

PHẦN 1: MA TRẬN ĐỀ MINH HỌA BỘ GIÁO DỤC 2022

A Khung ma trận

CHỦ ĐỀ CHUẨN KTKN	CẤP ĐỘ TƯ DUY				CỘNG
	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng	Vận dụng cao	
1. Hoán vị-chỉnh hợp-tổ hợp	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
2. Xác suất của biến cố	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
3. Cấp số cộng	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
4. Hai đường thẳng vuông góc	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
5. Khoảng cách	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
6. Sự đồng biến và nghịch biến của hàm số	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	2
7. Cực trị của hàm số	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 1	3
8. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1

CHỦ ĐỀ CHUẨN KTKN	CẤP ĐỘ TƯ DUY				CỘNG
	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng	Vận dụng cao	
9. Đường tiệm cận	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
10. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	3
11. Hàm số lũy thừa	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
12. Lô-ga-rít	Số câu 1	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	2
13. Hàm số mũ. Hàm số lô-ga-rít	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
14. Phương trình mũ và phương trình lô-ga-rít	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
15. Bất phương trình mũ và lô-ga-rít	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 1	3
16. Nguyên hàm	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	3
17. Tích phân	Số câu 2	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	3
18. Ứng dụng của tích phân	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 1	1
19. Khái niệm số phức	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	2
20. Phép cộng, trừ và nhân số phức	Số câu	Số câu	Số câu	Số câu	

CHỦ ĐỀ CHUẨN KTKN	CẤP ĐỘ TƯ DUY				CỘNG
	Nhận biết	Thông hiểu	Vận dụng	Vận dụng cao	
	1	0	0	0	1
21. Phép chia số phức	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	1
22. Phương trình bậc hai hệ số thực	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	1
23. Cực trị số phức	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 1	1
24. Khái niệm về thể tích của khối đa diện	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	3
25. Khái niệm về mặt tròn xoay	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 1	Số câu 0	2
26. Mặt cầu	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 1	2
27. Hệ tọa độ trong không gian	Số câu 2	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	2
28. Phương trình mặt phẳng	Số câu 1	Số câu 0	Số câu 0	Số câu 0	1
29. Phương trình đường thẳng trong không gian	Số câu 1	Số câu 2	Số câu 1	Số câu 0	4
TỔNG	28	10	8	4	50

B Bảng mô tả chi tiết nội dung câu hỏi

Câu 1 (2D4Y1-1). Xác định các yếu tố cơ bản của số phức

Câu 2 (2H3Y1-3). Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương

đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản)

Câu 3 (2D1Y5-8). Câu hỏi lý thuyết

Câu 4 (2H2Y2-1). Bài toán sử dụng định nghĩa, tính chất, vị trí tương đối

Câu 5 (2D3Y1-1). Định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản

Câu 6 (2D1Y2-2). Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị

Câu 7 (2D2Y6-1). Bất phương trình cơ bản

Câu 8 (2H1Y3-2). Tính thể tích các khối đa diện

Câu 9 (2D2Y2-1). Tập xác định của hàm số chứa hàm lũy thừa

Câu 10 (2D2Y5-1). Phương trình cơ bản

Câu 11 (2D3Y2-1). Định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản

Câu 12 (2D4Y2-1). Thực hiện phép tính

Câu 13 (2H3Y2-2). Xác định VTPT

Câu 14 (2H3Y1-1). Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục

Câu 15 (2D4Y1-2). Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

Câu 16 (2D1Y4-1). Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số (không chứa tham số) hoặc biết BBT, đồ thị

Câu 17 (2D2Y3-2). Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít

Câu 18 (2D1Y5-1). Nhận dạng đồ thị, bảng biến thiên

Câu 19 (2H3Y3-3). Tìm tọa độ điểm liên quan đến đường thẳng

Câu 20 (1D2Y2-1). Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A

Câu 21 (2H1Y3-2). Tính thể tích các khối đa diện

Câu 22 (2D2Y4-2). Tính đạo hàm hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít

Câu 23 (2D1Y1-2). Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị

Câu 24 (2H2Y1-2). Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao,

Câu 25 (2D3Y2-1). Định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản

Câu 26 (1D3Y3-3). Tìm hạng tử trong cấp số cộng

Câu 27 (2D3Y1-1). Định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản

- Câu 28 (2D1Y2-2).** Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị
- Câu 29 (2D1B3-1).** GTLN, GTNN trên đoạn $[a ; b]$
- Câu 30 (2D1B1-1).** Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức
- Câu 31 (2D2B3-2).** Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít
- Câu 32 (1H3B2-3).** Xác định góc giữa hai đường thẳng (dùng định nghĩa)
- Câu 33 (2D3B2-1).** Định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản
- Câu 34 (2H3B3-7).** Bài toán liên quan giữa đường thẳng - mặt phẳng - mặt cầu
- Câu 35 (2D4B3-2).** Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán
- Câu 36 (1H3B5-3).** Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng
- Câu 37 (1D2B5-4).** Tính xác suất bằng công thức nhân
- Câu 38 (2H3B3-2).** Viết phương trình đường thẳng
- Câu 39 (2D2K6-3).** Phương pháp đặt ẩn phụ
- Câu 40 (2D1K5-4).** Sự tương giao của hai đồ thị (liên quan đến tọa độ giao điểm)
- Câu 41 (2D3K1-1).** Định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản
- Câu 42 (2H1K3-4).** Các bài toán khác(góc, khoảng cách,...) liên quan đến thể tích khối đa diện
- Câu 43 (2D4K4-2).** Định lí Viet và ứng dụng
- Câu 44 (2D4G5-1).** Phương pháp hình học tìm cực trị số phức
- Câu 45 (2D3G3-1).** Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị
- Câu 46 (2H3K3-2).** Viết phương trình đường thẳng
- Câu 47 (2H2K1-1).** Thể tích khối nón, khối trụ
- Câu 48 (2D2G6-5).** Phương pháp hàm số, đánh giá
- Câu 49 (2H2G2-6).** Bài toán tổng hợp về khối nón, khối trụ, khối cầu
- Câu 50 (2D1G2-1).** Tìm cực trị của hàm số cho bởi công thức

PHẦN 2: PHÂN TÍCH ĐỀ MINH HỌA BỘ GIÁO DỤC 2022

CÂU 1 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 1. Môđun của số phức $z = 3 - i$ bằng

A. 8.

B. $\sqrt{10}$.

C. 10.

D. $2\sqrt{2}$.

 **Lời giải.**

Ta có $z = 3 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(B)**



PHÂN TÍCH:

- Dạng toán:** Xác định các yếu tố cơ bản của số phức : Mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp.
- Mức độ:** Nhận biết.
- Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết về số phức và các phép toán số phức.
- Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 1

Dạng 1 **Xác định mô-đun, phần thực, phần ảo, số phức liên hợp của số phức**

1. Các kiến thức cơ bản về số phức

- Tập hợp số phức ký hiệu là $\mathbb{C}$.
- Số phức (dạng đại số) là biểu thức có dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.
- z là số thực khi và chỉ khi phần ảo của z bằng 0 ($b = 0$).
- z là số thuần ảo khi và chỉ khi phần thực của z bằng 0 ($a = 0$).
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.
- Hai số phức bằng nhau:** Cho số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$. Khi đó,
$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d. \end{cases}$$

2. Các phép toán về số phức

Cho số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

0.1 Phép cộng hai số phức $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

0.2 Phép trừ hai số phức $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

0.3 Phép nhân hai số phức $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

0.4 Phép chia hai số phức Khi $z_2 \neq 0$ thì

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

0.5 Mô-đun của số phức Mô-đun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ (trong đó $z_2 \neq 0$),
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

0.6 Số phức liên hợp Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là $\bar{z} = a - bi$.

- $\bar{\bar{z}} = z$,
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$,
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ($z_2 \neq 0$),
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

3. Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 1$. Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân là

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

CÂU 2 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 2. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ có bán kính bằng

- A. 3. B. 81. C. 9. D. 6.

 **Lời giải.**

Ta có $R^2 = 9$ nên bán kính mặt cầu $R = 3$.

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Phương trình mặt cầu (xác định tâm, bán kính, viết PT mặt cầu đơn giản, vị trí tương

đối hai mặt cầu, điểm đến mặt cầu, đơn giản).

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình mặt cầu.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 2

Dạng 2 // Phương trình mặt cầu

1. Xác định tâm và bán kính mặt cầu.

- Phương trình mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ bán kính R .
- Phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-a; -b; -c)$, có bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

2. Viết phương trình mặt cầu (S) .

Dạng 1. Biết (S) có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm A .

Bán kính $R = IA = \sqrt{(x_A - a)^2 + (y_A - b)^2 + (z_A - c)^2}$.

Dạng 2. Biết (S) có đường kính AB .

Bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$.

Tâm $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$ là trung điểm AB .

Dạng 3. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Tâm $I(a; b; c)$ là nghiệm hệ phương trình
$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases}$$
. Bán kính $R = IA$.

Dạng 4. Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Tâm $I(a; b; c)$. Bán kính $R = d[I, (\alpha)] = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

CÂU 3 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 3. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$?

A. Điểm $P(-1; -1)$. B. Điểm $N(-1; -2)$. C. Điểm $M(-1; 0)$. D. Điểm $Q(-1; 1)$.

 **Lời giải.**

Thay điểm $M(-1; 0)$ vào hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tìm điểm trên đồ thị của hàm số.
2. **Mức độ:** Nhận biết.
3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về hàm số.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 3

Dạng 3 Tìm điểm trên đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (G) . Khi đó :

$$M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$$

CÂU 4 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 4. Thể tích V của khối cầu bán kính r được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $V = \frac{1}{3}\pi r^3$. B. $V = 2\pi r^3$. C. $V = 4\pi r^3$. D. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

 **Lời giải.**

Thể tích khối cầu có bán kính r là $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Chọn đáp án 

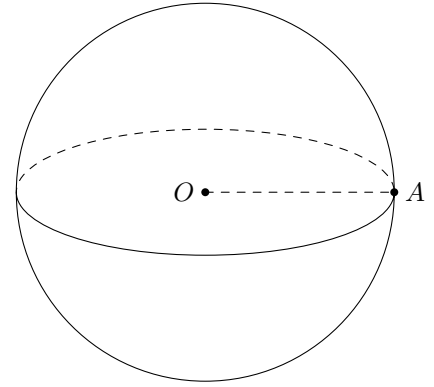
□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Bài toán về mặt cầu: Công thức tính diện tích, thể tích, VTTD giữa mặt cầu với mp, đt.
2. **Mức độ:** Nhận biết.
3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán đếm.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 4

Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là *mặt cầu* tâm O , bán kính R , kí hiệu là $S(O; R)$. Khi đó, $S(O; R) = \{M | OM = R\}$.



1. Vị trí tương đối của một điểm đối với một mặt cầu

Cho mặt cầu tâm O bán kính R và A là một điểm bất kì trong không gian.

- Nếu $OA = R$ thì ta nói điểm A *nằm trên* mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $OA < R$ thì ta nói điểm A *nằm trong* mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $OA > R$ thì ta nói điểm A *nằm ngoài* mặt cầu $S(O; R)$.

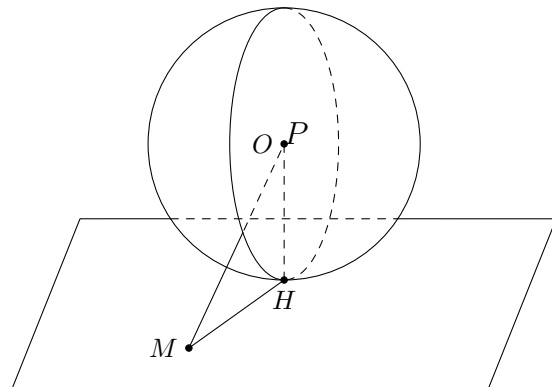
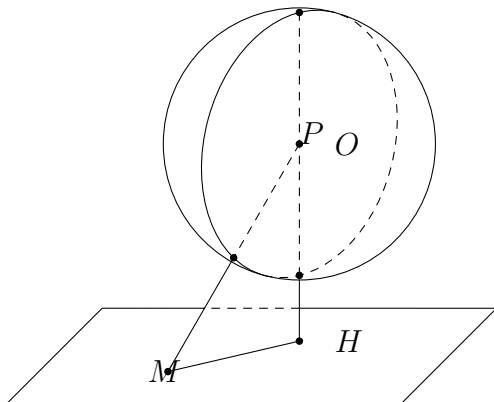
Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O; R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó gọi là *khối cầu* hoặc *hình cầu* tâm O bán kính R .

2. Vị trí tương đối của mặt phẳng đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến mặt phẳng (P) . Ta có:

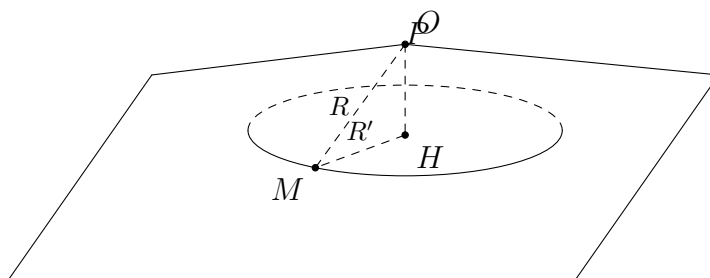
- Nếu $d > R$ thì mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- Nếu $d = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu $S(O; R)$ có một điểm chung duy nhất. Khi đó, ta nói mặt phẳng (P) *tiếp xúc* với mặt cầu $S(O; R)$.

Điểm tiếp xúc gọi là *tiếp điểm*, (P) gọi là *mặt phẳng tiếp xúc* hay *tiếp diện* của mặt cầu.



- Nếu $d < R$ thì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $S(O; R)$ theo một đường tròn bán kính $R' = \sqrt{R^2 - d^2}$. Đặc biệt, khi $d = 0$ thì tâm O thuộc mặt phẳng (P) , giao tuyến của (P) và $S(O; R)$ là đường tròn tâm O bán kính R . Đường tròn này gọi là *đường tròn lớn*.

! Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là (P) vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.



3. Vị trí tương đối của đường thẳng đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi d là khoảng cách O đến đường thẳng Δ . Khi đó,

- $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
- $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc nhau. Do đó, điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $d = R$.

4. Vị trí tương đối của đường thẳng đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi d là khoảng cách O đến đường thẳng Δ . Khi đó,

- $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O; R)$.
- $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
- $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu $S(O; R)$ tiếp xúc nhau. Do đó, điều kiện cần và đủ để Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O; R)$ là $d = R$.

5. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu bán kính R . Khi đó,

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

CÂU 5 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 5. Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{2}} + C.$

 **Lời giải.**

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ là $\int f(x)dx = \int x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C.$

Chọn đáp án **C**



PHÂN TÍCH:

- Dạng toán:** Tính nguyên nguyên hàm bằng đ/n - tính chất và bảng nguyên hàm.
- Mức độ:** Nhận biết.
- Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán nguyên hàm.
- Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 5

Dạng 5 Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa, tính chất, bảng nguyên hàm

1. Định nghĩa nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{K}$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbf{K}$ nếu

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Tính chất của nguyên hàm

- $\int f'(x)dx = f(x) + C.$
- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ với $k \neq 0.$
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

3. Bảng nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

Nguyên hàm cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int 0 dx = C;$ $\int dx = x + C;$ $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1);$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C;$ $\int e^x dx = e^x + C;$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1);$ $\int \cos x dx = \sin x + C;$ $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C;$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1);$ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C;$ $\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{(ax+b)} + C;$ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C, (a \neq 0);$ $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C, (a \neq 0);$ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C, (a \neq 0);$ $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C;$ $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C, (a \neq 0);$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C;$

🎓 CÂU 6 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

🔗 **Lời giải.**

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm nhận thấy $f'(x)$ đổi dấu qua các giá trị $x = -2, x = 0, x = 1, x = 4$. Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Chọn đáp án **C**

□

📖 PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị của hàm số.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị của hàm số.

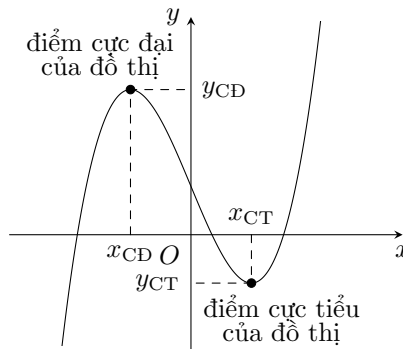
4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

i PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 6

Dạng 6 Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên

Xác định các yếu tố liên quan đến cực trị ở mức độ nhận biết và thông hiểu, dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị.

- Loại 1: Đối với bài toán cho trước bảng biến thiên, ta cần quan sát kỹ các yếu tố sau đây:
 - Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ (+) sang (–) khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số. Từ đó, ta có giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = f(x_0)$.
 - Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ (–) sang (+) khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số. Từ đó, ta có giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = f(x_0)$.
 - Số điểm cực trị của hàm số bằng số nghiệm đơn của phương trình $f'(x) = 0$.
 - Và các em cũng chú ý rằng: hàm số $f(x)$ vẫn có thể đạt cực trị tại các điểm mà $f'(x)$ không xác định nhưng điểm đó phải thuộc tập xác định của hàm số.
- Loại 2: Đối với bài toán cho trước đồ thị, ta cần quan sát kỹ các yếu tố sau:



CÂU 7 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 7. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 6$ là

- A. $(\log_2 6; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; \log_2 6)$.

Lời giải.

Ta có $2^x > 6 \Leftrightarrow x > \log_2 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (\log_2 6; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Giải bất phương trình mũ, logarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số.
2. **Mức độ:** Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về bất phương trình mũ, logarit bằng phương pháp đưa về cùng cơ số.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 7

Dạng 7 Bất phương trình mũ cơ bản

1. Xét bất phương trình dạng $a^x > b$. (dạng $a^x \geq b$ giải tương tự)

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

- Nếu $b > 0$, khi đó

Với $a > 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, ta có $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

2. Xét bất phương trình dạng $a^x \leq b$. (dạng $a^x < b$ giải tương tự)

- Nếu $b \leq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

- Nếu $b > 0$, khi đó

Với $a > 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \leq \log_a b$.

Với $0 < a < 1$, ta có $a^x \leq b \Leftrightarrow x \geq \log_a b$.

3. Với $a > 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.

4. Với $0 < a < 1$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

CÂU 8 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 8. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 7$ và chiều cao $h = 6$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 42.

B. 126.

C. 14.

D. 56.

 Lời giải.

Thể tích của khối chóp $V = \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 7 = 14$.

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính thể tích các khối chóp.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính thể tích khối chóp.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 8

Dạng 8 **Tính thể tích khối chóp**

Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$ với B : diện tích đáy, h : chiều cao.

CÂU 9 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 9. Tập xác định của hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = x^{\sqrt{2}}$ xác định khi và chỉ khi $x > 0$.

Vậy $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa.

2. **Mức độ:** Nhận biết.

3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tập xác định hàm số lũy thừa.

4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 9

Dạng 9 **Hàm số lũy thừa**

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha$, trong đó α là một hằng số tùy ý.

Từ định nghĩa các lũy thừa, ta thấy:

1. Hàm số $y = x^\alpha$ với α nguyên dương, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

2. Hàm số $y = x^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Hàm số $y = x^\alpha$, với α không nguyên, có tập xác định là tập hợp các số thực dương $(0; +\infty)$.

Khi tìm tập xác định của hàm số lũy thừa cần chú ý:

1. Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$ với α nguyên dương, xác định với mọi $u(x) \in \mathbb{R}$.

2. Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ xác định với mọi $u(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Hàm số $y = [u(x)]^\alpha$, với α không nguyên, xác định khi $u(x) > 0$

CÂU 10 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 10. Nghiệm của phương trình $\log_2(x+4) = 3$ là

A. $x = 5$.

B. $x = 4$.

C. $x = 2$.

D. $x = 12$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \log_2(x+4) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 > 0 \\ x+4 = 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **(B)**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Phương trình mũ-Phương trình logarit cơ bản.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán giải pt mũ và pt logarit cơ bản.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 10

Dạng 10 **Phương trình mũ-Phương trình logarit cơ bản**

1. Các công thức cần dùng để giải phương trình, bất phương trình logarit

Cho các số dương a, b, c, b_1, b_2 và $a \neq 1$. Số thực α .

$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1$	$\log_a(a^\alpha) = \alpha; \quad a^{\log_a b} = b$
$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a b_2$	$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2;$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$
$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b; \log_a a^\alpha = \alpha$ $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b \quad (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (c \neq 1);$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (b \neq 1)$
$\log_a [f(x)]^\alpha = \alpha \log_a f(x) $ nếu α chẵn	$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \quad (\alpha \neq 0)$

2. Phương trình mũ - PT logarit cơ bản

- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ (với $0 < a \neq 1, b > 0$).
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (với $0 < a \neq 1$).
- $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ với ($a > 0, a \neq 1$).
- $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$
- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ (} g(x) > 0 \text{)} \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

CÂU 11 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 11. Nếu $\int_2^5 f(x) dx = 3$ và $\int_2^5 g(x) dx = -2$ thì $\int_2^5 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

A. 5. B. -5. C. 1. D. 3.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_2^5 [f(x) + g(x)] dx = \int_2^5 f(x) dx + \int_2^5 g(x) dx = 3 + (-2) = 1.$$

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

- Dạng toán:** Tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất tích phân.
- Mức độ:** Nhận biết.
- Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất.
- Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 11

Dạng 11 Tính tích phân bằng định nghĩa và tính chất tích phân

1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

Vậy $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

2. Tính chất tích phân xác định

Tính chất của tích phân xác định.

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ với $a < c < b$.
- $k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx$ với $(k \neq 0)$.
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$.
- $\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

CÂU 12 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 12. Cho số phức $z = 3 - 2i$, khi đó $2z$ bằng

- A. $6 - 2i$. B. $6 - 4i$. C. $3 - 4i$. D. $-6 + 4i$.

 **Lời giải.**

Ta có $2z = 2(3 - 2i) = 6 - 4i$.

Chọn đáp án **(B)**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán của số phức.
2. **Mức độ:** Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán của số phức.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 12

Dạng 12 Xác định các yếu tố cơ bản số phức qua các phép toán

- 1. Khái niệm số phức** Số phức (dạng đại số) $z = a + bi$. Trong đó $a, b \in \mathbb{R}$; a là phần thực, b là phần ảo.
- 2. Hai số phức bằng nhau** Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = c + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$). Khi đó $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$.
Cho hai số phức $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $z_2 = d + di$ ($c, d \in \mathbb{R}$).
- 3. Phép cộng số phức** Khi đó $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$; $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.
- 4. Phép trừ hai số phức** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
- 5. Phép nhân hai số phức** $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- 6. Phép chia hai số phức** Khi $z_2 \neq 0$ thì
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$
- 7. Số phức liên hợp** Số phức liên hợp của $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là $\bar{z} = a - bi$.
- 8. Mô đun của số phức** Với $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ta có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} & \bullet |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, & \bullet ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \\ & \bullet \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{trong đó } z_2 \neq 0), & \bullet ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \end{aligned}$$

CÂU 13 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 13. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A. $\vec{n}_4 = (-1; 2; -3)$. B. $\vec{n}_3 = (-3; 4; -1)$. C. $\vec{n}_2 = (2; -3; 4)$. D. $\vec{n}_1 = (2; 3; 4)$.

 **Lời giải.**

Mặt phẳng $(P) : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2; -3; 4)$.

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tìm VTPT của mặt phẳng.

2. **Mức độ:** Nhận biết.

3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình mặt phẳng.

4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 13

Dạng 13 Tìm VTPT của mặt phẳng

1. Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) trong không gian có dạng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.
2. Nếu phương trình mặt phẳng (P) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ thì một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n} = (A; B; C)$.
3. Nếu mặt phẳng (P) vuông góc với giá của véc-tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ thì véc-tơ $\vec{n}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
4. Nếu mặt phẳng (P) song song hoặc chứa giá của hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ thì véc-tơ $[\vec{a}, \vec{b}]$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
5. Nếu mặt phẳng đi qua điểm $M(a; b; c)$ và nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ là một véc-tơ pháp tuyến thì phương trình của mặt phẳng là $A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$.

CÂU 14 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Tọa độ của vectơ $\vec{u} - \vec{v}$ là

A. $(3; 4; -3)$.

B. $(-1; 2; -3)$.

C. $(-1; 2; -1)$.

D. $(1; -2; 1)$.

 **Lời giải.**

Ta có $\vec{u} - \vec{v} = (-1; 2; -1)$.

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục $Oxyz$.

2. **Mức độ:** Nhận biết.

3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tìm tọa độ điểm, véc-tơ liên quan đến hệ trục $Oxyz$.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 14

Dạng 14 Tìm tọa độ điểm-Tọa độ vec-tơ liên quan đến hệ tọa độ $Oxyz$

1. Tọa độ vec-tơ Cho $\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Định lí: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.

2. $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

3. Hai vec-tơ bằng nhau $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3. \end{cases}$

4. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

5. Mô-đun (độ dài) vec-tơ: $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

6. Tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Suy ra: $\begin{cases} \bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0 \\ \bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \end{cases}$

2. Tọa độ điểm

$$M(a; b; c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a; b; c).$$

 $\begin{cases} M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0 \\ M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0. \end{cases}$

Định lí: Cho hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$, $B = (x_B; y_B; z_B)$.

1. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

2. Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.

3. Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$.

4. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$, khi đó tọa độ điểm G là $G \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right)$.

CÂU 15 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 15. Trên mặt phẳng tọa độ, cho $M(2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức z . Phần thực của z bằng

- A. 2. B. 3. C. -3. D. -2.

Lời giải.

Vì $M(2; 3)$ là điểm biểu diễn của số phức z nên $z = 2 + 3i$.

Vậy phần thực của số phức z là 2.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

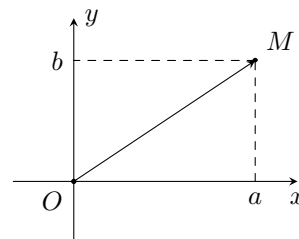
1. **Dạng toán:** Biểu diễn hình học của số phức.
2. **Mức độ:** Nhận biết.
3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về số phức.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 15

Dạng 15 // Biểu diễn hình học của số phức

Biểu diễn hình học số phức

Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ hay bởi $\vec{u} = (a; b)$ trong mặt phẳng phức (mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy).



CÂU 16 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 16. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x + 2}{x - 2}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x = 2$. B. $x = -1$. C. $x = 3$. D. $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{3x + 2}{x - 2} = \pm\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Bài toán xác định các đường tiệm cận của hàm số (không chứa tham số) hoặc biết BBT,

đồ thị.

2. Mức độ: Nhận biết.

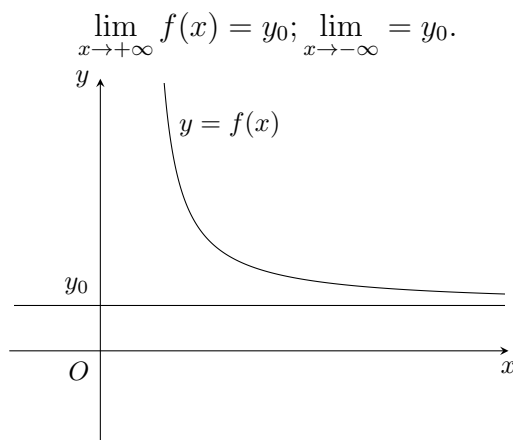
3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 16

Dạng 16 // **Tiệm cận của đồ thị hàm số**

1. **Đường tiệm cận ngang:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn



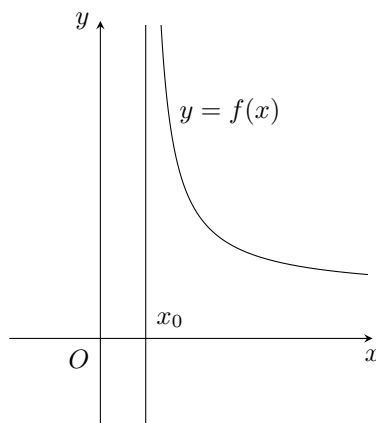
2. **Đường tiệm cận đứng:** Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$



3. Hướng giải:

B1. Tìm tập xác định của hàm số.

B2. Tính giới hạn của hàm số tại vô cực để tìm tiệm cận ngang.

B3. Tính giới hạn của hàm số tại các điểm hàm số không xác định để tìm tiệm cận đứng.

Nếu $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm phân thức hữu tỉ.

- Nếu x_0 thỏa mãn $\begin{cases} Q(x_0) = 0 \\ P(x_0) \neq 0 \end{cases}$ thì đồ thị có tiệm cận đứng là $x = x_0$.
- Nếu bậc của $P(x) \leq$ bậc của $Q(x)$ thì đồ thị có tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có TCD : $x = -\frac{d}{c}$ và TCN : $y = \frac{a}{c}$.

CÂU 17 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 17. Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{a}{2}$ bằng

A. $\frac{1}{2} \log_2 a$.

B. $\log_2 a + 1$.

C. $\log_2 a - 1$.

D. $\log_2 a - 2$.

 **Lời giải.**

Ta có $\log_2 \frac{a}{2} = \log_2 a - \log_2 2 = \log_2 a - 1$.

Chọn đáp án **C**



PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Biến đổi, rút gọn biểu thức có chứa logarit.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về logarit.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 17

Dạng 17 **Biến đổi, rút gọn biểu thức có chứa logarit**

1. Định nghĩa:

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. Các tính chất:

Cho $a, b > 0, a \neq 1$, ta có:

- $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.
- $a^{\log_a b} = b, \log_a (a^\alpha) = \alpha$.

3. Các quy tắc:

- Lôgarit của một tích: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, Ta có

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

- Lôgarit của một thương: Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, Ta có

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1, \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

- Lôgarit của lũy thừa: Cho $a, b > 0$ với $a \neq 1$, với mọi α , ta có

$$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.

