'}=(-2;3;-6)$.

d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK}=(-1;2;-1)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

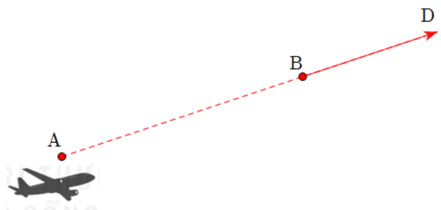
Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;-2)$, $B(2;-3;5)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là $(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng?

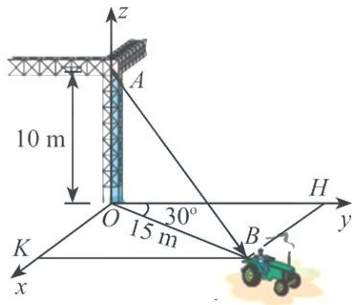
Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(4;2;1)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm được tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a+b+c=?$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

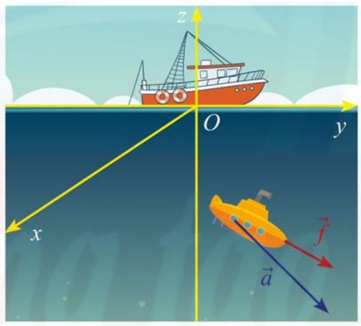
Câu 5: Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo $D(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z=?$



Câu 6: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}=(a;b;c)$. Khi đó tính $a+c$



Câu 7: Một thiết bị thăm dò đáy biển như hình vẽ được đẩy bởi một lực $\vec{f}=(5;4;-2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a}=(70;20;-40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



Câu 8: Cho biết máy bay A đang bay với vectơ vận tốc $\vec{a}=(300;200;400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.

Tính tốc độ của máy bay B.

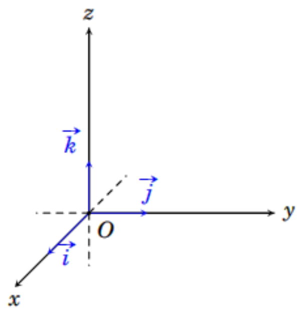
----------------HẾT----------------

BÀI 02 TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hệ trục toạ độ trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.



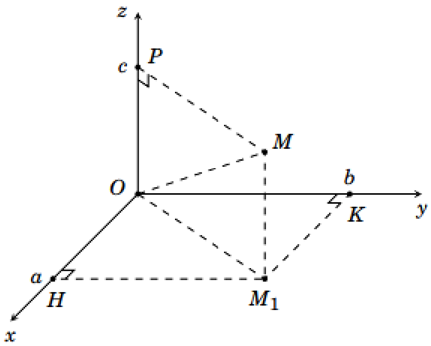
Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz.

- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$ hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.
- Điểm O được gọi là gốc toạ độ.
- Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

2 Toạ độ của điểm

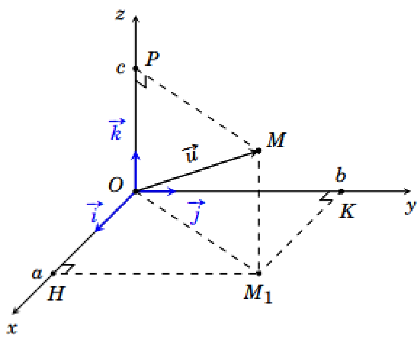
Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm M. Toạ độ điểm M được xác định như sau:



- Xác định hình chiếu M_1 của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy tìm hoành độ a, tung độ b của điểm M_1.
- Xác định hình chiếu P của điểm M trên trục cao Oz, điểm P ứng với số c trên trục Oz. Số c là cao độ của điểm M.
- Bộ số $(a;b;c)$ là toạ độ điểm M trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, kí hiệu là $M(a;b;c)$

3 Toạ độ của vectơ

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$



- Toạ độ điểm M cũng là toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$
- Cho $\vec{u}$. Dựng điểm $M(a;b;c)$ thoả mãn $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ thì toạ độ của điểm M là toạ độ của $\vec{u}$.

  Theo hình vẽ thì $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OP} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$

  Suy ra $\vec{u} = (a;b;c) = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k}$
- Toạ độ các vectơ đơn vị lần lượt là: $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Toạ độ điểm, toạ độ vectơ

Khi xác định toạ độ điểm, toạ độ vectơ thì ta cần chú ý đến các kết quả sau:

- $\vec{u} = a.\vec{i} + b.\vec{j} + c.\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (a;b;c)$
- $\vec{u}(u_1;u_2;u_3) = \vec{v}(v_1;v_2;v_3) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$
- $\overrightarrow{OM} = (a;b;c)$ thì $M(a;b;c)$
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- Chiếu điểm $M(a;b;c)$ lên mặt phẳng toạ độ hoặc hệ trục toạ độ thì thành phần bị khuyết bằng 0

  Chẳng hạn: $M(1;2;3)$ chiếu lên Oxy thì $z = 0$ nên hình chiếu khi đó là $M_1(1;2;0)$
- Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3;-2;-1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các mặt phẳng toạ độ. Tìm toạ độ các điểm A_1, A_2, A_3

Lời giải

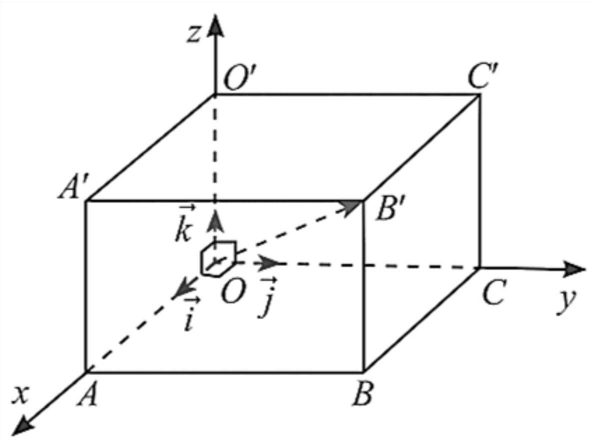
Toạ độ của điểm $A_1 = (3;-2;0)$

Toạ độ của điểm $A_2 = (3;0;-1)$

Toạ độ của điểm $A_3 = (0;-2;-1)$

Bài tập 2: Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định tọa độ các điểm A, B, B'.

Lời giải

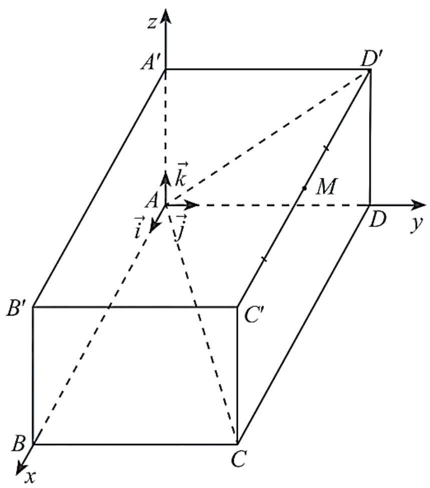


Ta có:

- $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ suy ra $A(4;0;0)$
- $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$ suy ra $B(4;6;0)$
- $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OO'} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$ suy ra $B'(4;6;3)$

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $AB=8, AD=6$, $AA'=4$. Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Lời giải



Để tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=8=8\left|\vec{i}\right|$ nên $\overrightarrow{AB}=8\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB}=8\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD}=0\vec{i}+6\vec{j}+0\vec{k},\overrightarrow{AA'}=0\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=8\vec{i}+6\vec{j}+0\vec{k}$.

Trong hình bình hành $AA'C'C$ ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=8\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(8;0;0);\overrightarrow{AC}=(8;6;0);\overrightarrow{AC'}=(8;6;4)$.

Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)=\frac{1}{2}(8\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}+6\vec{j}+4\vec{k})=4\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(4;6;4)$.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm không thẳng hàng $A(2;-1;4),B(3;5;-1),C(-1;1;2)$.

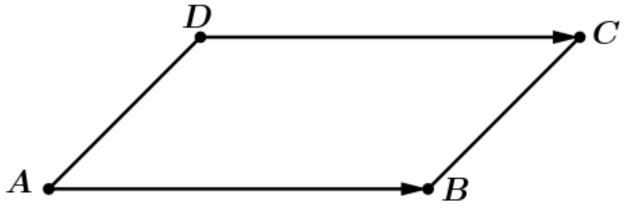
a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Vì $A(2;-1;4)$ và $B(3;5;-1)$ nên $\overrightarrow{AB}=(3-2;5-(-1);-1-4)$ nên $\overrightarrow{AB}=(1;6;-5)$.

b) Do ba điểm A,B,C không thẳng hàng nên để $ABCD$ là hình bình hành thì điểm D phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.



Gọi $(x_D; y_D; z_D)$ là toạ độ điểm D.

Ta có $\overrightarrow{DC} = (-1 - x_D; 1 - y_D; 2 - z_D) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x_D = 1 \\ 1 - y_D = 6 \\ 2 - z_D = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -5 \\ z_D = 7. \end{cases}$

Vậy $D(-2;-5;7)$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Tìm toạ độ điểm E thỏa nãm đẳng thức $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB}$

Lời giải

Gọi $E(x; y; z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE} = (x - 7; y - 4; z + 2)$ và $2\overrightarrow{EB} = (2 - 2x; 4 - 2y; -6 - 2z)$

Khi đó $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7 = 2 - 2x \\ y - 4 = 4 - 2y \\ z + 2 = -6 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{8}{3} \\ z = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$

Vậy toạ độ của điểm E thoả mãn hệ thức là $E\left(3; \dfrac{8}{3}; -\dfrac{8}{3}\right)$

Bài tập 6: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$ $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{AC'} = (3;5;-6)$, $\overrightarrow{AB} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{AD} = (0;-1;0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'} = (2;5;-7)$.

Suy ra $A'(3;5;-6)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ lên trục Ox có tọa độ là

A. $(0;2;0)$. **B.** $(0;0;5)$. **C.** $(1;0;0)$. **D.** $(0;2;5)$.

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ lên trục Ox có tọa độ là $(1;0;0)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;-1;3)$ trên mặt phẳng Oyz là

A. $(0;-1;0)$ **B.** $(-2;0;0)$ **C.** $(0;-1;3)$ **D.** $(-2;-1;0)$

Lời giải

Tọa độ hình chiếu của điểm $A(-2;-1;3)$ trên mặt phẳng Oyz là $(0;-1;3)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy). Toạ độ của H là

A. $H(-1;-2;3)$. **B.** $H(0;0;3)$. **C.** $H(1;0;0)$. **D.** $H(1;2;0)$.

Lời giải

Toạ độ điểm H là $H(1;2;0)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Lời giải

Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ $(1;2;3)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz).

A. $(1;0;1)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(1;1;0)$. **D.** $(0;1;1)$.

Lời giải

Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oxz) là $H(1;0;1)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của $\vec{a}$ là

A. $(-2;-1;-3)$. **B.** $(-3;2;-1)$. **C.** $(2;-3;-1)$. **D.** $(-1;2;-3)$.

Lời giải

Do đó, $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}=(-1;2;-3)$

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai vector $\vec{a}(1;1;-2),\vec{b}=(-2;1;4)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}.$

A. $(5;-1;-10)$. **B.** $(0;3;0)$. **C.** $(-3;3;6)$. **D.** $(5;-1;10)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\vec{a}(1;1;-2)\\ \vec{b}=(-2;1;4)\end{cases}\Rightarrow \vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}=(5;-1;-10)$.

Câu 8: Cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0)$. **B.** $N(0;-1;1)$. **C.** $P(0;-1;0)$. **D.** $Q(0;0;1)$.

Lời giải

Ta có hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên mặt Oxz có tọa độ là

A. $(0;2;5)$. **B.** $(0;2;0)$. **C.** $(1;0;5)$. **D.** $(0;0;5)$.

Lời giải

Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;5)$ trên mặt Oxz có tọa độ là $(1;0;5)$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;-2;1),\vec{b}=(0;1;3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$ là

A. $(2;-3;2)$. **B.** $\left(1;-\frac{1}{2};2\right)$. **C.** $(2;-1;4)$. **D.** $(-2;3;2)$.

Lời giải

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(2;-1;4)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(2;1;-4)$. Véctơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ

A. $(3;0;-2)$. **B.** $(-1;-2;6)$. **C.** $(1;0;-6)$. **D.** $(1;2;-6)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2-1;1-(-1);-4-2)=(1;2;-6)$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(1;0;3)$. **B.** $(1;0;0)$. **C.** $(1;-2;0)$. **D.** $(0;-2;3)$.

Lời giải

Để tìm tọa độ hình chiếu của điểm $A(1;-2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) ta chỉ cần giữ nguyên tung độ và cao độ, cho hoành độ bằng 0.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véctơ là $\vec{u}=(2;1;-1)$ và $\vec{v}=(1;3;1)$. Tọa độ của véctơ $(\vec{u}+2\vec{v})$ tương ứng là

A. $(3;4;0)$. **B.** $(1;-2;-2)$. **C.** $(4;7;1)$. **D.** $(5;5;-1)$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}+2\vec{v}=(4;7;1)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;0)$ và điểm $B(3;1;1)$. Tọa độ điểm đối xứng với A qua B là

A. $(1;-2;-4)$. **B.** $(0;3;-1)$. **C.** $(4;3;2)$. **D.** $(0;-1;3)$.

Lời giải

Gọi $A'(x;y;z)$ là điểm đối xứng với A qua $B \Leftrightarrow B$ là trung điểm đoạn thẳng AA'

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3=\dfrac{2+x}{2} \\ 1=\dfrac{-1+y}{2} \\ 1=\dfrac{0+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}. \text{ Suy ra } A'(4;3;2).$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vectơ $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị là $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(2;-3;1)$. **B.** $(1;-3;2)$. **C.** $(2;1;-3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}=2\vec{i}-3\vec{j}+1.\vec{k} \Rightarrow \vec{a}=(2;-3;1)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$. Tọa độ điểm M là

A. $M=(0;2;1)$. **B.** $M=(1;2;0)$. **C.** $M=(2;1;0)$. **D.** $M=(2;0;1)$.

Lời giải

Vì điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{j}$ nên tọa độ điểm $M=(2;1;0)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình bình hành $ABCD$ và các đỉnh có toạ độ lần lượt là $A(3;1;2), B(1;0;1), C(2;3;0)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $D(1;1;0)$. **B.** $D(0;2;-1)$. **C.** $D(4;4;1)$. **D.** $D(1;3;-1)$.

Lờigiải

Vì $ABCD$ là hình bình hành suy ra $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-3=1 \\ y_D-1=3 \\ z_D-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=4 \\ y_D=4 \\ z_D=1 \end{cases} \Rightarrow D(4;4;1)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$ và $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$

A. $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(-1;-2;3)$. **C.** $\vec{u}=(-1;6;3)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;7)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{i}=(1;0;0)$; $\vec{j}=(0;1;0)$; $\vec{k}=(0;0;1)$ nên $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}\Rightarrow\vec{b}=(2;0;-4)$.

Suy ra $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}=(-1;2;7)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$ và $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}-\vec{b}$

A. $\vec{u}=(-1;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(-1;-2;3)$. **C.** $\vec{u}=(-1;6;3)$. **D.** $\vec{u}=(-1;2;7)$.

Lời giải

Ta có: $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{k}\Rightarrow\vec{b}=(2;0;-4)\Rightarrow\vec{a}-\vec{b}=(-1;2;7)$

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;0;0)$; $N(0;-3;0)$; $P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

A. $(-2;-3;4)$. **B.** $(-2;-3;-4)$. **C.** $(2;3;4)$. **D.** $(3;4;2)$.

Lời giải

Gọi $Q(x;y;z)$ khi đó $\overrightarrow{MN}=(-2;-3;0)$; $\overrightarrow{QP}=(-x;-y;4-z)$.

Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=-2\\-y=-3\\4-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\\z=4\end{cases}$. Vậy $Q(2;3;4)$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1),B(-1;2;1)$. Tìm tọa độ của điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B?

A. $A'(3;4;-3)$. **B.** $A'(-4;3;1)$. **C.** $A'(1;3;2)$. **D.** $A'(5;0;1)$.

Lời giải

Điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B nên B là trung điểm của đoạn AA'.

Do đó $\begin{cases}x_{A'}=2x_B-x_A=-4\\y_{A'}=2y_B-y_A=3\\z_{A'}=2z_B-z_A=1\end{cases}\Rightarrow A'(-4;3;1)$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4;1;-5)$, $B(2;-4;7)$, $C(3;-2;9)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là

A. $D(2;3;-3)$. **B.** $D(-3;3;-3)$. **C.** $D(-3;-3;3)$. **D.** $D(-6;5;-12)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;2;2)$; $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D+4=1\\y_D-1=2\\z_D+5=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-3\\y_D=3\\z_D=-3\end{cases}$.

Câu 23: Trong không gia $Oxyz$, cho véctơ $\vec{a}=(-3;2;1)$ và điểm $A(4;6;-3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ là:

A. $(-1;-8;2)$. **B.** $(7;4;-4)$. **C.** $(1;8;-2)$. **D.** $(-7;-4;4)$.

Lời giải

Gọi $B(x;y;z)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=(x-4;y-6;z+3)$. Khi đó $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=-3\\y-6=2\\z+3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=8\\z=-2\end{cases}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;-3)$. Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm M qua trục Oy.

A. $M'(2;1;-3)$. **B.** $M'(-2;-1;3)$. **C.** $M'(2;-1;-3)$. **D.** $M'(-2;-1;-3)$.

Lời giải

Điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có điểm đối xứng qua trục Oy là điểm $M'(-x_0;y_0;-z_0)$.

Vậy điểm $M(2;-1;-3)$ có điểm đối xứng qua trục Oy là điểm $M'(-2;-1;3)$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;3;5)$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó, giá trị của biểu thức $a+2b+2c$ bằng:

A. $\frac{25}{2}$. **B.** $-\frac{25}{2}$. **C.** 50. **D.** $\frac{27}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow(1-a;2-b;-c)=(3+3a;3b-9;3c-15)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-a=3+3a\\2-b=3b-9\\-c=3c-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{11}{4}\\c=\frac{15}{4}\end{cases}$$
. Khi đó $a+2b+2c=\frac{25}{2}$

Câu 26: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tìm toạ độ điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

A. $M\left(4;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$. **B.** $M\left(4;\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$. **C.** $M\left(4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(-4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(1-a;1-b;1-c)$, $\overrightarrow{MB}=(5-a;-1-b;2-c)$, $\overrightarrow{MC}=(3-a;2-b;-4-c)$.

$$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}1-a+2(5-a)-(3-a)=0\\1-b+2(-1-b)-(2-b)=0\\1-c+2(2-c)-(-4-c)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-\frac{3}{2}\\c=\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow M\left(4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right).$$

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(4;3;m)$. Tìm m

để 4 điểm O, A, B, C đồng phẳng.

A. $m=-7$. **B.** $m=-14$. **C.** $m=7$. **D.** $m=14$.

Lời giải

Để 4 điểm O, A, B, C đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow (4;3;m)=a(0;1;-2)+b(1;2;1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4=b \\ 3=a+2b \\ m=-2a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=-5 \\ m=14 \end{cases}.$$

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Điểm D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $D(-4;8;-3)$. **B.** $D(-2;8;-3)$. **C.** $D(-4;8;-5)$. **D.** $D(-2;2;5)$.

Lời giải

Giả sử $D(x;y;z)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x=1 \\ 5-y=-3 \\ 1-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=8 \\ z=-3 \end{cases}$

Vậy $D(-4;8;-3)$.

Câu 29: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;2;-1); B(2;1;5); C(1;6;2)$ và hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$. Đường thẳng MN luôn đi qua điểm I có tọa độ

A. $(2;3;5)$. **B.** $(2;0;3)$. **C.** $(2;-1;3)$. **D.** $(1;3;2)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

Gọi G là trọng tâm ΔABC, khi đó $4\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MG} \Rightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MG}$ cùng phương

$\Rightarrow M, G, N$ thẳng hàng với $G(1;3;2)$. Vậy điểm $I(1;3;2)$ là điểm cần tìm.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;-3)$, $B(1;0;2)$, $C(x;y;-2)$ thẳng hàng. Khi đó $x+y$ bằng

A. $x+y=1$. **B.** $x+y=17$. **C.** $x+y=-\frac{11}{5}$. **D.** $x+y=\frac{11}{5}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-2;5)$, $\overrightarrow{AC}=(x+1;y-2;1)$.

Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow x+y=1.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(-2;1;-3),\vec{b}=(-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

a) Tọa độ vectơ $\vec{a}-2\vec{b}=(0;1;-1)$.

b) Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

c) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

d) Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

Lời giải

a) Sai: Vì $\vec{a}-2\vec{b}=(0;7;-7)$.

b) Đúng : Vì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=x_B-4\\1=y_B-6\\-3=z_B+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=2\\y_B=7\\z_B=-6\end{cases}\Rightarrow B(2;7;-6)$.

c) Sai: Vì $\frac{-2}{-1}\neq\frac{1}{-3}\neq\frac{-3}{2}$.

d) Đúng: Vì $\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{-2.(-1)+(-3).1+(-3).2}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}.\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=120°$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0),\vec{c}=(1;1;1)$.

a) Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

b) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

c) Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

d) Tọa độ vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ bằng $(-2;4;-1)$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0}=\sqrt{2}$.

b) Đúng: Vì $\vec{a}\vec{b}=(-1).1+1.1+0=0$

c) Sai: Vì $\vec{b}\vec{c}=1.1+1.1+0.1=2$.

d) Sai: Vì $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=(-2;4;-1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết rằng các điểm có toạ độ $A(2;1;0),C(0;3;0),C'(-1;2;1),D'(0;-2;0)$.

a) Tọa độ các điểm A',B' là $A'(1;0;-1),B'(0;4;2)$.

b) Tọa độ các điểm B,D là $B(1;5;1),D(1;-1;-1)$.

c) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

d) Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$.

