

TRẦN SĨ TÙNG



BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12

TẬP 2

HÀM SỐ

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT & ĐẠI HỌC

Năm 2009

CHƯƠNG II

HÀM SỐ LŨY THỪA – HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

I. LŨY THỪA

1. Định nghĩa lũy thừa

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = a.a.....a$ (n thừa số a)
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$)	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ($\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$)
$\alpha = \lim r_n$ ($r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*$)	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. Tính chất của lũy thừa

- Với mọi $a > 0, b > 0$ ta có:

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta} ; \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} ; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta} ; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha . b^\alpha ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

- $a > 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta ; \quad 0 < a < 1 : a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

- Với $0 < a < b$ ta có:

$$a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0 ; \quad a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Chú ý: + Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.
+ Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

3. Định nghĩa và tính chất của căn thức

- Căn bậc n của a là số b sao cho $b^n = a$.

- Với $a, b \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*, p, q \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} ; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0) ; \quad \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p (a > 0) ; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\text{Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} (a > 0) ; \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$$

- Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Chú ý:

+ Khi n lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n . Kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.

+ Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau.

4. Công thức lãi kép

Gọi A là số tiền gửi, r là lãi suất mỗi kì, N là số kì.

Số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là: $C = A(1+r)^N$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau::

$$a) A = (-1)^3 \left(-\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)^2 \cdot (-7) \cdot \left(-\frac{7}{14}\right)$$

$$b) B = \frac{(-3)^2 \cdot (-15)^6 \cdot 8^4}{9^2 \cdot (-5)^6 \cdot (-6)^4}$$

$$c) C = 4^{\frac{3}{2}} + 8^{\frac{2}{3}}$$

$$d) D = \left(32^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

$$e) E = \frac{(-18)^7 \cdot 2^4 \cdot (-50)^3}{(-25)^4 \cdot (-4)^5 \cdot (-27)^2}$$

$$f) F = \frac{125^6 \cdot (-16)^3 \cdot (-2)^3}{25^3 \left[(-5)^2\right]^4}$$

$$g) G = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4 - (0,01)^{-2} \cdot 10^{-2}}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,25)^0 + 10^{-2} \sqrt{(0,01)^{-3}}}$$

$$h) H = \left(\frac{1}{4^3} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{25^3}\right) \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5^3}\right)$$

$$i) I = \frac{\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[4]{64} \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}$$

$$k) K = \frac{\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt{12}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{18} \sqrt[5]{27} \cdot \sqrt{6}}$$

Bài 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

$$a) \sqrt[4]{x^2 \sqrt[3]{x}}, (x \geq 0)$$

$$b) \sqrt[5]{\frac{b}{a} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}}, (a, b \neq 0)$$

$$c) \sqrt[5]{2 \sqrt[3]{2} \sqrt{2}}$$

$$d) \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}}}}$$

$$e) \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^8}}$$

$$f) \frac{\sqrt[5]{b^2 \sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b \sqrt{b}}}$$

Bài 3. Đơn giản các biểu thức sau:

$$a) \frac{a^{1,5} + b^{1,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}} - a^{0,5} b^{0,5} + \frac{2b^{0,5}}{a^{0,5} + b^{0,5}}$$

$$b) \left(\frac{a^{0,5} + 2}{a + 2a^{0,5} + 1} - \frac{a^{0,5} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a^{0,5} + 1}{a^{0,5}}$$

$$c) \left(\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{xy^2} + x^2 y} + \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{xy^2} - x^2 y} \right) \cdot \frac{x^2 y^2}{x + y} - \frac{2y}{x - y}$$

$$d) \left(\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3y^2}}{\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3y^2}}{x - y} \right) \cdot \frac{x^2 - y^2}{2}$$

$$e) \left(\frac{1}{a^3} - \frac{2}{b^3} \right) \cdot \left(\frac{2}{a^3} + \frac{1}{a^3} \cdot \frac{2}{b^3} + b^{\frac{4}{3}} \right)$$

$$f) \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4} \right) \cdot \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

$$g) \frac{a^{-1} + (b+c)^{-1}}{a^{-1} - (b+c)^{-1}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \cdot (a+b+c)^{-2}$$

$$h) \left(\frac{\frac{1}{a^2} + 2}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \frac{\frac{1}{a^2} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{(a^{\frac{1}{2}} + 1)}{a^{\frac{1}{2}}}$$

Bài 4. Đơn giản các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$$

$$b) \left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a + \sqrt{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$c) \left(\frac{a^2 \sqrt[4]{x} + x \sqrt{a}}{a \sqrt[4]{x} + \sqrt{ax}} - \sqrt{a^2 + x + 2a \sqrt{x}} \right)^4$$

$$d) \frac{\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{ax^2} - \sqrt[3]{a^2 x}}{\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{x}} - \sqrt[6]{x}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} & \left[\frac{x\sqrt{x}-x}{\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-1}{\sqrt[4]{x}-1}-\sqrt{x}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt[4]{x}+1}-\sqrt{x}\right)} \right]^3 \\ \text{f)} & \left[\frac{a\sqrt[3]{a}-2a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}} + \frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \right] : \sqrt[3]{a} \\ \text{g)} & \left[\frac{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}} \right] \cdot (\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})^{-1} + \sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

Bài 5. So sánh các cặp số sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & (0,01)^{-\sqrt{2}} \text{ và } (10)^{-\sqrt{2}} & \text{b)} & \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \text{ và } \left(\frac{\pi}{4}\right)^6 & \text{c)} & 5^{-2\sqrt{3}} \text{ và } 5^{-3\sqrt{2}} \\ \text{d)} & 5^{300} \text{ và } 8^{200} & \text{e)} & (0,001)^{-0,3} \text{ và } \sqrt[3]{100} & \text{f)} & 4^{\sqrt{2}} \text{ và } (0,125)^{-\sqrt{2}} \\ \text{g)} & (\sqrt{2})^{-3} \text{ và } (\sqrt{2})^{-5} & \text{h)} & \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} \text{ và } \left(\frac{5}{4}\right)^5 & \text{i)} & 0,02^{-10} \text{ và } 50^{11} \\ \text{k)} & (\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{4}} \text{ và } (\sqrt{3}-1)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} & \text{l)} & \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^{-\sqrt{2}} \text{ và } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-\sqrt{2}} & \text{m)} & \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \text{ và } \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\sqrt{10}}{3}} \end{aligned}$$

Bài 6. So sánh hai số m, n nếu:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 3,2^m < 3,2^n & \text{b)} & (\sqrt{2})^m > (\sqrt{2})^n & \text{c)} & \left(\frac{1}{9}\right)^m > \left(\frac{1}{9}\right)^n \\ \text{d)} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m > \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n & \text{e)} & (\sqrt{5}-1)^m < (\sqrt{5}-1)^n & \text{f)} & (\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n \end{aligned}$$

Bài 7. Có thể kết luận gì về số a nếu:

$$\begin{aligned} \text{a)} & (a-1)^{\frac{2}{3}} < (a-1)^{\frac{1}{3}} & \text{b)} & (2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1} & \text{c)} & \left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2} < a^2 \\ \text{d)} & (1-a)^{\frac{1}{3}} > (1-a)^{\frac{1}{2}} & \text{e)} & (2-a)^{\frac{3}{4}} > (2-a)^2 & \text{f)} & \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \text{g)} & a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{7}} & \text{h)} & a^{\frac{1}{17}} < a^{\frac{1}{8}} & \text{i)} & a^{-0,25} < a^{-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Bài 8. Giải các phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 4^x = \sqrt[5]{1024} & \text{b)} & \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \frac{8}{125} & \text{c)} & 8^{1-3x} = \frac{1}{32} \\ \text{d)} & (3\sqrt{3})^{2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-2} & \text{e)} & \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{-x} = \frac{27}{64} & \text{f)} & \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-5x+6} = 1 \\ \text{g)} & \frac{1}{0,125} \cdot 32^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{8}}\right)^{-x} & \text{h)} & 0,2^x = \sqrt{0,008} & \text{i)} & \left(\frac{9}{49}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3} \\ \text{k)} & 5^x \cdot 2^x = 0,001 & \text{l)} & (\sqrt{12})^x \cdot (\sqrt{3})^x = \frac{1}{6} & \text{m)} & 7^{1-x} \cdot 4^{1-x} = \frac{1}{28} \end{aligned}$$