- Công thức đổi cơ số: Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_a^\alpha b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.



CÂU 18 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 18.

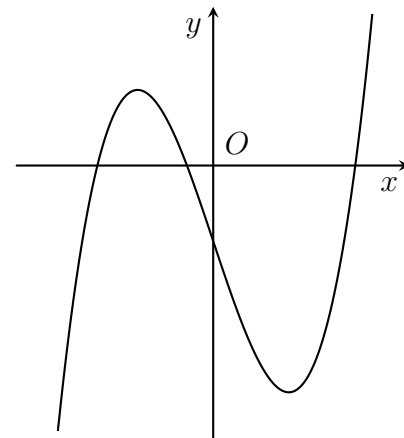
Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?

A. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = x^3 - 3x - 1$.

D. $y = x^2 + x - 1$.



Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy rằng đường cong ở hình vẽ là đồ thị của hàm số bậc ba, do đó ta chọn được hàm số $y = x^3 - 3x - 1$.

Chọn đáp án **C**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Nhận dạng đồ thị hay BBT của hàm số.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về khảo sát hàm số.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 18

Dạng 18 // Nhận dạng đồ thị hay BBT của hàm số

Để nhận dạng đồ thị hàm số ta làm như sau:

- Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra hàm số bậc 3, bậc 4 hay phân thức. Nếu hàm số bậc 3, bậc 4 dấu hệ số a .
- Giao điểm của đồ thị với hai trục tọa độ.
- Cực trị của hàm số (hay TCD-TCN).

1. Nhận dạng đối với đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

- Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra dấu của hệ số a .

Ta thấy $\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow \text{nhánh phải của đồ thị đi lên} \\ a < 0 \Leftrightarrow \text{nhánh phải của đồ thị đi xuống} \end{cases}$.

- Giao điểm của đồ thị và trục tung: $x = 0$ suy ra $y = d$.
- Cực trị và điểm uốn

– $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0$

- Xét dấu b dùng $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a}$ suy ra dấu b .
- Xét dấu c dùng $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$ suy ra dấu c .

- Tìm điểm thuộc đồ thị.

2. Nhận dạng đối với đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a \neq 0$).

- Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra dấu của hệ số a .

Ta thấy $\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow \text{nhánh phải của đồ thị đi lên} \\ a < 0 \Leftrightarrow \text{nhánh phải của đồ thị đi xuống} \end{cases}$.

- Giao điểm của đồ thị và trục tung : $x = 0$ suy ra $y = c$
- Nếu $ab < 0$ đồ thị có 3 cực trị và $ab \geq 0$ đồ thị có một cực trị.
- Tìm điểm thuộc đồ thị.

3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

- Tìm tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = -\frac{a}{c}$.
- $ad - bc > 0$ hàm số đồng biến, $ad - bc < 0$ hàm số nghịch biến.
- Tìm điểm thuộc đồ thị.
- Giao điểm của đồ thị và trục hoành là $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, giao điểm của đồ thị và trục tung là $\left(0; \frac{b}{d}\right)$ với $d \neq 0$.

CÂU 19 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 19. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A. Điểm $Q(2; 2; 3)$. B. Điểm $N(2; -2; -3)$. C. Điểm $M(1; 2; -3)$. D. Điểm $P(1; 2; 3)$.

 **Lời giải.**

Dễ thấy rằng đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(1; 2; -3)$.

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

- Dạng toán:** Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng.
- Mức độ:** Nhận biết.
- Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về phương trình đường thẳng.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

i PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 19

Dạng 19 // Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng.

1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

$$\text{Tọa độ trung điểm } I \text{ của đoạn thẳng } AB, I \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC, G \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$$

2. $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

3. $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ cùng phương với $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$, $(\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases}$.

4. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B thì Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}$ hoặc $\overrightarrow{BA}$.

5. Nếu $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u} (k \neq 0)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của Δ . Do đó một đường thẳng có vô số véc-tơ chỉ phương.

6. Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì véc-tơ chỉ phương của đường thẳng này cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng kia.

7. Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) thì véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta$ của đường thẳng Δ chính là véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(\alpha)}$ của mặt phẳng (α) , tức là $\vec{u}_\Delta = \vec{n}_{(\alpha)}$.

8. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ có phương

trình tham số là $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ và phương trình chính tắc là $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (abc \neq 0)$.

9. Điểm M thuộc đường thẳng Δ có PTTS $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ thì $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

10. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Với điều kiện $A : B : C \neq A' : B' : C'$ thì hai mặt phẳng đó cắt nhau. Gọi d là giao tuyến của chúng. Đường thẳng d gồm những điểm $M(x; y; z)$ vừa thuộc (α) vừa thuộc (α') nên tọa độ của

M là nghiệm của hệ $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$. Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ và $\vec{n}' = (A'; B'; C')$. Khi đó

$\vec{u}_d = [\vec{n}, \vec{n}']$ là một véc-tơ chỉ phương của d .

11. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Ox là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

12. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oy là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

13. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oz là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

14. Tìm hai vectơ không cùng phương và có giá mỗi vectơ vuông góc với đường thẳng d là $\vec{a}, \vec{b}$. Khi đó $\vec{u}_d = [\vec{a}, \vec{b}]$ là một véc-tơ chỉ phương của d .

CÂU 20 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 20. Với n là số nguyên dương, công thức nào dưới đây **đúng**?

A. $P_n = n!$.

B. $P_n = n - 1$.

C. $P_n = (n - 1)!$.

D. $P_n = n$.

 **Lời giải.**

Số hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A.

2. **Mức độ:** Nhận biết.

3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán đếm.

4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

Dạng 20 // **Tổ hợp-Chỉnh hợp-Hoán vị**

1. Quy tắc cộng

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

- Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

2. Quy tắc nhân

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m \cdot n$ cách hoàn thành công việc.

3. Hoán vị

- **Hoán vị là gì?**

Cho tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một hoán vị các phần tử của tập A .

- **Số các hoán vị**

Số các hoán vị của một tập hợp có n phần tử là

$$P_n = n! = n(n-1) \cdots 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n.$$

! Ta có $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)n = (n-3)!(n-2)(n-1)n = (n-2)!(n-1)n$.

4. Chỉnh hợp

- **Chỉnh hợp là gì?**

Cho tập A gồm n phần tử và số nguyên k , với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A .

- **Số các chỉnh hợp**

Số các chỉnh hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

! Với $0 < k < n$, ta có thể viết $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

• Qui ước $0! = 1$, $A_n^0 = 1$ thì $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ cũng đúng với $0 \leq k \leq n$. Khi $k = n$ thì $A_n^n = P_n = n!$.

5. Tổ hợp

• Tổ hợp là gì?

Cho tập A có n phần tử và số nguyên k ($1 \leq k \leq n$). Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A .

• Số các tổ hợp

Số các tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$



- Qui ước $0! = 1$, $C_n^0 = 1$ thì $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$ cũng đúng với $0 \leq k \leq n$. Ta có $C_n^k \cdot k! = A_n^k$.
- Với $0 \leq k \leq n$, ta có thể viết $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.



CÂU 21 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 21. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h . Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = \frac{1}{3}Bh$.

B. $V = \frac{4}{3}Bh$.

C. $V = 6Bh$.

D. $V = Bh$.

Lời giải.

Thể tích V của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = B \cdot h$.

Chọn đáp án **(D)**



PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Thể tích khối lăng trụ.

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán tính thể tích khối lăng trụ.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:



PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 21

Dạng 21 Tính thể tích khối lăng trụ

1. Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}Bh$ với B : diện tích đáy, h : chiều cao.
2. Thể tích khối lăng trụ: $V = Bh$ với B : diện tích đáy, h : chiều cao.
3. Thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là $V = abc$.
4. Thể tích của khối lập phương có cạnh bằng a là $V = a^3$.

CÂU 22 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 22. Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là

A. $y' = \frac{1}{x \ln 2}$.

B. $y' = \frac{\ln 2}{x}$.

C. $y' = \frac{1}{x}$.

D. $y' = \frac{1}{2x}$.

 **Lời giải.**

Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là $y' = \frac{1}{x \ln 2}$.

Chọn đáp án **A**



PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tính đạo hàm hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít.
2. **Mức độ:** Nhận biết.
3. **Định hướng ôn tập:** Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về hàm số mũ và hàm số logarit.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 22

Dạng 22 Tính đạo hàm hàm số mũ-logarit

- Công thức đạo hàm

Đạo hàm của hàm số thường gặp	Đạo hàm của hàm số hợp
$(C)' = 0$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sin u)' = u' \cos u$ $(\cos u)' = -u' \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$	$\left(\frac{au+b}{cu+d}\right)' = \frac{ad-cb}{(cu+d)^2} \cdot u'$
$\left(\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}\right)' = \frac{am.x^2+2an.x+bn-cm}{(mx+n)^2}$	
$\left(\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ n & p \end{vmatrix}}{(mx^2+nx+p)^2}$	
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^u)' = u'e^u$ $(a^u)' = u'a^u \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

- Quy tắc tính đạo hàm

Quy tắc tính đạo hàm		
$(u+v)' = u' + v'$	$(uv)' = u'v + v'u$	$(ku)' = ku' \ (k: \text{hằng số})$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(f[u(x)])' = f'[u(x)] \cdot u'(x)$



CÂU 23 ĐỀ MINH HỌA

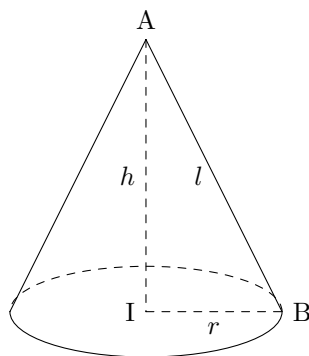
CÂU 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính thể tích khối nón, khối trụ.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

i PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 24

Dạng 24 Câu hỏi lý thuyết về khối nón-khối trụ



- Chiều cao: h .
- Độ dài đường sinh: l .
- Bán kính đường tròn đáy: r .
- Góc ở đỉnh: 2α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

1. Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón

$$l^2 = h^2 + R^2.$$

2. Hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác Cho $\triangle ABI$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông AI thì đường gấp khúc ABI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

- Đường thẳng AI được gọi là trục, A là đỉnh, AI được gọi là đường cao và AB được gọi là đường sinh của hình nón.
- Hình tròn tâm I , bán kính $r = IB$ là đáy của hình nón.

3. Công thức diện tích của hình nón và thể tích của khối nón

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$.
- Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_d$.
- Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi \cdot r^2$.
- Thể tích khối nón:

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \cdot S_d \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

4. Thiết diện của hình nón (N) khi cắt bởi mặt phẳng (P)

- (P) đi qua đỉnh của hình nón (N) :
 - Nếu (P) tiếp xúc với mặt nón (N) theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi (P) là mặt phẳng tiết diện của mặt nón.
 - Nếu (P) cắt mặt nón (N) theo hai đường sinh $\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân.
 - Đặc biệt: Nếu (P) đi qua trục của mặt nón $(N) \Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân có cạnh bên l và cạnh đáy $2r$.
- (P) không đi qua đỉnh của hình nón (N) :
 - Nếu (P) vuông góc với trục hoành hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường tròn.
 - Nếu (P) song song với hai nhánh của một hypebol.
 - Nếu (P) song song với một đường sinh hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường parabol.

5. Công thức tính độ dài cung tròn có số đo a° , bán kính R

$$l = \frac{\pi R a}{180}.$$

6. Tính chất $\triangle ABC$ đều cạnh a

- Độ dài đường cao, đường trung tuyến $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Diện tích tam giác $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

7. Hình trụ tròn xoay

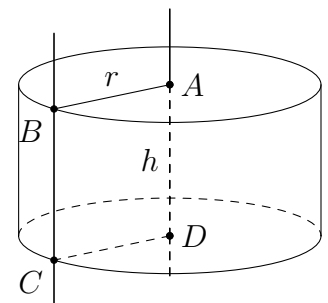
Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AD thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

Đường thẳng AD được gọi là trục.

Đoạn thẳng BC được gọi là đường sinh.

Độ dài đoạn thẳng $AD = DC = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ. Hình tròn tâm A , bán kính $r = AB$ và hình tròn tâm D , bán kính $r = DC$ được gọi là hai đáy của hình trụ

Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.



8. Công thức tính diện tích của hình trụ và thể tích của khối trụ:

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r .

- Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$.

- Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_m = S_{xq} + 2 \cdot S_{\text{đáy}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- Thể tích khối trụ: $V = B \cdot h = \pi r^2 h$.

CÂU 25 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 25. Nếu $\int_2^5 f(x)dx = 2$ thì $\int_2^5 3f(x)dx$ bằng

- A. 6. B. 3. C. 18. D. 2.

 **Lời giải.**

Ta có $\int_2^5 3f(x)dx = 3 \cdot 2 = 6$.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

- 1. Dạng toán:** Tính tích phân bằng định nghĩa, tính chất.
- 2. Mức độ:** Nhận biết.
- 3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tích phân bằng định nghĩa và tính chất.
- 4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 25

Dạng 25 Tính tích phân bằng tính chất của tích phân

1. Định nghĩa tích phân

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$. Kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

$$\text{Vậy } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

2. Tính chất tích phân xác định

$$1. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b.$$

$$2. k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b k f(x) dx \text{ với } (k \neq 0).$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

$$6. \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

CÂU 26 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 26. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_2 bằng

A. 11.

B. 3.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 28.

 **Lời giải.**

Ta có $u_2 = u_1 + d = 7 + 4 = 11$.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Cấp số cộng -Cấp số nhân .

2. Mức độ: Nhận biết.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về CSC-CSN.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 26

Dạng 26 // **Cấp số cộng-Cấp số nhân**

1. Cấp số cộng

(a) Định nghĩa

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d , ta có $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) **Số hạng tổng quát**

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$ với $n \geq 2$.

(c) **Tính chất**

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ với $k \geq 2$.

(d) **Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng**

Cho cấp số cộng (u_n) . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}.$$

2. Cấp số nhân

(a) **Định nghĩa**

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q , ta có $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) **Số hạng tổng quát**

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \geq 2$.

(c) **Tính chất**

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$ với $k \geq 2$.

