

Lưu ý: Học sinh làm mỗi bài trên 1 tờ giấy thi riêng.

Bài 1: (1 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} + \sqrt{c^2 - ca + a^2} = 12$$

a) Chứng minh rằng $a + b + c \leq 12$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 9}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 9}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 9}}$

Bài 2: (1,5 điểm) Trên mặt phẳng cho tập hợp A gồm 66 điểm phân biệt và tập hợp B gồm 16 đường thẳng phân biệt. Gọi m là số bộ (a, b) sao cho $a \in A$, $b \in B$. Chứng minh rằng $m \leq 159$.

Bài 3: (1,5 điểm) Cho hình đa giác đều 9 cạnh. Mỗi đỉnh của nó được tô bằng một trong 2 màu trắng hoặc đen. Có tồn tại hay không hai tam giác phân biệt có diện tích bằng nhau, mà các đỉnh của mỗi tam giác được tô cùng 1 màu? Chứng minh khẳng định đó.

Bài 4: (1,5 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} x_1 = \sqrt[3]{5} \\ x_{n+1} = \frac{3 + 4x_n^3}{5x_n^4}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó. (1,0 đ)

b) Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^3}{\sqrt[3]{n!}}$. (0,5 đ)

Bài 5: (1,5 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(xy + f(x)) = xf(y) + f(x)$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Chứng minh rằng nếu có $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = f(y) \neq 0$ thì $x = y$

b) Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn đề bài.

Bài 6: (1,5 điểm). Cho n là số nguyên dương, $n \geq 6$ và $n = 2^m + 1$ với m nguyên dương.

a. Chứng minh C_{n-1}^k là số chẵn với mọi k thoả $1 \leq k \leq n-2$. (0,5 đ)

b. Chứng minh $C_{4n-2}^{2n-1} + 2C_{2n-2}^{n-1}$ chia hết cho 8. (1,0 đ)

Bài 7: (1,5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn với $AC > BC > AB$, nội tiếp đường tròn (O) .

Gọi H là trực tâm tam giác ABC , F là chân đường cao kẻ từ C . Gọi P là điểm trên tia AB (P khác A) sao cho $PF = AF$; M là trung điểm AC . Gọi X là giao điểm của PH và BC ; Y là giao điểm của OM và FX ; Z là giao điểm của OF và AC ; T là giao điểm thứ hai của CF và (O) . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $ATPH$ là hình bình hành.

b) Các điểm F, M, Z, Y cùng thuộc một đường tròn.

— Hết —