Bài 9. Giải các bất phương trình sau:

$$\begin{aligned} \text{a)} & 0,1^x > 100 & \text{b)} & \left(\frac{1}{5}\right)^x > \sqrt[3]{0,04} & \text{c)} & 0,3^x > \frac{100}{9} \end{aligned}$$

d) $7^{x+2} \cdot \sqrt{49} \geq 343$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \sqrt{\frac{1}{27}} < 9$

f) $3^x < \frac{1}{9\sqrt{3}}$

g) $(\sqrt{3})^x \cdot 3 > \frac{1}{27}$

h) $27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}$

i) $\left(\frac{1}{64}\right)^x \cdot \sqrt[3]{2} > 1$

Bài 10. Giải các phương trình sau:

a) $2^x + 2^{x+2} = 20$

b) $3^x + 3^{x+1} = 12$

c) $5^x + 5^{x-1} = 30$

d) $4^{x-1} + 4^x + 4^{x+1} = 84$

e) $4^{2x} - 24 \cdot 4^x + 128 = 0$

f) $4^{x+1} + 2^{2x+1} = 48$

g) $3 \cdot 9^x - 2 \cdot 9^{-x} + 5 = 0$

h) $3^{x^2-5x+6} = 1$

i) $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$

II. LOGARIT

1. Định nghĩa

- Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$ ta có: $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$

Chú ý: $\log_a b$ có nghĩa khi $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

- Logarit thập phân:

$$\lg b = \log b = \log_{10} b$$

- Logarit tự nhiên (logarit Nepe): $\ln b = \log_e b$ (với $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281$)

2. Tính chất

- $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^b = b$; $a^{\log_a b} = b$ ($b > 0$)
- Cho $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$. Khi đó:
 - + Nếu $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
 - + Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

3. Các qui tắc tính logarit

Với $a > 0, a \neq 1, b, c > 0$, ta có:

- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

4. Đổi cơ số

Với $a, b, c > 0$ và $a, b \neq 1$, ta có:

- $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c$ ($\alpha \neq 0$)

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\log_2 4 \cdot \log_{\frac{1}{4}} 2$ | b) $\log_5 \frac{1}{25} \cdot \log_{27} 9$ | c) $\log_a \sqrt[3]{\sqrt{a}}$ |
| d) $4^{\log_2 3} + 9^{\log_3 2}$ | e) $\log_{2\sqrt{2}} 8$ | f) $27^{\log_9 2} + 4^{\log_8 27}$ |
| g) $\frac{\log_{a^3} a \cdot \log_{a^4} a^{1/3}}{\log_{\frac{1}{a}} a^7}$ | h) $\log_3 6 \cdot \log_8 9 \cdot \log_6 2$ | i) $9^{2\log_3 2} + 4^{\log_8 5}$ |
| k) $81^{\log_3 5} + 27^{\log_9 36} + 3^{4\log_9 7}$ | l) $25^{\log_5 6} + 49^{\log_7 8}$ | m) $5^{3-2\log_5 4}$ |
| n) $9^{\frac{1}{\log_6 3}} + 4^{\frac{1}{\log_8 2}}$ | o) $3^{1+\log_9 4} + 4^{2-\log_2 3} + 5^{\log_{125} 27}$ | p) $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36$ |
| q) $\lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \dots + \lg(\tan 89^\circ)$ | | |
| r) $\log_8 [\log_4 (\log_2 16)] \cdot \log_2 [\log_3 (\log_4 64)]$ | | |

Bài 2. Cho $a > 0, a \neq 1$. Chứng minh: $\log_a(a+1) > \log_{a+1}(a+2)$

$$\begin{aligned} \text{HD: Xét } A &= \sqrt{\frac{\log_{a+1}(a+2)}{\log_a(a+1)}} = \sqrt{\log_{a+1} a \cdot \log_{a+1}(a+2)} \leq \frac{\log_{a+1} a + \log_{a+1}(a+2)}{2} = \\ &= \frac{\log_{a+1} a(a+2)}{2} < \frac{\log_{a+1}(a+1)^2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Bài 3. So sánh các cặp số sau:

- a) $\log_3 4$ và $\log_4 \frac{1}{3}$ b) $\log_{0,1} \sqrt[3]{2}$ và $\log_{0,2} 0,34$ c) $\log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5}$ và $\log_{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}$
d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80}$ và $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}}$ e) $\log_{13} 150$ và $\log_{17} 290$ f) $2^{\log_6 3}$ và $3^{\log_6 \frac{1}{2}}$
g) $\log_7 10$ và $\log_{11} 13$ h) $\log_2 3$ và $\log_3 4$ i) $\log_9 10$ và $\log_{10} 11$

HD: d) Chứng minh: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{80} < 4 < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{15+\sqrt{2}}$

e) Chứng minh: $\log_{13} 150 < 2 < \log_{17} 290$

g) Xét $A = \log_7 10 - \log_{11} 13 = \frac{\log_7 10 \cdot \log_7 11 - \log_7 13}{\log_7 11}$

$$= \frac{1}{\log_7 11} \left(\log_7 \frac{10 \cdot 11 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 13} + \log_7 \frac{10}{7} \cdot \log_7 \frac{11}{7} \right) > 0$$

h, i) Sử dụng bài 2.

Bài 4. Tính giá trị của biểu thức logarit theo các biểu thức đã cho:

- a) Cho $\log_2 14 = a$. Tính $\log_{49} 32$ theo a .
b) Cho $\log_{15} 3 = a$. Tính $\log_{25} 15$ theo a .
c) Cho $\lg 3 = 0,477$. Tính $\lg 9000$; $\lg 0,000027$; $\frac{1}{\log_{81} 100}$.
d) Cho $\log_7 2 = a$. Tính $\log_{\frac{1}{2}} 28$ theo a .

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức logarit theo các biểu thức đã cho:

- a) Cho $\log_{25} 7 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $\log_{\sqrt[3]{5}} \frac{49}{8}$ theo a, b .
b) Cho $\log_{30} 3 = a$; $\log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a, b .
c) Cho $\log_{14} 7 = a$; $\log_{14} 5 = b$. Tính $\log_{35} 28$ theo a, b .
d) Cho $\log_2 3 = a$; $\log_3 5 = b$; $\log_7 2 = c$. Tính $\log_{140} 63$ theo a, b, c .

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau (với giả thiết các biểu thức đã cho có nghĩa):

- a) $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$ b) $\log_{ax}(bx) = \frac{\log_a b + \log_a x}{1 + \log_a x}$ c) $\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b$
d) $\log_c \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_c a + \log_c b)$, với $a^2 + b^2 = 7ab$.
e) $\log_a(x+2y) - 2\log_a 2 = \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y)$, với $x^2 + 4y^2 = 12xy$.

f) $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$, với $a^2 + b^2 = c^2$.

g) $\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_{a^2} x} + \frac{1}{\log_{a^3} x} + \frac{1}{\log_{a^4} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a^k} x} = \frac{k(k+1)}{2 \log_a x}$.

h) $\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}$.

i) $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$, nếu $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ và $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$.

k) $\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \dots + \frac{1}{\log_{2009} N} = \frac{1}{\log_{2009!} N}$.

l) $\frac{\log_a N - \log_b N}{\log_b N - \log_c N} = \frac{\log_a N}{\log_c N}$, với các số a, b, c lập thành một cấp số nhân.