(d) **Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân**

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

(e) **Cấp số nhân lùi vô hạn**

- Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội q sao cho $|q| < 1$.
- Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: Cho (u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có công bội q . Khi đó tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

CÂU 27 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 27. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $\int f(x)dx = x - \cos x + C.$

B. $\int f(x)dx = x + \sin x + C.$

$$\text{C. } \int f(x)dx = x + \cos x + C.$$

$$\text{D. } \int f(x)dx = \cos x + C.$$

✎ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int f(x)dx = x - \cos x + C.$$

Chọn đáp án **A**

□

📖 PHÂN TÍCH:

- 1. Dạng toán:** Tính nguyên hàm bằng định nghĩa, tính chất và nguyên hàm cơ bản.
- 2. Mức độ:** Nhận biết.
- 3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về định nghĩa và tính chất nguyên hàm.
- 4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

📌 PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 27

📌 Dạng 27 // Tính nguyên hàm bằng định nghĩa, tính chất và bảng nguyên hàm

- 1. Định nghĩa nguyên hàm** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x) \forall x \in K$.
- 2. Tính chất nguyên hàm**
 - $\int f'(x) dx = f(x) + C.$
 - $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với $k \neq 0.$
 - $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$
- 3. Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp**

Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng
① $\int 0dx = C$	$\int kdx = k \cdot x + C$
② $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
③ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C$
④ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$
⑤ $\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
⑥ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax+b + C$

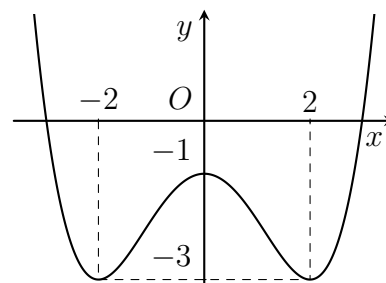
⑦ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax + b) + C$
⑧ $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
⑨ $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
⑩ $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$

🎓 CÂU 28 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 28.

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 0. B. -1. C. -3. D. 2.



🔍 Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng -1.

Chọn đáp án **(B)**



📖 PHÂN TÍCH:

- Dạng toán:** Tìm cực trị dựa vào BBT, đồ thị của hàm số.
- Mức độ:** Nhận biết.
- Định hướng ôn tập:** Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị của hàm số.
- Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

📁 PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 28

📁 Dạng 28 // Tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên

Xác định các yếu tố liên quan đến cực trị ở mức độ nhận biết và thông hiểu, dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị.

- Loại 1: Đối với bài toán cho trước bảng biến thiên, ta cần quan sát kỹ các yếu tố sau đây:
 - Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ (+) sang (-) khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

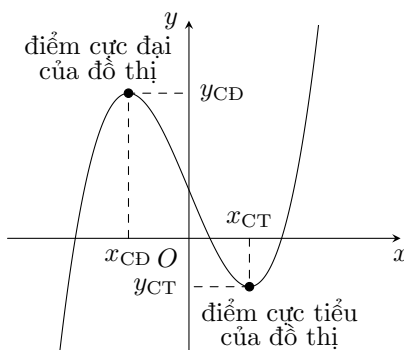
Từ đó, ta có giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = f(x_0)$.

– Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi x đi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Từ đó, ta có giá trị cực tiểu của hàm số là $y_{CT} = f(x_0)$.

– Và các em cũng chú ý rằng: hàm số $f(x)$ vẫn có thể đạt cực trị tại các điểm mà $f'(x)$ không xác định nhưng thuộc tập xác định của hàm số.

- Loại 2: Đối với bài toán cho trước đồ thị, ta cần quan sát kỹ các yếu tố sau:



CÂU 29 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 29. Trên đoạn $[1; 5]$, hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = 5$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 4$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

- $f(1) = 1 + \frac{4}{1} = 5$.

- $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$.

- $f(5) = 5 + \frac{4}{5} = \frac{29}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 4 tại điểm $x = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[a; b]$.

2. **Mức độ:** Thông hiểu.

3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tìm GTLN-GTNN của hàm số trên đoạn $[a; b]$.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 29

Dạng 29 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn

- Bước 1
- Nhận xét hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.
 - Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên khoảng $(a; b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2 Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)$.

Bước 3 Khi đó

- $\max_{[a;b]} f(x) = \max\{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)\}.$
- $\min_{[a;b]} f(x) = \min\{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(b)\}.$

CÂU 30 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 30. Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^3 - x.$

B. $y = -x^4 - x^2.$

C. $y = -x^3 + x.$

D. $y = \frac{x+2}{x-1}.$

 Lời giải.

Ta thấy hàm số $y = -x^3 - x$ có

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}.$
- $y' = -3x^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Vậy hàm số $y = -x^3 - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}.$

Chọn đáp án 

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Xét tính đơn điệu của hàm số cho bởi công thức.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về đơn điệu của hàm số.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 30

Dạng 30 // // // **Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số cho bởi công thức**

- Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
- Tính y' . Tìm các điểm thuộc $\mathcal{D}$ mà tại đó $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathcal{K}$.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc $\mathcal{K}$ thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathcal{K}$.

 CÂU 31 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 31. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a - 3 \log_2 b = 2$, khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A. $a = 4b^3$. B. $a = 3b + 4$. C. $a = 3b + 2$. D. $a = \frac{4}{b^3}$.

 **Lời giải.**

Ta có $\log_2 a - 3 \log_2 b = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{b^3} = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b^3} = 2^2 \Leftrightarrow a = 4b^3$.

Chọn đáp án **A**

□

 PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Biến đổi, rút gọn, biểu diễn biểu thức chứa lô-ga-rít.
2. **Mức độ:** Thông hiểu.
3. **Định hướng ôn tập:** Học cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về logarit.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

 PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 31

Dạng 31 // // // **Tính giá trị biểu thức có chứa logarit**

1. **Định nghĩa**

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là *lô-ga-rít cơ số a của b* và kí hiệu là $\log_a b$. Ta viết: $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

2. **Các tính chất** Cho $a, b > 0$ với $a \neq 1$, ta có

(a) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.

(b) $a^{\log_a b} = b, \log_a(a^\alpha) = \alpha$.

3. **Lôgarit của một tích** Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

(a) $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.

4. **Lôgarit của một thương** Cho 3 số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$(a) \log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

$$(b) \text{Đặc biệt: với } a, b > 0, a \neq 1 \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b.$$

5. **Lôgarit của lũy thừa** Cho $a, b > 0$ và $a \neq 1$, với mọi α , ta có

$$(a) \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.$$

$$(b) \text{Đặc biệt: } \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

6. **Công thức đổi cơ số** Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

$$(a) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

$$(b) \text{Đặc biệt: } \log_a c = \frac{1}{\log_c a} \text{ và } \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b \text{ với } \alpha \neq 0.$$

7. **Lôgarit thập phân và Lôgarit tự nhiên**

(a) Lôgarit thập phân là lô-ga-rít cơ số 10. Ta viết: $\log_{10} b = \log b = \lg b$.

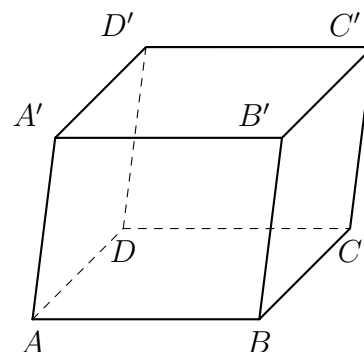
(b) Lôgarit tự nhiên là lô-ga-rít cơ số e . Ta viết: $\log_e b = \ln b$.

CÂU 32 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 32.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình bên). Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .



Lời giải.

$A'C' \perp BD$ nên góc giữa $A'C'$ và BD bằng 90° .

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Xác định góc giữa đường thẳng và đường thẳng, mặt phẳng và đường thẳng, hai mp.

2. **Mức độ:** Thông hiểu.

3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về xác định góc giữa mặt phẳng và đường thẳng; mặt phẳng và mp, đường thẳng và đường thẳng.

4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

Dạng 32 // // // **Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**

1. Góc giữa hai đường thẳng

PP1. Dùng định nghĩa : Tìm hai đường thẳng a', b' cắt nhau và lần lượt song song với a và b . Khi đó $(\widehat{a, a}) = (\widehat{a', b'})$

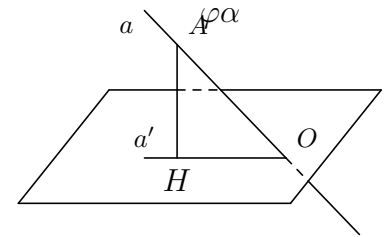
PP2. Sử dụng định lý hàm số cô-sin hoặc tỉ số lượng giác.

PP3. Sử dụng tích vô hướng: Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì góc φ của hai đường thẳng này được xác định bởi công thức

$$\cos \varphi = |\cos (\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

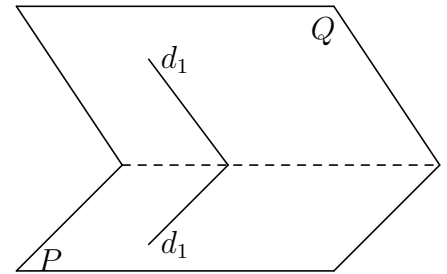
2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Muốn xác định góc của đường thẳng a và (P) ta tìm hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) . Khi đó $(\widehat{a, (P)}) = (\widehat{a, a'})$.



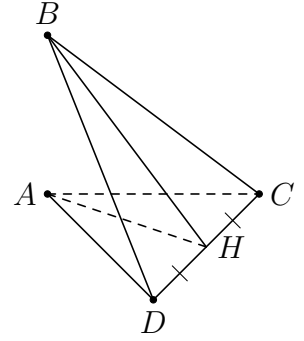
3. Góc giữa hai mặt phẳng

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.

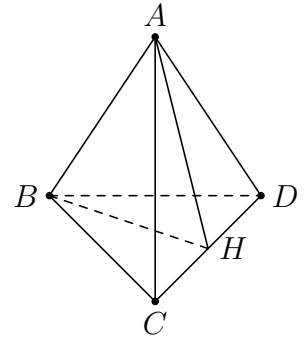


Những trường hợp đặc biệt dễ hay xảy ra:

- Trường hợp 1:** Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD , thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



2. **Trường hợp 2:** Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD . Đặt $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



3. **Trường hợp 3:** Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng khó quá, ta nên sử dụng công thức sau:

$$\sin \varphi = \frac{d(A, mp(Q))}{d(A, a)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) , A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

4. **Trường hợp 4:** Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S \cdot \cos \varphi$.
5. **Trường hợp 5:** Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d' .
6. **Trường hợp 6:** Cách xác định góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy
- (a) Bước 1: Xác định giao tuyến d .
 - (b) Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp d$
 - (c) Bước 3: Góc cần tìm là góc $\widehat{SHA}$.

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

7. Sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian Chọn hệ trục thích hợp và cụ thể hóa tọa độ các điểm.

- Giả sử đường thẳng a và b lần lượt có VTCP là $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó

$$\cos(\widehat{a,b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \widehat{a,b}.$$

- Giả sử đường thẳng a có VTCP là $\vec{a}$ và (P) có VTPT là $\vec{n}$ thì khi đó

$$\sin(\widehat{a,(P)}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} \Rightarrow \widehat{a,(P)}.$$

- Giả sử mặt phẳng (α) và (β) lần lượt có VTPT là $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó

$$\cos(\widehat{(\alpha),(\beta)}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \widehat{(\alpha),(\beta)}.$$

CÂU 33 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 33. Nếu $\int_1^3 f(x)dx = 2$ thì $\int_1^3 [f(x) + 2x]dx$ bằng

A. 20.

B. 10.

C. 18.

D. 12.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \int_1^3 [f(x) + 2x]dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 2x dx = 2 + x^2 \Big|_1^3 = 2 + (3^2 - 1^2) = 10.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính tích phân bằng định nghĩa, tính chất và tích phân cơ bản.

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tích phân cơ bản.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 33

$$1. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ với } a < c < b.$$

$$2. k \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kf(x) dx \text{ với } (k \neq 0).$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz.$$

$$6. \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

CÂU 34 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 34. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

A. $2x - 5y + 3z - 38 = 0.$

B. $2x + 4y - z + 19 = 0.$

C. $2x + 4y - z - 19 = 0.$

D. $2x + 4y - z + 11 = 0.$

Lời giải.

Véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{a} = (2; 4; -1).$

Phương trình mặt phẳng đi qua $M(2; -5; 3)$ nhận $\vec{a}$ làm vec-tơ pháp tuyến là

$$2(x - 2) + 4(y + 5) - (z - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - z + 19 = 0.$$

Chọn đáp án **B**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Viết phương trình mặt phẳng

2. Mức độ: Thông hiểu.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán viết phương trình mặt phẳng.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

Dạng 34 // **Viết phương trình mặt phẳng**

1. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến (VTPT) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α) .
- *Chú ý:*
 - Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là một VTPT của mặt phẳng (α) .
 - Một mặt phẳng được xác định duy nhất nếu biết một điểm nó đi qua và một VTPT của nó.
 - Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (α) .

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n} (k \neq 0)$ cũng là một VTPT của mặt phẳng (α) .
- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

- Trong không gian $Oxyz$, mọi mặt phẳng đều có phương trình dạng:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

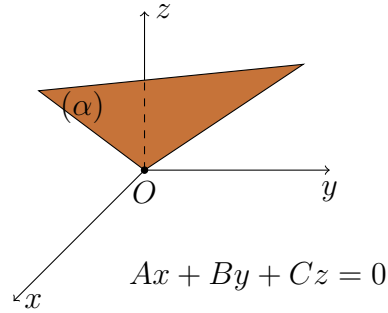
- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

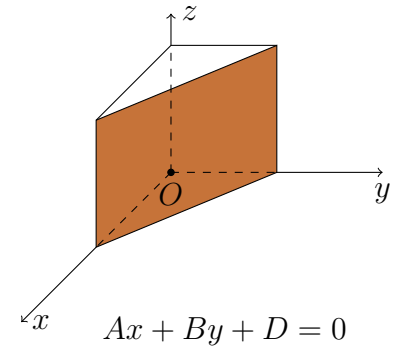
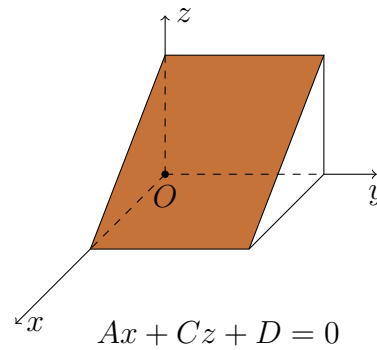
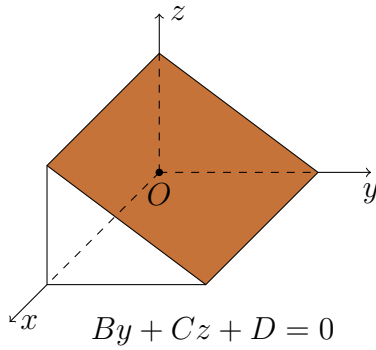
- *Các trường hợp riêng:*

Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

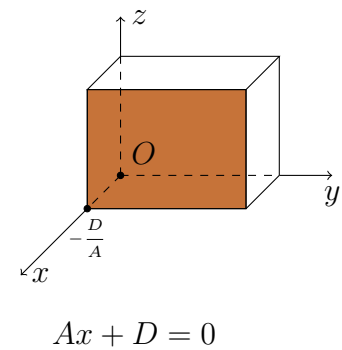
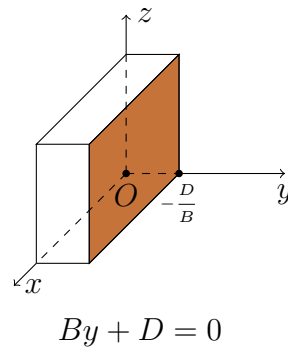
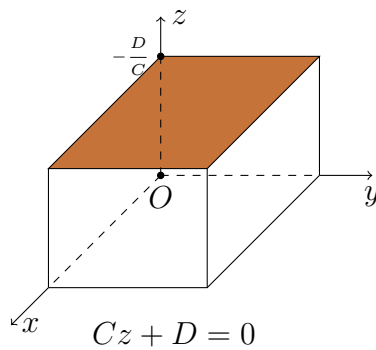
- Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O .



- Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox .
- Nếu $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy .
- Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz .



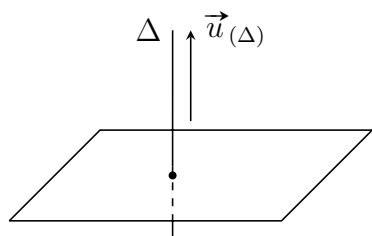
- Nếu $A = B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy) .
- Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz) .
- Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz) .



Chú ý:

- Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.
- Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn (α) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

- Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b; c)$ làm véc-tơ chỉ phương. Khi đó phương trình tham số của đường thẳng Δ có dạng
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \text{ tham số } t \in \mathbb{R}.$$
- Mặt phẳng (P) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A, B, C)$.
- Cho mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{(\Delta)}$:



Khi đó mặt phẳng (P) nhận $\vec{u}_{(\Delta)}$ làm một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_{(\Delta)}$.

- Nếu có hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ không cùng phương và có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P) thì (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

3.PP viết phương trình tổng quát của mặt phẳng

PP1. Tìm một điểm và một VTPT của mp (P) .

- Tìm 1 điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (P)$.
- Tìm một VTPT của mp (P) là $\vec{n} = (A, B, C)$.
- Pt mp (P) là $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

PP2. Thiếu điểm đi qua hay thiếu VTPT.

- Pt mp (P) có dạng : $Ax + By + Cz + D = 0$.
- Từ điều kiện bài toán ta xác định các hệ số A, B, C, D

CÂU 35 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 35. Cho số phức z thỏa mãn $i\bar{z} = 5 + 2i$. Phần ảo của z bằng

- A. 5. B. 2. C. -5. D. -2.

 **Lời giải.**

Ta có $\bar{z} = \frac{5 + 2i}{i} = 2 - 5i$.

Suy ra $z = 2 + 5i$, do đó phần ảo của z là 5.

Chọn đáp án **(A)**

□

PHÂN TÍCH:

- 1. Dạng toán:** Thực hiện phép tính cộng, trừ, nhân, chia hai số phức.
- 2. Mức độ:** Thông hiểu.
- 3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về các phép toán của số phức.
- 4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 35

Dạng 35 // Thực hiện các phép toán về số phức: Cộng-trừ-nhân-chia

Cho số phức $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$.

- 1. Phép cộng hai số phức:** $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
- 2. Phép trừ hai số phức:** $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
- 3. Phép nhân hai số phức:** $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.
- 4. Phép chia hai số phức:** Khi $z_2 \neq 0$ thì

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

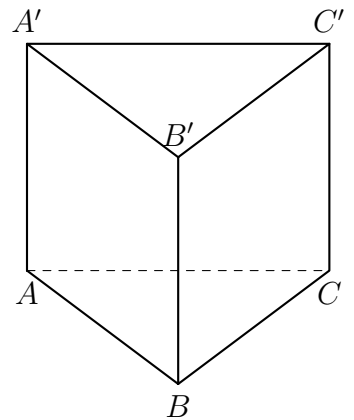
- 5. Phương trình bậc 1 trên C:** $(a + bi)z = c + di \Leftrightarrow z = \frac{c + di}{a + bi}$

CÂU 36 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 36.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = 4$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. 4.



Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABB'A').$$

Suy ra $d(C, (ABB'A')) = CB$.

Mà $\triangle ABC$ vuông cân tại B nên $CB = AB = 4$.

Vậy $d(C, (ABB'A')) = CB = 4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

PHÂN TÍCH:

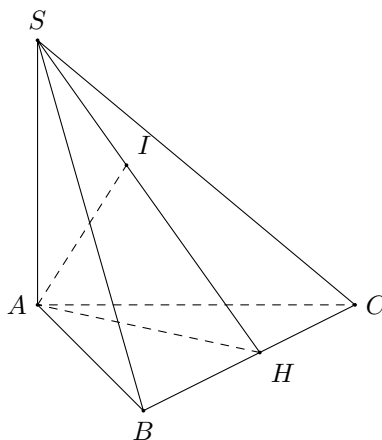
- 1. Dạng toán:** Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- 2. Mức độ:** Vận dụng.
- 3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.
- 4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 36

Dạng 36 // Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Bài toán 1. Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên

Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.



- Bước 1.** Xác định giao tuyến Δ .
- Bước 2.** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- Bước 3.** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI .

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

- Bước 4.** $AI = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}}$

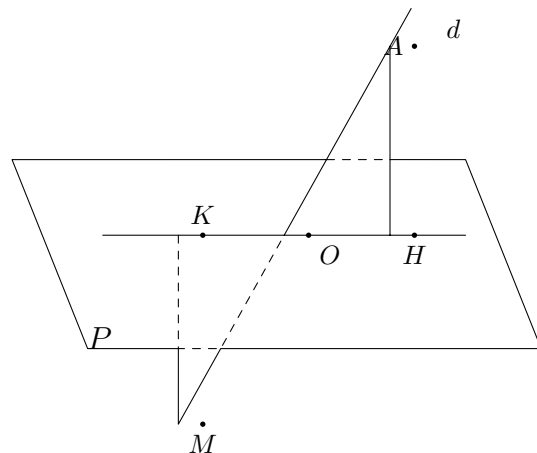
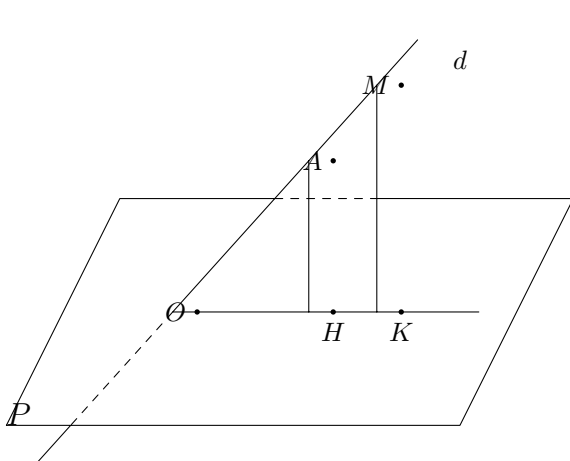
Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kì đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa

vào công thức của Bài toán 2.

Bài toán 2. Tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Thường sử dụng công thức sau:



Công thức tính tỉ lệ khoảng cách $\frac{d(M, \text{mp}(P))}{d(A, \text{mp}(P))} = \frac{MO}{AO}$.

Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

Phương pháp phải tìm một đường thẳng d qua M và chứa một điểm A mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P) . Kinh nghiệm thường điểm A là hình chiếu của đỉnh.

CÂU 37 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 37. Từ một hộp chứa 16 quả cầu gồm 7 quả màu đỏ và 9 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời hai quả. Xác suất để lấy được hai quả có màu khác nhau bằng

A. $\frac{7}{40}$.

B. $\frac{21}{40}$.

C. $\frac{3}{10}$.

D. $\frac{2}{15}$.

 **Lời giải.**

Gọi A là biến cố “chọn được hai quả màu khác nhau”

Chọn 2 quả từ 16 quả nên không gian mẫu $|n_\Omega| = C_{12}^2$

- Chọn 1 quả đỏ từ 7 quả đỏ có C_7^1 cách.
- Chọn 1 quả xanh từ 9 quả xanh có C_9^1 cách.

Vậy số cách chọn là $C_7^1 \cdot C_9^1 = 63$.

Xác suất biến cố A là $P = \frac{63}{C_{12}^2} = \frac{21}{40}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tính xác suất bằng định nghĩa.
2. **Mức độ:** Thông hiểu.
3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về xác suất.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 37

Dạng 37 **Tính xác suất của biến cố**

1. Tính số phần tử không gian mẫu $n(\Omega)$.
2. Tính số phần tử của biến cố A là $n(A)$.
3. Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

CÂU 38 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 38. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -2; 3)$, $B(1; 3; 4)$ và $C(3; -1; 5)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

C. $\frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{9}$.

B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{1}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{1}$.

 **Lời giải.**

$\overrightarrow{BC} = (2; -4; 1)$. Đường thẳng đi qua A song song với BC nên nhận $\overrightarrow{BC}$ làm một vectơ chỉ phương.
Phương trình đường thẳng là $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{1}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Viết phương trình đường thẳng trong không gian.
2. **Mức độ:** Thông hiểu.
3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về viết PT đường thẳng.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 38

1. Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng d .
2. Tìm một vec-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (a; b; c)$. (Cách tìm VTCP của đường thẳng).
 - (a) Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B , khi đó vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ là một chỉ phương của (d) .
 - (b) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (l) , khi đó vec-tơ chỉ phương của (l) cũng là một chỉ phương của (d) .
 - (c) Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (α) , khi đó vec-tơ pháp tuyến của (α) là một chỉ phương của (d) .
 - (d) Đường thẳng (d) là giao tuyến của $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, mặt phẳng $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ chỉ phương của (d) , $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$
 - (e) Đường thẳng (d) đi qua điểm M và vuông góc hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$. Khi đó ta gọi $\vec{u}$ là một vec-tơ chỉ phương của (d) thì
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$$
 với $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là chỉ phương của $(d_1), (d_2)$ nên ta chọn $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.
 - (f) Đường thẳng d đi qua điểm M , cắt và vuông góc với một đường thẳng d_1 cho trước. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d_1 cho trước. Dựa vào điều kiện $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_l = 0$ ta tìm được H . Khi đó $\overrightarrow{MH}$ là VTCP cần tìm.
 - (g) Đường thẳng đi qua điểm M , vuông góc với (d_1) và cắt (d_2) . Gọi K là giao điểm của (d) và (d_2) . Ta có $MK \perp (d_1)$ nên $\overrightarrow{MK} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$, từ đó ta tìm được vec-tơ $\overrightarrow{MK}$ chính là chỉ phương của (d) .
 - (h) Đường thẳng d đi qua điểm M cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) . Gọi (a) là mặt phẳng chứa (d_1) và đi qua điểm M , (b) là mặt phẳng chứa (d_2) và đi qua điểm M . Khi đó đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (a) và (b) là đường thẳng (d) cần tìm.
 - (i) Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$. Ta cần tìm điểm M là giao điểm của (P) và (d_1) , điểm N là giao điểm của (P) và (d_2) . Khi đó đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, N là đường thẳng cần tìm.

3. PTTS của d là
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 trong đó t là tham số.

! Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ là $d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ với $abc \neq 0$.

CÂU 39 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 39. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64) \sqrt{2 - \log(4x)} \geq 0$?

A. 22.

B. 25.

C. 23.

D. 24.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 4x > 0 \\ 2 - \log(4x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{10}(4x) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4x \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 25.$$

Vì $\sqrt{2 - \log(4x)} \geq 0$ nên bất phương trình đề bài đã cho tương đương với

$$4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 64 \geq 0 \Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 4 \\ 2^x \geq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

So lại với điều kiện xác định, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0; 2] \cup [4; 25]$.

Vậy có 22 số nguyên x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bất phương trình mũ-logarit- Phương pháp đặt ẩn phụ

2. Mức độ: Vận dụng thấp.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về Bất phương trình mũ-logarit- Phương pháp đặt ẩn phụ.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

Dạng 39 // Bất phương trình mũ - Logarit- BPT tích

- Lập bảng xét dấu.
- Dựa vào chiều BPT chọn giá trị x thích hợp.

CÂU 40 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			1		-5		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f'(f(x)) = 0$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Ta có

$$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Với $f(x) = -1$, đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$. Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt, suy ra phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Với $f(x) = 2$, đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$. Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại một điểm duy nhất, suy ra phương trình $f(x) = 2$ có 1 nghiệm thực (nghiệm này khác 3 nghiệm của phương trình $f(x) = 1$).

Vậy phương trình $f'(f(x)) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án **(B)**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Sự tương giao của hai đồ thị hàm số.

2. Mức độ: Vận dụng.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về sự tương giao của hai đồ thị hàm số.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 40

Dạng 40 Sự tương giao của hai đồ thị hàm số

– Bảng đạo hàm các hàm số cơ bản

Hàm x	Hàm hợp
1. $c' = 0$ 2. $x' = 1$	
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} (n \in \mathbb{N}; n > 1)$	4. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' (n \in \mathbb{N}; n > 1)$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0$	6. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \forall u > 0$
7. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$	8. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \forall u \neq 0$
9. $(k \cdot x)' = k$	10. $(k \cdot u)' = k \cdot u'$
11. $(\cos x)' = -\sin x$	12. $(\cos u)' = -u' \sin u$
13. $(\sin x)' = \cos x$	14. $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$

15. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	16. $(\tan u)' = \frac{u}{\cos^2 u}$
17. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18. $(\cot u)' = -\frac{u}{\sin^2 u}$

Đạo hàm của hàm hợp: $y = f(u(x)) \Rightarrow y' = u'(x) \cdot f'(u(x))$.

1. Phương trình $f(x) = m$

- Ta có $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = m$. ($y = m$ là đường thẳng song song hoặc trùng trục hoành Ox)
- Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = m$.
- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra số nghiệm phương trình $f(x) = m$.

2. Phương trình $f(x) = g(x)$

- Ta có $f(x) = g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
- Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.
- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra số nghiệm phương trình $f(x) = g(x)$.

Dạng toán 1: Tìm số nghiệm thực của phương trình $f[u(x)] = b$.

Hướng giải:

- B1.** Đặt $t = u(x)$ thay vào phương trình $f[u(x)] = b$ chuyển về phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(t)$ và $y = b$.
- B2.** Dựa vào đồ thị $y = f(t)$ (chính là đồ thị hàm số $y = f(x)$ cho trước bằng cách đổi vai trò x thành t) suy ra giá trị t .
- B3.** Dựa vào đồ thị hàm số $t = u(x)$ suy ra giá trị của x . Chọn đáp án.

Dạng toán 2: Tìm tham số m để phương trình $f[u(x)] = h(m)$ có n nghiệm.

Hướng giải:

- B1.** Đặt $t = u(x)$ thay vào phương trình $f[u(x)] = h(m)$ chuyển về phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(t)$ và $y = h(m)$.
- B2.** Dựa vào đồ thị $y = f(t)$ (chính là đồ thị hàm số $y = f(x)$ cho trước bằng cách đổi vai trò x thành t) suy ra giá trị t .
- B3.** Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(t)$ suy ra giá trị m cần tìm. Chọn đáp án.

CÂU 41 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

- A. -3 . B. 1 . C. 2 . D. 7 .

Lời giải.

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = 4x^3 + 2x + C_1$. Vì $f(1) = 3$ nên $C_1 = -3$.

Khi đó $f(x) = 4x^3 + 2x - 3$.

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = x^4 + x^2 - 3x + C_2$. Vì $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2$.

Khi đó $F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.

