**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**TỈNH QUẢNG NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT NĂM 2018**

Môn thi: **TOÁN** – Bảng **A**

Ngày thi: **04/12/2018**

*Thời gian làm bài: **180 phút**, không kể thời gian giao đề*

*(Đề thi này có 01 trang)*

**Bài 1 (*4 điểm*).**

**1.** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$, với $m$ là tham số. Tìm các giá trị của $m$ để đồ thị của hàm số đã cho có ba điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông.

**2.** Nhà bạn An muốn đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được $400000\ (\text{cm}^3)$ nước. Biết rằng chiều cao của bể gấp 2 lần chiều rộng của bể. Xác định diện tích đáy của bể cá để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

**Bài 2 (*3 điểm*).** Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1}{y^2}\log\dfrac{100x}{y^2} = 1 - \dfrac{x-2}{y^2} \\ \sqrt{xy-2} = \sqrt[3]{x-1} + y \end{cases}$

**Bài 3 (*4 điểm*).**

**1.** Cho tam giác $ABC$ không có góc vuông và có các cạnh $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 2c^2$ và $\tan A + \tan C = 2\tan B$ thì $\Delta ABC$ là tam giác đều.

**2.** Trong cuộc thi văn nghệ do Đoàn thanh niên trường THPT X tổ chức vào tháng 11 năm 2018 với thể lệ mỗi lớp tham gia một tiết mục. Kết quả có 12 tiết mục đạt giải trong đó: có 4 tiết mục khối 12, có 5 tiết mục khối 11 và 3 tiết mục khối 10. Ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 5 tiết mục biểu diễn chào mừng ngày 20 tháng 11 (không tính thứ tự biểu diễn). Tính xác suất sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12.

**Bài 4 (*3 điểm*).** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, cho tam giác $ABC$ có 3 góc đều nhọn. Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$; $M, N, P$ lần lượt là giao điểm của $AH, BH, CH$ với đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Tìm tọa độ trực tâm $H$ của tam giác $ABC$, biết $M\left(-\dfrac{16}{9}; -\dfrac{5}{9}\right); N\left(-\dfrac{7}{8}; \dfrac{5}{4}\right); P\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$.

**Bài 5 (*4 điểm*).** Cho lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy là tam giác vuông tại *A, AB = a, BC = 2a.* Mặt bên *BCC'B'* là hình thoi và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (*BCC'B'*) và (*ABB'A'*) bằng $\alpha$.

**1.** Trong trường hợp $\tan\alpha = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}$, hãy tính theo $a$:

**a.** Thể tích khối lăng trụ *ABC.A'B'C'*.

**b.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng *A'C'* và *B'C*.

**2.** Gọi $\beta$ là góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mặt bên qua *CC'* của lăng trụ *ABC.A'B'C'*, tìm hệ thức giữa $\cot\alpha$ và $\cot\beta$.

**Bài 6 (*2 điểm*).** Cho ba số thực dương *x, y, z* thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1-xy} + \frac{1}{1-yz} + \frac{1}{1-zx}.$$

------------------------ Hết -------------------------

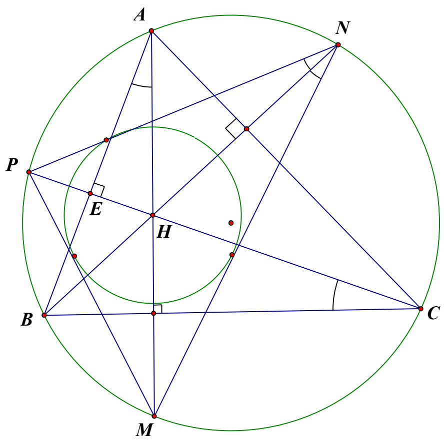
Họ và tên thí sinh : ...................................................................... Số báo danh: ....................................