III. HÀM SỐ LŨY THỪA HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

1. Khái niệm

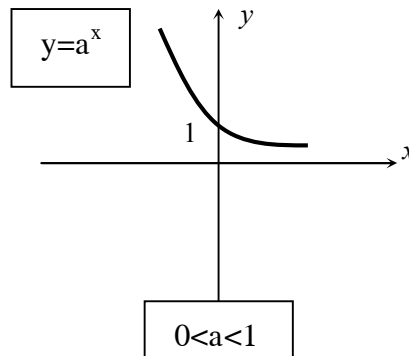
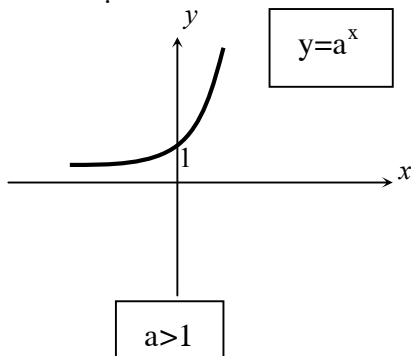
a) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (α là hằng số)

Số mũ α	Hàm số $y = x^\alpha$	Tập xác định D
$\alpha = n$ (n nguyên dương)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R}$
$\alpha = n$ (n nguyên âm hoặc $n = 0$)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
α là số thực không nguyên	$y = x^\alpha$	$D = (0; +\infty)$

Chú ý: Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

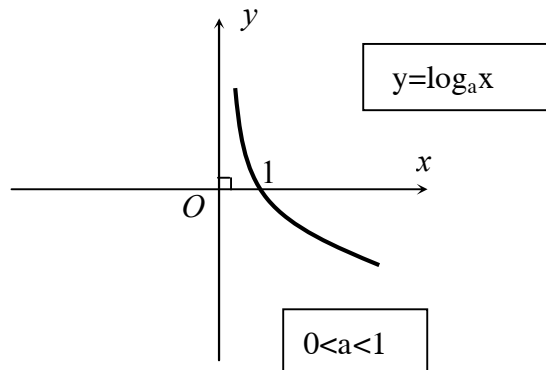
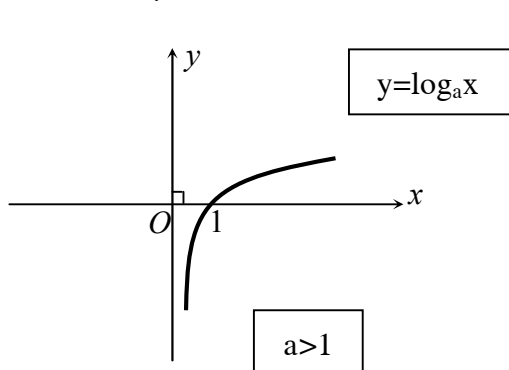
b) Hàm số mũ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.
- Đồ thị:



c) Hàm số logarit $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.
- Khi $a > 1$ hàm số đồng biến, khi $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến.
- Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.
- Đồ thị:



2. Giới hạn đặc biệt

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

3. Đạo hàm

$$\bullet \boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x > 0)}; \quad \boxed{(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'}$$

Chú ý: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\left(\begin{array}{l} \text{với } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn} \\ \text{với } x < 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ} \end{array} \right).$

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$\bullet \boxed{(a^x)' = a^x \ln a}; \quad \boxed{(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'}$$

$$(e^x)' = e^x; \quad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$\bullet \boxed{(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}}; \quad \boxed{(\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \ln a}}$$

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \ (x > 0); \quad (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x & \text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} \\ \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x} & \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right) \end{array}$$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} & \text{b) } y = 4\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} & \text{c) } y = 5\sqrt{\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}} \\ \text{d) } y = \sqrt[3]{\sin(2x+1)} & \text{e) } y = \cot \sqrt[3]{1+x^2} & \text{f) } y = \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{1 + \sqrt[3]{2x}} \\ \text{g) } y = \sqrt[3]{\sin \frac{x+3}{4}} & \text{h) } y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}} & \text{i) } y = 4\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} \end{array}$$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = (x^2 - 2x + 2)e^x & \text{b) } y = (x^2 + 2x)e^{-x} & \text{c) } y = e^{-2x} \cdot \sin x \\ \text{d) } y = e^{2x+x^2} & \text{e) } y = x \cdot e^{\sqrt{x} - \frac{1}{3}x} & \text{f) } y = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} - e^x} \\ \text{g) } y = 2^x \cdot e^{\cos x} & \text{h) } y = \frac{3^x}{x^2 - x + 1} & \text{i) } y = \cos x \cdot e^{\cot x} \end{array}$$

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } y = \ln(2x^2 + x + 3) & \text{b) } y = \log_2(\cos x) & \text{c) } y = e^x \cdot \ln(\cos x) \\ \text{d) } y = (2x-1)\ln(3x^2 + x) & \text{e) } y = \log_{\frac{1}{2}}(x^3 - \cos x) & \text{f) } y = \log_3(\cos x) \\ \text{g) } y = \frac{\ln(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} & \text{h) } y = \frac{\ln(2x+1)}{x+1} & \text{i) } y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \end{array}$$

Bài 5. Chứng minh hàm số đã cho thỏa mãn hệ thức được chỉ ra:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}; \quad xy' = (1-x^2)y & \text{b) } y = (x+1)e^x; \quad y' - y = e^x \\ \text{c) } y = e^{4x} + 2e^{-x}; \quad y''' - 13y' - 12y = 0 & \text{d) } y = a \cdot e^{-x} + b \cdot e^{-2x}; \quad y'' + 3y' + 2y = 0 \\ \text{g) } y = e^{-x} \cdot \sin x; \quad y'' + 2y' + 2y = 0 & \text{h) } y = e^{-x} \cdot \cos x; \quad y^{(4)} + 4y = 0 \\ \text{i) } y = e^{\sin x}; \quad y' \cos x - y \sin x - y'' = 0 & \text{k) } y = e^{2x} \cdot \sin 5x; \quad y'' - 4y' + 29y = 0 \\ \text{l) } y = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x; \quad y'' - 2y' + y = e^x & \text{m) } y = e^{4x} + 2e^{-x}; \quad y''' - 13y' - 12y = 0 \\ \text{n) } y = (x^2 + 1)(e^x + 2010); \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + 1} + e^x(x^2 + 1) \end{array}$$

Bài 6. Chứng minh hàm số đã cho thỏa mãn hệ thức được chỉ ra:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right); \quad xy' + 1 = e^y & \text{b) } y = \frac{1}{1+x+\ln x}; \quad xy' = y[y \ln x - 1] \\ \text{c) } y = \sin(\ln x) + \cos(\ln x); \quad y + xy' + x^2 y'' = 0 & \text{d) } y = \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}; \quad 2x^2 y' = (x^2 y^2 + 1) \\ \text{e) } y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}; \quad 2y = xy' + \ln y' \end{array}$$

Bài 7. Giải phương trình, bất phương trình sau với hàm số được chỉ ra:

$$\begin{array}{l} \text{a) } f'(x) = 2f(x); \quad f(x) = e^x(x^2 + 3x + 1) \\ \text{b) } f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 0; \quad f(x) = x^3 \ln x \\ \text{c) } f'(x) = 0; \quad f(x) = e^{2x-1} + 2 \cdot e^{1-2x} + 7x - 5 \\ \text{d) } f'(x) > g'(x); \quad f(x) = x + \ln(x-5); \quad g(x) = \ln(x-1) \\ \text{e) } f'(x) < g'(x); \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{2x+1}; \quad g(x) = 5^x + 4x \ln 5 \end{array}$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

Với $a > 0, a \neq 1$: $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ x = \log_a b \end{cases}$

2. Một số phương pháp giải phương trình mũ

a) Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Chú ý: Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì: $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0$

b) Logarit hoá

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = (\log_a b) \cdot g(x)$$

c) Đặt ẩn phụ

• **Dạng 1:** $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)}, t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$, trong đó $P(t)$ là đa thức theo t .

• **Dạng 2:** $\alpha a^{2f(x)} + \beta (ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$

Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$

• **Dạng 3:** $a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$, với $ab = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \frac{1}{t}$

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

• Đoán nhận x_0 là một nghiệm của (1).

• Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của $f(x)$ và $g(x)$ để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} f(x) \text{ đồng biến và } g(x) \text{ nghịch biến (hoặc đồng biến nhưng nghiêm ngặt).} \\ f(x) \text{ đơn điệu và } g(x) = c \text{ hằng số} \end{cases}$$

• Nếu $f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

e) Đưa về phương trình các phương trình đặc biệt

• **Phương trình tích** $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ • **Phương trình** $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

f) Phương pháp đối lập

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1)

Nếu ta chứng minh được: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

Bài 1. Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc logarit hoá):

a) $9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$

b) $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125 \cdot 8^{\frac{x+5}{x-15}}$

c) $4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2-6x-5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$

d) $5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$

e) $2^{x^2-1} + 2^{x^2+2} = 3^{x^2} + 3^{x^2-1}$

f) $5^{x-\sqrt{x^2+4}} = 25$

$$g) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2} = 2^{4-3x}$$

$$h) \left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x} = 2$$

$$i) (3-2\sqrt{2})^{2x} = 3+2\sqrt{2}$$

$$k) (\sqrt{5}+2)^{x-1} = (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$l) 3^x \cdot 2^{x+1} = 72$$

$$m) 5^{x+1} + 6 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x-1} = 52$$

Bài 2. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 1):

$$a) 4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$$

$$b) 4^{x+1} - 6 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$$

$$c) 3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 27 = 0$$

$$d) 16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$$

$$e) 49^x + 7^{x+1} - 8 = 0$$

$$f) 2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3.$$

$$g) (7+4\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 6$$

$$h) 4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$$

$$i) 3^{2x+5} - 36 \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$$

$$k) 3^{2x^2+2x+1} - 28 \cdot 3^{x^2+x} + 9 = 0$$

$$l) 4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$$

$$m) 3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$$

Bài 3. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 1):

$$a) 25^x - 2(3-x) \cdot 5^x + 2x - 7 = 0$$

$$b) 3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0$$

$$c) 3 \cdot 4^x + (3x-10) \cdot 2^x + 3 - x = 0$$

$$d) 9^x + 2(x-2) \cdot 3^x + 2x - 5 = 0$$

$$e) 3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10) \cdot 5^{x-2} + 3 - x = 0$$

$$f) 4x^2 + 3\sqrt{x} + 3^{1+\sqrt{x}} = 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot x^2 + 2x + 6$$

$$g) 4^x + (x-8) \cdot 2^x + 12 - 2x = 0$$

$$h) (x+4) \cdot 9^x - (x+5) \cdot 3^x + 1 = 0$$

$$i) 4^{x^2} + (x^2-7) \cdot 2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0$$

$$k) 9^{-x} - (x+2) \cdot 3^{-x} - 2(x+4) = 0$$

Bài 4. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 2):

$$a) 64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$$

$$b) 4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$$

$$c) 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

$$d) 25^x + 10^x = 2^{2x+1}$$

$$e) 27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x$$

$$f) 6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$g) 6 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 2^{2x} = 0$$

$$h) 3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

$$i) 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$$

$$k) (7+5\sqrt{2})^x + (\sqrt{2}-5)(3+2\sqrt{2})^x + 3(1+\sqrt{2})^x + 1 - \sqrt{2} = 0.$$

Bài 5. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ dạng 3):

$$a) (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 14$$

$$b) \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

$$c) (2+\sqrt{3})^x + (7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^x = 4(2+\sqrt{3})$$

$$d) (5-\sqrt{21})^x + 7(5+\sqrt{21})^x = 2^{x+3}$$

$$e) (5+\sqrt{24})^x + (5-\sqrt{24})^x = 10$$

$$f) \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x + 7\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$$

$$g) \left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x = 12$$

$$h) \left(2+\sqrt{3}\right)^{(x-1)^2} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}$$

$$i) (3+\sqrt{5})^x + 16(3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$$

$$k) (3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x - 7 \cdot 2^x = 0$$

$$l) (7+4\sqrt{3})^x - 3(2-\sqrt{3})^x + 2 = 0$$

$$m) \left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6.$$

Bài 6. Giải các phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

$$a) (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4^x$$

$$b) (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$$

$$c) (3+2\sqrt{2})^x + (3-2\sqrt{2})^x = 6^x$$

$$d) (3+\sqrt{5})^x + 16(3-\sqrt{5})^x = 2^{x+3}$$

$$e) \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$$

$$f) (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$$

$$g) 2^x + 3^x + 5^x = 10^x$$

$$h) 2^x + 3^x = 5^x$$

$$i) 2^{x-1} - 2^{x^2-x} = (x-1)^2$$

$$k) 3^x = 5 - 2x$$

$$l) 2^x = 3 - x$$

$$m) 2^{x+1} - 4^x = x - 1$$

$$n) 2^x = 3^{\frac{x}{2}} + 1$$

$$o) 4^x + 7^x = 9x + 2$$

$$p) 5^{2x+1} - 5^{3x} - x + 1 = 0$$

$$q) 3^x + 8^x = 4^x + 7^x$$

$$r) 6^x + 2^x = 5^x + 3^x$$

$$s) 9^x + 15^x = 10^x + 14^x$$

Bài 7. Giải các phương trình sau (đưa về phương trình tích):

$$a) 8.3^x + 3.2^x = 24 + 6^x$$

$$b) 12.3^x + 3.15^x - 5^{x+1} = 20$$

$$c) 8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$$

$$d) 2^x + 3^x = 1 + 6^x$$

$$e) 4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$$

$$f) 4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1$$

$$g) x^2.3^x + 3^x(12-7x) = -x^2 + 8x^2 - 19x + 12$$

$$h) x^2.3^{x-1} + x(3^x - 2^x) = 2(2^x - 3^{x-1})$$

$$i) 4^{\sin x} - 2^{1+\sin x} \cos(xy) + 2^{|y|} = 0$$

$$k) 2^{2(x^2+x)} + 2^{1-x^2} - 2^{2(x^2+x)}.2^{1-x^2} - 1 = 0$$

Bài 8. Giải các phương trình sau (phương pháp đối lập):

$$a) 2^x = \cos x^4, \text{ với } x \geq 0$$

$$b) 3^{x^2-6x+10} = -x^2 + 6x - 6$$

$$c) 3^{|\sin \sqrt{x}|} = |\cos x|$$

$$d) 2.\cos^2\left(\frac{x^3-x}{2}\right) = 3^x + 3^{-x}$$

$$e) \pi^{|\sin \sqrt{x}|} = |\cos x|$$

$$f) 2^{2x-x^2} = \frac{x^2+1}{x}$$

$$g) 3^{x^2} = \cos 2x$$

$$h) 5^{x^2} = \cos 3x$$

Bài 9. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:

$$a) 9^x + 3^x + m = 0$$

$$b) 9^x + m3^x - 1 = 0$$

$$c) 4^x - 2^{x+1} = m$$

$$d) 3^{2x} + 2.3^x - (m+3).2^x = 0$$

$$e) 2^x + (m+1).2^{-x} + m = 0$$

$$f) 25^x - 2.5^x - m - 2 = 0$$

$$g) 16^x - (m-1).2^{2x} + m - 1 = 0$$

$$h) 25^x + m.5^x + 1 - 2m = 0$$

$$i) 81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = m$$

$$k) 3^{4-2x^2} - 2.3^{2-x^2} + 2m - 3 = 0$$

$$l) 4^{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}} - 14.2^{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}} + 8 = m$$

$$m) 9^{x+\sqrt{1-x^2}} - 8.3^{x+\sqrt{1-x^2}} + 4 = m$$

$$n) 9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (m+2).3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2m + 1 = 0$$

Bài 10. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$a) m.2^x + 2^{-x} - 5 = 0$$

$$b) m.16^x + 2.81^x = 5.36^x$$

$$c) (\sqrt{5}+1)^x + m(\sqrt{5}-1)^x = 2^x$$

$$d) \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x + m\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8$$

$$e) 4^x - 2^{x+3} + 3 = m$$

$$f) 9^x + m3^x + 1 = 0$$

Bài 11. Tìm m để các phương trình sau có 2 nghiệm trái dấu:

$$a) (m+1).4^x + (3m-2).2^{x+1} - 3m + 1 = 0$$

$$b) 49^x + (m-1).7^x + m - 2m^2 = 0$$

$$c) 9^x + 3(m-1).3^x - 5m + 2 = 0$$

$$d) (m+3).16^x + (2m-1).4^x + m + 1 = 0$$

$$e) 4^x - 2(m+1).2^x + 3m - 8 = 0$$

$$f) 4^x - 2^x + 6 = m$$

Bài 12. Tìm m để các phương trình sau:

$$a) m.16^x + 2.81^x = 5.36^x \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt.}$$

$$b) 16^x - m.8^x + (2m-1).4^x = m.2^x \text{ có 3 nghiệm phân biệt.}$$

$$c) 4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m \text{ có 3 nghiệm phân biệt.}$$

$$d) 9^{x^2} - 4.3^{x^2} + 8 = m \text{ có 3 nghiệm phân biệt.}$$

V. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Phương trình logarit cơ bản

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

2. Một số phương pháp giải phương trình logarit

a) Đưa về cùng cơ số

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \end{cases}$

b) Mũ hoá

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow a^{\log_a f(x)} = a^b$

c) Đặt ẩn phụ

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

e) Đưa về phương trình đặc biệt

f) Phương pháp đối lập

Chú ý:

- Khi giải phương trình logarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.
- Với $a, b, c > 0$ và $a, b, c \neq 1$: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Bài 1. Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc mũ hoá):

- | | |
|--|--|
| a) $\log_2 [x(x-1)] = 1$ | b) $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1$ |
| c) $\log_2 (x-2) - 6 \cdot \log_{1/8} \sqrt{3x-5} = 2$ | d) $\log_2 (x-3) + \log_2 (x-1) = 3$ |
| e) $\log_4 (x+3) - \log_4 (x-1) = 2 - \log_4 8$ | f) $\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5$ |
| g) $2 \log_8 (x-2) - \log_8 (x-3) = \frac{2}{3}$ | h) $\lg \sqrt{5x-4} + \lg \sqrt{x+1} = 2 + \lg 0,18$ |
| i) $\log_3 (x^2 - 6) = \log_3 (x-2) + 1$ | k) $\log_2 (x+3) + \log_2 (x-1) = 1 / \log_5 2$ |
| l) $\log_4 x + \log_4 (10-x) = 2$ | m) $\log_5 (x-1) - \log_{1/5} (x+2) = 0$ |
| n) $\log_2 (x-1) + \log_2 (x+3) = \log_2 10 - 1$ | o) $\log_9 (x+8) - \log_3 (x+26) + 2 = 0$ |

Bài 2. Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc mũ hoá):

- | | |
|--|--|
| a) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{1/3} x = 6$ | b) $1 + \lg(x^2 - 2x + 1) - \lg(x^2 + 1) = 2 \lg(1-x)$ |
| c) $\log_4 x + \log_{1/16} x + \log_8 x = 5$ | d) $2 + \lg(4x^2 - 4x + 1) - \lg(x^2 + 19) = 2 \lg(1-2x)$ |
| e) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ | f) $\log_{1/2} (x-1) + \log_{1/2} (x+1) = 1 + \log_{1/\sqrt{2}} (7-x)$ |
| g) $\log_2 \log_2 x = \log_3 \log_3 x$ | h) $\log_2 \log_3 x = \log_3 \log_2 x$ |
| i) $\log_2 \log_3 x + \log_3 \log_2 x = \log_3 \log_3 x$ | k) $\log_2 \log_3 \log_4 x = \log_4 \log_3 \log_2 x$ |

Bài 3. Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc mũ hoá):

- | | |
|--|--|
| a) $\log_2 (9 - 2^x) = 3 - x$ | b) $\log_3 (3^x - 8) = 2 - x$ |
| c) $\log_7 (6 + 7^{-x}) = 1 + x$ | d) $\log_3 (4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$ |
| e) $\log_2 (9 - 2^x) = 5^{\log_5 (3-x)}$ | f) $\log_2 (3 \cdot 2^x - 1) - 2x - 1 = 0$ |

g) $\log_2(12 - 2^x) = 5 - x$

i) $\log_2(5^{x+1} - 25^x) = 2$

l) $\log_{\frac{1}{\sqrt{6}}}(5^{x+1} - 25^x) = -2$

h) $\log_5(26 - 3^x) = 2$

k) $\log_4(3 \cdot 2^{x+1} - 5) = x$

m) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) = -2$

Bài 4. Giải các phương trình sau (đưa về cùng cơ số hoặc mũ hoá):

a) $\log_5(x^2 - 2x + 65) = 2$

b) $\log_{x-1}(x^2 - 4x + 5) = 1$

c) $\log_x(5x^2 - 8x + 3) = 2$

d) $\log_{x+1}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$

e) $\log_{x-3}(x-1) = 2$

f) $\log_x(x+2) = 2$

g) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) = 2$

h) $\log_{x+3}(x^2 - x) = 1$

i) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$

k) $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$

l) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) = 2$

m) $\log_x(x^2 - 2) = 1$

n) $\log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 2) = 2$

o) $\log_{2x+4}(x^2 + 1) = 1$

p) $\log_x \frac{15}{1-2x} = -2$

q) $\log_{x^2}(3-2x) = 1$

r) $\log_{x^2+3x}(x+3) = 1$

s) $\log_x(2x^2 - 5x + 4) = 2$

Bài 5. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ):

a) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

b) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{1/2} x = 2$

c) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$

d) $\log_{\frac{1}{2}}^2 4x + \log_2 \frac{x^2}{8} = 8$

e) $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_{1/2} x = 0$

f) $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3$

g) $\log_5 x - \log_x \frac{1}{5} = 2$

h) $\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} = 2$

i) $2 \log_5 \sqrt{x} - 2 = \log_x \frac{1}{5}$

k) $3 \sqrt{\log_2 x} - \log_2 4x = 0$

l) $3 \sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$

m) $\log_2 \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\log_2 x} = 4/3$

n) $\log_2 \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\log_2 x} = -2/3$

o) $\log_2^2 x + 2 \log_4 \frac{1}{x} = 0$

p) $\log_2^2(2-x) - 8 \log_{1/4}(2-x) = 5$

q) $\log_5^2 x + 4 \log_{25} 5x - 5 = 0$

r) $\log_x \sqrt{5} + \log_x 5x = \frac{9}{4} + \log_x^2 \sqrt{5}$

s) $\log_{x^2} 3 + \log_9 x = 1$

t) $\frac{1}{4 - \lg x} + \frac{2}{2 + \lg x} = 1$

u) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{3}{3 + \lg x} = 1$

v) $\log_{2x} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$

Bài 6. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ):

a) $\log_3^2 x + (x-12) \log_3 x + 11 - x = 0$

b) $6 \cdot 9^{\log_2 x} + 6 \cdot x^2 = 13 \cdot x^{\log_2 6}$

c) $x \cdot \log_2^2 x - 2(x+1) \cdot \log_2 x + 4 = 0$

d) $\log_2^2 x + (x-1) \log_2 x = 6 - 2x$

e) $(x+2)\log_3^2(x+1)+4(x+1)\log_3(x+1)-16=0$ f) $\log_{x^2}(2+x)+\log_{\sqrt{2-x}}x=2$
 g) $\log_3^2(x+1)+(x-5)\log_3(x+1)-2x+6=0$ h) $4\sqrt{\log_3x-1}-\log_3\sqrt{x}=4$
 i) $\log_2(x^2+3x+2)+\log_2(x^2+7x+12)=3+\log_23$

Bài 7. Giải các phương trình sau (đặt ẩn phụ):

a) $\log_7x=\log_3(\sqrt{x}+2)$ b) $\log_2(x-3)+\log_3(x-2)=2$
 c) $\log_3(x+1)+\log_5(2x+1)=2$ d) $\log_2\left(x+3^{\log_6x}\right)=\log_6x$
 e) $4^{\log_7(x+3)}=x$ f) $\log_2(1+\sqrt{x})=\log_3x$
 g) $x^{\log_29}=x^2.3^{\log_2x}-x^{\log_23}$
 h) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4$
 i) $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

Bài 8. Giải các phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

a) $x+x^{\log_23}=x^{\log_25}$ ($x>0$) b) $x^2+3^{\log_2x}=5^{\log_2x}$
 c) $\log_5(x+3)=3-x$ d) $\log_2(3-x)=x$
 e) $\log_2(x^2-x-6)+x=\log_2(x+2)+4$ f) $x+2.3^{\log_2x}=3$
 g) $4(x-2)\left[\log_2(x-3)+\log_3(x-2)\right]=15(x+1)$

Bài 9. Giải các phương trình sau (đưa về phương trình tích):

a) $\log_2x+2.\log_7x=2+\log_2x.\log_7x$ b) $\log_2x.\log_3x+3=3.\log_3x+\log_2x$
 c) $2\left(\log_9x\right)^2=\log_3x.\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$

Bài 10. Giải các phương trình sau (phương pháp đối lập):

a) $\ln(\sin^2x)-1+\sin^3x=0$ b) $\log_2\left(x^2+|x|-1\right)=\sqrt{1-x^2}$
 c) $2^{2x+1}+2^{3-2x}=\frac{8}{\log_3(4x^2-4x+4)}$

Bài 11. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm duy nhất:

a) $\log_{2+\sqrt{3}}\left[x^2-2(m+1)x\right]+\log_{2-\sqrt{3}}(2x+m-2)=0$ b) $\log_{\sqrt{2}}(x-2)=\log_2(mx)$
 c) $\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx+m+1\right)+\log_{\sqrt{5}-2}x=0$ d) $\frac{\lg(mx)}{\lg(x+1)}=2$
 e) $\log_3(x^2+4mx)=\log_3(2x-2m-1)$
 f) $\log_{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}(x-m+1)+\log_{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}(mx-x^2)=0$