Lời giải

a) Sai: Gọi tọa độ điểm A' là $(x;y;z)\Rightarrow\overrightarrow{A'C'}=(-1-x;2-y;1-z)$

Khi đó $\overrightarrow{AC}=(-2;2;0)$. Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$

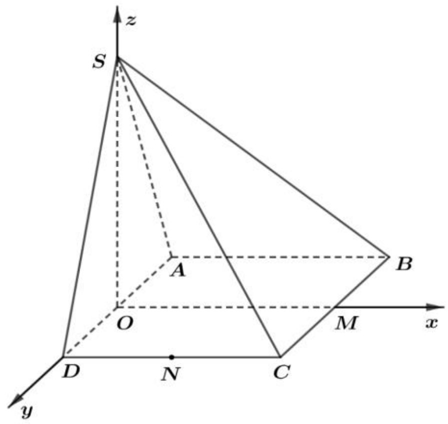
Suy ra $\begin{cases} -1-x=-2 \\ 2-y=2 \\ 1-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow A'(1;0;1)$. Làm tương tự ta có: $B'(0;4;2)$

b) Đúng: $B(1;5;1); D(1;-1;-1)$

c) Đúng: $\overrightarrow{AB}=(1;4;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$

d) Đúng: $\overrightarrow{B'D}=(1;-5;-3) \Rightarrow \overrightarrow{B'D}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



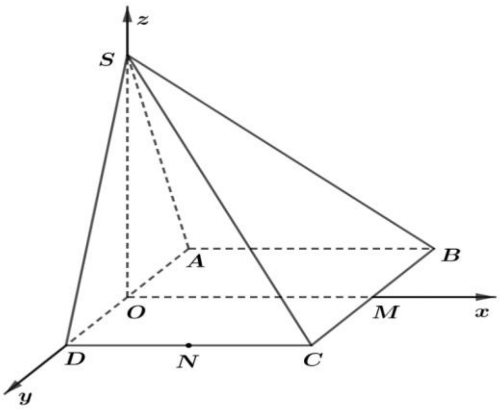
a) Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0;-\frac{1}{2};0\right), B\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$.

b) Tọa độ các điểm C, D là $C\left(1;\frac{1}{2};0\right), D\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

c) Tọa độ điểm S là $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Tọa độ các điểm M, N là $M(1;0;0), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Lời giải



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

SAD là tam giác đều có cạnh bằng 1 nên $SO=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A\left(0;-\frac{1}{2};0\right), B\left(1;-\frac{1}{2};0\right), C\left(1;\frac{1}{2};0\right), D\left(0;\frac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M(1;0;0), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$

a) Đúng: Tọa độ các điểm A, B là $A\left(0;-\frac{1}{2};0\right), B\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$.

b) Đúng: Tọa độ các điểm C,D là $C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right),D\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$.

c) Đúng: Tọa độ điểm S là $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Đúng: Tọa độ các điểm M,N là $M(1;0;0),N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}-4\vec{j}$ và $\vec{b}=\left(m-n;4m-6n;n^2-3m+2\right)$, với m,n là tham số.

a) Tọa độ $\vec{a}=(1;3;-4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì $A(1;-4;3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ thì $m+n=9$.

Lời giải

a) Sai: Tọa độ $\vec{a}=(1;-4;3)$.

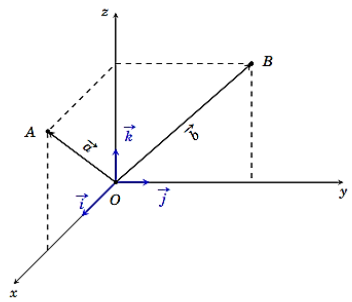
b) Đúng: Khi $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì tọa độ $\vec{a}$ cũng là tọa độ điểm A. Suy ra $A(1;-4;3)$.

c) Sai: $\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=0\\4m-6n=0\\n^2-3m+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\n=0\\n^2-3m+2=0\end{cases}$. (vô nghiệm).

Vậy không tồn tại m,n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) Đúng: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=1\\4m-6n=-4\\n^2-3m+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\\n=4\end{cases}$. Suy ra $m+n=9$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;2;0),\vec{b}=\ 2\vec{j}+2\vec{k}$. Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



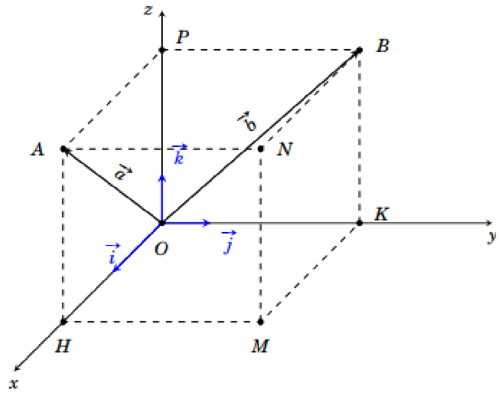
a) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$.

b) Toạ độ $\vec{b}=(0;2;2)$.

c) Toạ độ $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)$

d) Góc $AOB=45^\circ$.

Lời giải



a) Sai: Ta có $\vec{a}=(2;0;2)\Rightarrow \vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$.

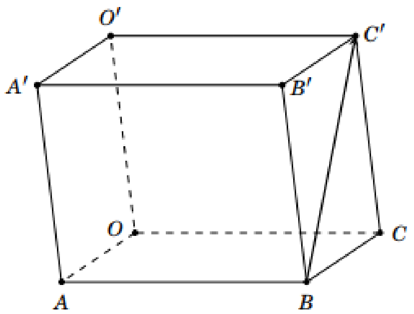
b) Đúng: Ta có $\vec{b}=2\vec{j}+2\vec{k}\Rightarrow \vec{b}=(0;2;2)$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì toạ độ véc tơ $\vec{a}$ cũng chính là toạ độ $A\Rightarrow A(2;0;2)$.

Tương tự $B(0;2;2)$. Từ đây, ta tính được $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)$

d) Sai: Nhận xét $OHMK.PANB$ là hình lập phương suy ra ΔOAB đều. Vậy $AOB=60^\circ$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0), \overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)$ Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.



a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$

b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.

c) Tọa độ véc to $\overrightarrow{AB'}=(-2;3;-6)$.

d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK}=(-1;2;-1)$.

Lời giải

a) Đúng: Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)\Rightarrow \begin{cases} x-0=2 \\ y-3=-6 \\ z-0=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow C(2;-3;6)$.

b) Đúng: Gọi $O'(x;y;z)$. Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{BC'}\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=-6 \\ z+1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow O'(3;-5;5)$

c) Sai: Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OC'}=\left(2;-3;6\right)$.

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{AB}=\left(-1;2;1\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=\left(m;2;m+1\right)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}=\left(2;-2;1\right)$

Khi đó $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2+1^2}=3$ và $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{m^2+2^2+\left(m+1\right)^2}=\sqrt{2m^2+2m+5}$

Do đó $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow 9=2m^2+2m+5\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$ nên có hai giá trị.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(3;1;-2\right)$, $B\left(2;-3;5\right)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$, tọa độ điểm M là $\left(a;b;c\right)$. Khi đó $a+b+c$ bằng?

Lời giải

Gọi $M\left(x;y;z\right)$.

Vì M thuộc đoạn AB nên: $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=-2\left(2-x\right)\\1-y=-2\left(-3-y\right)\\-2-z=-2\left(5-z\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=-\dfrac{5}{3}\\z=\dfrac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow a+3b+c=0$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A\left(4;2;1\right)$, $B\left(-2;-1;4\right)$. Tìm được tọa độ điểm $M\left(a;b;c\right)$ thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$. Khi đó $a+b+c=$?

Lời giải

Gọi điểm $M\left(x;y;z\right)$. Khi đó: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=2\left(-2-x\right)\\y-2=2\left(-1-y\right)\\z-1=2\left(4-z\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\\z=3\end{cases}$.

Vậy $M\left(0;0;3\right)$ nê $a+b+c=3$

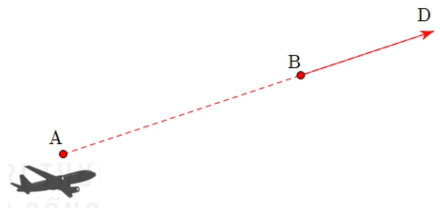
Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M\left(2;3;-1\right)$, $N\left(-1;1;1\right)$ và $P\left(1;m-1;2\right)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Lời giải

$\overrightarrow{MN}(-3;-2;2); \overrightarrow{NP}(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0 \Leftrightarrow -6-2(m-2)+2=0 \Leftrightarrow m-2=-2 \Leftrightarrow m=0$.

Câu 5: Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo $D(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z=?$



Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 10 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B). Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên $AB=BD$.

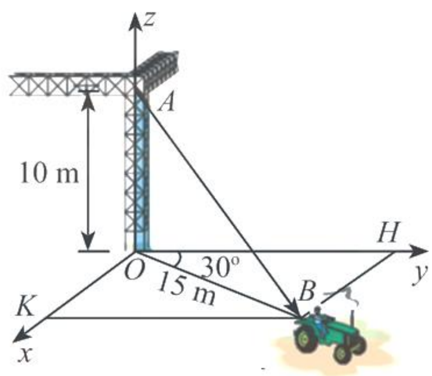
Do đó, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}=(140;50;1)$.

Mặt khác: $\overrightarrow{BD}=(x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases} x-940=140 \\ y-550=50 \\ z-8=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1080 \\ y=600 \\ z=9 \end{cases}$

Vậy $D(1080;600;9)$. Vậy tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $(1080;600;9)$.

Suy ra $x+y+z=1689$

Câu 6: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}=(a;b;c)$. Khi đó tính $a+c$

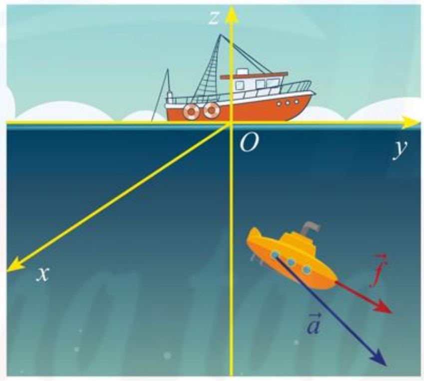


Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OA}=10\vec{k}\Rightarrow A(0;0;10)$ và $OH=OB.\cos 30^\circ=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$; $OK=OB.\cos(90^\circ-30^\circ)=\dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow B\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{15\sqrt{3}}{2};0\right)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{15\sqrt{3}}{2};-10\right)$. Vậy $a+c=2,5$

Câu 7: Một thiết bị thăm dò đáy biển như hình vẽ được đẩy bởi một lực $\vec{f}=(5;4;-2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a}=(70;20;-40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



Lời giải

Công sinh bởi lực $\vec{f}$ là: $A=\vec{f}.\vec{a}=5.70+4.20-2.(-40)=510J$

Câu 8: Cho biết máy bay A đang bay với vecto vận tốc $\vec{a}=(300;200;400)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.

Tính tốc độ của máy bay B.

Lời giải

Ta có: $3\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}3.300=x\\3.200=y\\3.400=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=900\\y=600\\z=1200\end{cases}\Rightarrow\vec{b}=(900;600;1200)$

Tốc độ của máy bay B là: $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{900^2+600^2+1200^2}\approx 1615,55$ (km/h)

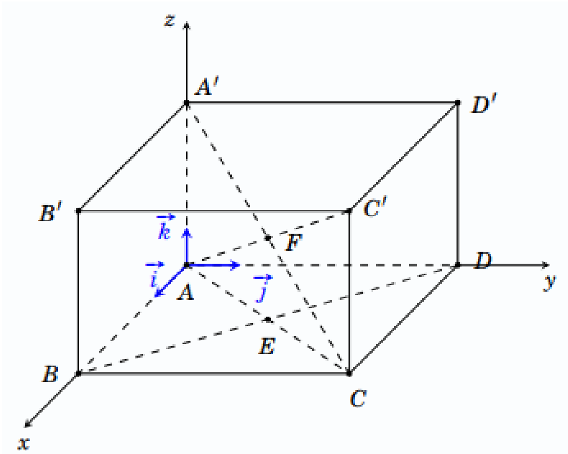
-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Toạ độ hoá một số hình học không gian

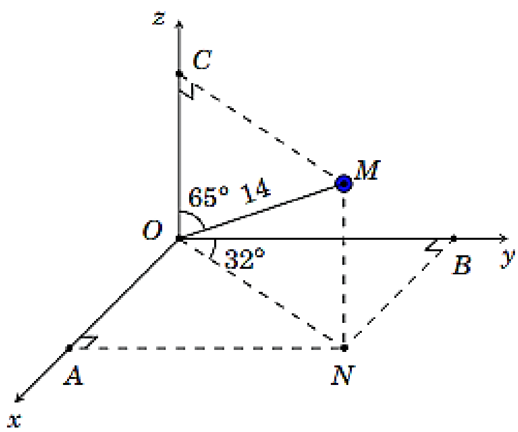
- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc với nhau làm gốc toạ độ
- Xây dựng toạ độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn
- Toạ độ các điểm đặc biệt
  - $M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0)$
  - $M \in Oy \Rightarrow M(0;y;0)$
  - $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;z)$
  - $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$
  - $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$
  - $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0;y;z)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2$, $AD = 4$ Gọi E là tâm của hình chữ nhật, F là trung điểm của cạnh AC'. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây. Hãy xác định toạ độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và toạ độ hai điểm E và F ?



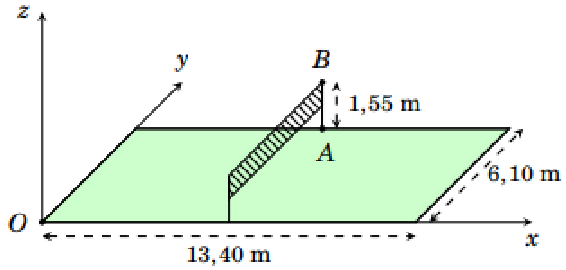
Bài tập 2: Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường với hệ toạ độ không gian $Oxyz$ được thiết lập như hình vẽ dưới đây. Cho biết M là vị trí của máy bay và $OM = 14,\ NOB = 32^\circ,\ MOC = 65^\circ$. Tìm toạ độ điểm M



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

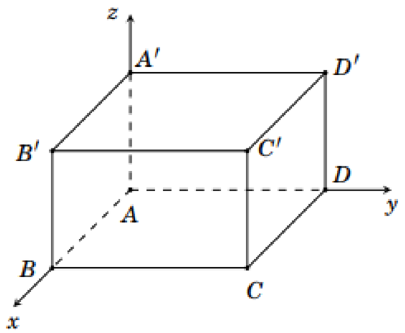
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của B.



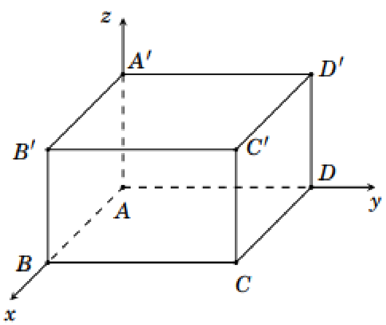
A. $(6,1;6,7;1,55)$ **B.** $(6,7;6,1;1,55)$
C. $(6,1;0\,1,55)$ **D.** $(0;6,7;1,55)$

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm B' là



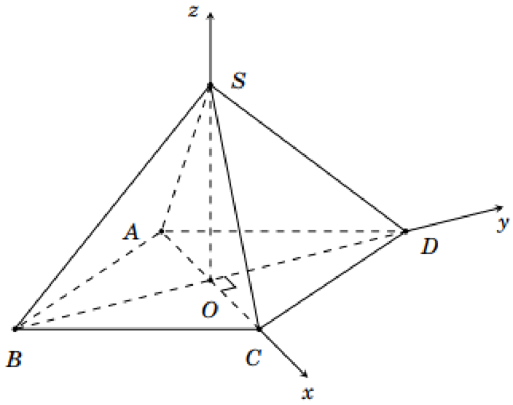
A. $B(0;2;0)$ **B.** $B(2;2;2)$ **C.** $B(2;2;0)$ **D.** $B(2;0;2)$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm C' là



A. $C'(2;2;0)$ **B.** $C'(2;2;2)$ **C.** $C'(2;0;0)$ **D.** $C'(2;0;2)$

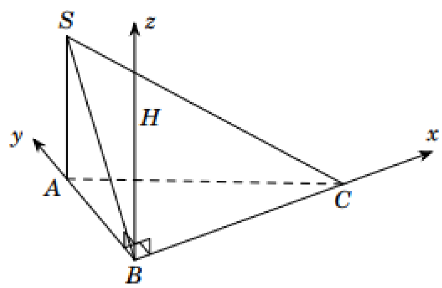
Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là:



A. $\overrightarrow{SC}=(2a;0;-2a)$ **B.** $\overrightarrow{SC}=(2a;-a;-2a)$

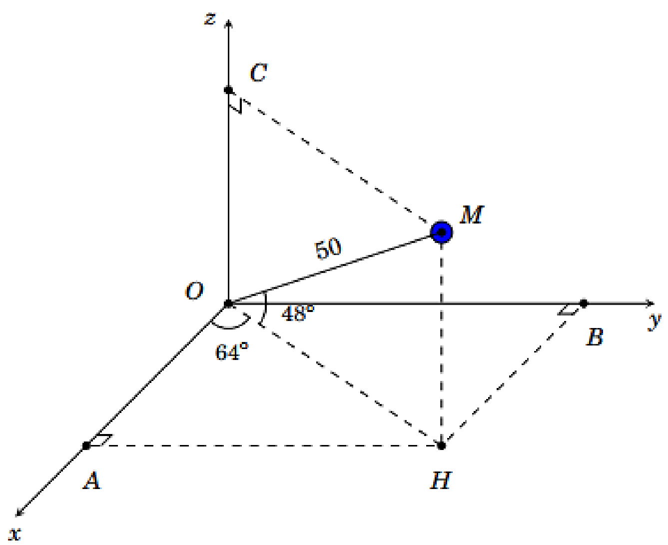
C. $\overrightarrow{SC}=(a;0;-2a)$ **D.** $\overrightarrow{SC}=(a;0;2a)$

Câu 5: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3$, $BA=2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B). Tìm khẳng định **sai**



A. $A(0;2;0)$ **B.** $B(0;0;0)$ **C.** $C(0;0;3)$ **D.** $S(-2;2;2)$

Câu 6: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Cho biết $OM=50$, $(\vec{i};\overrightarrow{OH})=64^\circ$, $(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM})=48^\circ$. Tìm toạ độ của điểm M.

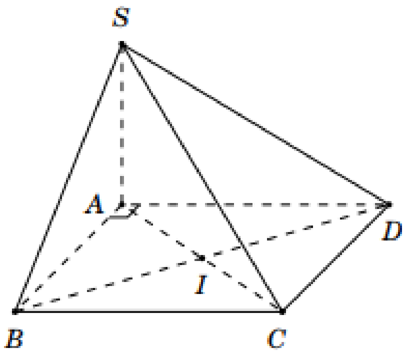


A. $M(37,2;14,7;30,1)$ **B.** $M(14,7;37,2;30,1)$

C. $M(30,1;14,7;37,2)$ **D.** $M(14,7;30,1;37,2)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 1, AD = 2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA = 3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

b) Tọa độ $C(1;2;3)$.

c) Tọa độ $S(2;0;0)$

d) Tọa độ $I(1;1;0)$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

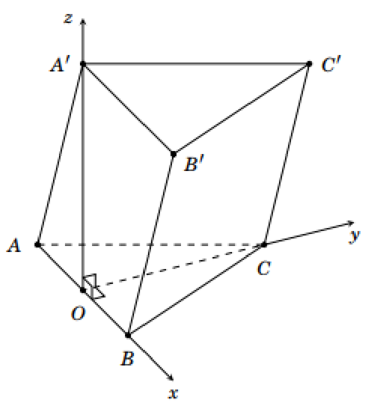
a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.

b) $\overrightarrow{AC'} = \left(2\sqrt{2};0;2\right)$.

c) Tọa độ $D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $A'AO = 60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tọa độ điểm $A(-1;0;0)$.

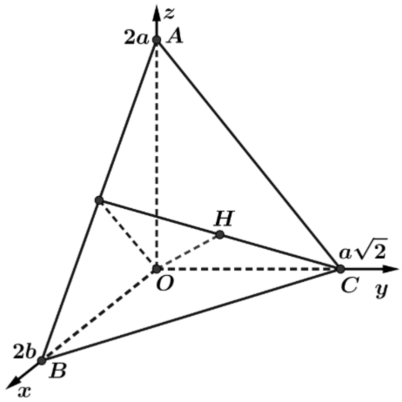
b) Tọa độ điểm $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$.

c) Tọa độ điểm $A'\left(0;-1;\sqrt{3}\right)$.

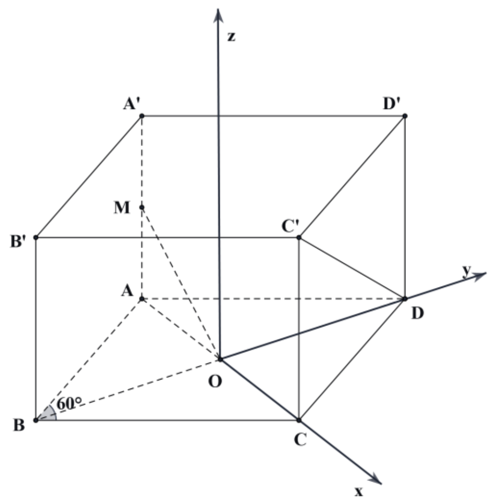
d) Tọa độ điểm $C'\left(1;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

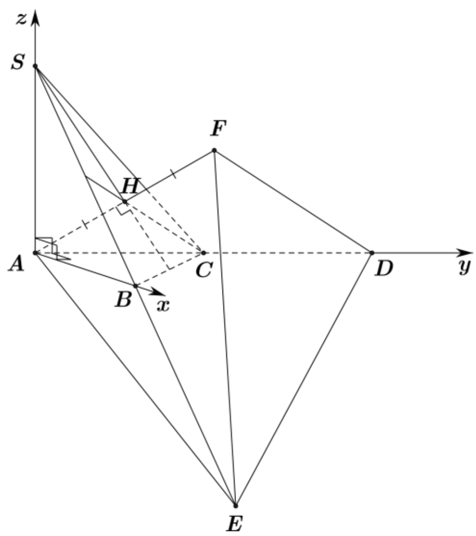
Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = 2a$, $OC = a\sqrt{2}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{BC}(m;n;p)$. Khi $a = 1$ hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.