Vậy $F(1) = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Tìm nguyên hàm của hàm số thỏa điều kiện cho trước.
2. **Mức độ:** Vận dụng.
3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về nguyên hàm.
4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 41

Dạng 41 // Tìm nguyên hàm của hàm số thỏa điều kiện cho trước

1. $\int f'(x) dx = f(x) + C$

2. $\int f''(x) dx = f'(x) + C$

- Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó ta có $F(x) = \int f(x) dx$.
- Tìm hằng số C dựa vào một dữ kiện đề bài cho.

CÂU 42 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 42. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{16\sqrt{2}}{3}a^3$. B. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $16a^3$. D. $\frac{16}{3}a^3$.

Lời giải.

Ta có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Mặt khác $AB \parallel CD$ nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d qua điểm S và song song với AB, CD .

Gọi O là tâm hình vuông suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm AB , J là trung điểm CD . Khi đó

- $SI \perp AB \Rightarrow SI \perp d$.
- $SJ \perp CD \Rightarrow SJ \perp d$.

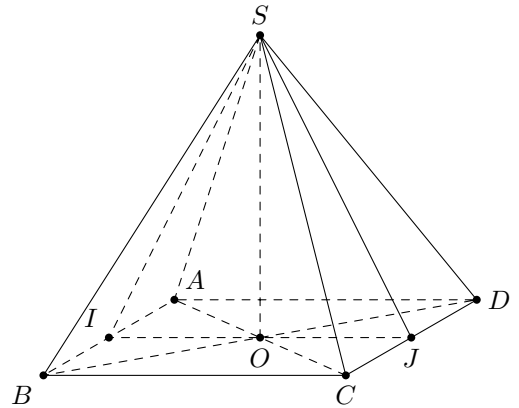
Suy ra góc giữa (SAB) và (SCD) là $\widehat{ISJ} = 90^\circ$

Ta có $AD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}a$.

Vì $\triangle ISJ$ vuông tại S nên $SO = \frac{1}{2}IJ = \frac{1}{2}AD = \sqrt{2}a$.

Thể tích $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a \cdot 8a^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a^3$.

Chọn đáp án (B)



PHÂN TÍCH:

- Dạng toán:** Tính thể tích các khối đa diện.
- Mức độ:** Vận dụng thấp.
- Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về thể tích khối đa diện.
- Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 42

Dạng 42 // // // Thể tích khối chóp-khối lăng trụ liên quan đến khoảng cách, góc.

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$.
- Công thức tính thể tích khối lăng trụ $V = S \cdot h$, trong đó S là diện tích đáy, h là chiều cao.
- Tính diện tích đáy S ta cần nhớ các công thức tính diện tích của tam giác và tứ giác thường gặp.
- Tính chiều cao h ta phải xác định được hình chiếu của đỉnh hình chóp (hay lăng trụ) trên mặt phẳng đáy.

1 Góc giữa hai mặt phẳng

là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Tính chất: Từ định nghĩa trên ta có

- Góc giữa 2 mặt phẳng song song bằng 0° .
- Góc giữa 2 mặt phẳng trùng nhau bằng 0° .

2 Phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng

Để có thể xác định chính xác góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) ta có thể áp dụng một trong những cách sau

- **Cách 1:** Dựng hai đường thẳng a và b vuông góc lần lượt với hai mặt phẳng (P) , (Q) . Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b .
- **Cách 2:** Xác định giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Tiếp theo, ta tìm một mặt phẳng (R) vuông góc với giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (P) , (Q) và cắt hai mặt phẳng đó tại các giao tuyến a , b . Khi đó, góc giữa hai mặt phẳng (P) , (Q) là góc giữa a và b .

Phương pháp:

- Xác định đường cao của hình chóp hoặc lăng trụ.
- Xác định các loại góc (nếu có).
- Tính diện tích đáy và độ dài đường cao.
- Áp dụng công thức thể tích khối chóp hay khối lăng trụ.

Chú ý các dạng sau:

- Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy.
- Khối chóp có một mặt phẳng chứa đỉnh vuông góc với đáy.
- Khối chóp có hai mặt phẳng chứa đỉnh vuông góc với đáy.
- Khối chóp đều.
- Khối chóp có hình chiếu của đỉnh trùng với một điểm đặc biệt nằm trong mặt đáy.
- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy.
- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng và có đáy là đa giác đều.
- Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương là hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông.

CÂU 43 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2mz + 8m - 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$?

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

 **Lời giải.**

Ta có $\Delta' = m^2 - 8m + 12$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực. Khi đó, $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$ (thỏa mãn).
- Nếu $\Delta' < 0$, thì phương trình có hai nghiệm phức. Khi đó, là hai số phức liên hợp nên ta luôn có $|z_1| = |z_2|$ hay $m^2 - 8m + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$ luôn thỏa mãn.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)**

□

PHÂN TÍCH:

- 1. Dạng toán:** Giải pt bậc 2 trên tập C và các bài toán liên quan.
- 2. Mức độ:** Vận dụng thấp.
- 3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về pt bậc 2 trên C và định lý Vi-et.
- 4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 43

Dạng 43 **Xác định các yếu tố cơ bản của số phức qua các phép toán hay Bài toán qui về phương trình, hệ phương trình nghiệm thực-PT bậc**

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}, \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

- Biểu diễn số phức cần tìm $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Biến đổi thu gọn phương trình của bài toán về dạng $A + Bi = C + Di$.
- Giải hệ phương trình $\begin{cases} A = C \\ B = D. \end{cases}$

Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = \frac{-b}{2a}$.
- Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

- **Định lí Vi-et:** Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phức x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

1. Số phức $z = a + bi$ được gọi là số phức thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực $a = 0$.

z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo $b = 0$.

! 2. Khi bài toán yêu cầu tìm các thuộc tính của số phức (phần thực, phần ảo, mô-đun hoặc số phức liên hợp) mà đề bài cho giả thiết chứa hai thành phần trong ba thành phần $z, \bar{z}, |z|$ thì ta sẽ gọi số phức $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi, |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b \in \mathbb{R}$, rồi sau đó thu gọn và sử dụng kết quả hai số phức bằng nhau, giải hệ.

CÂU 44 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 44. Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z sao cho số phức $w = \frac{1}{|z| - z}$ có phần thực bằng $\frac{1}{8}$. Xét các số phức $z_1, z_2 \in S$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2$, giá trị lớn nhất của $P = |z_1 - 5i|^2 - |z_2 - 5i|^2$ bằng

A. 16.

B. 20.

C. 10.

D. 32.

 **Lời giải.**

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), điều kiện $|z| - z \neq 0$ (*); $z_1 = x_1 + y_1i$; $z_2 = x_2 + y_2i$.

$$\text{Ta có } w = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - yi} = \frac{(\sqrt{x^2 + y^2} - x) + yi}{(\sqrt{x^2 + y^2} - x)^2 + y^2}.$$

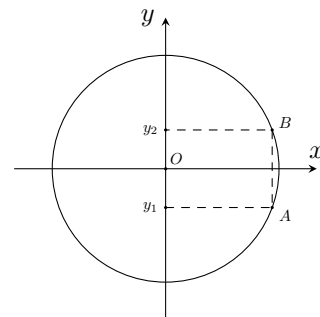
Theo đề, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2(x^2 + y^2) - 2x\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{1}{8} \\ \Leftrightarrow 8(\sqrt{x^2 + y^2} - x) &= 2x^2 + 2y^2 - 2x\sqrt{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow 4(\sqrt{x^2 + y^2} - x) &= \sqrt{x^2 + y^2}(\sqrt{x^2 + y^2} - x) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} - x)(\sqrt{x^2 + y^2} - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Trường hợp 1: $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (không thỏa mãn điều kiện).

Trường hợp 2: $\sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 16$ và $x_2^2 + y_2^2 = 16$.



Ta có $|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (y_1 - y_2)^2 = 4 - (x_1 - x_2)^2$.

Khi đó $P = x_1^2 + (y_1 - 5)^2 - x_2^2 - (y_2 - 5)^2 = -10 \cdot (y_1 - y_2) \leq 10 |y_1 - y_2| = 10 \cdot \sqrt{4 - (x_1 - x_2)^2} \leq 20$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ và $|y_1 - y_2| = 2$.

Vậy $\max P = 20$.

Chọn đáp án **A**

□

PHÂN TÍCH:

1. **Dạng toán:** Cực trị trong số phức.

2. **Mức độ:** Vận dụng.

3. **Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị trong số phức.

4. **Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 44

Dạng 44 // Min- Max của số phức

• $-1 \leq \sin t \leq 1, -1 \leq \cos t \leq 1$ và $a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t + \alpha)$.

• Bất đẳng thức Cô-si : $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, (với $a, b \geq 0$). Dấu = xảy ra khi $a = b$

• Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng 1: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

• $a \sin t + b \cos t \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{\sin t}{a} = \frac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

• $a \sin t + b \cos t \geq -\sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)} = -\sqrt{a^2 + b^2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{\sin t}{a} = \frac{\cos t}{b} \\ a \sin t + b \cos t = -\sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$

1. Dạng 1 : Sử dụng phương pháp lượng giác hóa

Đối với nhóm bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức là một đường tròn thì việc lượng giác hóa tỏ ra khá hiệu quả và nhanh chóng.

Giả sử có được giả thiết $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x - a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{R}\right)^2 = 1$, sẽ gọi ta đến

công thức $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ nên ta đặt $\begin{cases} \frac{x-a}{R} = \sin t \\ \frac{y-b}{R} = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R \sin t + a \\ y = R \cos t + b \end{cases}$ để đưa bài toán về dạng lượng giác quen thuộc. Ngoài ra, ta cần nhớ những đánh giá thường được sử dụng: phần chú ý

2. Dạng 2 : Sử dụng bình phương vô hướng

Đối với một số bài toán tìm max, min việc sử dụng bình phương vô hướng để tìm điểm rơi nhằm áp dụng bất đẳng thức: $|ax + by| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

Ta cần nhớ bình phương vô hướng: $|\vec{u} \pm \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3. Dạng 3 : Sử dụng hình chiếu và tương giao

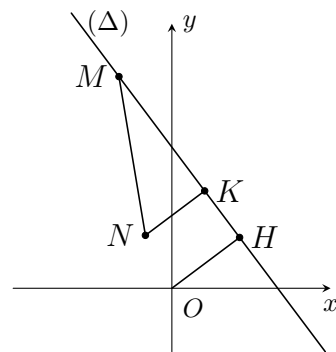
Cho đường thẳng $(\Delta): ax + by + c = 0$ và điểm $M \in (\Delta)$. Điểm $N \notin (\Delta)$ thì NM nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv K$ với K là hình chiếu của N trên (Δ) .

- $\min |z| = OH = d_{[O,(\Delta)]} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Khi đó $M \equiv H$ và $H = (\Delta) \cap OH$.

- $\min |z - (x_N + y_N i)| = NK = d_{N,(\Delta)} = \frac{|ax_N + by_N + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Khi đó $M \equiv K$ và $K = (\Delta) \cap NK$.



Cho tập hợp các điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(a; b)$ và bán kính R .

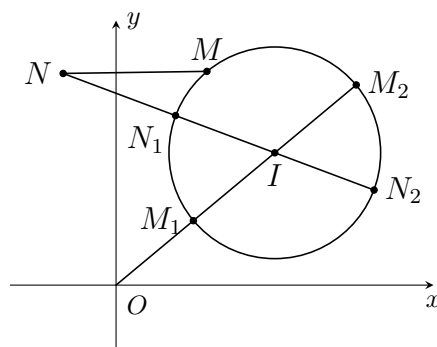
Gọi N là điểm biểu diễn số phức z' . Khi đó

- $\begin{cases} \min |z| = \min OM = OM_1 = |OI - R| \\ \max |z| = \max OM = OM_2 = OI + R. \end{cases}$

Khi đó $OI \cap (\mathcal{C}) = \{M_1; M_2\}$.

- $\begin{cases} \min |z - z'| = \min MN = NN_1 = |NI - R| \\ \max |z - z'| = \max MN = NN_2 = NI + R. \end{cases}$

Khi đó $NI \cap (\mathcal{C}) = \{N_1; N_2\}$.



4. Dạng 4 : Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1. Hằng Thức Mô Đun

- $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$ với $m, n \in \mathbb{R}$ và $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right]$ với $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ với z_1, z_2 là các số phức khác 0.

2. Bất đẳng thức Mô-Đun

- $|z + z_1| + |z + z_2| \geq |z_1 - z_2|$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} z + z_1 = k[(z + z_1) + (-z - z_2)] \\ z + z_2 = k[(z + z_2) + (-z - z_1)] \\ z + z_1 = k(z + z_2); (z + z_2 \neq 0; k \in \mathbb{R}; k \geq 0) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}; k \in [0; 1])$$

- $||z + z_1| - |z + z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} z + z_1 = k[(z + z_1) + (-z - z_2)] \\ z + z_2 = k[(-z - z_1) + (z + z_2)] \\ z + z_1 = k(z + z_2); (z + z_2 \neq 0; k \in \mathbb{R}; k \leq 0) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}, k \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty))$$

3. Kiến thức cần chuẩn bị:

1. Hằng thức Môđun:

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$) môđun của z ký hiệu là $|z|$ và $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}; |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}; |z| = |\bar{z}|; |z^n| = |z|^n (n \in \mathbb{N}^*)$.
- $|mz_1 + nz_2|^2 = m^2 |z_1|^2 + n^2 |z_2|^2 + mn(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$ với $m, n \in \mathbb{R}$ và $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z + z_1|^2 + |z + z_2|^2 = 2 \left[\left| z + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| \frac{z_1 - z_2}{2} \right|^2 \right]$ với $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- $|z_1 + z_2| = \left| \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1 + \frac{|z_1|}{|z_2|} z_2 \right|$ với z_1, z_2 là các số phức khác 0.

2. Bất đẳng thức thường dùng

- Bất đẳng thức tam giác ở dạng môđun $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0 : z_1 = kz_2 \end{cases}$$

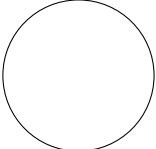
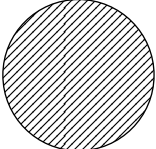
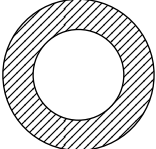
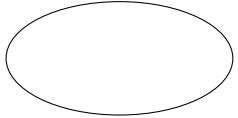
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_2 = 0 \\ z_2 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0 : z_1 = kz_2 \end{cases}$
- Bất đẳng thức Bunhiacopxky $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

Dạng 46 // Sử dụng biểu diễn hình học của số phức đưa về các bài toán cực trị

quen thuộc

1. Các quỹ tích cơ bản

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $i^2 = -1$.