Bài 12. Tìm m để các phương trình sau:

a) $\log_2(4^x-m)=x+1$ có 2 nghiệm phân biệt.
 b) $\log_3^2x-(m+2).\log_3x+3m-1=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2=27$.
 c) $2\log_4(2x^2-x+2m-4m^2)=\log_2(x^2+mx-2m^2)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2+x_2^2>1$.
 d) $\log_3^2x+\sqrt{\log_3^2x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.
 e) $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2x+m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

VI. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Khi giải hệ phương trình mũ và logarit, ta cũng dùng các phương pháp giải hệ phương trình đã học như:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.
- Phương pháp đặt ẩn phụ.
-

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x + 2^y = 5 \\ x - 2^y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3^y = 1 \\ x^2 + 3^y = 19 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 20 \\ 5^x \cdot 2^y = 50 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1 \\ x + y = 8 \end{cases} \quad (x > 0)$

b) $\begin{cases} 2^x = 4y \\ 4^x = 32y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^{y-1} = 8 \\ x^{2y-6} = 4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 36 \\ 3^x \cdot 4^y = 36 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 3^x \cdot 2^y = 18 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x^{x^2-y^2-16} = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad (x > 0)$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 4^x - 3^y = 7 \\ 4^x \cdot 3^y = 144 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{x+y} = 56 \\ 3 \cdot 2^x + 3^{x+y+1} = 87 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^{\sqrt{x}+1} - 2^y = -4 \\ 3^{\sqrt{x}+1} - 2^{y+1} = -1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \cot^2 x = 3^y \\ \cos x = 2^y \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 3 \cdot 2^y = 8 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4^{2(x^2-1)} - 4 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y + 2^{2y} = 1 \\ 2^{2y} - 3 \cdot 4^{x^2-1} \cdot 2^y = 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} (x^2 + y)2^{y-x^2} = 1 \\ 9(x^2 + y) = 6^{x^2-y} \end{cases}$

k) $\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} 3^x = 2y + 1 \\ 3^y = 2x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x - 2^y = y - x \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3^x + 2x = y + 11 \\ 3^y + 2y = x + 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7^{x-1} = 6y - 5 \\ 7^{y-1} = 6x - 5 \end{cases}$

Bài 4. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x + y = 6 \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + \log_2 y = 4 \\ 2x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} xy = 32 \\ \log_y x = 4 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2(\log_y x + \log_x y) = 5 \\ xy = 8 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} \frac{1}{2} \log_3 x^2 - \log_3 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ \log_3(x + y) - \log_5(x - y) = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} \log_3 x + 2^{\log_2 y} = 3 \\ x^y = 9 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3 \log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} y - \log_3 x = 1 \\ x^y = 3^{12} \end{cases}$$

Bài 5. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2 \\ \log_y(2x + 3y) = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log_2 \left(1 - \frac{x}{y} \right) = 2 - \log_2 y \\ \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} x + \log_{\sqrt{\frac{3}{2}}} y = 4 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2 + 6) = 4 \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x^{\log_3 y} + 2 \cdot y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} \log_x(2x + y - 2) = 2 \\ \log_y(2y + x - 2) = 2 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2(xy) \\ \lg^2(x - y) + \lg x \cdot \lg y = 0 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y) \\ \frac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1 \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_{x+1}(y + 23) = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_x(6x + 4y) = 2 \\ \log_y(6y + 4x) = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3 \cdot x^{\log_2 y} + 2 \cdot y^{\log_2 x} = 10 \\ \log_4 x^2 + \log_2 y = 2 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} \log_2(xy) = 4 \\ \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} \log_y x + \log_y x = \frac{5}{2} \\ \log_6(x^2 + y^2) = 1 \end{cases}$$

$$o) \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 1 + \lg 8 \\ \lg(x + y) - \lg(x - y) = \lg 3 \end{cases}$$

$$q) \begin{cases} \log_{xy} \frac{y}{x} - \log_y^2 x = 1 \\ \log_2(y - x) = 1 \end{cases}$$

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \lg x + \lg y = 4 \\ x^{\lg y} = 1000 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^{x-2y} = 36 \\ 4(x - 2y) + \log_6 x = 9 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} (x+y)3^{y-x} = \frac{5}{27} \\ 3\log_5(x+y) = x-y \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2\left(\log_{\frac{1}{y}} x - 2\log_{x^2} y\right) + 5 = 0 \\ xy^2 = 32 \end{cases}$$

Bài 7. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x\log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 \frac{3x}{2} \\ x\log_3 12 + \log_3 x = y + \log_3 \frac{2y}{3} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log_{1+x}(1-2y+y^2) + \log_{1-y}(1+2x+x^2) = 4 \\ \log_{1+x}(1+2x) + \log_{1-y}(1+2x) = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \log_2 \sqrt{1+3\sin x} = \log_3(3\cos y) \\ \log_2 \sqrt{1+3\cos y} = \log_3(3\sin x) \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \log_2(1+3\sqrt{1-x^2}) = \log_3(1-y^2) + 2 \\ \log_2(1+3\sqrt{1-y^2}) = \log_3(1-x^2) + 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 2\log_{3-x}(6-3y+xy-2x) + \log_{2-y}(x^2-6x+9) = 6 \\ \log_{3-x}(5-y) - \log_{2-y}(x+2) = 1 \end{cases}$$

Bài 8. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 2^{\log_{\sqrt{2}} x} = y^4 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 18 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x+y) = -1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2y} \\ \log_2(x+y) + \log_2(x-y) = 4 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 4^{\frac{x+y}{y}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y) = 2 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} 4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27 \\ \log_3 y - \log_3 x = 1 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} \log_x xy = \log_y x^2 \\ y^{2\log_y x} = 4y + 3 \end{cases}$$

VII. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

- Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:
 - Đưa về cùng cơ số.
 - Đặt ẩn phụ.
 -

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

Bài 1. Giải các bất phương trình sau (đưa về cùng cơ số):

- | | |
|---|--|
| <p>a) $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x- x-1 }$</p> <p>c) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$</p> <p>e) $9^{x^2-3x+2} - 6^{x^2-3x+2} < 0$</p> <p>g) $4x^2 + x \cdot 2^{x^2+1} + 3 \cdot 2^{x^2} > x^2 \cdot 2^{x^2} + 8x + 12$</p> <p>i) $9^x + 9^{x+1} + 9^{x+2} < 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$</p> <p>l) $2^{x+2} + 5^{x+1} < 2^x + 5^{x+2}$</p> <p>n) $(\sqrt{10}+3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10}-3)^{\frac{x+1}{x+3}}$</p> <p>p) $\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \leq 2^{x-1}$</p> | <p>b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$</p> <p>d) $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11$</p> <p>f) $6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$</p> <p>h) $6 \cdot x^2 + 3^{\sqrt{x}} \cdot x + 3^{1+\sqrt{x}} < 2 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot x^2 + 3x + 9$</p> <p>k) $7 \cdot 3^{x+1} + 5^{x+3} \leq 3^{x+4} + 5^{x+2}$</p> <p>m) $2^{x-1} \cdot 3^{x+2} > 36$</p> <p>o) $(\sqrt{2}+1)^{x+1} \geq (\sqrt{2}-1)^{\frac{x}{x-1}}$</p> <p>q) $2^{\frac{1}{ 2x-1 }} \geq 2^{\frac{1}{3x+1}}$</p> |
|---|--|

Bài 2. Giải các bất phương trình sau (đặt ẩn phụ):