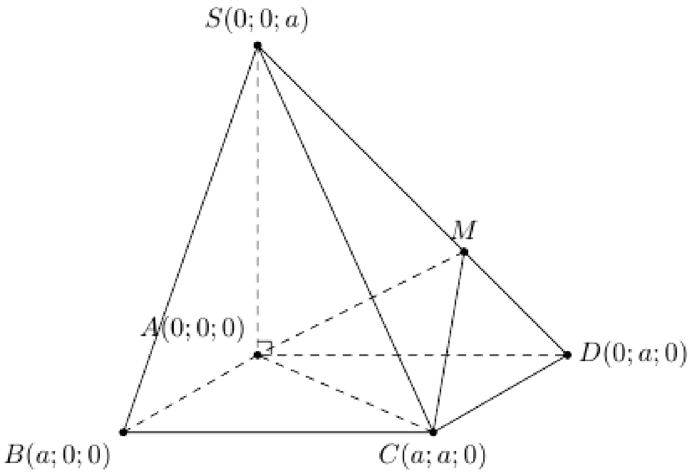
Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $AA' = a$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Vectơ $\overrightarrow{OC'}$ có toạ độ là $(m;n;p)$. Khi $a = 1$ hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + p$.



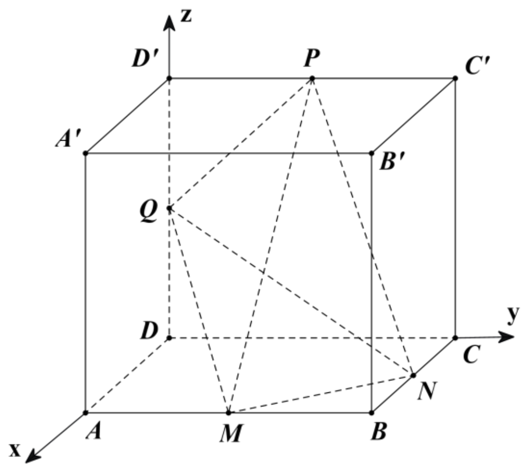
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C, của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC). Khi $a = 1$ thì tung độ của vectơ $\overrightarrow{AD}$ bằng bao nhiêu?



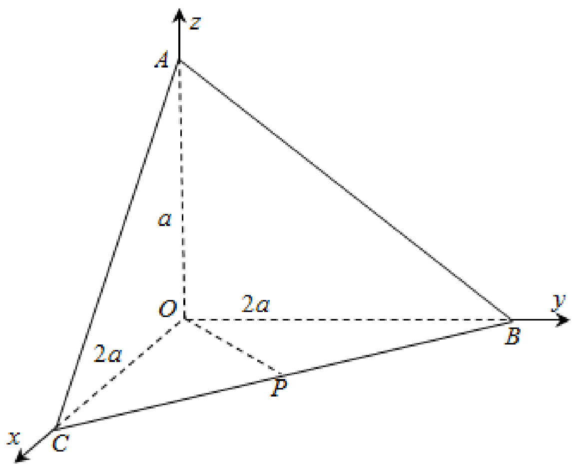
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Khi $a = 1$ thì tổng bình phương hoành độ, tung độ, cao độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu?



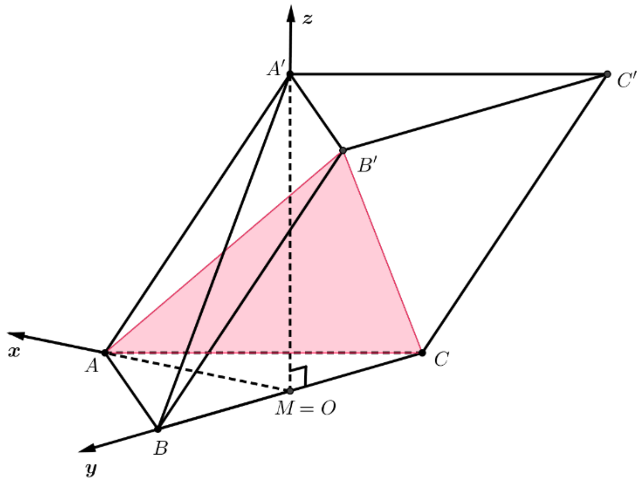
Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD'. Xác định hoành độ của vectơ $\overrightarrow{MQ}$.



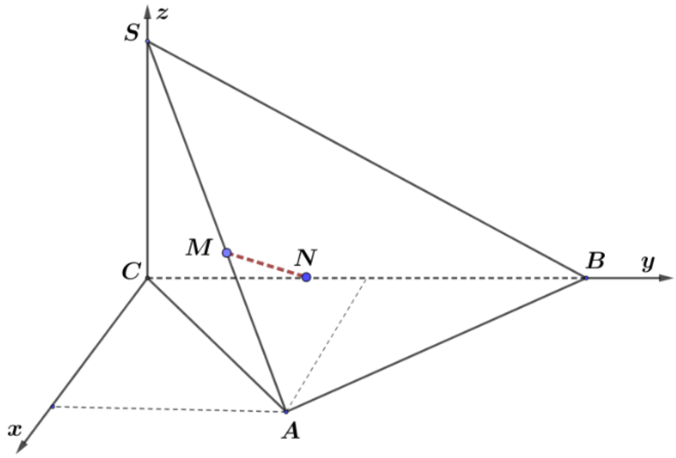
Câu 6: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khi $a = 1$ xác định tung độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$



Câu 7: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC. Khi $a = 1$ thì tung độ của $\overrightarrow{A'B}$ bằng bao nhiêu?



Câu 8: Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = 3\sqrt{2}$, SC vuông góc (ABC), tam giác ABC vuông tại A, các điểm M và N lần lượt thuộc SA và BC sao cho $AM = CN = 2$. Tung độ của $\overrightarrow{NB}$ khi đó bằng bao nhiêu?



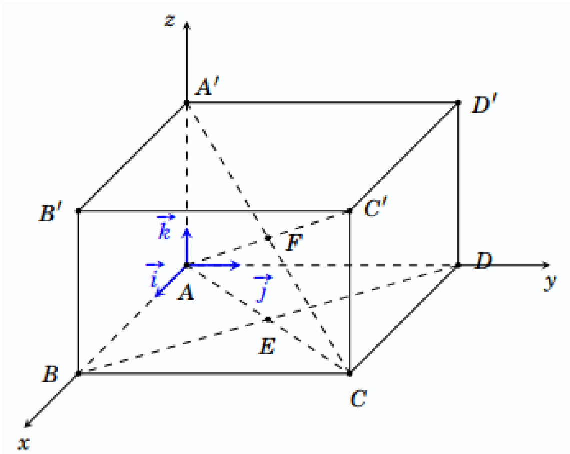
-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Toạ độ hoá một số hình học không gian

- Chọn một điểm mà từ đó có ba đường đôi một vuông góc với nhau làm gốc toạ độ
- Xây dựng toạ độ các điểm trên hình đã cho tương ứng với hệ trục vừa chọn
- Toạ độ các điểm đặc biệt
  - $M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0)$
  - $M \in Oy \Rightarrow M(0;y;0)$
  - $M \in Oz \Rightarrow M(0;0;z)$
  - $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$
  - $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x;0;z)$
  - $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0;y;z)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = AA' = 2$, $AD = 4$ Gọi E là tâm của hình chữ nhật, F là trung điểm của cạnh AC'. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình dưới đây. Hãy xác định toạ độ các đỉnh của hình hộp chữ nhật và toạ độ hai điểm E và F ?

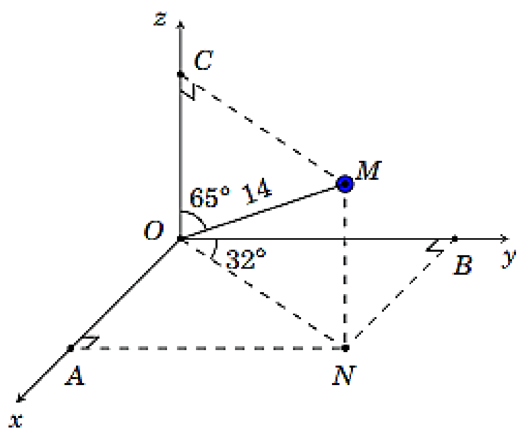


Lời giải

Chọn $A(0;0;0)$ là gốc toạ độ thì toạ độ các điểm như sau: $B(2;0;0)$; $C(2;2;0)$; $D(0;2;0)$

$A'(0;0;2)$; $B'(2;0;2)$; $C'(2;2;2)$; $D'(0;2;2)$.

Bài tập 2: Một máy bay M đang cất cánh từ phi trường với hệ toạ độ không gian $Oxyz$ được thiết lập như hình vẽ dưới đây. Cho biết M là vị trí của máy bay và $OM = 14$, $NOB = 32°$, $MOC = 65°$. Tìm toạ độ điểm M



Lời giải

Ta có: $OC = OM.\cos 65° \approx 5,9$; $ON = CN = OM.\sin 65° \approx 12,7$; $OB = ON.\cos 32° \approx 6,7$

Vì $OANB$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

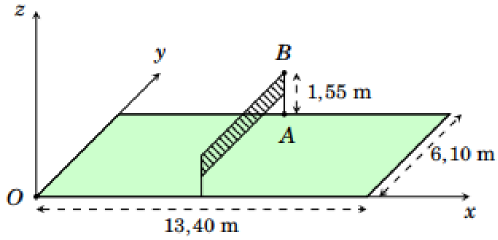
Vì $OCMN$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 6,7.\vec{i} + 10,8.\vec{j} + 5,9.\vec{k}$

Vậy $M(6,7;10,8;5,9)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hình bên mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét), giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới, hãy xác định tọa độ của B.



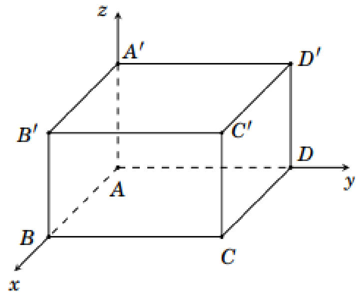
A. $(6,1;6,7;1,55)$ **<u>B</u>.** $(6,7;6,1;1,55)$

C. $(6,1;0\,1,55)$ **D.** $(0;6,7;1,55)$

Lời giải

Toạ độ điểm $B(6,7;6,1;1,55)$

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm B' là

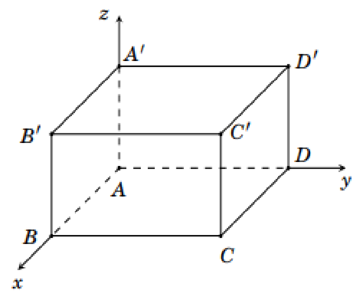


A. $B(0;2;0)$ **B.** $B(2;2;2)$ **C.** $B(2;2;0)$ **<u>D</u>.** $B(2;0;2)$

Lời giải

Với A là gốc toạ độ thì $B(2;0;2)$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm A), tọa độ điểm C' là

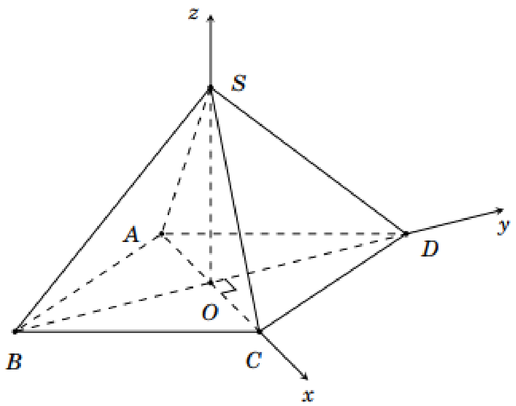


A. $C'(2;2;0)$ **B.** $C'(2;2;2)$ **C.** $C'(2;0;0)$ **D.** $C'(2;0;2)$

Lời giải

Với A là gốc toạ độ thì $C'(2;2;2)$

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là:



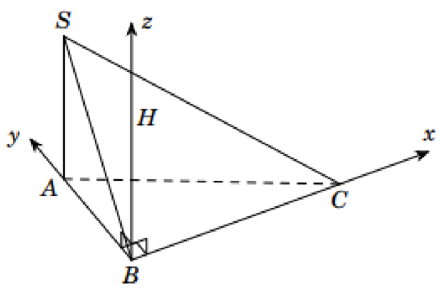
A. $\overrightarrow{SC}=(2a;0;-2a)$ **B.** $\overrightarrow{SC}=(2a;-a;-2a)$

C. $\overrightarrow{SC}=(a;0;-2a)$ **D.** $\overrightarrow{SC}=(a;0;2a)$

Lời giải

Tọa độ $\overrightarrow{SC}$ là $\overrightarrow{SC}=(a;0;-2a)$.

Câu 5: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3$, $BA=2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với điểm B). Tìm khẳng định **sai**



A. $A(0;2;0)$ **B.** $B(0;0;0)$ **C.** $C(0;0;3)$ **D.** $S(-2;2;2)$

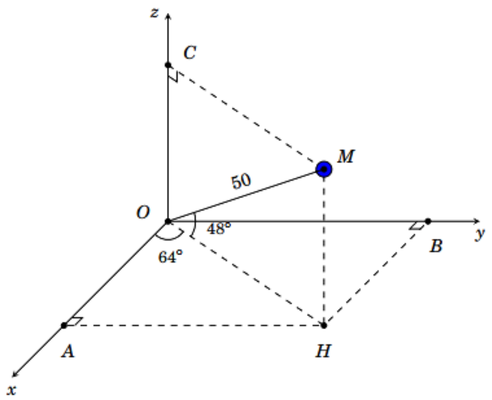
Lời giải

Toạ độ điểm $S(0;2;2)$

Câu 6: Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian $Oxyz$ như hình bên. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy). Cho biết $OM=50$, $(\vec{i};\overrightarrow{OH})=64°$, $(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OM})=48°$. Tìm toạ độ của điểm M.

A. $M(37,2;14,7;30,1)$ **B.** $M(14,7;37,2;30,1)$

C. $M(30,1;14,7;37,2)$ **D.** $M(14,7;30,1;37,2)$



Lời giải

Tam giác OMH vuông tại H có $OM=50, OMH=48^\circ$ nên ta có:

$OH=OM.\cos 48^\circ \approx 33{,}5$; $OC=MH=OM.\sin 48^\circ \approx 37{,}2$

Tam giác OAH vuông tại A, $OH=33{,}5$, $AOH=64^\circ$ nên ta có:

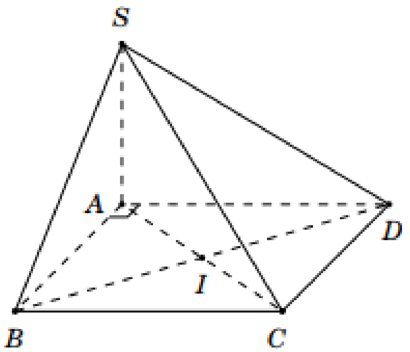
$OA=OH.\cos 64^\circ \approx 14{,}7$; $OB=AH=OH.\sin 64^\circ \approx 30{,}1$

Suy ra $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=14{,}7.\vec{i}+30{,}1.\vec{j}+37{,}2.\vec{k}$

Vậy $M(14{,}7;30{,}1;37{,}2)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1, AD=2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i},\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau



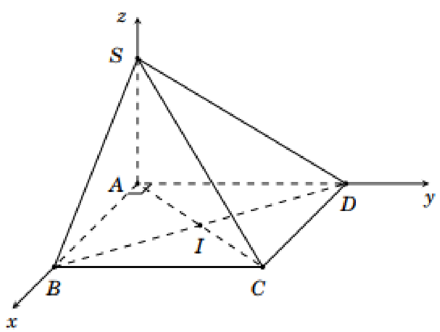
a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

b) Tọa độ $C(1;2;3)$.

c) Tọa độ $S(2;0;0)$

d) Tọa độ $I(1;1;0)$.

Lời giải



Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì

a) Đúng: Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0;2;0)$.

b) Sai: Điểm $C \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D. Do $AB = 1$ và $AD = 2$ nên $C(2;2;0)$.

c) Đúng: Điểm $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0;0;3)$.

d) Sai: Điểm $I \in (Oxy)$ và và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $I(0,5;1;0)$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.

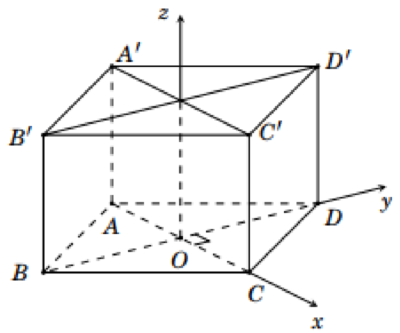
b) $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.

c) Tọa độ $D'(0;\sqrt{2};2)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.

Lời giải

Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì



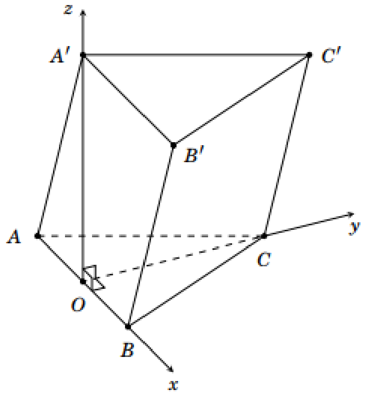
a) Sai: Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A(-\sqrt{2};0;0)$.

b) Đúng: Tọa độ $C'(\sqrt{2};0;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'} = (2\sqrt{2};0;2)$.

c) Đúng: Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D(0;\sqrt{2};0)$ và $DD' = 2$ nên $D'(0;\sqrt{2};2)$.

d) Sai: Tọa độ $B(0;-\sqrt{2};0), D'(0;\sqrt{2};2)$. Suy ra $\overrightarrow{BD'} = (0;2\sqrt{2};2)$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $A'AO = 60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tọa độ điểm $A\left(-1;0;0\right)$.

b) Tọa độ điểm $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$.

c) Tọa độ điểm $A'\left(0;-1;\sqrt{3}\right)$.

d) Tọa độ điểm $C'\left(1;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Độ dài $OC = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cdot OA' = OA\cdot\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ trên thì

a) Đúng: Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = 1$ nên $A\left(-1;0;0\right)$.

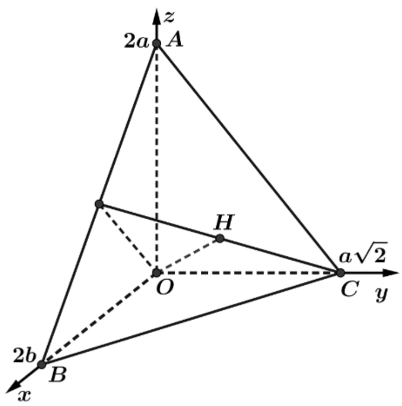
b) Đúng: Điểm $A' \in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC = \sqrt{3}$ nên $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$.

c) Sai: $A' \in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA' = \sqrt{3}$ nên $A'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

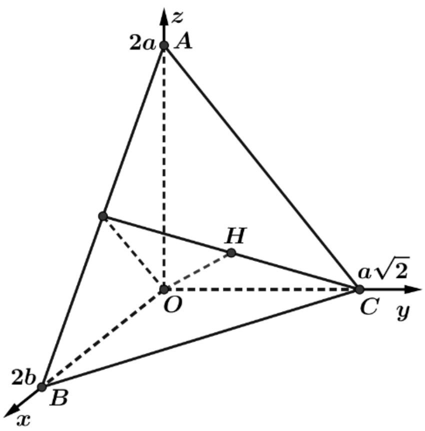
d) Đúng: Gọi $C'\left(x;y;z\right)$. Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-0=1 \\ y-0=\sqrt{3} \\ z-\sqrt{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{3}. \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = 2a$, $OC = a\sqrt{2}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{BC}\left(m;n;p\right)$. Khi $a=1$ hãy tính giá trị biểu thức $T = a+b+c$.



Lời giải

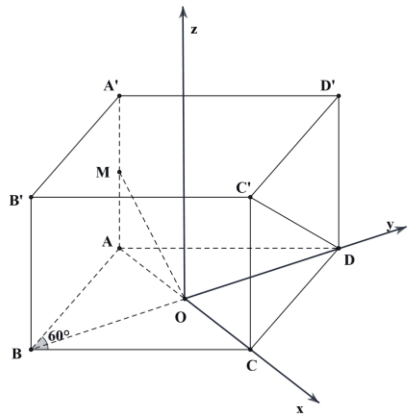


Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau điểm O là gốc tọa độ $OA \equiv Oz$; $OB \equiv Ox$ và $OC \equiv Oy$.

Khi đó ta có $O(0;0;0)$; $A(0;0;2a)$; $B(2a;0;0)$ và $C\left(0;a\sqrt{2};0\right)$.

