

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sin 2x + 3\sin 6x = -\sin 10x$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2023u_n^2 + u_n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Tìm $\lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$.

Câu 2. (6,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} = x+4$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + y - 1 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{y+1} = 0 \end{cases}.$$

Câu 3. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và có diện tích là S . Kí hiệu m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C . Biết rằng $2m_a^2 \geq m_b^2 + m_c^2$. Chứng minh $a^2 \leq 4S \cot A$.

Câu 4. (3,0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt có phương trình là $x - 2y = 0, x - 2 = 0, x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết độ dài đường cao đỉnh A của tam giác ABC bằng $\frac{12}{\sqrt{5}}$ và đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 5. (2,0 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và $AC = 2AB$. Gọi BE là trung tuyến của tam giác ABO và M là trung điểm của BC . Chứng minh EM vuông góc với BD .

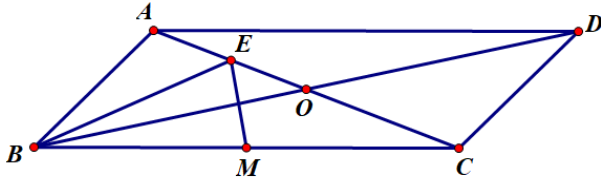
Câu 6. (2,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac = 4b + c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{3c^2}{4} \right) c + 3b^2 + \frac{225}{(b+c)(c+3b)}.$$

----- Hết -----

Câu	Nội dung	Điểm
1	a) Giải phương trình: $\sin 2x + 3\sin 6x = -\sin 10x$	2,5
	$\sin 2x + 3\sin 6x = -\sin 10x \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 10x + 3\sin 6x = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow 2\sin 6x \cdot \cos 4x + 3\sin 6x = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sin 6x(2\cos 4x + 3) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 6x = 0 \\ 2\cos 4x + 3 = 0 \text{ (vn)} \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{6} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$	0,5
	b) Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2023u_n^2 + u_n \end{cases} \text{ (} n \in \mathbb{N}^* \text{)}.$	2,5
	Tìm $\lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right).$	
	Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2023u_n^2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n) \text{ tăng} \Rightarrow u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$	0,5
	Giả sử dãy (u_n) có giới hạn là $a \Rightarrow a = 2023a^2 + a \Rightarrow a = 0 > 1$ (vô lý) nên $\lim u_n = +\infty$	0,5
	Ta có: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{(u_{n+1} - u_n)}{2023u_{n+1}u_n} = \frac{1}{2023} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$	0,5
	$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2023} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{2023} \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right).$	0,5
2	Vậy: $\lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{2023} \lim \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{2023}.$	0,5
	a) Giải phương trình: $\sqrt{2x+2} + \sqrt{3x+6} = x+4 \text{ (1)}$	3,0
	ĐK: $x \geq -1$	0,5
	$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+2} - 2) + (\sqrt{3x+6} - 3) = x - 1$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+2}+2} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+6}+3} = x-1$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (nhận)} \\ \frac{2}{\sqrt{2x+2}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+6}+3} = 1 \text{ (*)} \end{cases}$	0,5
	Với $x=1$ thì VT(*) = 1.	0,5
	Với $x > 1$ thì VT(*) < 1.	
	Với $-1 \leq x < 1$ thì VT(*) > 1.	
	Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=1$.	0,5
	Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.	

	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy + y - 1 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{y+1} = 0 & (2) \end{cases}$	3,0
	ĐK: $y \geq -1$ $(1) \Leftrightarrow x^2 - 3yx + 2y^2 + y - 1 = 0$, $\Delta_x = (-3y)^2 - 4(2y^2 + y - 1) = (y - 2)^2$ $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$ Với $x = y + 1$ thay vào (2) ta được $\sqrt{(y+1)^2 + y^2} - \sqrt{y+1} = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (thỏa ĐK)}$ Với $x = 2y - 1$ thay vào (2) ta được $\sqrt{(2y-1)^2 + y^2} - \sqrt{y+1} = 0 \Leftrightarrow 5y^2 - 5y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = -1 \\ y = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \text{ (thỏa ĐK)}$ Vậy hệ có 4 nghiệm là: $(1;0), (-1;0), (1;1), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
	Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và có diện tích là S. Kí hiệu m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài của các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C. Biết rằng $2m_a^2 \geq m_b^2 + m_c^2$. Chứng minh $a^2 \leq 4S \cdot \cot A$.	2,0
3	Ta có $4S \cdot \cot A = 2bc \cdot \sin A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = 2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2$ (1) $2m_a^2 \geq m_b^2 + m_c^2$ $\Leftrightarrow b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} \geq \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ $\Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 \geq a^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $4S \cdot \cot A \geq a^2$.	0,5 0,5 0,5 0,5
	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt có phương trình là $x - 2y = 0$, $x - 2 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C biết độ dài đường cao đỉnh A của tam giác ABC bằng $\frac{12}{\sqrt{5}}$ và đỉnh A có hoành độ âm.	3,0
4	Do BC vuông góc với đường cao kẻ từ A nên pt BC có dạng $2x + y + c = 0$. Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y + c = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -c - 4 \end{cases} \Rightarrow B(2; -c - 4).$	0,5 0,5

	Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x + y + c = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -c - 3 \\ y = c + 6 \end{cases} \Rightarrow C(-c - 3; c + 6).$ Phương trình của cạnh AB: $1.(x - 2) - 1.(y + c + 4) = 0 \Leftrightarrow x - y - c - 6 = 0.$ Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y - c - 6 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2c + 12 \\ y = c + 6 \end{cases} \Rightarrow A(2c + 12; c + 6).$ Theo giả thiết $d(A, BC) = \frac{12}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{ 2(2c + 12) + c + 6 + c }{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow c + 5 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3 \\ c = -7 \end{cases}$ Nếu $c = -3 \Rightarrow A(6; 3)$ không thỏa mãn hoành độ A âm. Nếu $c = -7 \Rightarrow A(-2; -1), B(2; 3), C(4; -1).$ Vậy $A(-2; -1), B(2; 3), C(4; -1).$	0,5
		0,5
		0,5
		0,5
	Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và $AC = 2AB$. Gọi BE là trung tuyến của tam giác ABO, M là trung điểm của BC. Chứng minh EM vuông góc với BD.	2,0
5	 Vì $ABCD$ hình bình hành nên $OA = OC$. Mà $AE = \frac{1}{2}AO$ và $AC = 2AB \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB$. Xét hai tam giác AEB và ABC, ta có $\angle BAE$ là góc chung và $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{EB}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BE = BM \Rightarrow \triangle BEM$ cân tại B. Xét $\triangle BEC$ có $\frac{BE}{BC} = \frac{OE}{OC} \Rightarrow BO$ là phân giác của góc EBM $\triangle BEM$ cân tại B có BO là phân giác nên BO cũng là đường cao. Vậy $EM \perp BD$. (Học sinh có thể chứng minh BO là đường trung trực của đoạn EM hoặc sử dụng phương pháp vectơ).	0,5
		0,5
		0,5

	Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ac = 4b + c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \left(\frac{a^2}{3} + \frac{3c^2}{4} \right) c + 3b^2 + \frac{225}{(b+c)(c+3b)}.$	2,0
6	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số: $\frac{a^2}{3} + \frac{3c^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{3} \cdot \frac{3c^2}{4}} = ac$ $P \geq ac^2 + 3b^2 + \frac{15^2}{(b+c)(c+3b)}$	0,5
	Từ giả thiết: $ac = 4b + c \Leftrightarrow ac - 3b = b + c$ $\Rightarrow ac^2 + 3b^2 = ac^2 - 3bc + 3b^2 + 3bc = (ac - 3b)c + 3b(b + c)$ $= (b + c)c + 3b(b + c) = (b + c)(c + 3b)$	0,5
	$P \geq (b + c)(c + 3b) + \frac{15^2}{(b + c)(c + 3b)}$ Sử dụng Cauchy cho hai số: $(b + c)(c + 3b) + \frac{15^2}{(b + c)(c + 3b)} \geq 2\sqrt{(b + c)(c + 3b) \frac{15^2}{(b + c)(c + 3b)}} = 30$ $\Rightarrow P \geq 30$.	0,5
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a^2}{3} = \frac{3c^2}{4} \\ (b + c)(c + 3b) = \frac{15^2}{(b + c)(c + 3b)} \\ ac = 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ Vậy min $P = 30$ khi $a = 3, b = 1, c = 2$.	0,5

----- Hết -----