- | | |
|---|---|
| <p>a) $2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x - 4^x \geq 0$</p> <p>c) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2}{3}(x-2)} > 52$</p> <p>e) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$</p> <p>g) $6^x - 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x + 6 \geq 0$</p> <p>i) $49^{\frac{1}{x}} - 35^{\frac{1}{x}} \leq 25^{\frac{1}{x}}$</p> <p>l) $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} \geq 34 \cdot 25^{2x-x^2}$</p> <p>o) $4^x + \sqrt{x-1} - 5 \cdot 2^x + \sqrt{x-1} + 1 + 16 \geq 0$</p> <p>r) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12$</p> <p>t) $\frac{1}{2^x} + 1 + 2^2 - \frac{1}{x} < 9$</p> | <p>b) $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$</p> <p>d) $8 \cdot 3^{\sqrt{x}+4\sqrt{x}} + 9^{1+4\sqrt{x}} > 9^{\sqrt{x}}$</p> <p>f) $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x$</p> <p>h) $27^x + 12^x > 2 \cdot 8^x$</p> <p>k) $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$</p> <p>m) $3^{2x} - 8 \cdot 3^{x+\sqrt{x+4}} - 9 \cdot 9^{\sqrt{x+4}} > 0$</p> <p>p) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^x + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x \leq 2$</p> <p>s) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 \geq 0$</p> <p>u) $(2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4) \cdot \sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$</p> |
|---|---|

Bài 3. Giải các bất phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

a) $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$

b) $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$

c) $\frac{2 \cdot 3^x - 2^{x+2}}{3^x - 2^x} \leq 1$

d) $3^{\sqrt{x+4}} + 2^{\sqrt{2x+4}} > 13$

e) $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \geq 0$

f) $\frac{3^x + x - 4}{x^2 - x - 6} > 0$

g) $\sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + 2x > 3^x \cdot 2x \sqrt{-3x^2 - 5x + 2} + (2x)^2 3^x$

Bài 4. Tìm m để các bất phương trình sau có nghiệm:

a) $4^x - m \cdot 2^x + m + 3 \leq 0$

b) $9^x - m \cdot 3^x + m + 3 \leq 0$

c) $\sqrt{2^x + 7} + \sqrt{2^x - 2} \leq m$

d) $(\sqrt{2} + 1)^{x^2} + (\sqrt{2} - 1)^{x^2 - 1} + m = 0$

Bài 5. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với:

a) $(3m+1) \cdot 12^x + (2-m) \cdot 6^x + 3^x < 0, \forall x > 0.$

b) $(m-1)4^x + 2^{x+1} + m + 1 > 0, \forall x.$

c) $m \cdot 9^x - (2m+1)6^x + m \cdot 4^x \leq 0, \forall x \in [0; 1].$

d) $m \cdot 9^x + (m-1) \cdot 3^{x+2} + m - 1 > 0, \forall x.$

e) $4^{|\cos x|} + 2(2m+1)2^{|\cos x|} + 4m^2 - 3 < 0, \forall x.$

f) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} - m \geq 0, \forall x.$

g) $4^x - 2^x - m \geq 0, \forall x \in (0; 1)$

h) $\sqrt{3^x + 3} + \sqrt{5 - 3^x} \leq m, \forall x.$

i) $2 \cdot 25^x - (2m+1) \cdot 10^x + (m+2) \cdot 4^x \geq 0, \forall x \geq 0.$

k) $4^{x-1} - m \cdot (2^x + 1) > 0, \forall x.$

Bài 6. Tìm m để mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của bất phương trình (2):

a) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1} > 12 \\ (m-2)^2 x^2 - 3(m-6)x - m - 1 < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

b) $\begin{cases} 2^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{1}{x}+1} > 8 \\ 4x^2 - 2mx - (m-1)^2 < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

c) $\begin{cases} 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 \leq 0 \\ (m^2 + 1)x + m(x+3) + 1 > 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

d) $\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+2} > 12 \\ 2x^2 + (m+2)x + 2 - 3m < 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$

VIII. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

- Khi giải các bất phương trình logarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số logarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases}$$

- Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình logarit:

- Đưa về cùng cơ số.
- Đặt ẩn phụ.
-

Chú ý: Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:

$$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0; \quad \frac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$$

Bài 1. Giải các bất phương trình sau (đưa về cùng cơ số):

- | | |
|--|---|
| a) $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$ | b) $\log_2(1-2\log_9 x) < 1$ |
| c) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{5-x} < \log_{\frac{1}{3}}(3-x)$ | d) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_5 x > 0$ |
| e) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 \frac{1+2x}{1+x}) > 0$ | f) $(x^2-4)\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ |
| g) $\log_{\frac{1}{3}}[\log_4(x^2-5)] > 0$ | h) $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$ |
| i) $\log_2(x+3) \geq 1 + \log_2(x-1)$ | k) $2^{(\log_2 x)^2} + x^{\log_2 x}$ |
| l) $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \geq 0$ | m) $2\log_8(x-2) + \log_{\frac{1}{8}}(x-3) > \frac{2}{3}$ |
| n) $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_5(\sqrt{x^2+1}+x)\right] > \log_3\left[\log_{\frac{1}{5}}(\sqrt{x^2+1}-x)\right]$ | |

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{\lg(x^2-1)}{\lg(1-x)} < 1$ | b) $\frac{\log_2(x+1)^2 - \log_3(x+1)^3}{x^2-3x-4} > 0$ |
| c) $\frac{\lg(x^2-3x+2)}{\lg x + \lg 2} > 2$ | d) $x^{\log_2 x} + x^{5\log_x 2 - \log_2 x} - 18 < 0$ |
| e) $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$ | f) $\log_3 x \cdot \log_2 x < \log_3 x^2 + \log_2 \frac{x}{4}$ |
| g) $\log_x(\log_4(2^x-4)) \leq 1$ | h) $\log_{3x-x^2}(3-x) > 1$ |
| i) $\log_{\frac{x}{5}}(x^2-8x+16) \geq 0$ | k) $\log_{2x}(x^2-5x+6) < 1$ |

$$l) \log_{\frac{x+6}{3}} \left(\log_2 \frac{x-1}{x+2} \right) > 0$$

$$m) \log_{x-1} (x+1) > \log_{x^2-1} (x+1)$$

$$n) (4x^2 - 16x + 7) \cdot \log_3 (x-3) > 0$$

$$o) (4^x - 12 \cdot 2^x + 32) \cdot \log_2 (2x-1) \leq 0$$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau (đặt ẩn phụ):

$$a) \log_2 x + 2 \log_x 4 - 3 \leq 0$$

$$b) \log_5 (1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}} (x+1)$$

$$c) 2 \log_5 x - \log_x 125 < 1$$

$$d) \log_{2x} 64 + \log_{x^2} 16 \geq 3$$

$$e) \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$$

$$f) \log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 < 0$$

$$g) \frac{2}{1 - \log_2 x} + \frac{\log_4 x}{1 + \log_2 x} > \frac{\log_2 x}{1 - \log_2^2 x}$$

$$h) \frac{1}{4 + \log_2 x} + \frac{2}{2 - \log_2 x} \leq 1$$

$$i) \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 6 \log_2 x + 8 \leq 0$$

$$k) \sqrt{\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 9} \geq 2 \log_3 x - 3$$

$$l) \sqrt{\log_9 (3x^2 + 4x + 2)} + 1 > \log_3 (3x^2 + 4x + 2)$$

$$m) \frac{1}{5 - \log_5 x} + \frac{2}{1 + \log_5 x} < 1$$

$$n) \sqrt{1 - 9 \log_{\frac{1}{8}}^2 x} > 1 - 4 \log_{\frac{1}{8}} x$$

$$o) \log_x 100 - \frac{1}{2} \log_{100} x > 0$$

$$p) \frac{1 + \log_3^2 x}{1 + \log_3 x} > 1$$

$$q) \log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}$$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau (sử dụng tính đơn điệu):

$$a) (x+1) \log_{0,5}^2 x + (2x+5) \log_{0,5} x + 6 \geq 0$$

$$b) \log_2 (2^x + 1) + \log_3 (4^x + 2) \leq 2$$

$$c) \frac{3}{\log_2 (x+1)} > \frac{2}{\log_3 (x+1)}$$

$$d) \frac{\lg \frac{5+x}{5-x}}{2^x - 3x + 1} < 0$$

Bài 5. Tìm m để các bất phương trình sau có nghiệm:

$$a) \log_{1/2} (x^2 - 2x + m) > -3$$

$$b) \log_x 100 - \frac{1}{2} \log_m 100 > 0$$

$$c) \frac{1}{5 - \log_m x} + \frac{2}{1 + \log_m x} < 1$$

$$d) \frac{1 + \log_m^2 x}{1 + \log_m x} > 1$$

$$e) \sqrt{\log_2 x + m} > \log_2 x$$

$$f) \log_{x-m} (x^2 - 1) > \log_{x-m} (x^2 + x - 2)$$

Bài 6. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với:

$$a) \log_2 (7x^2 + 7) \geq \log_2 (mx^2 + 4x + m), \forall x$$

$$b) \log_2 (\sqrt{x^2 - 2x + m}) + 4\sqrt{\log_2 (x^2 - 2x + m)} \leq 5, \forall x \in [0; 2]$$

$$c) 1 + \log_5 (x^2 + 1) \geq \log_5 (mx^2 + 4x + m), \forall x.$$

$$d) \left(2 - \log_{\frac{1}{2}} \frac{m}{1+m} \right) x^2 - 2 \left(1 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{m}{1+m} \right) x - 2 \left(1 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{m}{1+m} \right) > 0, \forall x$$