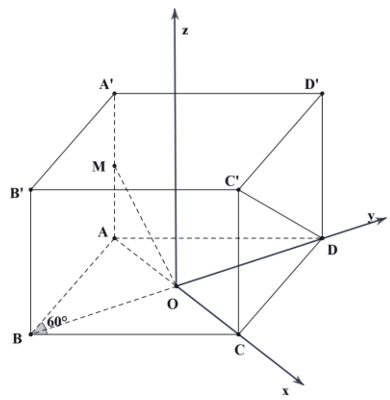
Vậy ta có vectơ khi đó là $\overrightarrow{AB} = (2a;0;-2a)$ nên $\begin{cases} m = 2a \\ n = 0 \\ p = -2a \end{cases} \Rightarrow T = 2a + 0 + (-2a) = 0$

Câu 2: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a, $AA' = a$ và $ABC = 60°$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA'. Vectơ $\overrightarrow{OC'}$ có toạ độ là $(m;n;p)$. Khi $a = 1$ hãy tính giá trị biểu thức $T = 2m + n + p$.



Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



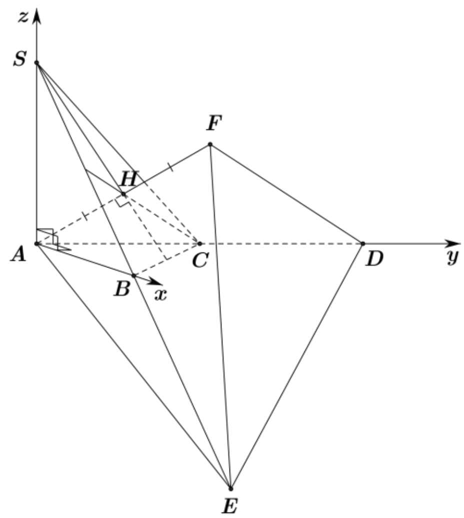
Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chọn $a=1$.

Dễ dàng tính được $O(0;0;0)$, $M\left(-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$, $D\left(0;\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $C'\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$.

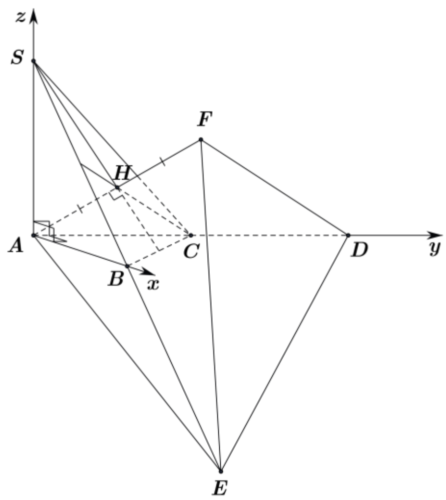
Suy ra $\overrightarrow{OM}=\left(-\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{C'D}=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$ và $\overrightarrow{OC'}=\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$.

Khi đó $\begin{cases} m=\dfrac{1}{2} \\ n=0 \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow T=2m+n+p=2.\dfrac{1}{2}+0+1=2$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB=a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C, của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC). Khi $a=1$ thì tung độ của vectơ $\overrightarrow{AD}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

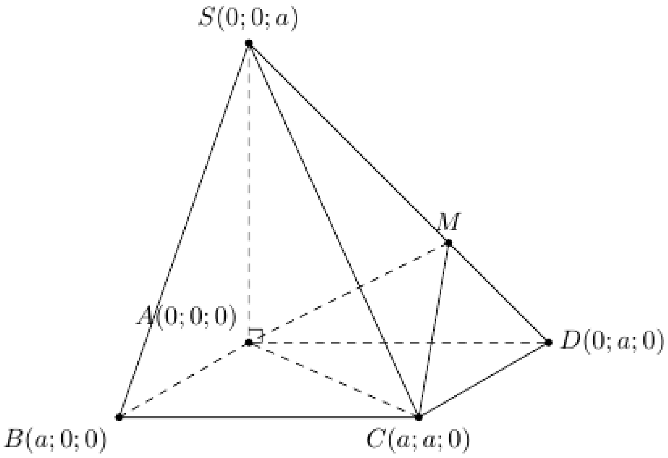


Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ với độ dài vectơ đơn vị bằng a, ta được tọa độ các điểm như sau: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$, $S(0;0;1) \Rightarrow D(0;2;0)$, $E(2;0;-1)$.

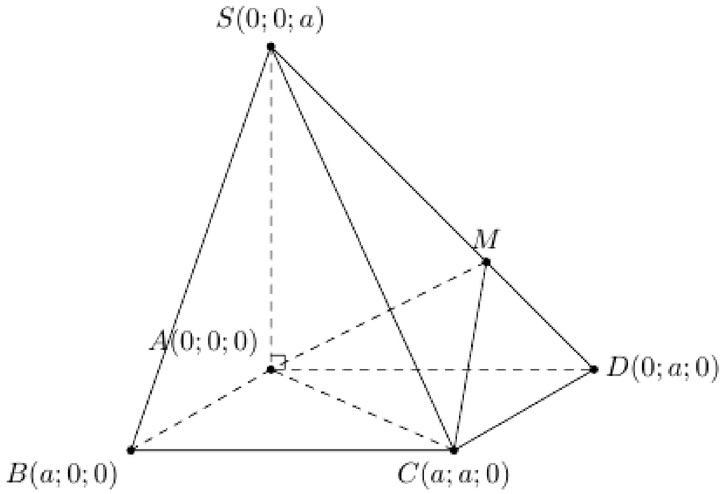
Gọi H là trọng tâm tam giác $SBC \Rightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. Vì tam giác SBC là tam giác đều nên H cũng là trực tâm của tam giác $SBC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow F$ là điểm đối xứng với A qua H

$\Rightarrow F\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. Ta tính được: $\overrightarrow{AD}=(0;2;0)$, $\overrightarrow{AE}=(2;0;-1)$, $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên $SA=a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM=2MD$. Khi $a=1$ thì tổng bình phương hoành độ, tung độ, cao độ của vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

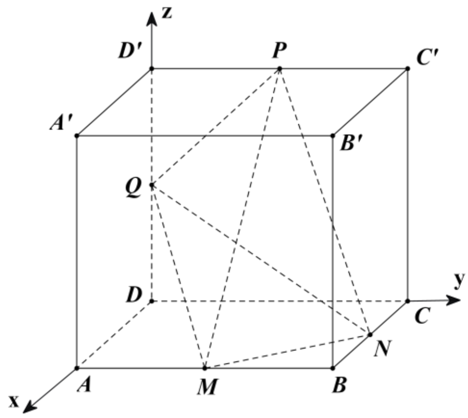


Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A \equiv O$, các điểm B,D,S lần lượt thuộc chiều dương các trục tọa độ Ox,Oy,Oz. Suy ra tọa độ các điểm như trên hình vẽ.

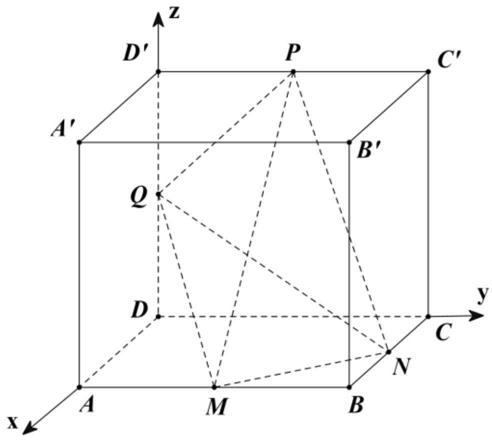
Do M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM=2MD$ suy ra:

$$\overrightarrow{SM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SD} \Rightarrow M\left(0;\frac{2a}{3};\frac{a}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}=\left(0;\frac{2a}{3};\frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC}=(a;a;0) \end{cases} \xrightarrow{a=1} \overrightarrow{AC}=(1;1;0) \Rightarrow 1^2+1^2+0^2=2$$

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD'. Xác định hoành độ của vectơ $\overrightarrow{MQ}$.



Lời giải

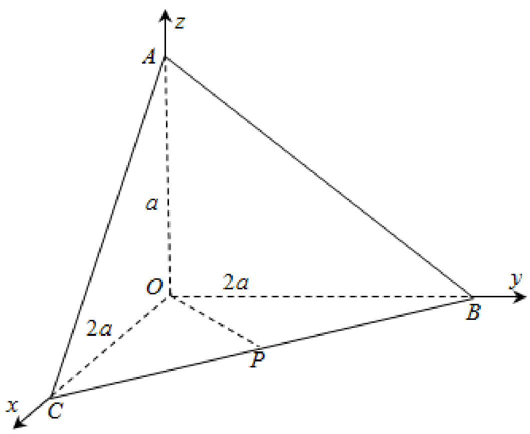


Gắn hệ trục toạ độ như hình vẽ ta có $D(0;0;0), A(1;0;0)$, $B(1;1;0), C(0;1;0)$, $A'(1;0;1)$, $B'(1;1;1)$, $C'(0;1;1), D'(0;0;1)$.

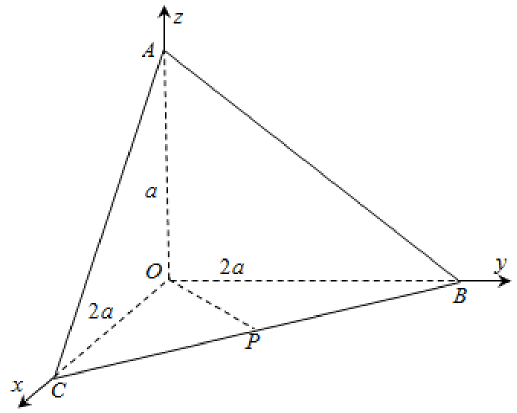
Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD' nên $M\left(1;\frac{1}{2};0\right), N\left(\frac{1}{2};1;0\right), P\left(0;\frac{1}{2};1\right), Q\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right), \overrightarrow{MP}=(-1;0;1), \overrightarrow{MQ}=\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Câu 6: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA=a$ và $OB=OC=2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khi $a=1$ xác định tung độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$



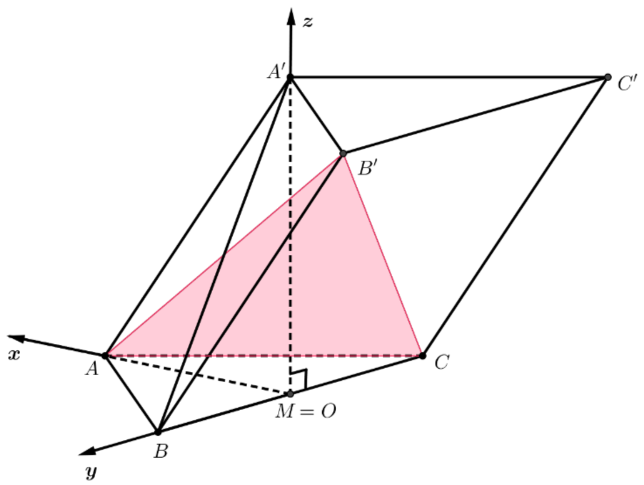
Lời giải



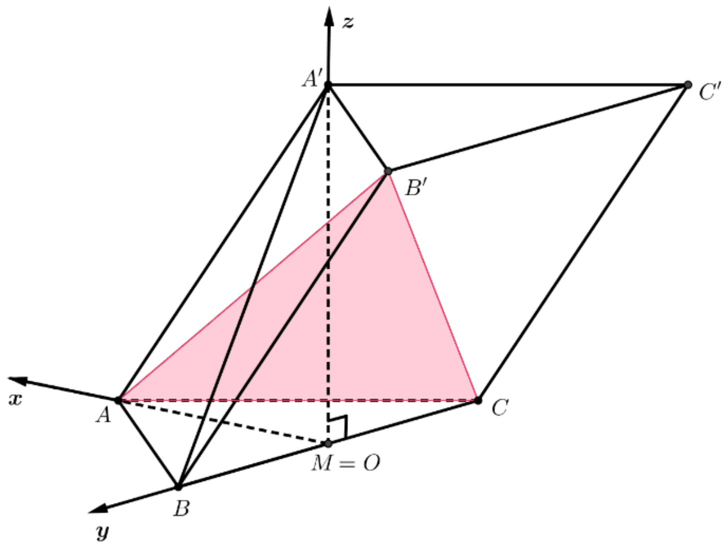
Đặt khối tứ diện $O.ABC$ vào hệ trục tọa độ gốc $Oxyz$: các điểm A,B,C lần lượt thuộc các trục tọa độ Oz,Oy,Ox.

Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$, $P(1;1;0)$, $\overrightarrow{AB}=(0;2;-1)$.

Câu 7: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC. Khi $a=1$ thì tung độ của $\overrightarrow{A'B}$ bằng bao nhiêu?



Lời giải



Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là góc $A'BM=60°$.

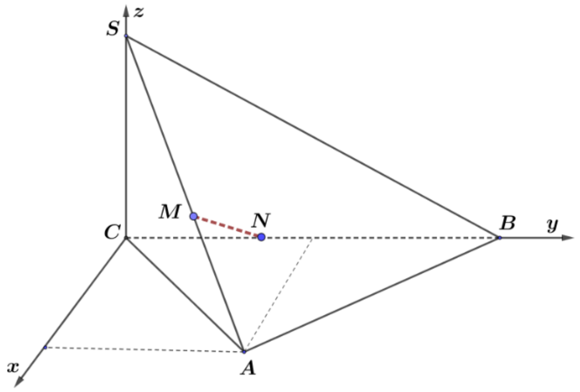
Ta có $A'M = BM.\tan 60° = a\sqrt{3}$; $AM = AB.\sin 60° = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Đặt hệ trục toạ $Oxyz$ như hình vẽ: khi đó $A\left(\sqrt{3};0;0\right)$, $B(0;1;0)$, $C(0;-1;0)$,

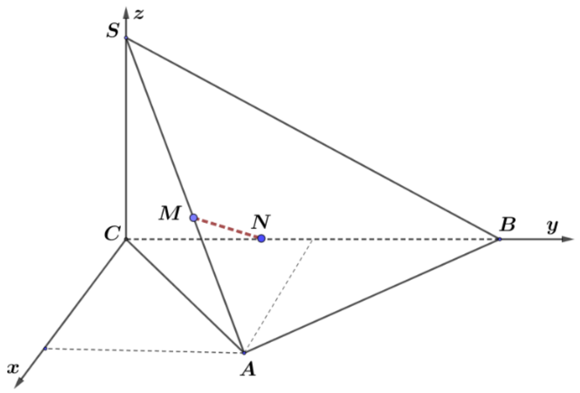
$A'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$. Gọi $B'(x_0;y_0;z_0)$, $\overrightarrow{A'B'} = \left(x_0;y_0;z_0-\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{3};1;0\right)$.

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ nên $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{3} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow B'\left(-\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \left(-2\sqrt{3};1;\sqrt{3}\right)$.

Câu 8: Cho tứ diện $SABC$ có $SC = CA = AB = 3\sqrt{2}$, SC vuông góc (ABC), tam giác ABC vuông tại A, các điểm M và N lần lượt thuộc SA và BC sao cho $AM = CN = 2$. Tung độ của $\overrightarrow{NB}$ khi đó bằng bao nhiêu?



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thỏa $C(0;0;0) \equiv O$ như hình vẽ.

Điểm $B(0;6;0) \in Oy$, $S\left(0;0;3\sqrt{2}\right) \in Oz$, $A(3;3;0)$.

Khi đó tọa độ $N(0;2;0)$; $M\left(2;2;\sqrt{2}\right)$.

$\overrightarrow{NM} = \left(2;0;\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{SB} = \left(0;6;-3\sqrt{2}\right)$ và $\overrightarrow{NB} = (0;4;0)$.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 03 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Biểu thức toạ độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$. Khi đó ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=(x+x';y+y';z+z')$
- $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';y-y';z-z')$
- $k\vec{a}=(kx;ky;kz)$ với k là một số thực.

Nhận xét: Vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b}=(x';y';z')\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'.\end{cases}$

2 Biểu thức toạ độ tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b}=xx'+yy'+zz'$

Nhận xét:

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx'+yy'+zz'=0$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Chú ý: Nếu $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ thì $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Đặc biệt khi B trùng O ta nhận được công thức $OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}$.

3 Biểu thức toạ độ tích có hướng của hai vectơ

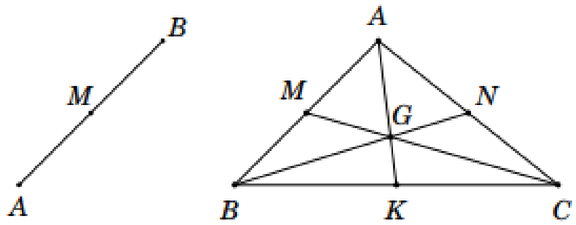
Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ không cùng phương. Khi đó vectơ

$\vec{w}=(yz'-y'z;zx'-z'x;xy'-x'y)$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- Vectơ xác định như trên gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ kí hiệu là $\vec{w}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$

- Quy ước $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ thì $\left[\vec{a};\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = \left(yz' - y'z; zx' - z'x; xy' - x'y \right)$
- $\vec{a}$ không cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi $\left[\vec{a};\vec{b}\right] \neq \vec{0}$

4 Biểu thức toạ độ trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm tam giác



Trong không gian $Oxyz$, toạ độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Toạ độ của các phép toán vectơ, toạ độ điểm, độ dài đoạn thẳng

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v} = \left(3; -\frac{5}{4}; 2\right)$.

a) Tìm toạ độ của $\vec{u}$.

b) Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

c) Tìm toạ độ của $\vec{a} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

Bài tập 2: Cho $\vec{a} = (2;-1;5), \vec{b} = (0;3;-3), \vec{c} = (1;4;-2)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{p} = (3;-2;1), \vec{q} = (6;-4;2), \vec{r} = (2;1;-3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

b) Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(3;-1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(4;-2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Xác định toạ độ trọng tâm tam giác ABC

b) Tìm toạ độ điểm D biết tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

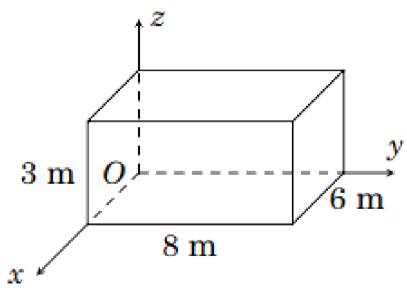
c) Tìm toạ độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng toạ độ (Oxz)

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(5;-3;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(4;1;2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$

b) Tìm toạ độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$

Bài tập 6: Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (*Hình minh họa dưới đây*). Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Tính độ dài của $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}$

A. $\sqrt{74}$. **B.** $3\sqrt{6}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{42}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$; $M(x;y;1)$. Khi A,B,M thẳng hàng thì giá trị của $x;y$ là

A. $x=4;y=-7$. **B.** $x=-4;y=7$. **C.** $x=4;y=7$. **D.** $x=-4;y=-7$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,3)$, $C(-3,5,1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $(-2,2,5)$. **B.** $(-4,8,-5)$. **C.** $(-4,8,-3)$. **D.** $(-2,8,-3)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2)$, $B(2;1;-3)$, $C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ có tọa độ là:

A. $G(2;-1;-1)$. **B.** $G(2;-2;-1)$. **C.** $G(0;-1;-1)$. **D.** $G(6;-3;-3)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là

A. $(3;6;3)$. **B.** $(3;6;-3)$. **C.** $(3;-3;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

A. $I\left(-\frac{5}{3};0;\frac{5}{3}\right)$. **B.** $I\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};0\right)$. **C.** $I\left(\frac{5}{3};0;\frac{5}{3}\right)$. **D.** $I\left(0;\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $E(1;3;2)$, $F(0;-1;5)$, $K(2;4;-1)$ và tam giác ABC thỏa mãn $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ΔABC là

A. $G(1;2;2)$. **B.** $G(-1;-4;3)$. **C.** $G(2;2;1)$. **D.** $G(1;1;-3)$.

Câu 8: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{PQ}=(0;1;-2)$, $\overrightarrow{PR}=(-2;-1;0)$ và điểm $M(1;-2;2)$ trung điểm của đoạn QR. Tọa độ điểm Q là

A. $(-1;1;-2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(0;1;3)$. **D.** $(2;-1;1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

A. $I(1;1;0)$. **B.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $I(1;1;1)$. **D.** $I(1;-1;2)$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng

A. 42. **B.** -50. **C.** -48. **D.** 44.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và điểm $B(4;-3;1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $(6;-2;4)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(1;-2;-1)$. **D.** $(2;-4;-2)$.

Câu 12: Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(3;4;2)$; $\vec{b}=(-5;0;3)$; $\vec{c}=(1;2;-4)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$:

A. $\vec{u}=(-2;10;16)$. **B.** $\vec{u}=(2;10;-16)$. **C.** $\vec{u}=(-1;5;8)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-10;16)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;5;2),\vec{b}=(0;-1;3),\vec{c}=(1;-1;1)$ thì tọa độ $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+15\vec{c}$ là

A. $\vec{v}=(-9;2;10)$. **B.** $\vec{v}=(9;-1;10)$. **C.** $\vec{v}=(9;2;10)$. **D.** $\vec{v}=(9;-2;10)$.

Câu 14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxyz cho điểm $A(0;-2;-1)$ và $B(1;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$?

A. $M\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};1\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $M(2;0;5)$. **D.** $M(-1;-3;-4)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;4)$ và $B(1;0;1)$. Điểm M nằm trên trục Oz và cách đều hai điểm A,B có tọa độ là.

A. $(0;0;4)$. **B.** $(2;0;0)$. **C.** $(0;0;2)$. **D.** $(0;4;0)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1),B(-1;2;1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là?

A. $I\left(\frac{1}{3};1;\frac{2}{3}\right)$. **B.** $I(-3;1;0)$. **C.** $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$

Câu 17: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là

A. 5. **B.** 3. **C.** $\sqrt{54}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $G(1;-2;3)$ và ba điểm $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$. Biết G là trọng tâm của tam giác ABC thì $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 0.