Mối liên hệ giữa x và y		Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$
☒ $Ax + By + C = 0$.		Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$.
☒ $MA = MB$. Dạng số phức $ z - a - bi = z - c - di $.		Là đường trung trực của đoạn AB .
☒ $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0. \end{cases}$ Dạng số phức $ z - a - bi = R$.		Là đường tròn (C) có tâm $I(0; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
☒ $\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0. \end{cases}$ Dạng số phức $ z - a - bi \leq R$.		Là hình tròn (C) có tâm $I(0; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ (đường tròn kể cả bên trong).
☒ $R_1^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R_2^2$. Dạng số phức $R_1 \leq z - a - bi \leq R_2$.		Là những điểm thuộc hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt là R_1 và R_2 .
☒ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a. \end{cases}$ Dạng số phức $ z - c + z + c = 2a$.		Là một elip có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự là $2c$ với $a^2 = b^2 + c^2$, ($0 < b < a$).

2. Một số kết quả quan trọng cần nhớ:

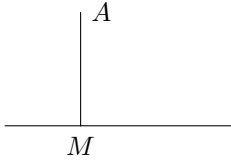
Gọi điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0i$ lần lượt là M, A .

Khi đó $|z - z_0| = |(x - x_0) + (y - y_0)i| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = MA$.

Một số bất đẳng thức hình học thường dùng:

1. Cho M di động trên đường thẳng Δ , A là điểm cố định.

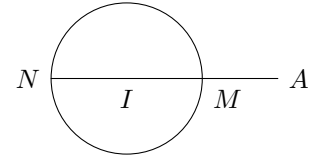
$MA \geq d(A; \Delta)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $AM \perp \Delta$.



2. Cho M di động trên đường tròn $(I; R)$, A là điểm cố định.

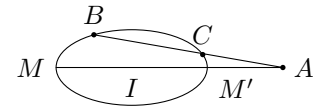
$MA \leq AI + R$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \uparrow \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow M \equiv N$.

$MA \geq |AI - R|$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IM}$.



3. Cho M di động trên Elip (E) có trục lớn Δ , độ dài $2a$, tâm I , A là điểm cố định trên trục lớn. $MA \leq AI + a$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \uparrow \overrightarrow{IM}$.

$MA \geq |AI - a|$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IM}$.

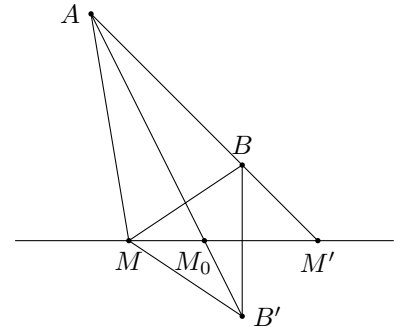


4. Cho M di động trên đường thẳng Δ , A, B là hai điểm cố định khác phía với Δ .

$MA + MB \geq AB$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB \cap \Delta$.

5. Cho M di động trên đường thẳng Δ và A, B là hai điểm cố định cùng phía với Δ .

$MA + MB \geq AB'$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB' \cap \Delta$ trong đó B' đối xứng với B qua Δ .



6. Cho M di động trên đường thẳng Δ , A, B là hai điểm cố định cùng phía với Δ .

$|MA - MB| \leq AB$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB \cap \Delta$

7. Cho M di động trên đường thẳng Δ và A, B là hai điểm cố định khác phía với Δ .

$|MA - MB| \leq AB'$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow M = AB' \cap \Delta$ trong đó B' đối xứng với B qua Δ .

CÂU 45 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 45. Cho hàm số $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có ba điểm cực trị là $-2, -1$ và 1 . Gọi $y = g(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f(x)$ và $y = g(x)$ bằng

A. $\frac{500}{81}$.

B. $\frac{36}{5}$.

C. $\frac{2932}{405}$.

D. $\frac{2948}{405}$.

☞ **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$. (1)

Mặt khác, vì $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn và có ba điểm cực trị $-2, -1, 1$ nên suy ra

$$f'(x) = 12(x+3)(x+1)(x-1) = 12(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 3a = 24 \\ 2b = -12 \\ c = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -6 \\ c = -24. \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + d$.

• **Cách 1:**

Ta có $f(x) = f'(x) \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{6} \right) - 7x^2 - 16x + d + 4$.

Khi đó đồ thị đi qua ba điểm cực trị của $f(x)$ là $g(x) = -7x^2 - 16x + d + 4$.

Do đó ta có

$$S = \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 |3x^4 + 8x^3 + x^2 - 8x - 4| dx = \frac{2948}{405}.$$

• **Cách 2:**

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f(x), g(x)$ là $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$.

Nhận xét rằng $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc bốn và theo giả thiết, phương trình trên có 3 nghiệm $-2, -1, 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= 3(x^2 - 1)(x + 2)(mx + n) \\ &= (3x^3 + 6x^2 - 3x - 6)(mx + n) \\ &= 3mx^4 + 3nx^3 + 6mx^3 + 6nx^2 - 3mx^2 - 3nx - 6mx - 6n \\ &= 3mx^4 + 3(n + 2m)x^3 + 3(2n - m)x^2 - 3(n + 2m)x - 6n. \end{aligned}$$

Vì $f(x)$ là hàm số bậc bốn và $g(x)$ là hàm số bậc hai, nên ta có thể đồng nhất hệ số bậc 4 và bậc 3 của $f(x)$ và $f(x) - g(x)$. Suy ra $m = 1$ và $n = \frac{2}{3}$.

Khi đó $f(x) - g(x) = (x + 2)(x^2 - 1)(3x + 2)$.

Do đó

$$S = \int_{-2}^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_{-2}^1 |(x + 2)(x^2 - 1)(3x + 2)| dx = \frac{2948}{405}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Tính diện tích hình phẳng.

2. Mức độ: Vận dụng cao.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về tính diện tích hình phẳng.

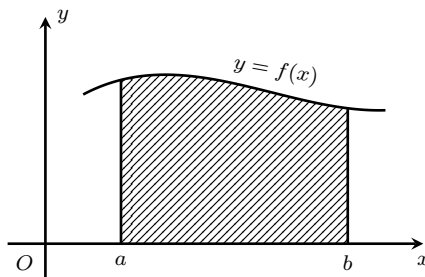
4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

i PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 45

Dạng 47 Tính diện tích hình phẳng

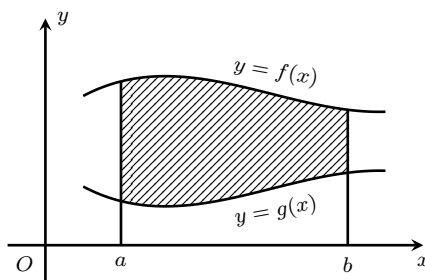
1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$



2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$



3. Để phá bỏ trị tuyệt đối ta dựa vào đồ thị để bỏ giá trị tuyệt đối.

4. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi đồ thị $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quay quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

1. Chú ý khai thác giả thiết triệt để.

2. Mấu chốt là tìm ra hai cận a, b và hàm số $f(x) - g(x)$.

3. Khi đó thế vào công thức và dùng máy tính cầm tay tính kết quả cuối cùng.

CÂU 46 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; -3; 3)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z = 0$. Đường thẳng đi qua A , cắt trục Oz và song song với (P) có phương trình là

A. $\frac{x-4}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-3}{-7}$.

B. $\frac{x+4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x+4}{-4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{1}$.

D. $\frac{x+8}{4} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-10}{-7}$.

 **Lời giải.**

Gọi d là đường thẳng thỏa đề bài. Đặt $M(0; 0; m) = d \cap Oz$.

- Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = (1; 1; 1)$, đường thẳng d có VTCP là $\vec{u} = \overrightarrow{AM} = (4; 3; m-3)$.

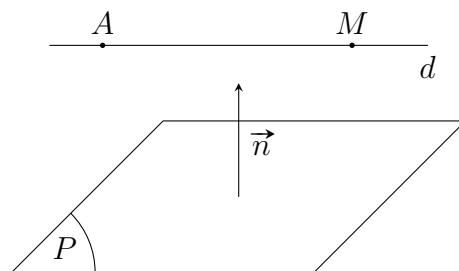
- Vì $d \parallel (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 4 + 3 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

- d có VTCP là $\vec{u} = (4; 3; -7)$ nên loại được các phương án $\frac{x+4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{1}$ và $\frac{x+4}{-4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{1}$.

- Đường thẳng d qua $A(-4; -3; 3)$ và có VTCP $\vec{u} = (4; 3; -7)$ nên d có PTCT là: $\frac{x+4}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-3}{-7}$.

- Vì d đi qua điểm $N(-8; -6; 10)$ nên $\frac{x+8}{4} = \frac{y+6}{3} = \frac{z-10}{-7}$ là phương trình của d .

Chọn đáp án **(D)**



PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Viết phương trình đường thẳng trong không gian.

2. Mức độ: Vận dụng.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về viết PT đường thẳng.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 46

B1. Tìm một điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc đường thẳng d .

B2. Tìm một vec-tơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (a; b; c)$. (Cách tìm VTCP của đường thẳng).

- Đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, B , khi đó vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) song song với đường thẳng (l) , khi đó vec-tơ chỉ phương của (l) cũng là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (α) , khi đó vec-tơ pháp tuyến của (α) là một chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng (d) là giao tuyến của $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, mặt phẳng $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vec-tơ chỉ phương của (d) , $\vec{u} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$
- Đường thẳng (d) đi qua điểm M và vuông góc hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$. Khi đó ta gọi $\vec{u}$ là một vec-tơ chỉ phương của (d) thì
$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases}$$
 với $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ lần lượt là chỉ phương của $(d_1), (d_2)$ nên ta chọn $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.
- Đường thẳng d đi qua điểm M , cắt và vuông góc với một đường thẳng d_1 cho trước. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d_1 cho trước. Dựa vào điều kiện $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_l = 0$ ta tìm được H . Khi đó $\overrightarrow{MH}$ là VTCP cần tìm.
- Đường thẳng đi qua điểm M , vuông góc với (d_1) và cắt (d_2) . Gọi K là giao điểm của (d) và (d_2) . Ta có $MK \perp (d_1)$ nên $\overrightarrow{MK} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0$, từ đó ta tìm được vec-tơ $\overrightarrow{MK}$ chính là chỉ phương của (d) .
- Đường thẳng d đi qua điểm M cắt cả hai đường thẳng (d_1) và (d_2) . Gọi (a) là mặt phẳng chứa (d_1) và đi qua điểm M , (b) là mặt phẳng chứa (d_2) và đi qua điểm M . Khi đó đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (a) và (b) là đường thẳng (d) cần tìm.
- Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) cắt cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$. Ta cần tìm điểm M là giao điểm của (P) và (d_1) , điểm N là giao điểm của (P) và (d_2) . Khi đó đường thẳng (d) đi qua hai điểm M, N là đường thẳng cần tìm.

B3. Viết PTTS của d là
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 trong đó t là tham số.

! Phương trình chính tắc của đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ là $d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ với $abc \neq 0$.

- Đưa về bài toán viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm A, B là bài toán mẫu chốt.
- Điểm M thuộc đường thẳng Δ có PTTS Δ :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 thì $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.
- $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ cùng phương với $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi
$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases}$$

Nếu $x_2 \neq 0, y_2 \neq 0, z_2 \neq 0$ thì $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ cùng phương với $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$
- $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ vuông góc với $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ khi và chỉ khi $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$
- Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Ox là $\vec{i} = (1; 0; 0)$.
- Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oy là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.
- Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song hoặc chứa trục Oz là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

CÂU 47 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 47. Cho khối nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $2\sqrt{3}a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 4a$. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $2a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

- A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. B. $4\sqrt{6}\pi a^3$. C. $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. D. $8\sqrt{2}\pi a^3$.

 **Lời giải.**

Gọi O là tâm đường tròn đáy và M là trung điểm của AB .

Ta có $SO \perp (OAB)$ và $OM \perp AB$. Dựng $OH \perp SM$ tại H .

Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) là $OH = 2a$.

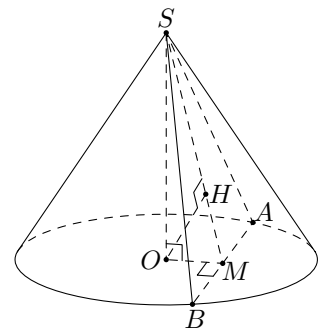
Ta tính được $OM^2 = OA^2 - AM^2 = 12a^2 - 4a^2 = 8a^2$.

Tam giác SOM vuông tại O có OH là đường cao nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{4a^2} - \frac{1}{8a^2} = \frac{1}{8a^2}.$$

Suy ra $OS = 2\sqrt{2}a$.

Thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3} \cdot \pi (2\sqrt{3}a)^2 \cdot 2\sqrt{2}a = 8\sqrt{2}\pi a^3$.



PHÂN TÍCH:

- 1. Dạng toán:** Tính thể tích của khối nón, khối trụ liên quan đến thiết diện của nón hay trụ.
- 2. Mức độ:** Vận dụng cao.
- 3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán liên quan đến thiết diện của khối nón, khối trụ.
- 4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

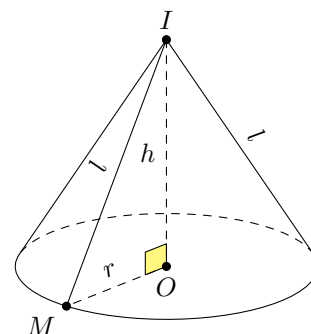
PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 47

Dạng 49 // Tính thể tích của khối nón, khối trụ liên quan đến thiết diện của nón hay trụ

1. Khối nón:

Được tạo thành khi xoay tam giác vuông quanh cạnh góc vuông.

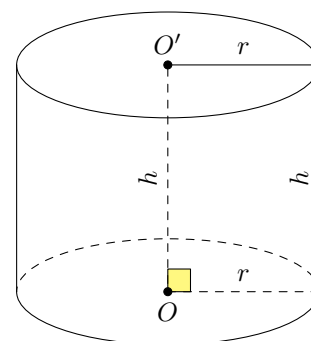
1. Diện tích xung quanh: $S_{xq \text{ nón}} = \pi r l$.
2. Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_{dáy} = \pi r l + \pi r^2$.
3. Thể tích khối nón: $V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} S_{dáy} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.
4. Mối liên hệ: $l^2 = h^2 + r^2$.



2. Khối trụ:

Được tạo thành khi quay hình chữ nhật xung quanh cạnh.

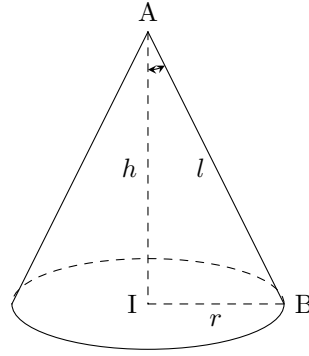
1. Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi r h$.
2. Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_{dáy} = 2\pi r h + 2\pi r^2$.
3. Thể tích của khối trụ: $V_{\text{trụ}} = S_{dáy} \cdot h = \pi r^2 h$.



3. Khối cầu:

Diện tích và thể tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

4. Các yếu tố cơ bản của hình nón



- Chiều cao: h .
- Độ dài đường sinh: l .
- Bán kính đường tròn đáy: r .
- Góc ở đỉnh: 2α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

5. Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy của hình nón

$$l^2 = h^2 + R^2.$$

6. Hình nón tròn xoay tạo thành khi quay tam giác

Cho $\triangle ABI$ vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông AI thì đường gấp khúc ABI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

- Đường thẳng AI được gọi là trục, A là đỉnh, AI được gọi là đường cao và AB được gọi là đường sinh của hình nón.
- Hình tròn tâm I , bán kính $r = IB$ là đáy của hình nón.