Bài 7. Giải bất phương trình, biết $x = a$ là một nghiệm của bất phương trình:

$$a) \log_m (x^2 - x - 2) > \log_m (-x^2 + 2x + 3); \quad a = 9/4.$$

$$b). \log_m (2x^2 + x + 3) \leq \log_m (3x^2 - x); \quad a = 1$$

Bài 8. Tìm m để mọi nghiệm của (1) đều là nghiệm của bất phương trình (2):

$$\text{a) } \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}} x^2 < 0 & (1) \\ x^2 + mx + m^2 + 6m < 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2 & (1) \\ x^2 - 2x + 1 - m^4 > 0 & (2) \end{cases}$$

Bài 9. Giải các hệ bất phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 16x + 64} > 0 \\ \lg \sqrt{x+7} > \lg(x-5) - 2 \lg 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x-1) \lg 2 + \lg(2^{x+1} + 1) < \lg(7 \cdot 2^x + 12) \\ \log_x(x+2) > 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \log_{2-x}(2-y) > 0 \\ \log_{4-y}(2x-2) > 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \log_{x-1}(y+5) < 0 \\ \log_{y+2}(4-x) < 0 \end{cases}$$

IX. ÔN TẬP HÀM SỐ LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{8^{x-1}} = 64$$

$$b) 9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$$

$$c) \frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = \frac{(0,04)^x}{25}$$

$$d) \left(\frac{5}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11} = \left(\frac{5}{3}\right)^9$$

$$e) 7^{x+2} - \frac{1}{7} \cdot 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$$

$$f) (3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}) \lg(7-x) = 0$$

$$g) \left(2(2^{\sqrt{x+3}})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$$

$$h) 5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500$$

$$i) x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

$$k) x^{\lg x} = 1000x^2$$

$$l) x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{5+\lg x}$$

$$m) (\sqrt{x})^{\log_3 x-1} = 3$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$a) 4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0$$

$$b) 4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$$

$$c) 64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$$

$$d) 64^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{3}{x}} + 12 = 0$$

$$e) 9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

$$f) 3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 28 = 2 \log_2 \sqrt{2}$$

$$g) 3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1-6 \cdot 3^x} + 3^{2(x+1)}$$

$$h) (\sqrt{5+\sqrt{24}})^x + (\sqrt{5-\sqrt{24}})^x = 10$$

$$i) 9^{1+\log_3 x} - 3^{1+\log_3 x} - 210 = 0$$

$$k) 4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} - 2 \cdot 3^{\lg x^2+2} = 0$$

$$l) 2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$$

$$m) 3^{\lg(\tan x)} - 2 \cdot 3^{\lg(\cot x)+1} = 1$$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

$$a) \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} < \frac{25}{4}$$

$$b) \frac{2^{x-1}-1}{2^{x+1}+1} < 2$$

$$c) x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$$

$$d) x^{\lg^2 x - 3 \lg x + 1} > 1000$$

$$e) \frac{4^x + 2x - 4}{x-1} \leq 2$$

$$f) 8 \cdot \frac{3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$g) 2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$$

$$h) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$$

$$i) \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{|x+2|}{2-|x|}} > 9$$

$$k) \left(\frac{1}{3}\right)^{x+\frac{1}{2}-\frac{2}{x}} > \frac{1}{\sqrt{27}}$$

$$l) \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

$$m) 3^{72} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$$

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $4^x - 2.5^{2x} - 10^x > 0$

c) $9.4^{\frac{1}{x}} + 5.6^{\frac{1}{x}} < 4.9^{\frac{1}{x}}$

e) $4^{x+1} - 16^x < 2\log_4 8$

g) $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52$

i) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$

b) $25^{-x} - 5^{-x+1} \geq 50$

d) $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$

f) $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$

h) $3^{4-3x} - 35 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0$

k) $\sqrt{9^x + 3^x} - 2 \geq 9 - 3^x$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$

c) $\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1$

e) $3^{\log_3 \lg \sqrt{x}} - \lg x + \lg^2 x - 3 = 0$

g) $x^{1+\lg x} = 10x$

i) $\left(\frac{\lg x}{2}\right)^{\lg^2 x + \lg x^2 - 2} = \lg \sqrt{x}$

l) $\log_3\left(\log_9 x + \frac{1}{2} + 9^x\right) = 2x$

b) $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$

d) $\log_3(1 + \log_3(2^x - 7)) = 1$

f) $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5$

h) $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$

k) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$

m) $2\log_3 \frac{x-3}{x-7} + 1 = \log_3 \frac{x-3}{x-1}$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $2(\log_x \sqrt{5})^2 - 3\log_x \sqrt{5} + 1 = 0$

c) $\log_2^2 x + 2\log_2 \sqrt{x} - 2 = 0$

e) $\log_x(9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4$

g) $\lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg^2 x = 6$

i) $\log_3(9^x + 9) = x + \log_3(28 - 2 \cdot 3^x)$

l) $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$

b) $\log_{1/3} x - 3\sqrt{\log_{1/3} x} + 2 = 0$

d) $3 + 2\log_{x+1} 3 = 2\log_3(x+1)$

f) $\log_3(\log_{1/2}^2 x - 3\log_{1/2} x + 5) = 2$

h) $\log_2(2x^2) \cdot \log_2(16x) = \frac{9}{2}\log_2^2 x$

k) $\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

m) $\lg(6.5^x + 25.20^x) = x + \lg 25$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{0.5}(x^2 - 5x + 6) > -1$

c) $|\log_3 x| - \log_3 x - 3 < 0$

e) $\log_{1/4}(2-x) > \log_{1/4} \frac{2}{x+1}$

g) $\frac{x^2 - 4}{\log_{1/2}(x^2 - 1)} < 0$

i) $\log_x[\log_9(3^x - 9)] < 1$

l) $2^{\log_{2-x}(x^2 + 8x + 15)} < 1$

b) $\log_7 \frac{2x-6}{2x-1} > 0$

d) $\log_{1/3} \frac{2-3x}{x} \geq -1$

f) $\log_{1/3}[\log_4(x^2 - 5)] > 0$

h) $\frac{\log_2(x+1)}{x-1} > 0$

k) $\log_{2x+3} x^2 < 1$

m) $(0,5)^{\log_{1/3} \frac{x+5}{x^2+3}} > 1$

Bài 8. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} 4^{(x-y)^2-1} = 1 \\ 5^{x+y} = 125 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x = 2,75 \\ 2^x - 3^y = -0,75 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 7^x - 16y = 0 \\ 4^x - 49y = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 4^{\frac{x}{y}} - 3 \cdot 4^{\frac{5y-x}{y}} = 16 \\ \sqrt{x} - \sqrt{2y} = \sqrt{12} - \sqrt{8} \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{y/2} = 7 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} (x^2 + y)2^{y-x^2} = 1 \\ 9(x^2 + y) = 6^{x^2-y} \end{cases}$$

Bài 9. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2 \\ \log_4 x - \log_x y = \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^{\lg y} = 2 \\ xy = 20 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \log_2 x + 2 \log_2 y = 3 \\ x^2 + y^4 = 16 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{15} \\ \log_3 x + \log_3 y = 1 + \log_3 5 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3^{\log_x 2} = y^{\log_5 y} \\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_7 x} \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} \lg(x^2 + y^2) - 1 = \lg 13 \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = 3 \lg 2 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} = \frac{9}{8} \\ \log_2 x + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} xy = 8 \\ 2(\log_y x + \log_x y) = 5 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} 2 \log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \cdot \log_2 x = 2 \log_2 x + 3^{y+1} \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} 4^{\frac{x+y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$$