Câu 19: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;2)$, $C(3;-1;3)$. Tìm toạ độ điểm D sao cho bốn điểm A, B, C, D lập thành một hình chữ nhật.

A. $D(4;3;4)$. **B.** $D(4;-1;4)$. **C.** $D(2;-3;2)$. **D.** $D(4;1;4)$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{AM}{BM}=2$. **C.** $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{AM}{BM}=3$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;1;5);B(1;5;-3)$. Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{BC}$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho vecto $\vec{a}=(1;1;-3)$; $\vec{b}=(2;2;-2)$; $\vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$ và $\vec{d}=(1;1;-1)$. Cặp vecto nào sau đây cùng phương?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{d}$. **C.** $\vec{a}$ và $\vec{c}$. **D.** $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-1)$, $B(1;2;0)$; $C(m;n;0)$. Tìm m,n sao cho ba điểm A,B,C thẳng hàng.

A. $m=1;n=1$. **B.** $m=1;n=2$. **C.** $m=2;n=1$. **D.** $m=2;n=2$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 véc tơ $\vec{a}=(-1;2x-1;1-3z)$ và $\vec{b}=(2+3y;-1;-2)$. Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì tổng $T=x+2y^2+3z^3$ bằng

A. 2. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $(-2;11;1)$. **B.** $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4)$, $B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz) và (Oyz). Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Giá trị của tổng $a+b+c$ là

A. 17. **B.** -17. **C.** -11. **D.** 11.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;4;2)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;0;2)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích hình thang $ABCD$ gấp ba lần diện tích tam giác ABC.

A. $D(9;8;0)$. **B.** $D(-11;0;4)$ và $D(9;8;0)$.

C. $D(-11;0;4)$. **D.** $D(11;0;-4)$ và $D(-9;-8;0)$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;5;6)$; $B(1;3;2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz). Gọi C là điểm nằm trên trục Oz sao cho BC và AH là hai đường thẳng cắt nhau. Xác định tọa độ điểm C.

A. $C(0;0;2)$. **B.** $C\left(0;0;-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $C(0;0;4)$. **D.** $C(0;0;-4)$

Câu 29: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ trong đó $A(1;2;0)$, $B(3;0;8)$ và $C(-3;-6;8)$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB, BC thỏa mãn $AM=BN=\frac{1}{3}BC$. Gọi $I(a;b;c)$ là giao điểm của AN, DM. Tính $P=a+b+c$.

A. $\frac{17}{5}$. **B.** $\frac{21}{5}$. **C.** $\frac{20}{5}$. **D.** 5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;1)$, $B(2;1;3)$, $C(-1;3;-2)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3};2;\frac{2}{3}\right)$.

b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3;\frac{3}{2};2\right)$

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D=(1;4;-4)$.

d) Ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$, $C(9;2;y)$.

a) Ba điểm A,B,C thẳng hàng thì $x+y=5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x=1;y=3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x=13, y=-1$.

d) Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3x+2y+41$.

Câu 3: Cho các điểm $A(1;-2;3),B(-2;1;2),C(3;-1;2)$.

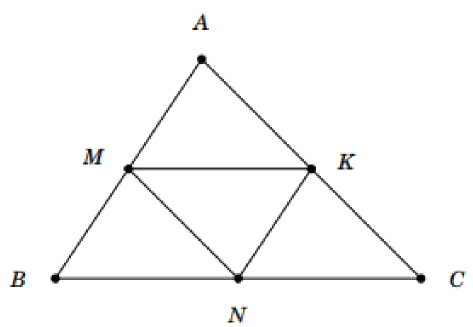
a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Câu 4: Cho ba điểm $A(3;3;-6),B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm của AB,BC và CA.



a) Tọa độ $M(2;3;2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC=2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.

d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

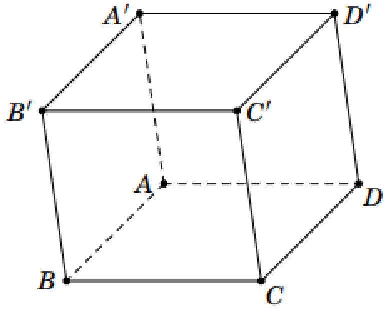
Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0), C(1;2;0), D'(-1;3;5)$. Gọi M, N là tâm của các hình bình hành $ABB'A', ADD'A'$.

a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

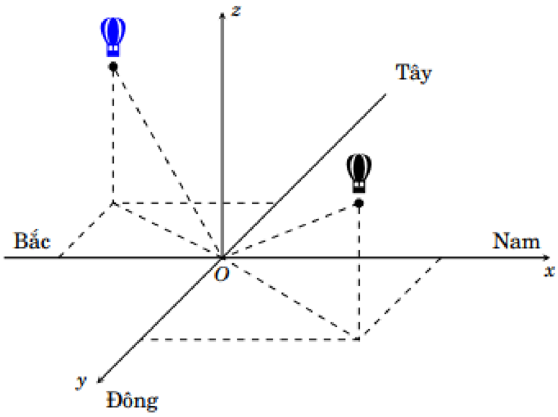
b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN} = (-1;1;0)$.

d) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'}\right| = \sqrt{29}$.



Câu 6: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là (2;1;0,5).

b) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5;-1;0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;5)$ và $B(-2;-2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB

Câu 2: Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2), B(2;1;-3), C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Hoành độ điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ là bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-1), B(-1;-x;1), C(7;-1;y)$. Khi A, B, C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x + y$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;1;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA.\overrightarrow{MA} = 4MB.\overrightarrow{MB}$. Giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Bình phương độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu?

Câu 6: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB, CD và có góc tại D bằng $45°$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$ $C(6;1;0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

Câu 8: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(5;-2;0), B(4;5;-2)$ và $C(0;3;2)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Đặt $Q = 2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right| + 3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$. Biết giá trị nhỏ nhất của Q có dạng $a\sqrt{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và b là số nguyên tố. Tính $a+b$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Gọi $D(a;b;c)$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AD và diệt tích hình thang $ABCD$ bằng 4 lần diện tích tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 03 BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Biểu thức toạ độ của phép toán cộng, trừ, nhân một số thực với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$. Khi đó ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=(x+x';y+y';z+z')$
- $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';y-y';z-z')$
- $k\vec{a}=(kx;ky;kz)$ với k là một số thực.

Nhận xét: Vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b}=(x';y';z')\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\begin{cases}x=kx'\\y=ky'\\z=kz'.\end{cases}$

2 Biểu thức toạ độ tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b}=xx'+yy'+zz'$

Nhận xét:

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx'+yy'+zz'=0$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Chú ý: Nếu $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ thì $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Đặc biệt khi B trùng O ta nhận được công thức $OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}$.

3 Biểu thức toạ độ tích có hướng của hai vectơ

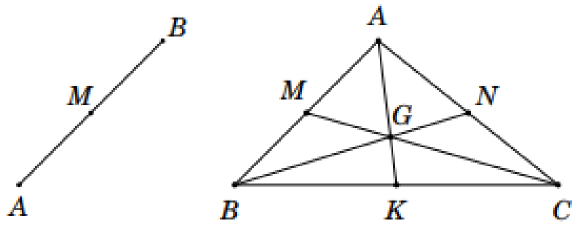
Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ không cùng phương. Khi đó vectơ

$\vec{w}=(yz'-y'z;zx'-z'x;xy'-x'y)$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

- Vectơ xác định như trên gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ kí hiệu là $\vec{w}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$

- Quy ước $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ thì $\left[\vec{a};\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = \left(yz' - y'z; zx' - z'x; xy' - x'y \right)$
- $\vec{a}$ không cùng phương với $\vec{b}$ khi và chỉ khi $\left[\vec{a};\vec{b}\right] \neq \vec{0}$

4 Biểu thức toạ độ trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm tam giác



Trong không gian $Oxyz$, toạ độ trung điểm và trọng tâm được xác định như sau:

- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2} \right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Toạ độ của các phép toán vectơ, toạ độ điểm, độ dài đoạn thẳng

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$ và vectơ $\vec{v}=\left(3;-\frac{5}{4};2\right)$.

a) Tìm toạ độ của $\vec{u}$.

b) Biểu diễn $\vec{v}$ theo các vectơ đơn vị $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

c) Tìm toạ độ của $\vec{a}=2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}$ nên $\vec{u}=\left(-2;3;\frac{3}{4}\right)$.

b) Vì $\vec{v}=\left(3;-\frac{5}{4};2\right)$ nên $\vec{v}=3\vec{i}-\frac{5}{4}\vec{j}+2\vec{k}$.

c) Biểu diễn $\vec{a}$ qua các vectơ đơn vị:

$$\vec{a}=2\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=2\left(-2\vec{i}+3\vec{j}+\frac{3}{4}\vec{k}\right)+\frac{1}{3}\left(3\vec{i}-\frac{5}{4}\vec{j}+2\vec{k}\right)=-3\vec{i}+\frac{67}{12}\vec{j}+\frac{13}{6}\vec{k}\Rightarrow\vec{a}=\left(-3;\frac{67}{12};\frac{13}{6}\right)$$

Bài tập 2: Cho $\vec{a}=(2;-1;5),\vec{b}=(0;3;-3),\vec{c}=(1;4;-2)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{d}=2\vec{a}-\frac{1}{5}\vec{b}+3\vec{c}$.

Lời giải

Ta có $2\vec{a}=(4;-2;10);\frac{1}{5}\vec{b}=\left(0;\frac{3}{5};-\frac{3}{5}\right);3\vec{c}=(3;12;-6)$.

Do đó $\vec{d}=\left(4-0+3;-2-\frac{3}{5}+12;10-\left(-\frac{3}{5}\right)+(-6)\right)$ hay $\vec{d}=\left(7;\frac{47}{5};\frac{23}{5}\right)$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{p}=(3;-2;1),\vec{q}=(6;-4;2),\vec{r}=(2;1;-3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$.

b) Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

Lời giải

a) Ta có: $2\vec{p}=(6;-4;2),-3\vec{q}=(-18;12;-6),\vec{r}=(2;1;-3)$.

Suy ra $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}=(-10;9;-7)$.

b) Ta có $2\vec{p}=(6;-4;2)=\vec{q}$ suy ra hai vectơ $\vec{p},\vec{q}$ cùng phương.

Do $\frac{3}{2}\neq\frac{-2}{1}$ nên $\vec{p},\vec{r}$ không cùng phương. Tương tự hai vectơ $\vec{q},\vec{r}$ không cùng phương.

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(3;-1;2)$, $B(1;2;3)$, $C(4;-2;1)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng. Xác định toạ độ trọng tâm tam giác ABC

b) Tìm toạ độ điểm D biết tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

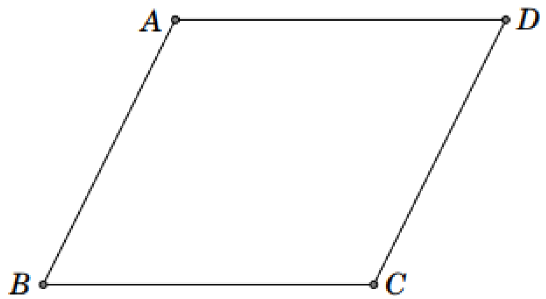
c) Tìm toạ độ giao điểm E của đường thẳng BC với mặt phẳng toạ độ (Oxz)

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$; $\overrightarrow{AC}=(1;-1;-1)$. Vì $-\frac{2}{1}\neq\frac{-3}{-1}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương hay ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC khi đó là $G\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3};2\right)$

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x_D=-2\\-2-y_D=3\\1-z_D=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=6\\y_D=-5\\z_D=0\end{cases}$



Vậy toạ độ của điểm D khi đó là $D(6;-5;0)$

c) Vì E thuộc mặt phẳng Oxz nên toạ độ điểm $E=(x;0;z)$

Ta có $\overrightarrow{AE}=(x-3;1;z-2)$ mà A,B,E thẳng hàng nên hai vectơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}$ cùng phương, do đó:

$$\overrightarrow{AE}=k.\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=-2k\\1=3k\\z-2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{3}\\k=\frac{1}{3}\\z=\frac{7}{3}\end{cases}\text{. Vậy } E\left(\frac{7}{3};0;\frac{7}{3}\right)$$

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $A(5;-3;0)$, $B(2;1;-1)$, $C(4;1;2)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC}$

b) Tìm toạ độ điểm N sao cho $2\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NB}$

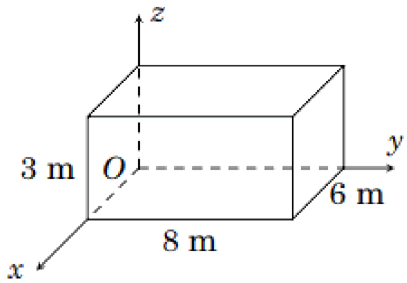
Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;4;2)$; $\overrightarrow{BC}=(2;0;3)\Rightarrow\vec{u}=(-17;12;-15)$

b) Gọi $N(x;y;z)$ khi đó $\overrightarrow{NA}=(5-x;-3-y;-z)$; $\overrightarrow{NB}=(2-x;1-y;-1-z)$

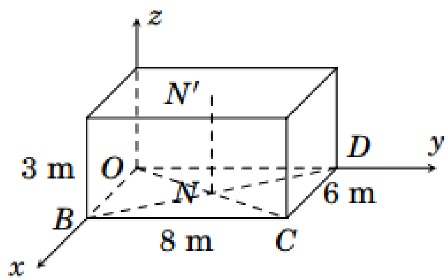
$$2\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NB}\Leftrightarrow\begin{cases}2(5-x)=-2+x\\2(-3-y)=-1+y\\-2z=1+z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-\dfrac{5}{3}\\z=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow N\left(4;-\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$$

Bài tập 6: Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là $8\,\text{m}$, chiều rộng là $6\,\text{m}$ và chiều cao là $3\,\text{m}$. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (*Hình minh họa dưới đây*). Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn



Lời giải

Gọi toạ độ các điểm $B(3;0;0);C(3;6;0);D(0;6;0)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi N là trung điểm của OC, N' là hình chiếu của N lên mặt phẳng trần nhà suy ra N' là điểm treo đèn.

Khi đó $N\left(\dfrac{3}{2};3;0\right)\Rightarrow N'\left(\dfrac{3}{2};3;3\right)$

Vậy toạ độ của điểm treo đèn là $\left(\dfrac{3}{2};3;3\right)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Tính độ dài của $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}$

A. $\sqrt{74}$. **B.** $3\sqrt{6}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{42}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}=2\left(2\vec{j}-3\vec{k}\right)-\left(4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)=4\vec{j}-6\vec{k}-4\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}=-4\vec{i}+3\vec{j}-7\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{v}=(-4;3;-7) \Rightarrow \left|\vec{v}\right|=\sqrt{(-4)^2+3^2+(-7)^2}=\sqrt{74}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5)$, $B(5;-5;7)$; $M(x;y;1)$. Khi A,B,M thẳng hàng thì giá trị của $x;y$ là

A. $x=4;y=-7$. **B.** $x=-4;y=7$. **C.** $x=4;y=7$. **D.** $x=-4;y=-7$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;-4;2)$; $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+1;-4)$

Để ba điểm A,B,M thẳng hàng thì $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{-4}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=-4\\y=7\end{cases}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$ cho 3 diểm $A(1,2,-1)$, $B(2,-1,3)$, $C(-3,5,1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $(-2,2,5)$. **B.** $(-4,8,-5)$. **C.** $(-4,8,-3)$. **D.** $(-2,8,-3)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1,-3,4);\overrightarrow{AC}=(-4,3,2)$ Suy ra $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Gọi $D(x,y,z)$; $\overrightarrow{DC}=(-3-x,5-y,1-z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases}-3-x=1\\5-y=-3\\1-z=4\end{cases}\Rightarrow D(-4,8,-3)$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2)$, $B(2;1;-3)$, $C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ có tọa độ là:

A. $G(2;-1;-1)$. **B.** $G(2;-2;-1)$. **C.** $G(0;-1;-1)$. **D.** $G(6;-3;-3)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{4}(x_A + x_B + x_C + x_D) = 2 \\ y_G = \frac{1}{4}(y_A + y_B + y_C + y_D) = -2 \\ z_G = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } G(2;-2;-1).$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;-1;-2)$ và trọng tâm $G(2;1;-3)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ là

A. $(3;6;3)$. **<u>B</u>.** $(3;6;-3)$. **C.** $(3;-3;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm cạnh BC. Ta có: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2.\overrightarrow{AM} = 2.\frac{3}{2}.\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AG} = (3;6;-3)$

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

A. $I\left(-\frac{5}{3};0;\frac{5}{3}\right)$. **B.** $I\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};0\right)$. **<u>C</u>.** $I\left(\frac{5}{3};0;\frac{5}{3}\right)$. **D.** $I\left(0;\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$. Khi đó: $\overrightarrow{IA} = (1-x;2-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IB} = (2-x;-1-y;3-z)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (4-2x;-2-2y;6-2z)$. Nên $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (5-3x;-3y;5-3z)$.

Ta có: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-3x=0 \\ -3y=0 \\ 5-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 0 \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}$. Vậy $I\left(\frac{5}{3};0;\frac{5}{3}\right)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $E(1;3;2)$, $F(0;-1;5)$, $K(2;4;-1)$ và tam giác ABC thỏa mãn $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ΔABC là

<u>A</u>. $G(1;2;2)$. **B.** $G(-1;-4;3)$. **C.** $G(2;2;1)$. **D.** $G(1;1;-3)$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GK} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GK} - \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GK} = \vec{0}$.

Suy ra G cũng là trọng tâm của tam giác ΔEFK. Do đó: $\begin{cases} x_G = \frac{1+0+2}{3} = 1 \\ y_G = \frac{3-1+4}{3} = 2 \\ z_G = \frac{2+5-1}{3} = 2 \end{cases}$.

Câu 8: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{PQ}=(0;1;-2)$, $\overrightarrow{PR}=(-2;-1;0)$ và điểm $M(1;-2;2)$ trung điểm của đoạn *QR*. Tọa độ điểm *Q* là

A. $(-1;1;-2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(0;1;3)$. **D.** $(2;-1;1)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PR}=(2;2;-2)$ suy ra $\begin{cases} x_Q-x_R=2\\ y_Q-y_R=2\\ z_Q-z_R=-2\end{cases}$ (1).

Vì điểm $M(1;-2;2)$ trung điểm của đoạn *QR* nên $\begin{cases} x_Q+x_R=2\\ y_Q+y_R=-4\\ z_Q+z_R=4\end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $Q(2;-1;1)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là:

A. $I(1;1;0)$. **B.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $I(1;1;1)$. **D.** $I(1;-1;2)$

Lời giải

Vì $I(x;y;z)$ là trung điểm MN nên ta có: $2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Suy ra $\begin{cases} x=\dfrac{2+0+0+2}{4}\\ y=\dfrac{0+2+0+2}{4}\\ z=\dfrac{0+0+2+2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1\\ y=1\\ z=1\end{cases}$. Vậy $I(1;1;1)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng

A. 42. **B.** -50. **C.** -48. **D.** 44.

Lời giải

Tứ giác *ABCM* là hình bình hành khi và chỉ khi: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\begin{cases} a+2=1-2\\ b-3=2-(-1)\\ c-3=-1-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-3\\ b=6.\\ c=-1\end{cases}$

Suy ra: $P=a^2+b^2-c^2=(-3)^2+6^2-(-1)^2=44$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;3)$ và điểm $B(4;-3;1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $(6;-2;4)$. **<u>B</u>.** $(3;-1;2)$. **C.** $(1;-2;-1)$. **D.** $(2;-4;-2)$.

Lời giải

Ta có tọa độ trung điểm $I(x_I;y_I;z_I)$ là $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1+(-3)}{2}=-1 \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{3+1}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow I(3;-1;2)$.

Câu 12: Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(3;4;2)$; $\vec{b}=(-5;0;3)$; $\vec{c}=(1;2;-4)$. Tìm toạ độ của vectơ $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$:

<u>A</u>. $\vec{u}=(-2;10;16)$. **B.** $\vec{u}=(2;10;-16)$. **C.** $\vec{u}=(-1;5;8)$. **D.** $\vec{u}=(-2;-10;16)$.

Lời giải

Ta có: $3\vec{a}=(9;12;6)$; $2\vec{b}=(-10;0;6)$; $-\vec{c}=(-1;-2;4)$

Khi đó $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=(-2;10;16)$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;5;2),\vec{b}=(0;-1;3),\vec{c}=(1;-1;1)$ thì tọa độ $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+15\vec{c}$ là

A. $\vec{v}=(-9;2;10)$. **B.** $\vec{v}=(9;-1;10)$. **C.** $\vec{v}=(9;2;10)$. **<u>D</u>.** $\vec{v}=(9;-2;10)$.

Lời giải

Ta có $2\vec{a}=(-6;10;4),3\vec{b}=(0;-3;9),15\vec{c}=(15;-15;15)$ suy ra $\vec{v}=(9;-2;10)$.

Câu 14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxyz cho điểm $A(0;-2;-1)$ và $B(1;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}$?

A. $M\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};1\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **<u>C</u>.** $M(2;0;5)$. **D.** $M(-1;-3;-4)$.

Lời giải

Giả sử $M(x_M;y_M;z_M)$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow \begin{cases}(0-x_M)-2(1-x_M)=0\\(-2-y_M)-2(-1-y_M)=0\\(-1-z_M)-2(2-z_M)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=2\\y_M=0\\z_M=5\end{cases}\Rightarrow M(2;0;5)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;4)$ và $B(1;0;1)$. Điểm M nằm trên trục Oz và cách đều hai điểm A,B có tọa độ là.

<u>A</u>. $(0;0;4)$. **B.** $(2;0;0)$. **C.** $(0;0;2)$. **D.** $(0;4;0)$.

Lời giải

Do điểm M nằm trên trục Oz nên $M(0;0;z)$.