7. Công thức diện tích của hình nón và thể tích của khối nón

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$.
- Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_d$.
- Diện tích đáy (hình tròn): $S_d = \pi \cdot r^2$.
- Thể tích khối nón:

$$V_{\text{nón}} = \frac{1}{3} \cdot S_d \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h.$$

8. Thiết diện của hình nón (N) khi cắt bởi mặt phẳng (P)

- (P) đi qua đỉnh của hình nón (N):

- Nếu (P) tiếp xúc với mặt nón (N) theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi (P) là mặt phẳng tiết diện của mặt nón.
- Nếu (P) cắt mặt nón (N) theo hai đường sinh $\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân.
- Đặc biệt: Nếu (P) đi qua trục của mặt nón $(N) \Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân có cạnh bên l và cạnh đáy $2r$.
- (P) không đi qua đỉnh của hình nón (N) :
 - Nếu (P) vuông góc với trục hoành hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường tròn.
 - Nếu (P) song song với hai nhánh của một hypebol.
 - Nếu (P) song song với một đường sinh hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường parabol.

9. Công thức tính độ dài cung tròn có số đo a° , bán kính R

$$l = \frac{\pi R a}{180}.$$

10. Tính chất $\triangle ABC$ đều cạnh a

- Độ dài đường cao, đường trung tuyến $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Diện tích tam giác $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



CÂU 48 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 48. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho ứng với mỗi a , tồn tại ít nhất bốn số nguyên $b \in (-12; 12)$ thỏa mãn $4^{a^2+b} \leq 3^{b-a} + 65$?

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

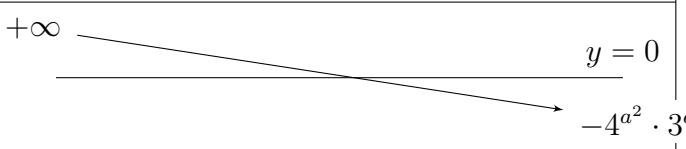
Lời giải.

$$4^{a^2+b} \leq 3^{b-a} + 65 \Leftrightarrow \frac{3^b}{3^a} + 65 \geq 4^{a^2} \cdot 4^b \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^b + 65 \cdot 3^a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^b - 4^{a^2} \cdot 3^a \geq 0. \quad (1)$$

$$\text{Hàm số } f(b) = \left(\frac{3}{4}\right)^b + 65 \cdot 3^a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^b - 4^{a^2} \cdot 3^a.$$

$$\text{Ta có } f'(b) = \left(\frac{3}{4}\right)^b \ln \frac{3}{4} + 65 \cdot 3^a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^b \ln \frac{1}{4} < 0, \forall b.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(b)$	$-$	0	$-$
$f(b)$	$+\infty$		

Ta được tập nghiệm $S = (-\infty; \alpha]$.

S chứa ít nhất 4 số nguyên $b \in (-12; 12) \Leftrightarrow \{-11; -10; -9; -8\} \subset (-\infty; \alpha] \Leftrightarrow f(-8) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^8 + 65 \cdot 3^a \cdot 4^8 - 4^{a^2} \cdot 3^a \geq 0 \Leftrightarrow a \in \{-3; -2; \dots; 3\} \text{ (TABLE -5} \rightarrow 5\text{)}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

PHÂN TÍCH:

- Dạng toán:** Phương pháp hàm số, phương pháp đánh giá về mũ và logarit.
- Mức độ:** Vận dụng cao.
- Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán đếm.
- Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 48

Dạng 50 // Bất phương trình mũ-logarit- Phương pháp đặt ẩn phụ- phương pháp hàm số

- Dạng 1:** Có một biến nguyên và rút được biến nguyên này theo biến còn lại.

Có một biến nguyên và rút được biến nguyên này theo biến còn lại. Đến đây, ta xét hàm để tìm miền giá trị cho biến nguyên đó.

- Dạng 2:** Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm miền giá trị cho biến nguyên.

Khi phương trình rút gọn là phương trình bậc hai theo biến không nguyên. Ta sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai để tìm miền giá trị cho biến nguyên.

Với cách giải sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai, ta phải thử lại nghiệm, nên có hạn chế so với phương pháp cô lập, xét hàm. Do đó, trong một số bài toán có thể cô lập, xét hàm thì ta nên chọn phương pháp này.

- Dạng 3:** Rút biến nguyên thuộc K theo biến còn lại để tìm miền giá trị cho biến đó.

Cả hai biến đều nguyên, trong đó có một biến nguyên thuộc tập K cho trước, với K có thể là một khoảng, một đoạn. Khi đó ta có thể rút biến nguyên thuộc K theo biến còn lại để tìm miền giá trị cho biến đó.

- Dạng 4:** Tìm điểm nguyên trên các đường cong đơn giản

Cả hai biến đều nguyên, rút được biến này theo biến kia đưa về bài toán tìm điểm nguyên trên các đường cong đơn giản.

5. **Dạng 5:**Đưa phương trình về tổng các bình phương của hai biến nguyên

6. **Dạng 6:**Đưa về phương trình tích của hai biến nguyên

Chú ý : Với câu hỏi có bao nhiêu số nguyên y để mỗi số nguyên y , có ít nhất (hay có không quá) số nguyên x thỏa điều kiện cho trước thì ta xem y là tham số và x là biến số. Từ đó tìm ra được tập nghiệm bpt phương trình theo y .

Từ điều kiện x phải thỏa mãn ta liệt kê ra các số nguyên x . Từ đó ta lại suy ra số lượng số nguyên y phải tìm.

CÂU 49 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 4)^2 + (y + 3)^2 + (z + 6)^2 = 50$ và đường thẳng $d : \frac{x}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{-1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc trục hoành, với hoành độ là số nguyên, mà từ M kẻ được đến (S) hai tiếp tuyến cùng vuông góc với d ?

A. 29.

B. 33.

C. 55.

D. 28.

 **Lời giải.**

Mặt cầu (S) có tâm $I(4; -3; -6)$, $R = 5\sqrt{2}$.

Ta có $M \in Ox \Rightarrow M(a; 0; 0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai tiếp tuyến từ M đến (S) . Khi đó (P) đi qua $M(a; 0; 0)$, vuông góc với đường thẳng d , phương trình mặt phẳng (P) là

$$2(x - a) + 4y - z = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - z - 2a = 0.$$

Ta có M là điểm nằm ngoài mặt cầu, suy ra

$$\bullet IM > R \Leftrightarrow (a - 4)^2 + 9 + 36 > 50 \Leftrightarrow (a - 4)^2 > 5 \quad (1)$$

$$\bullet d(I, (P)) < R \Leftrightarrow \frac{|8 - 12 + 6 - 2a|}{\sqrt{21}} < 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |2 - 2a| < 5\sqrt{42} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra

$$\begin{cases} (a - 4)^2 > 5 \\ |2 - 2a| < 5\sqrt{42} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a + 11 > 0 \\ a^2 - 2a + 1 < \frac{350}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 7 \\ a \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -15 \leq a \leq 1 \\ 7 \leq a \leq 17. \end{cases}$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$, suy ra có 28 điểm M thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)**

□

PHÂN TÍCH:

- 1. Dạng toán:** Bài toán tổng hợp về MC-MP-DT.
- 2. Mức độ:** Vận dụng cao.
- 3. Định hướng ôn tập:** Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về MC-MP-DT.
- 4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:**

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 49

Dạng 51 Bài toán liên quan đến mặt cầu-mặt phẳng-đường thẳng

1. Tương giao giữa mặt cầu và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Khi đó:

TH1: Nếu $d(I; (P)) > R$ thì mặt cầu (S) và (P) không có điểm chung.

TH2: Nếu $d(I; (P)) = R$ thì mặt cầu (S) và (P) có điểm chung duy nhất là H (mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H) và $IH \perp (P)$.

TH3: Nếu $d(I; (P)) < R$ thì mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn tâm H bán kính r ta có:

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và $r^2 + IH^2 = R^2$ với $(d_{(I; (P))} = IH)$.
- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S) , mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM \perp (P)$.
- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S) , mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r lớn nhất $\Leftrightarrow (P)$ đi qua 2 điểm I và M .

2. Tương giao giữa mặt cầu và đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ và mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R . Khi đó:

1. Nếu $d(I; \Delta) > R$ thì mặt cầu (S) và Δ không có điểm chung.
2. Nếu $d(I; \Delta) = R$ thì mặt cầu (S) và Δ có điểm chung duy nhất là H khi đó $IH \perp \Delta$.
3. Nếu $d(I; \Delta) < R$ thì mặt cầu (S) và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B ta có một số kết quả sau:
 - Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp \Delta$ và $d_{(I; \Delta)}^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2$ với $(d_{(I; \Delta)} = IH)$.
 - Cho điểm M khi đó đường thẳng đi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB lớn nhất là đường thẳng đi qua 2 điểm M và I .

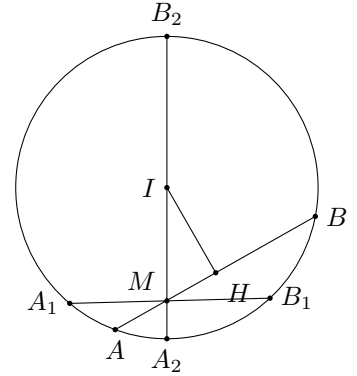
- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S) đường thẳng đi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất là đường thẳng đi qua M và vuông góc IM .

Chứng minh:

$$\text{Ta có } d_{(I;\Delta)}^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{R^2 - d_{(I;\Delta)}^2}.$$

Vì $\triangle HIM$ vuông tại H nên ta có $0 \leq IH \leq IM$.

- AB lớn nhất $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} = 0 \Leftrightarrow \Delta$ qua 2 điểm I và M .
- AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow d_{(I;\Delta)} = IM \Leftrightarrow \Delta$ vuông góc IM .



🎓 CÂU 50 ĐỀ MINH HỌA

CÂU 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có **đúng 9 điểm cực trị**?

A. 16.

B. 9.

C. 15.

D. 10.

🔍 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y' = (4x^3 - 16x) \cdot f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x^4 - 8x^2 + m = 0 \\ x^4 - 8x^2 + m = -10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ m = -x^4 + 8x^2 \quad (1) \\ m + 10 = -x^4 + 8x^2 \quad (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có 9 điểm cực trị thì $f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0$ phải có 6 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình (1) phải có 2 nghiệm và phương trình (2) phải có 4 nghiệm.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} -m \geq 0 \\ -16 < -m - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -10 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < m \leq 0.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}$.

Vậy có 10 giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(D)**

□

PHÂN TÍCH:

1. Dạng toán: Bài toán chỉ sử dụng P hoặc C hoặc A.

2. Mức độ: Vận dụng cao.

3. Định hướng ôn tập: Học sinh cần nắm vững phần lý thuyết và cách giải bài toán về cực trị và sự tương giao giữa hai đồ thị hàm số.

4. Kiến thức cần nắm và phương pháp giải:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÂU 50

Dạng 52

Tìm cực trị của hàm số hợp $g(x) = f[u(x)]$ khi biết đồ thị hàm số $f(x)$ hay BBT hàm số $f(x)$

Kiến thức bổ trợ

1. **Bài toán bổ trợ 1:** Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)] = 0$.

Phương pháp :

- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x = x_i$ của phương trình $f(x) = 0$. (Giao điểm của đồ thị với trục hoành)
- Khi đó phương trình $f[u(x)] = 0 \Leftrightarrow u(x) = x_i$. Giải các phương trình $u(x) = x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

Nhận xét: Đôi khi chỉ tìm ra được các nghiệm gần đúng x_i hoặc chỉ tìm ra được số nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

2. **Bài toán bổ trợ 2:** Cho đồ thị hàm số $f(x)$ hoặc bảng biến thiên hàm số $f(x)$. Tìm nghiệm phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0$.

Phương pháp :

- Đặt $t = u(x)$, biểu diễn $p(x) = \varphi(t)$.
- Biến đổi phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\varphi(t)$

- Dựa vào đồ thị (hoặc BBT) của hàm số $f(x)$ để tìm các nghiệm $x = x_i$ từ phương trình $f(x) = -\varphi(x)$. (Chú ý ta đổi vai trò x thành t rồi dựa vào đồ thị $f(x)$).
- Khi đó phương trình $f[u(x)] + p(x) = 0 \Leftrightarrow t = u(x) = x_i$. Giải các phương trình $u(x) = x_i$ ta tìm được các nghiệm của phương trình $f[u(x)] = 0$.

Xét sự biến thiên của hàm số hợp $y = f[u(x)]$ ta làm như sau:

1. Đạo hàm của hàm số hợp

- $g(x) = f[u(x)] \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)]$.
- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'[u(x)] = 0. \end{cases}$ (Dựa vào đồ thị để suy ra nghiệm của pt $f'(x) = 0$)

$$\text{Giả sử } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ \vdots \\ x = b \end{cases} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = a \\ \vdots \\ u = b. \end{cases} \quad (*)$$

Chú ý đề cho

- Bảng xét dấu của $f'(x)$ thì ta nhìn những vị trí $f'(x) = 0$. Suy ra (*)
- Đồ thị của $f'(x)$ thì ta nhìn những vị trí đồ thị cắt trục Ox . Suy ra (*)
- Đồ thị của $f(x)$ thì ta chiếu các điểm cực trị xuống trục Ox . Suy ra (*)

2. Lập bảng biến thiên của hàm số

3. Nêu kết luận của hàm số

Chú ý: Cách vẽ đồ thị có chứa giá trị tuyệt đối.

1. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.
2. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng 2 lần số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$ và cộng thêm 1.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

1. B	2. A	3. C	4. D	5. C	6. C	7. A	8. C	9. C	10. B
11. C	12. B	13. C	14. C	15. A	16. A	17. C	18. C	19. C	20. A
21. D	22. A	23. D	24. B	25. A	26. A	27. A	28. B	29. B	30. A
31. A	32. A	33. B	34. B	35. A	36. D	37. B	38. D	39. A	40. B
41. B	42. B	43. D	44. A	45. D	46. D	47. A	48. D	49. D	50. D

PHẦN 3: BÀI TẬP CHO HỌC SINH RÈN LUYỆN

CHUYÊN ĐỀ 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

TẬP THỂ GIÁO VIÊN TOÁN 12 -TRƯỜNG THPT AN PHƯỚC

- | | |
|-----------------------------|-------------------------------|
| 1. Trần Ngọc Hùng-HT | 5. Đàng Xuân Phi-Gv Toán. |
| 2. Ngụy Như Thái-TTCM. | 6. Quảng Đại Mưa-Gv Toán. |
| 3. Quảng Đại Hạn-TPCM. | 7. Nguyễn Văn Hồng - Gv Toán. |
| 4. Quảng Đại Phước-Gv Toán. | |