Mặt khác điểm M cách đều hai điểm $A,B \Rightarrow MA = MB$

$\Leftrightarrow \sqrt{(0-1)^2+(0-3)^2+(z-4)^2} = \sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2+(z-1)^2}$

$\Leftrightarrow 10+(z-4)^2 = 1+(z-1)^2 \Leftrightarrow z=4$

Vậy $M(0;0;4)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1), B(-1;2;1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là?

A. $I\left(\frac{1}{3};1;\frac{2}{3}\right)$. **B.** $I(-3;1;0)$. **C.** $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$

Lời giải

Ta có: $I\left(\frac{2-1}{2};\frac{1+2}{2};\frac{1+1}{2}\right) \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};1\right)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là

A. 5. **B.** 3. **C.** $\sqrt{54}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Lời giải

Đặt $M(x;y;z)$, khi đó: $\overrightarrow{MA} = (1-x;2-y;3-z)$ và $\overrightarrow{MB} = (-2-x;-4-y;9-z)$

Ta có: $MA = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=-2(-2-x) \\ 2-y=-2(-4-y) \\ 3-z=-2(9-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow M(-1;-2;7)$.

Khi đó: $\overrightarrow{OM} = (-1;-2;7)$. Vậy $OM = \sqrt{54}$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $G(1;-2;3)$ và ba điểm $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$. Biết G là trọng tâm của tam giác ABC thì $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 0.

Lời giải

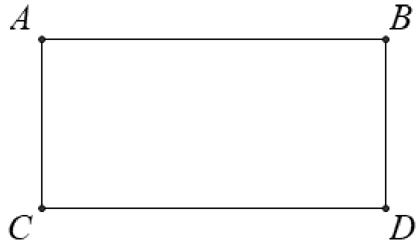
Ta có trọng tâm G của tam giác ABC: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{a}{3} \\ -2 = \dfrac{b}{3} \\ 3 = \dfrac{c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-6 \\ c=9 \end{cases}$.

Khi đó: $a+b+c = 3+(-6)+9 = 6$.

Câu 19: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;2)$, $C(3;-1;3)$. Tìm toạ độ điểm D sao cho bốn điểm A, B, C, D lập thành một hình chữ nhật.

A. $D(4;3;4)$. **B.** $D(4;-1;4)$. **C.** $D(2;-3;2)$. **D.** $D(4;1;4)$.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;1)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-2;2)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1.2+2.(-2)+1.2=0$ nên $AB\perp AC$

Điều này cho thấy A,B,C không thẳng hàng và hình chữ nhật tạo ra phải là $ABDC$.

Gọi $D(x;y;z)$, ta có $\overrightarrow{CD}=(x-3;y+1;z-3)$.

Tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=1\\y+1=2\\z-3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\\z=4\end{cases}\Rightarrow D(4;1;4)$.

Vậy $D(4;1;4)$

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\dfrac{AM}{BM}$.

A. $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{AM}{BM}=2$. **C.** $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{AM}{BM}=3$.

Lời giải

Điểm $M\in(Oxz)\Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$ và

A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\quad(k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\-1=k\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9;0;0)$.

$\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2)$;$\overrightarrow{AM}=(-7;-3;-1)\Rightarrow BM=2AB.$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-4;1;5);B(1;5;-3)$. Gọi C là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Gọi $C(0;a;b)$ là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Oyz). Khi đó $A;B;C$ thẳng hàng hay $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Lại có $\overrightarrow{AB}=(5;4;-8)$; $\overrightarrow{AC}=(4;a-1;b-5)$ nên $\frac{4}{5}=\frac{a-1}{4}=\frac{b-5}{-8}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{21}{5}\\ b=-\frac{7}{5}\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(5;4;-8)\\ \overrightarrow{AC}=\left(4;\frac{16}{5};-\frac{32}{5}\right)\\ \overrightarrow{BC}=\left(-1;-\frac{4}{5};\frac{8}{5}\right)\end{cases}$ nên $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{BC}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho vecto $\vec{a}=(1;1;-3)$; $\vec{b}=(2;2;-2)$; $\vec{c}=2\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$ và $\vec{d}=(1;1;-1)$. Cặp vecto nào sau đây cùng phương?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$. **B.** $\vec{a}$ và $\vec{d}$. **C.** $\vec{a}$ và $\vec{c}$. **D.** $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

Lời giải

Vì $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{-2}$ nên hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Vì $\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{-3}{-1}$ nên hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{d}$ không cùng phương.

Ta có $\vec{c}=(2;2;-6)=2(1;1;-3)=2\vec{a}$ suy ra $\vec{a}$ và $\vec{c}$ cùng phương.

Vì $\frac{2}{2}=\frac{2}{2}\neq\frac{-2}{-6}$ nên hai vecto $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;-1)$, $B(1;2;0)$; $C(m;n;0)$. Tìm m,n sao cho ba điểm A,B,C thẳng hàng.

A. $m=1;n=1$. **B.** $m=1;n=2$. **C.** $m=2;n=1$. **D.** $m=2;n=2$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(m;n-1;1)$.

Ba điểm A,B,C thẳng hàng $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}m=k\\ n-1=k\\ 1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\ n=2\\ k=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=1\\ n=2\end{cases}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 véc tơ $\vec{a}=(-1;2x-1;1-3z)$ và $\vec{b}=(2+3y;-1;-2)$. Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì tổng $T=x+2y^2+3z^3$ bằng

A. 2. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=2+3y\\ 2x-1=-1\\ 1-3z=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1\\ x=0\\ z=1\end{cases}\Rightarrow T=0+2.(-1)^2+3.1^3=5$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $(-2;11;1)$. **B.** $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$.

Lời giải

Ta có $BA=\sqrt{26}; BC=2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc B ta có $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow DC=2DA$.

Vì D là chân đường phân giác trong nên $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x_D=\frac{2x_A+x_C}{3}=-\frac{2}{3}\\ y_D=\frac{2y_A+y_C}{3}=\frac{11}{3}\\ z_D=\frac{2z_A+z_C}{3}=1\end{cases}$.

Vậy $D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4)$, $B(a;b;c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy), (Oxz) và (Oyz). Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$. Giá trị của tổng $a+b+c$ là

A. 17. **B.** -17. **C.** -11. **D.** 11.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(a-6;b+3;c-4)$.

Vì M, N, P lần lượt là giao điểm của AB với các mặt phẳng (Oxy), (Oxz) và (Oyz) nên $M(x_M;y_M;0)$, $N(x_N;0;z_N)$, $P(0;y_P;z_P)$.

Vì M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM=MN=NP=PB$ nên ta có:

$4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x_M-6)=a-6\\4(y_M+3)=b+3\\4(0-4)=c-4\end{cases}\Rightarrow c=-12$; $2\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x_N-6)=a-6\\2(0+3)=b+3\\2(z_N-4)=c-4\end{cases}$

$\Rightarrow b=3$

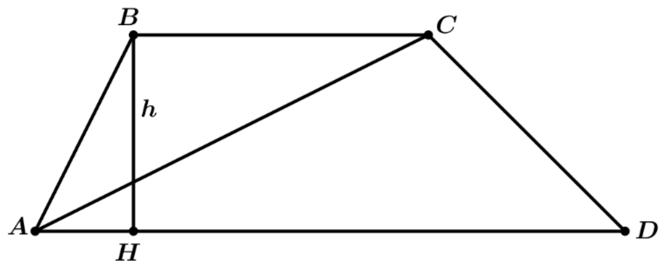
$\frac{4}{3}\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4}{3}(0-6)=a-6\\ \frac{4}{3}(y_P+3)=b+3\\ \frac{4}{3}(z_P-4)=c-4\end{cases}\Rightarrow a=-2$. Vậy $a+b+c=-11$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;4;2), B(3;2;1), C(-2;0;2)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và diện tích hình thang $ABCD$ gấp ba lần diện tích tam giác ABC.

A. $D(9;8;0)$. **B.** $D(-11;0;4)$ và $D(9;8;0)$.

C. $D(-11;0;4)$. **D.** $D(11;0;-4)$ và $D(-9;-8;0)$.

Lời giải



Giả sử $D(x_D;y_D;z_D)$. Khi đó: $\overrightarrow{AD}=(x_D+1;y_D-4;z_D-2)$; $\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$.

Do $AD//BC$ nên $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{BC}\ (t\neq 0)\Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-1-5t \\ y_D=4-2t \\ z_D=2+t \end{cases};t\neq 0.$

Vì diện tích hình thang $ABCD$ gấp ba lần diện tích tam giác ABC

nên $\frac{1}{2}h.(BC+AD)=3.\frac{1}{2}h.BC$,với h là chiều cao của hình thang và cũng chính là chiều cao tam giác ABC ứng với cạnh BC.

Suy ra, $AD=2BC \Leftrightarrow (x_D+1)^2+(y_D-4)^2+(z_D-2)^2=4\left[(-5)^2+(-2)^2+1^2\right]$

$\Rightarrow (-5t)^2+(-2t)^2+t^2=4.30 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\Rightarrow D(-11;0;4) \\ t=-2\Rightarrow D(9;8;0) \end{array}\right.$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;5;6); B(1;3;2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz). Gọi C là điểm nằm trên trục Oz sao cho BC và AH là hai đường thẳng cắt nhau. Xác định tọa độ điểm C.

A. $C(0;0;2)$. **B.** $C\left(0;0;-\frac{2}{3}\right)$. **C.** $C(0;0;4)$. **D.** $C(0;0;-4)$

Lời giải

Vì H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) nên $H(0;5;6)$.

Gọi $C(0;0;c)$ là một điểm nằm trên trục Oz và D là giao điểm của BC và AH.

Khi đó A,D,H nên $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{HA}=(4k;0;0)$ suy ra tọa độ điểm $D(4k+4;5;6)$.

Lại có B,D,C thẳng hàng nên $\overrightarrow{BD}=l\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}4k+4-1=l.(0-1)\\5-3=l(0-3)\\6-2=l(c-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{7}{12}\\l=-\dfrac{2}{3}\\c=-4\end{cases}$

Vậy $C(0;0;-4)$.

Câu 29: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC).d(A,BC)\Leftrightarrow S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC).\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC}=\dfrac{(AD+BC).S_{\Delta ABC}}{BC}\Leftrightarrow 3BC=AD+BC\Leftrightarrow AD=2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ (1).

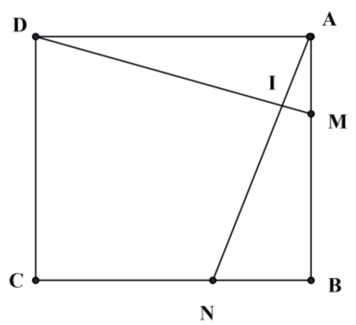
$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(x_D+2;y_D-3;z_D-1)$.

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_D+2=-10\\y_D-3=-4\\z_D-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=-12\\y_D=-1\\z_D=3\end{cases}$. Vậy $D(-12;-1;3)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ trong đó $A(1;2;0),B(3;0;8)$ và $C(-3;-6;8)$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB, BC thỏa mãn $AM=BN=\dfrac{1}{3}BC$. Gọi $I(a;b;c)$ là giao điểm của AN, DM. Tính $P=a+b+c$.

A. $\dfrac{17}{5}$. **B.** $\dfrac{21}{5}$. **C.** $\dfrac{20}{5}$. **D.** 5.

Lời giải



$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DM}=\left(\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{DA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=0\Rightarrow AN\perp DM$

Ta có $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow N(1;-2;8)$. Hai tam giác ΔAIM và ΔABN đồng dạng

$$\Rightarrow AI=\frac{AM.AB}{AN}=\frac{1}{\sqrt{10}}AB, AN=\frac{\sqrt{10}}{3}AB\Rightarrow AI=\frac{3}{10}AN$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{10}\overrightarrow{AN}\Rightarrow I\left(1;\frac{4}{5};\frac{12}{5}\right)\Rightarrow P=\frac{21}{5}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;1)$, $B(2;1;3)$, $C(-1;3;-2)$.

a) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3};2;\frac{2}{3}\right)$.

b) Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3;\frac{3}{2};2\right)$

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D=(1;4;-4)$.

d) Ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng: Tọa độ trọng tâm tam giác ABC $\left(\frac{4+2-1}{3};\frac{2+1+3}{3};\frac{1+3-2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3};2;\frac{2}{3}\right)$.

b) Đúng : Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB $\left(\frac{4+2}{2};\frac{2+1}{2};\frac{1+3}{2}\right)=\left(3;\frac{3}{2};2\right)$.

c) Đúng: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}2-4=-1-x_D\\1-2=3-y_D\\3-1=-2-z_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=4\\z_D=-4\end{cases}\Rightarrow D(1;4;-4).$$

d) Sai: Vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2;-1;2)\\\overrightarrow{AC}=(-5;1;-3)\end{cases}$. Ta có: $\frac{-2}{-5}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-3}\Rightarrow A,B,C$ không thẳng hàng.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$, $C(9;2;y)$.

a) Ba điểm A,B,C thẳng hàng thì $x+y=5$.

b) Điểm $G\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x=1;y=3$.

c) Tam giác ABC vuông tại A thì $x=13, y=-1$.

d) Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3x+2y+41$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$

Để ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4=k.6 \\ x-5=k(-3) \\ 2=k(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy $x+y=5$.

b) Đúng : Ta có $\begin{cases} \dfrac{3+7+9}{3}=\dfrac{19}{3} \\ \dfrac{5+x+2}{3}=\dfrac{8}{3} \\ \dfrac{-1+1+y}{3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$.

c) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$

Khi đó: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24+(x-5)(-3)+2(y+1)$. Với $\begin{cases} x=13 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

d) Đúng. Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24+(x-5)(-3)+2(y+1)=-3x+2y+41$.

Câu 3: Cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng: $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(-3;3;-1)$.

b) Sai: $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A)=(2;1;-1)$

c) Sai: $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1), \overrightarrow{AC}=(2;1;-1)$. Hai vec tơ này không cùng phương nên không tồn tại số thực k để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

d) Đúng: Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

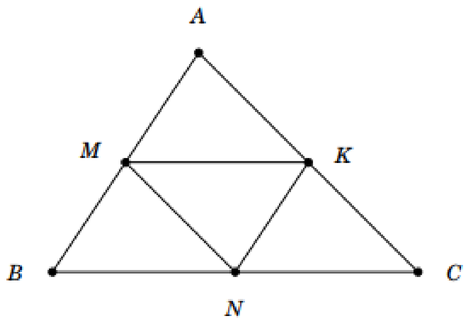
Câu 4: Cho ba điểm $A(3;3;-6), B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm của AB,BC và CA.

a) Tọa độ $M(2;3;2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC=2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.

d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Lời giải

a) Sai: M là trung điểm của AB, suy ra $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ hay $M(2;3;-2)$.

b) Sai: Ta có $G(1;1;-1)$. Suy ra $GC=\sqrt{(-1-1)^2+(-3-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{6}$.

c) Đúng: Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra E trùng với $G(1;1;-1)$.

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AC}=(-4;-6;7),\overrightarrow{BD}=(-4;-6;7)$ suy ra $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Vậy $ABDC$ là hình bình hành.

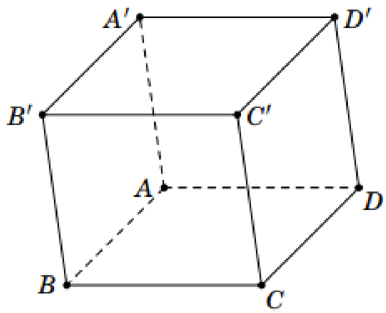
Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0),C(1;2;0),D'(-1;3;5)$. Gọi M,N là tâm của các hình bình hành $ABB'A',ADD'A'$.

a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

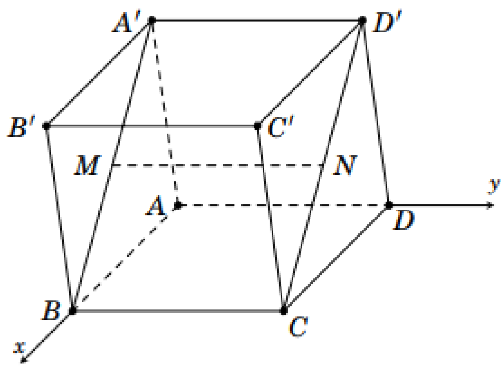
b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.

c) Tọa độ $\overline{MN}=(-1;1;0)$.

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\sqrt{29}$.



Lời giải



a) Đúng: Theo qui tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(0;2;0)\Rightarrow D(0;2;0)$.

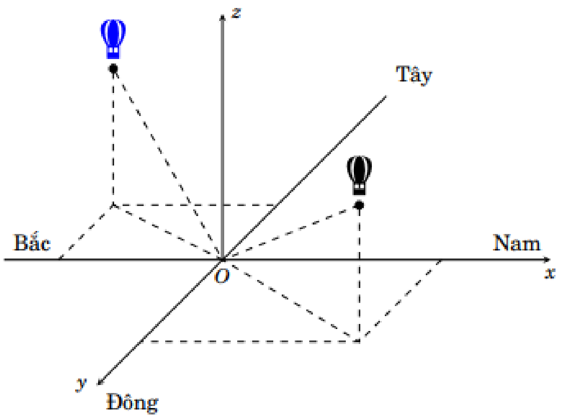
b) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=(-1;1;5)\Rightarrow A'(-1;1;5)$.

c) Sai: Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}=(0;2;0)$.

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=(0;3;5)$.

Xét $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{0^2+3^2+5^2}=\sqrt{34}$

Câu 6: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5$ km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5$ km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2;1;0,5)$.

b) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5;-1;0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là $3,92$ km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Đúng: Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $(2;1;0,5)$.

b) Sai: Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $(-1;-1,5;0,8)$.

c) Sai: Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng

$\sqrt{2^2+1^2+0,5^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}(\text{ km})$

d) Đúng: Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1-2)^2+(1,5-1)^2+(0,8-0,5)^2}=\sqrt{15,34}\approx 3,92(\text{ km}).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;5)$ và $B(-2;-2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB

Lời giải

Ta có: $AB=\sqrt{(-2-1)^2+(-2+2)^2+(1-5)^2}=5$.

Câu 2: Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;-4;2),B(2;1;-3),C(3;0;-2)$ và $D(2;-5;-1)$. Hoành độ điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Tọa độ điểm G thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}=\dfrac{1+2+3+2}{4}=2 \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}=\dfrac{-4+1+0+(-5)}{4}=-2 \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}=\dfrac{2+(-3)+(-2)+(-1)}{4}=-1 \end{cases} \Rightarrow G(2;-2;-1)$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;-1),B(-1;-x;1),C(7;-1;y)$. Khi A,B,C thẳng hàng thì giá trị biểu thức $x+y$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;-x-2;2)$; $\overrightarrow{AC}=(4;-3;y+1)$.

Để A,B,C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}-4=k.4\\-x-2=k.(-3)\\2=k.(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-1\\x=-5\\y=-3\end{cases}$.

Vậy $x+y=-5-3=-8$.

Câu 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(4;1;-1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA.\overrightarrow{MA}=4MB.\overrightarrow{MB}$. Giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do $MA\overrightarrow{MA}=4MB\overrightarrow{MB}$ nên $\overrightarrow{MA}$ cùng hướng $\overrightarrow{MB}$.

$MA\overrightarrow{MA}=4MB\overrightarrow{MB}\Rightarrow MA^2=4MB^2\Leftrightarrow MA=2MB\Rightarrow B$ là trung điểm AM $\Rightarrow M(7;4;-5)$.

Khi đó $a+b+c=7+4+(-5)=6$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3),B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$. Bình phương độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$.

Vì điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$ nên

$$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}3.(-2-x)=-3\\3.(-4-y)=-6\\3.(9-z)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-2\\z=7.\end{cases}$$

$\Rightarrow M(-1;-2;7)\Rightarrow OM=\sqrt{1+4+49}=\sqrt{54}\Rightarrow OM^2=54$.

Câu 6: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;-1;1),B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB,CD và có góc tại D bằng $45°$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$ khi đó $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, $\overrightarrow{DC}=(-1-x;-y;3-z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB,CD nên $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow\frac{-1-x}{2}=\frac{-y}{2}=\frac{3-z}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=2z-7\\y=2z-6\end{cases}.$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x-1;y+1;z-1)\\\overrightarrow{CD}=(x+1;y;z-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(2z-8;2z-5;z-1)\\\overrightarrow{CD}=(2z-6;2z-6;z-3)\end{cases}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)}.\sqrt{9(z-3)^2}}=\frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow 2(z^2-6z+9)=z^2-6z+10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=4\\z=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=2\\x=-3;y=-2\end{array}\right..$$

Vậy $D(1;2;4)$ hoặc $D(-3;-2;2)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$ $C(6;1;0)$ và hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=3$; $\overrightarrow{BC}=(4;1;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên

$$\frac{1}{2}AB(AD+BC)=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}.3.\left(AD+3\sqrt{2}\right)=6\sqrt{2}\Rightarrow AD=\sqrt{2}\Rightarrow AD=\frac{1}{3}BC.$$

Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có $\begin{cases}a-1=\dfrac{4}{3}\\b-2=\dfrac{1}{3}\\c-1=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{3}\\b=\dfrac{7}{3}\\c=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b+c=6$.

Câu 8: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(5;-2;0), B(4;5;-2)$ và $C(0;3;2)$. Điểm M di chuyển trên trục Ox. Đặt $Q=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$. Biết giá trị nhỏ nhất của Q có dạng $a\sqrt{b}$ trong đó $a,b\in\mathbb{N}$ và b là số nguyên tố. Tính $a+b$.

Lời giải

Ta có $Q=2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|+3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=2\left|3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|+3\left|2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|$

Với $G(3;2;0)$ là trọng tâm của tam giác ABC và $I(2;4;0)$ là trung điểm BC, ta có:

$Q=2\left|3\overrightarrow{MG}\right|+3\left|2\overrightarrow{MI}\right|=6(MG+MI)$,

Do G và I nằm cùng phía so với Ox nên gọi $G'(3;-2;0)$ là điểm đối xứng của G qua Ox.

Khi đó $Q=2\left|3\overrightarrow{MG}\right|+3\left|2\overrightarrow{MI}\right|=6(MG+MI)=6(MG'+MI)\geq 6G'I=6\sqrt{37}$.

Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của $G'I$ và Ox.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Gọi $D(a;b;c)$ là điểm sao cho $ABCD$ là hình thang có cạnh đáy AD và diệt tích hình thang $ABCD$ bằng 4 lần diện tích tam giác ABC. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Ta có $S_{ABCD}=4S_{ABC}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}d(BC,AD)(BC+AD)=4.\dfrac{1}{2}d(BC,AD)BC$

$\Leftrightarrow BC+AD=4BC\Leftrightarrow AD=3BC$. Do $ABCD$ là hình thang có đáy $AD\Rightarrow \overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2=-15\\ b-3=-6\\ c-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-17\\ b=-3\\ c=4\end{cases}\Rightarrow a+b+c=-16.$$

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Tích vô hướng, tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng

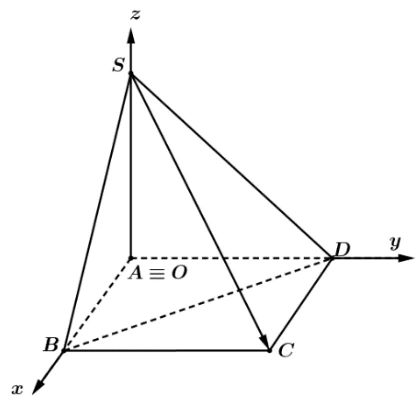
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(3;1;2)$, $\vec{b}=(-3;0;4)$ và $\vec{c}=(6;-1;0)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.(-\vec{b})$ và $(2\vec{a}).\vec{c}$.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với $(ABCD)$. Giả sử $SA=2, AB=3$, $AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS



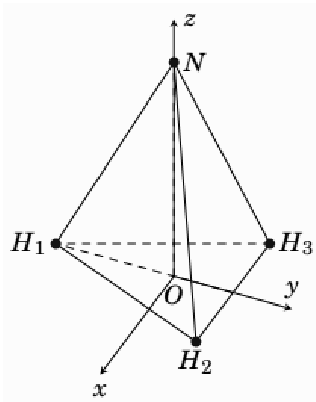
a) Xác định toạ độ của các điểm S,A,B,C,D

b) Tính BD và SC

c) Tính $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right)$.

Bài tập 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $\left|\vec{p}\right|=15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$

Bài tập 4: Trong hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1,H_2,H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $H-N-H$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1,H_2,H_3 (chẳng hạn H_1NH_2), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3. Góc này xấp xỉ $107°$. Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz, ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1,H_2,H_3 trong đó $H_1(0;-2;0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox như hình vẽ minh hoạ:



a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hdrogen

b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với nguyên tử hdrogen

Bài tập 5: Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời $(\text{H}.2.52)$. Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(1;-2;1)$ và $\vec{b}=(2;-4;-2)$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** 12. **D.** -12.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{b}=(x_1,y_1,z_1)$. Toạ độ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là

A. $(y_0z_1-y_1z_0;x_0z_1-x_1z_0;x_0y_1-x_1y_0)$. **B.** $(y_0z_1-y_1z_0;-x_0z_1+x_1z_0;x_0y_1-x_1y_0)$.

C. $(y_0z_1+y_1z_0;x_0z_1+x_1z_0;x_0y_1+x_1y_0)$. **D.** $(y_0z_1-y_1z_0;-x_0z_1-x_1z_0;x_0y_1-x_1y_0)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;2;3),\vec{v}=(0;-1;1)$. Tìm tọa độ của véctơ tích có hướng của hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

A. $(5;1;-1)$. **B.** $(5;-1;-1)$. **C.** $(-1;-1;-1)$. **D.** $(-1;-1;5)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a}=(-1;2;0)$ và $\vec{b}=(0;-2;1)$ là

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{-4}{5}$. **C.** $\frac{4}{25}$. **D.** $\frac{-4}{25}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{m}=(4;3;1)$ và $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là véc-tơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ và $\left|\vec{p}\right|=15$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{p}$ là

A. $(0;9;-12)$. **B.** $(-9;12;0)$. **C.** $(0;-9;12)$. **D.** $(9;-12;0)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;-1;1)$, $\vec{b}=(4;1;2)$, $\vec{c}=(1;0;m+2)$. Tìm m để ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 7: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho $A(1;-2;0);B(1;0;-1);C(0;-1;2)$ và $D(0;3;m)$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây để bốn điểm trên đồng phẳng?

A. $(-2;-1)$ **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(5;7)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-1;3;2)$, $\vec{b}=(-3;-1;2)$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

A. 10. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(-3;1;-1)$ và $\vec{v}=(1;0;5)$. Tích vô hướng của hai vectơ này bằng

A. -8. **B.** 8. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}(-1;3;2)$ và $\vec{v}(-3;-1;2)$. Tích vô hướng của $\vec{u}.\vec{v}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 4.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;2;3)$, $\vec{v}=(0;-1;1)$. Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

A. $(5;1;-1)$. **B.** $(5;-1;-1)$. **C.** $(-1;-1;-1)$. **D.** $(-1;-1;5)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho tam giác ABC với $A(1;2;3), B(0;1;4)$ và $C(2;3;-2)$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S=2\sqrt{2}$. **B.** $S=6\sqrt{2}$. **C.** $S=4\sqrt{2}$. **D.** $S=3\sqrt{2}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3); B(3;4;5)$. Diện tích tam giác OAB bằng

A. $\sqrt{87}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(3;-2;m)$, $\vec{b}=(2;m;-1)$ với m là tham số nhận giá trị thực. Tìm giá trị của m để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4;6;2)$. Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu của A trên các trục Ox, Oy và Oz. Tính diện tích S của tam giác MNP.

A. $S=28$. **B.** $S=\dfrac{49}{2}$. **C.** $S=7$. **D.** $S=14$.

Câu 16: Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho $\vec{a}=(3;-1;2)$, $\vec{b}=(4;2;-6)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ bằng

A. 66. **B.** $\sqrt{66}$. **C.** $3\sqrt{14}$. **D.** 2.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là

A. $M(-4;0;0)$. **B.** $M(5;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(-5;0;0)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$; $B(2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy để tam giác ABC vuông tại A.

A. $\left(0;0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;2;0)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};0;0\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, biết $|\vec{u}|=2, |\vec{v}|=1$ và góc giữa hai véc tơ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Tìm k để vecto $\vec{p}=k\vec{u}+\vec{v}$ vuông góc với vecto $\vec{q}=\vec{u}-\vec{v}$.

A. $k=-\frac{2}{5}$. **B.** $k=\frac{5}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=\frac{2}{5}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2), B(1;1;1), C(2;-1;3)$. Hỏi cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và BC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 21: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 60^0 và $|\vec{a}|=2; |\vec{b}|=4$.Khi đó $|\vec{a}+\vec{b}|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{8\sqrt{3}+20}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB}=(-3;0;4), \overrightarrow{AC}=(5;-2;4)$. Độ dài đường trung tuyến AM là

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;2)$. Điểm M trên trục Ox có hoành độ dương và thỏa mãn $MA^2+MB^2=23$. Khi đó tọa độ điểm M là

A. $M(4;0;0)$. **B.** $M(3;0;0)$. **C.** $M(2;0;0)$. **D.** $M(1;0;0)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$,cho hai vec$\vec{u}(-2;1;5)$ và $\vec{v}(m-2;3;m+1)$, m là tham số. Tìm m để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m=-4$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=3$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ thoả mãn $|\vec{u}|=3; |\vec{v}|=4; (\vec{u};\vec{v})=60°$. Tính độ dài vectơ $\vec{u}+2\vec{v}$

A. $\sqrt{97}$. **B.** 8. **C.** 7. **D.** $4\sqrt{6}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;-5)$, $B(2;3;-6)$ và $C(4;4;-5)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

A. $H\left(\frac{5}{7};4;-5\right)$. **B.** $H(1;4;-5)$. **C.** $H(2;3;-6)$. **D.** $H\left(\frac{7}{3};\frac{11}{3};-\frac{16}{3}\right)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4)$, $B(5;-1;3)$, $C(3;1;5)$ và $D(2;2;m)$ (với m là tham số). Xác định m để bốn điểm A,B,C,D tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện.

A. $m\neq 6$. **B.** $m\neq 4$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m<0$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;2;2)$. Gọi $I(a,b,c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=\frac{13}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=\frac{29}{4}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; có tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng $\overrightarrow{AB}=(1;3;4)$, $\overrightarrow{AD}=(-2;3;5)$ và $\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)$. Tính thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{ABCD.A'B'C'D'}=6$. **B.** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=12$. **C.** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=1$. **D.** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho ba vec-tơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) $|\vec{a}|=2$.

b) $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Câu 2: Cho hai véctơ $\vec{u}=(0;2;3)$ và $\vec{v}=(m-1;2m;3)$.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{13}$.

b) $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{5}$.

c) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow m=1$.

d) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $A(1;2;0),B(0;1;1),C(2;1;0)$.

a) Tam giác ABC vuông tại A.

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;1;0),B(1;1;3),C(2;-1;3),D(1;-1;0)$.

a) Tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối đôi một bằng nhau.

b) Góc giữa 2 đường thẳng AB và CD là $\varphi=\arccos 0,3$

c) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD bằng 3

d) Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{14}}{2}$

Câu 5: Trong hệ trục $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

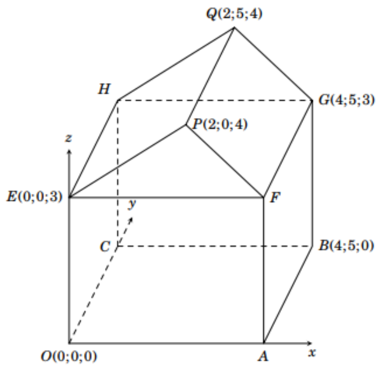
a) Diện tích của tam giác ABC bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)

b) Gọi $D(x;y;z)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi đó $x+y+z=3$

c) Độ dài đường cao của tam giác ABC hạ từ A bằng $AH=\frac{\sqrt{30}}{5}$ (đơn vị dài)

d) Thể tích của khối chóp $SABCD$ với đỉnh $S(0;3;4)$ bằng 2 (đvtt)

Câu 6: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(3;1;-2)$ và $\vec{b}=(-2;0;-3)$. Tích vô hướng $\vec{a}.(2\vec{a}+\vec{b})$ bằng

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{u}=(1;1;0)$ và $\vec{v}=(2;0;-1)$. Tính độ dài $|\vec{u}+2\vec{v}|$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $C(4;0;0)$ và $B(2;0;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MBC bằng 3.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$, $D\in Oy$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tổng tung độ của các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(2;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(1;0;3)$. Gọi M là điểm trong không gian thỏa mãn $MA^2+MC^2=MB^2$. Tính MP với $P(3;-2;5)$.

Câu 6: Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.

Câu 7: Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.

Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Câu 8: Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

----------------HẾT----------------

Dạng 2: Tích vô hướng, tích có hướng của hai vectơ và ứng dụng

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(3;1;2)$, $\vec{b}=(-3;0;4)$ và $\vec{c}=(6;-1;0)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}.(-\vec{b})$ và $(2\vec{a}).\vec{c}$.

Lời giải

a) Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ là $(3-3+6;1+0-1;2+4+0)=(6;0;6)$.

Ta có: $2\vec{a}=(6;2;4)$; $3\vec{b}=(-9;0;12)$; $5\vec{c}=(30;-5;0)$

Tọa độ của vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$ là $(6+9-30;2+5;4-12)=(-15;7;-8)$.

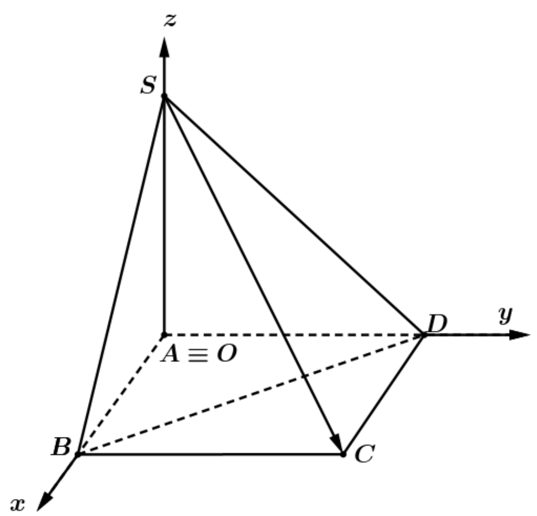
b) Ta có $-\vec{b}=(3;0;-4)$. Do đó $\vec{a}.(-\vec{b})=3.3+1.0+2.(-4)=1$; $(2\vec{a}).\vec{c}=6.6+2.(-1)+4.0=34$

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với $(ABCD)$. Giả sử $SA=2, AB=3$, $AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox,Oy,Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS

a) Xác định toạ độ của các điểm S,A,B,C,D

b) Tính BD và SC

c) Tính $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC})$.



Lời giải

a) Vì A trùng gốc toạ độ nên $A(0;0;0)$; $B\in Ox$ và $AB=3$ nên $B(3;0;0)$.

Vì $D\in Oy$ và $AD=4$ nên $D(0;4;0)$; $S\in Oz$ và $AS=2$ nên $S(0;0;2)$.

Vì hình chiếu của C lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là B, D, A nên $C(3;4;0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{BD}=(0-3;4-0;0-0)=(-3;4;0)$, suy ra $BD=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5$.

Ta có $\overrightarrow{SC}=(3-0;4-0;0-2)=(3;4;-2)$ suy ra $SC=\left|\overrightarrow{SC}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

c) Ta có $\cos\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|}=\dfrac{(-3).3+4.4+0.(-2)}{5\sqrt{29}}=\dfrac{7}{5\sqrt{29}}$ suy ra $\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC}\right)\approx 74{,}9^\circ$.

Bài tập 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $\left|\vec{p}\right|=15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$

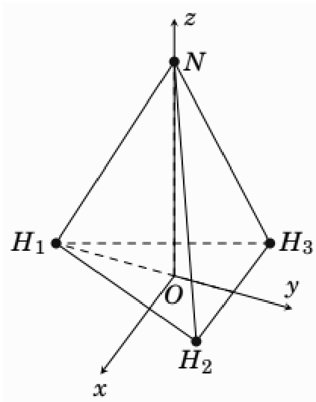
Lời giải

Ta có : $\left[\vec{m};\vec{n}\right]=(3;-4;0)$

Do $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m};\vec{n}\right]$ nên $\vec{p}=k\left[\vec{m};\vec{n}\right]$, $k>0$

Mặt khác: $\left|\vec{p}\right|=15 \Leftrightarrow k.\left|\left[\vec{m},\vec{n}\right]\right|=15 \Leftrightarrow k.5=15 \Leftrightarrow k=3$. Vậy $\vec{p}=(9;-12;0)$.

Bài tập 4: Trong hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $H-N-H$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn H_1NH_2), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3. Góc này xấp xỉ 107°. Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz, ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0;-2;0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox như hình vẽ minh hoạ:



a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hdrogen

b) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với nguyên tử hdrogen

Lời giải

a) Gọi $H_1H_2=x$ khi đó độ dài $OH_1=\dfrac{x\sqrt{3}}{3}=2 \Leftrightarrow x=2\sqrt{3}$

b) Gọi y là khoảng cách giữa hai nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen nên $NH_2=y$

Áp dụng định lý cosin, ta có:

$$H_1H_2{}^2=NH_1^2+NH_2^2-2NH_1.NH_2.\cos H_1NH_2 \Leftrightarrow 2y^2-2y^2\cos 107^\circ=12$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{12}{2-2\cos 107^\circ} \Leftrightarrow y=2{,}155.$$

Bài tập 5: Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.52). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.

Lời giải

Để xác định xem ra đa có thể phát hiện được tàu thám hiểm hay không, ta cần xác định khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm.

Theo đề ta có tọa độ của ra đa là $(0;0;0)$ tọa độ của tàu thám hiểm là $(25;15;-10)$. Khi đó khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là:

$$d=\sqrt{(25-0)^2+(15-0)^2+(-10-0)^2}=5\sqrt{38}\approx 30,82$$

Vì phạm vi theo dõi của ra đa là 30 km mà khoảng khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là $30,82\text{km}$ nên ra đa không phát hiện được tàu thám hiểm.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(1;-2;1)$ và $\vec{b}=(2;-4;-2)$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

A. 8. **B.** -8. **C.** 12. **D.** -12.

Lời giải

Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=1.2+(-2).(-4)+1.(-2)=8$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{b}=(x_1,y_1,z_1)$. Toạ độ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là

A. $(y_0z_1-y_1z_0;x_0z_1-x_1z_0;x_0y_1-x_1y_0)$. **B.** $(y_0z_1-y_1z_0;-x_0z_1+x_1z_0;x_0y_1-x_1y_0)$.

C. $(y_0z_1+y_1z_0;x_0z_1+x_1z_0;x_0y_1+x_1y_0)$. **D.** $(y_0z_1-y_1z_0;-x_0z_1-x_1z_0;x_0y_1-x_1y_0)$.

Lời giải

Toạ độ $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là $(y_0z_1-y_1z_0;-x_0z_1+x_1z_0;x_0y_1-x_1y_0)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;2;3),\vec{v}=(0;-1;1)$. Tìm tọa độ của véctơ tích có hướng của hai véctơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

A. $(5;1;-1)$. **B.** $(5;-1;-1)$. **C.** $(-1;-1;-1)$. **D.** $(-1;-1;5)$.

Lời giải

Ta có: $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(5;-1;-1)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc tạo bởi hai vectơ $\vec{a}=(-1;2;0)$ và $\vec{b}=(0;-2;1)$ là

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{-4}{5}$. **C.** $\frac{4}{25}$. **D.** $\frac{-4}{25}$.

Lời giải

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{(-1).0+2.(-2)+0.1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}.\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{-4}{5}$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{m}=(4;3;1)$ và $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là véc-tơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ và $\left|\vec{p}\right|=15$. Tọa độ của véc-tơ $\vec{p}$ là

A. $(0;9;-12)$. **B.** $(-9;12;0)$. **C.** $(0;-9;12)$. **D.** $(9;-12;0)$.

Lời giải

Ta có $\left[\vec{m},\vec{n}\right]=(3;-4;0)$.

Vì $\vec{p}$ là véc-tơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ nên $\vec{p}=k(3;-4;0)$.

Hơn nữa $\left|\vec{p}\right|=15\Leftrightarrow k\sqrt{3^2+4^2}=15\Leftrightarrow k=3$. Vậy $\vec{p}=(9;-12;0)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-3;-1;1)$, $\vec{b}=(4;1;2)$, $\vec{c}=(1;0;m+2)$. Tìm m để ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

A. $m=-5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Ta có : $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\right)=(-3;10;1)$.

Mà $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=(-3).1+1.(m+2)=m-1$.

Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0\Leftrightarrow m-1=0\Leftrightarrow m=1$.

Câu 7: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho $A(1;-2;0);B(1;0;-1);C(0;-1;2)$ và $D(0;3;m)$. Giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây để bốn điểm trên đồng phẳng?

A. $(-2;-1)$ **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(5;7)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;2;-1);\overrightarrow{AC}=(-1;1;2);\overrightarrow{AD}=(-1;5;m)$

$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(5;1;2)$

A,B,C,D đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow 2m=0\Leftrightarrow m=0$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\vec{a}=(-1;3;2)$, $\vec{b}=(-3;-1;2)$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

A. 10. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot(-3)+3\cdot(-1)+2\cdot 2=4$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}=(-3;1;-1)$ và $\vec{v}=(1;0;5)$. Tích vô hướng của hai vectơ này bằng

A. -8. **B.** 8. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}=(-3;1;-1)$ và $\vec{v}=(1;0;5)$ xác định bởi công thức:

$\vec{u}.\vec{v}=(-3).1+1.0+(-1).5=-8$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u}(-1;3;2)$ và $\vec{v}(-3;-1;2)$. Tích vô hướng của $\vec{u}.\vec{v}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3-3+4=4$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(1;2;3)$, $\vec{v}=(0;-1;1)$. Tìm tọa độ của vectơ tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

A. $(5;1;-1)$. **B.** $(5;-1;-1)$. **C.** $(-1;-1;-1)$. **D.** $(-1;-1;5)$.

Lời giải

Tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(5;-1;-1)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho tam giác ABC với $A(1;2;3), B(0;1;4)$ và $C(2;3;-2)$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

A. $S=2\sqrt{2}$. **B.** $S=6\sqrt{2}$. **C.** $S=4\sqrt{2}$. **D.** $S=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1), \overrightarrow{AC}=(1;1;-5)$

Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=2\sqrt{2}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3); B(3;4;5)$. Diện tích tam giác OAB bằng

A. $\sqrt{87}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(1;2;3), \overrightarrow{OB}=(3;4;5), \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(-2;4;-2)$.

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

Vậy diện tích tam giác OAB là $\sqrt{6}$.

Câu 14: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(3;-2;m)$, $\vec{b}=(2;m;-1)$ với m là tham số nhận giá trị thực. Tìm giá trị của m để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 3.2+(-2).m+m.(-1)=0$

$\Leftrightarrow 6-3m=0 \Leftrightarrow m=2$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4;6;2)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A trên các trục Ox, Oy và Oz. Tính diện tích S của tam giác MNP.

A. $S=28$. **B.** $S=\frac{49}{2}$. **C.** $S=7$. **D.** $S=14$.

Lời giải

Theo đề bài ta có: $M(-4;0;0)$, $N(0;6;0)$ và $N(0;0;2)$.

$\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right]=(12;-8;-24)$

Diện tích của tam giác MNP là $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+(-8)^2+(-24)^2}=14$.

Vậy $S=14$.

Câu 16: Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho $\vec{a}=(3;-1;2)$, $\vec{b}=(4;2;-6)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ bằng

A. 66. **B.** $\sqrt{66}$. **C.** $3\sqrt{14}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\vec{a}+\vec{b}=(7;1;-4)$ nên $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{7^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{66}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là

A. $M(-4;0;0)$. **B.** $M(5;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(-5;0;0)$.

Lời giải

Gọi $M(x;0;0)$ là điểm thuộc Ox. (với $x\in\mathbb{R}$)

Điểm M cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ khi và chỉ khi

$MA=MB\Leftrightarrow\sqrt{(4-x)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{(2-x)^2+1^2}\Leftrightarrow 21-8x+x^2=5-4x+x^2\Leftrightarrow x=4$.

Vậy $M(4;0;0)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$; $B(2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy để tam giác ABC vuông tại A.

A. $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;2;0)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};0;0\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

Lời giải

Gọi $C(0;y;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-2;3)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;y-1;0)$

Để tam giác ABC vuông tại $A\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -1-2(y-1)+0=0\Leftrightarrow -2y+1=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$.

Vậy tọa độ của điểm C là $C\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, biết $\left|\vec{u}\right|=2,\left|\vec{v}\right|=1$ và góc giữa hai véc tơ bằng $\frac{2\pi}{3}$. Tìm k để vecto $\vec{p}=k\vec{u}+\vec{v}$ vuông góc với vecto $\vec{q}=\vec{u}-\vec{v}$.

A. $k=-\frac{2}{5}$. **B.** $k=\frac{5}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=\frac{2}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{p}=k\vec{u}+\vec{v}$ vuông góc với vecto $\vec{q}=\vec{u}-\vec{v}$

$\Leftrightarrow\vec{p}.\vec{q}=0\Leftrightarrow\left(k\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=0\Leftrightarrow k\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2+(-k+1)\vec{u}.\vec{v}=0$

$\Leftrightarrow k\left|\vec{u}\right|^2-\left|\vec{v}\right|^2+(-k+1)\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|cos\frac{2\pi}{3}=0\Leftrightarrow 4k-1-(-k+1)=0\Rightarrow k=\frac{2}{5}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;2), B(1;1;1), C(2;-1;3)$. Hỏi cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AB và BC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BA}=(0;-1;1), \overrightarrow{BC}=(1;-2;2) \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC}=\frac{4}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $\cos(AB,BC)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 21: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 60^0 và $\left|\vec{a}\right|=2;\left|\vec{b}\right|=4$.Khi đó $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{7}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{8\sqrt{3}+20}$.

Lời giải

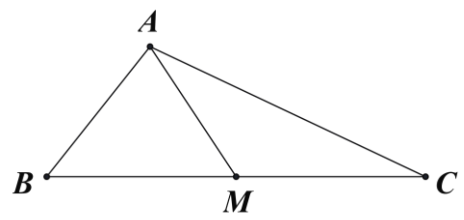
Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}\right)^2+2\vec{a}\vec{b}+\left(\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2$

$=4+2.2.4.\frac{1}{2}+16=28 \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB}=(-3;0;4), \overrightarrow{AC}=(5;-2;4)$. Độ dài đường trung tuyến AM là

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(2;-2;8) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=(1;-1;4)$.

Khi đó $AM=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}=3\sqrt{2}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;1;2)$. Điểm M trên trục Ox có hoành độ dương và thỏa mãn $MA^2+MB^2=23$. Khi đó tọa độ điểm M là

A. $M(4;0;0)$. **B.** $M(3;0;0)$. **C.** $M(2;0;0)$. **D.** $M(1;0;0)$.

Lời giải

Điểm M thuộc trục Ox có hoành độ dương suy ra $M(a;0;0)$, $a>0$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=(1-a;2;-1)$, $\overrightarrow{MB}=(2-a;1;2)$.

Giả thiết: $MA^2+MB^2=23 \Leftrightarrow (1-a)^2+4+1+(2-a)^2+1+4=23$.

$\Leftrightarrow a^2-3a-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1,\ (l) \\ a=4,\ (t/m) \end{array}\right.$. Vậy $M(4;0;0)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$,cho hai vec$\vec{u}(-2;1;5)$ và $\vec{v}(m-2;3;m+1)$, m là tham số. Tìm m để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m=-4$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=3$.

Lời giải

$\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow -2.(m-2)+3+5.(m+1)=0 \Leftrightarrow 3m+12=0 \Leftrightarrow m=-4$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz cho hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$ thoả mãn $|\vec{u}|=3;|\vec{v}|=4;(\vec{u};\vec{v})=60°$. Tính độ dài vectơ $\vec{u}+2\vec{v}$

A. $\sqrt{97}$. **B.** 8. **C.** 7. **D.** $4\sqrt{6}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|cos(\vec{u},\vec{v})=3.4.\frac{1}{2}=6$.

$\left(|\vec{u}+2\vec{v}|\right)^2=|\vec{u}|^2+4\vec{u}.\vec{v}+4|\vec{v}|^2=9+24+64=97 \Rightarrow |\vec{u}+2\vec{v}|=\sqrt{97}.$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;4;-5)$, $B(2;3;-6)$ và $C(4;4;-5)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

A. $H\left(\frac{5}{7};4;-5\right)$. **B.** $H(1;4;-5)$. **C.** $H(2;3;-6)$. **D.** $H\left(\frac{7}{3};\frac{11}{3};-\frac{16}{3}\right)$.

Lời giải

Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm của tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{AC}(3;0;0)$ suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-3;3)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow$ ptmp(ABC): $y-z-9=0$.

Vì $H(x;y;z)$ là trực tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \\ H\in(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4).1+(y-4).(-1)+(z+5).(-1)=0 \\ (x-2).3+(y-3).0+(z+6).0=0 \\ y-z-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=5 \\ x=2 \\ y-z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=-6 \end{cases}.$$

Vậy $H(2;3;-6)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4)$, $B(5;-1;3)$, $C(3;1;5)$ và $D(2;2;m)$ (với m là tham số). Xác định m để bốn điểm A,B,C,D tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện.

A. $m\neq 6$. **B.** $m\neq 4$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(2;0;1)$, $\overrightarrow{AD}=(1;1;m-4)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-6;4)$, $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-2-6+4(m-4)=4m-24$.

Bốn điểm A,B,C,D tạo thành bốn đỉnh của một tứ diện khi và chỉ khi

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=4m-24\neq 0\Leftrightarrow m\neq 6$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;2;2)$. Gọi $I(a,b,c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

A. $T=\dfrac{13}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=2$. **D.** $T=\dfrac{29}{4}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} IO=IA \\ IO=IB \\ \left[\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OI}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2=(1-a)^2+(-2-b)^2+(3-c)^2 \\ a^2+b^2+c^2=(-2-a)^2+(2-b)^2+(2-c)^2 \\ -10a-8b-2c=0 \end{cases}$

$\begin{cases} -2a+4b-6c=-14 \\ 4a-4b-4c=-12 \\ -10a-8b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=0 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases}$. Vậy $T=a^2+b^2+c^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{25}{4}=\dfrac{13}{2}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; có tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$, $\overrightarrow{DC}=(6-a;1-b;-c)$, $\overrightarrow{AC}=(5;-1;-1)$

Vì $ABCD$ là hình thang nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k>0:\overrightarrow{DC}=k\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-a=k \\ 1-b=-2k \\ -c=-2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6-k \\ b=1+2k \\ c=2k \end{cases} \Rightarrow D(6-k;1+2k;2k)$

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0;-9;9)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}.\sqrt{(-9)^2+9^2}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

$\overrightarrow{AD}=(5-k;2k-1;2k-1)$,

$\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]=(0;9k;-9k)\Rightarrow S_{\Delta ADC}=\dfrac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\dfrac{1}{2}.\sqrt{(9k)^2+(-9k)^2}=\dfrac{9k\sqrt{2}}{2}$

$S_{ABCD}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ADC}=\dfrac{9\sqrt{2}}{2}(1+k)=6\sqrt{2}\Leftrightarrow 1+k=\dfrac{4}{3}\Rightarrow k=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $D\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right)\Rightarrow a+b+c=\dfrac{17+5+2}{3}=8$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng $\overrightarrow{AB}=(1;3;4)$, $\overrightarrow{AD}=(-2;3;5)$ và $\overrightarrow{AC'}=(1;1;1)$. Tính thể tích hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $V_{ABCD.A'B'C'D'}=6$. **B.** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=12$. **C.** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=1$. **D.** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=3$.

Lời giải

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$ trong đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=(3;-13;9)$.

Lại có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ suy ra $\overrightarrow{AA'}=(2;-5;-8)$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|=|6+65-72|=1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho ba vec-tơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) $|\vec{a}|=2$.

b) $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Lời giải

a) Sai: $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

b) Đúng: $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

c) Sai: $\cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=0$

d) Sai: $\vec{b}.\vec{c}=2$ suy ra $\vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$.

Câu 2: Cho hai véctơ $\vec{u}=(0;2;3)$ và $\vec{v}=(m-1;2m;3)$.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{13}$.

b) $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{5}$.

c) $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow m=1$.

d) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

a) Đúng: $|\vec{u}|=\sqrt{0^2+2^2+3^2}=\sqrt{13}$

b) Sai: $|\vec{u}|=|\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{13}=\sqrt{(m-1)^2+4m^2+9} \Leftrightarrow 5m^2-2m-3=0 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-\dfrac{3}{5}$.

c) Đúng: Khi $m=1$ thì $\vec{v}=(0;2;3)$. Suy ra $\vec{u}=\vec{v}$.

d) Sai: $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 4m+9=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{4}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $A(1;2;0), B(0;1;1), C(2;1;0)$.

a) Tam giác ABC vuông tại A.

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1) \Rightarrow AB=\sqrt{3}, \overrightarrow{AC}=(1;-1;0) \Rightarrow AC=\sqrt{2}$, $\overrightarrow{BC}=(2;0;-1) \Rightarrow BC=\sqrt{5}$.

a) Đúng: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ do đó $AB \perp AC$, tam giác ABC vuông tại A.

b) Sai: Chu vi của tam giác là $AB+AC+BC=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

c) Sai: Diện tích là $S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

d) Đúng: Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC có tọa độ $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;1;0), B(1;1;3), C(2;-1;3), D(1;-1;0)$.

a) Tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối đôi một bằng nhau.

b) Góc giữa 2 đường thẳng AB và CD là $\varphi=\arccos 0,3$

c) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD bằng 3

d) Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{14}}{2}$

Lời giải

a) Đúng: Áp dụng công thức tính độ dài đoạn thẳng ta tính được

$$AB = CD = \sqrt{10}; AC = BD = \sqrt{13}; AD = BC = \sqrt{5}$$

Vậy tứ diện $ABCD$ có các cạnh đối đôi một bằng nhau

b) Sai: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;0;3), \overrightarrow{CD} = (-1;0;-3)$. Gọi φ là góc giữa AB và CD

$$\cos\varphi = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{|-8|}{\sqrt{10}.\sqrt{10}} = \frac{4}{5}$$

Vậy góc giữa AB và CD là $\varphi = \arccos 0,8$

c) Sai: Lấy I trung điểm của AB, J là trung điểm của CD

$\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) nên 2 đường trung tuyến tương ứng $AJ = BJ$.

Vậy ΔAJB cân đỉnh J nên IJ vuông góc với AB tại I.

Tương tự ΔICD cân đỉnh I nên IJ vuông góc với CD tại J.

Vậy IJ là đường vuông góc chung của AB và CD ta được $I\left(\frac{3}{2};1;\frac{3}{2}\right)$ và $J\left(\frac{3}{2};-1;\frac{3}{2}\right)$

Vậy khoảng cách giữa AB và CD chính là độ dài đoạn vuông góc chung IJ.

$$d(AB;CD) = II = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left[1 - (-1)\right]^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = 2$$

d) Đúng: Theo kết quả câu 3. Lấy G là trung điểm của IJ ta được:

$GA = GB$ vì ΔGAB cân đỉnh G; $GC = GD$ vì ΔGCD cân đỉnh G

Mà $GA = \sqrt{GI^2 + IA^2}$ mà $GI = GJ, IA = ID$ và $GC = \sqrt{GJ^2 + ID^2}$

Do đó $GA = GB = GC = GD = R$

Do đó G : Tâm mặt cầu ngoại tuyến khối tứ diện $ABCD : G\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$ và bán kính của mặt cầu là

$R = GA = \frac{\sqrt{14}}{2}$ (G : cũng chính là trọng tâm của khối tứ diện gần đều $ABCD$)

Câu 5: Trong hệ trục $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Diện tích của tam giác ABC bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)

b) Gọi $D(x;y;z)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi đó $x+y+z=3$

c) Độ dài đường cao của tam giác ABC hạ từ A bằng $AH=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$ (đơn vị dài)

d) Thể tích của khối chóp $SABCD$ với đỉnh $S(0;3;4)$ bằng 2 (đvtt)

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1),\overrightarrow{AC}=(1;1;1)$

Tính $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}\right)=(-1;2;-1)\neq\vec{0}$

Do đó 2 véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy A,B,C là 3 đỉnh của một tam giác

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (đvdt)

b) Sai: $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Gọi $D(x;y;z)$ ta có: $\overrightarrow{AD}=(x-1;y;z);\overrightarrow{BC}=(2;1;0)$

Vậy $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y=1\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\\z=0\end{cases}$

c) Đúng: Diện tích $\Delta ABC=\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow AH=\dfrac{\sqrt{6}}{BC}$.

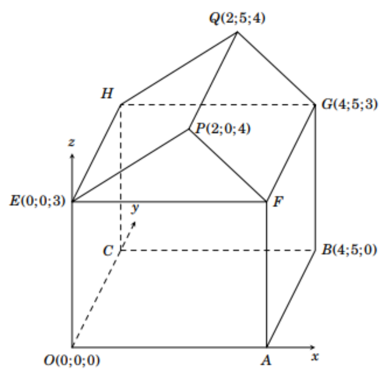
Ta có $BC=\sqrt{5}\Leftrightarrow AH=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$ (đơn vị dài)

d) Sai: Thể tích của khối chóp $SABCD=V$

Ta có $V=2V_{SABC}=\dfrac{1}{3}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AS}\right|$

Tính $\overrightarrow{AS}=(-1;3;4)$ do kết quả câu 1 nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AS}=1+6-4=3>0$ do đó $V=1$ (đvtt)

Câu 6: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

Lời giải

a) Sai: Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4, y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.

b) Sai: Tường nhà là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5, z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.

c) Sai: Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt phẳng lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.

Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1), \overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$.

Suy ra $\cos PFE = \cos\left(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}\right) = \dfrac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{\left|\overrightarrow{FP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FE}\right|} = \dfrac{(-2)\cdot(-4) + 0\cdot 0 + 1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Do đó, $PFE \approx 26,$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

d) Sai: Chiều cao bằng cao độ của điểm P suy ra $h = 4$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (3;1;-2)$ và $\vec{b} = (-2;0;-3)$. Tích vô hướng $\vec{a}.\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)$ bằng

Lời giải

$\vec{a} = (3;1;-2) \Rightarrow 2\vec{a} = (6;2;-4) \Rightarrow 2\vec{a} + \vec{b} = (4;2;-7)$

Do đó $\vec{a}.\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) = 12 + 2 + 14 = 28$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{u} = (1;1;0)$ và $\vec{v} = (2;0;-1)$. Tính độ dài $|\vec{u} + 2\vec{v}|$.

Lời giải

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{2}; |\vec{v}| = \sqrt{5}$; $\vec{u}\vec{v} = 1.2 + 1.0 + 0.(-1) = 2$.

Suy ra $|\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 4\vec{u}\vec{v} + 4|\vec{v}|^2 = 2 + 4.2 + 4.5 = 30$.

Vậy $|\vec{u} + 2\vec{v}| = \sqrt{30}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $C(4;0;0)$ và $B(2;0;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MBC bằng 3.

Lời giải

Vì M thuộc trục tung nên: $M(0;y_M;0)$. Ta có: $\overrightarrow{BM}=(-2;y_M;0)$; $\overrightarrow{BC}=(2;0;0)$.

Khi đó: $\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right]=(0;0;-2y_M)$.

Diện tích hình bình hành $ABCD$ là:

$S_{MBC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right]\right| \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{4{y_M}^2}=3 \Leftrightarrow |y_M|=3 \Leftrightarrow y_M=\pm 3$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;-1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(2;-1;3)$, $D\in Oy$ và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tổng tung độ của các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng

Lời giải

Do $D\in Oy \Rightarrow D(0;y;0)$.

Khi đó $\overrightarrow{DA}=(2;-1-y;1)$, $\overrightarrow{DB}=(3;-y;-1)$, $\overrightarrow{DC}=(2;-1-y;3)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right]=(1+2y;5;y+3)$.

$\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}=2+4y-5-5y+3y+9=2y+6$.

Và $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right].\overrightarrow{DC}\right|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2y+6=30\\2y+6=-30\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=12\\y=-18\end{array}\right.$.

Vậy $y_1+y_2=12-18=-6$.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(2;0;2)$, $B(0;2;0)$, $C(1;0;3)$. Gọi M là điểm trong không gian thỏa mãn $MA^2+MC^2=MB^2$. Tính MP với $P(3;-2;5)$.

Lời giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IB}\ (*)$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(2-x;-y;2-z)$; $\overrightarrow{IB}=(-x;2-y;-z)$; $\overrightarrow{IC}=(1-x;-y;3-z)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}2-x+1-x=-x\\-y-y=2-y\\2-z+3-z=-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=-2\Rightarrow I(3;-2;5)\equiv P\\z=5\end{cases}$.

Suy ra $\overrightarrow{IA}=(-1;2;-3)\Rightarrow IA^2=14$; $\overrightarrow{IB}=(-3;4;-5)\Rightarrow IB^2=50$; $\overrightarrow{IC}=(-2;2;-2)\Rightarrow IC^2=12$.

Ta có $MA^2+MC^2=MB^2 \Leftrightarrow MA^2+MC^2-MB^2=0$.

Khi đó $MA^2+MC^2-MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+MI^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}-MI^2-IB^2-2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$

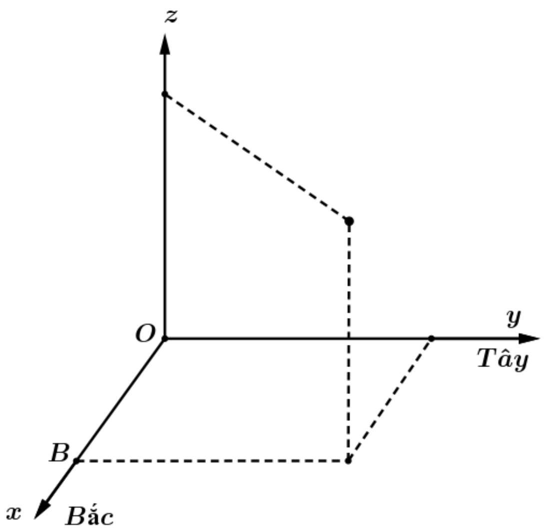
$= MI^2 + \left(IA^2 + IC^2 - IB^2\right) + 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB}\right) = 0$ hay

$\Leftrightarrow MP^2 + (14 + 12 - 50) = 0 \Leftrightarrow MP^2 = 24 \Rightarrow MP = 2\sqrt{6}$.

Câu 6: Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20;10;0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30;-25;1)$.

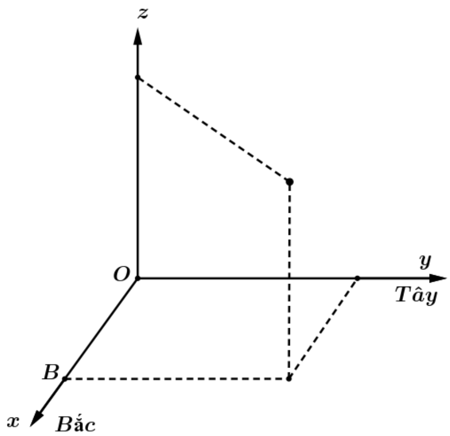
Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2 + (10+25)^2 + (0,7-1)^2} \approx 61(km)$

Câu 7: Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.

Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ $(-100;-80;1)$.

Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ $(70;60;0,8)$.

Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{(-100)^2+(-80)^2+1^2}\approx 128(km)$$

Khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là:

$$\sqrt{(-100-70)^2+(-80-60)^2+(1-0,8)^2}\approx 220(km)$$

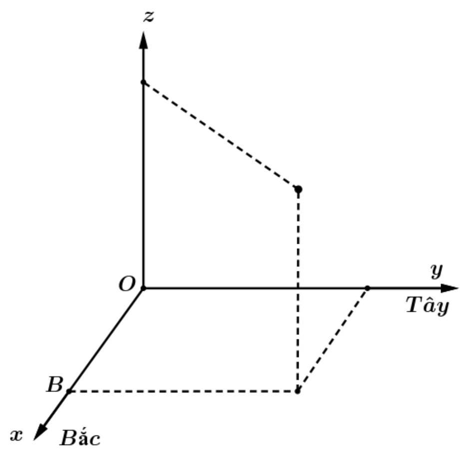
Câu 8: Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía

Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60;-40;2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80;50;4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $\left(\frac{-60+80}{2};\frac{-40+50}{2};\frac{2+4}{2}\right)=(10;5;3)$.

Khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$$\sqrt{(-60-80)^2+(-40-50)^2+(2-4)^2}\approx 166,4(km)$$

Khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{10^2+5^2+3^2}\approx 11,6(km)$$

-----------------HẾT-----------------