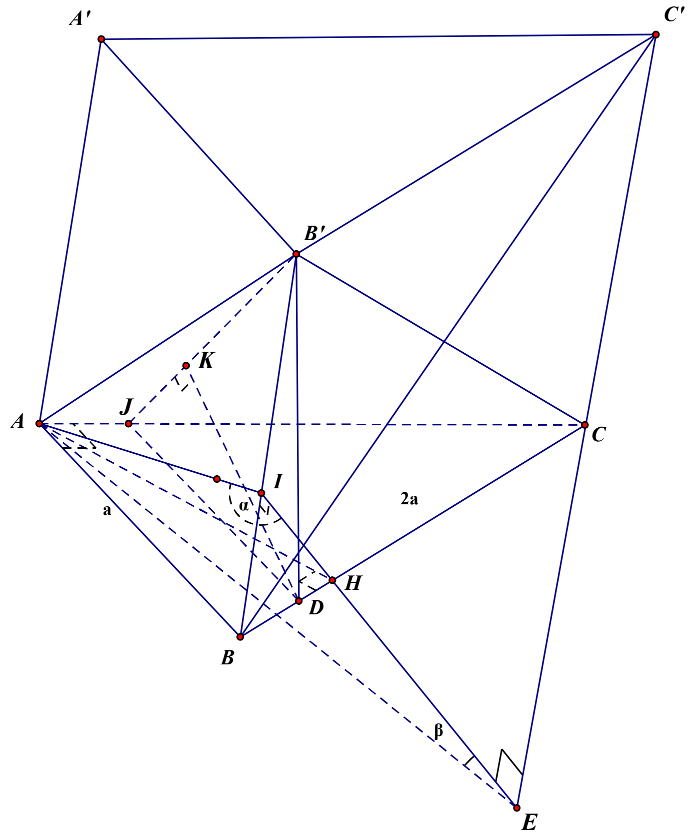
*Chữ ký của cán bộ coi thi 1*: .................................. *Chữ ký của cán bộ coi thi 2:* ................................

| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>**TỈNH QUẢNG NINH** | **HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT NĂM 2018**<br>Môn thi: **TOÁN** – Bảng **A**<br>Ngày thi: **04/12/2018**<br>*(Hướng dẫn này có 05 trang)* |
|---|---|
| ĐỀ THI CHÍNH THỨC | |

| Bài | Sơ lược lời giải | Điểm |
|---|---|---|
| **Bài 1**<br>*4 điểm* | **1**.( *2 điểm*) TXĐ: $D=\mathbb{R}$.<br>Ta có : $y'=4x\left(x^2-m\right)$ | 0,5 |
| | $y'=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2=m$<br>Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$ | 0,25<br>0,25 |
| | Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:<br>$A\left(-\sqrt{m};-m^2+2m-1\right), B\left(0;2m-1\right), C\left(\sqrt{m};-m^2+2m-1\right)$ | 0,5 |
| | Vì hàm số chẵn nên tam giác *ABC* cân tại $B\in Oy$, *A* và *C* đối xứng nhau qua *Oy*.<br>*ABC* là tam giác vuông $\Leftrightarrow$ tam giác *ABC* vuông cân tại *B*<br>$\Leftrightarrow AC=AB.\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2=\sqrt{m} \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=0$.<br>Vậy chọn $m=1$. | 0,5 |
| | **2**. ( *2 điểm*) Gọi *a, b, c* lần lượt là chiều rộng, dài, cao của hình hộp chữ nhật ($a$, $b$, $c>0$).<br>Theo bài ra $V=abc=400000$ và $c=2a \Rightarrow 2a^2b=400000 \Rightarrow ab=\dfrac{200000}{a}$ | 0,25<br>0,25 |
| | Ta có tổng diện tích xung quanh và diện tích một đáy của bể là<br>$S=ab+2ac+2bc=ab+4a^2+4ab=5ab+4a^2$<br>$=\dfrac{1000000}{a}+4a^2=4\left(\dfrac{125000}{a}+\dfrac{125000}{a}+a^2\right)$ | 0,25<br>0,5 |
| | $S=4\left(\dfrac{125000}{a}+\dfrac{125000}{a}+a^2\right)\ge 4.3.\sqrt[3]{\dfrac{125000}{a}.\dfrac{125000}{a}.a^2}=30000.$<br>Suy ra $S$ nhỏ nhất khi $\dfrac{125000}{a}=a^2 \Leftrightarrow a=50 \Rightarrow b=80 \Rightarrow S_đ=4000\ \text{cm}^2$. | 0,5<br>0,25 |
| **Bài 2**<br>*3 điểm* | Điều kiện: $x>0$ ; $xy\ge 2$. | 0,25 |
| | Ta có<br>$\dfrac{1}{y^2}\log\dfrac{100x}{y^2}=1-\dfrac{x-2}{y^2} \Leftrightarrow \log 100x-\log y^2=y^2-x+2$<br>$\Leftrightarrow x+\log x=y^2+\log y^2 \quad (1)$ | 0,25<br>0,25 |

| Bài | Sơ lược lời giải | Điểm |
|---|---|---|
| | Xét hàm số<br>$f\left(t\right)=t+\log t$ ( t > 0 ) $\Rightarrow f^{'}\left(t\right)=1+\dfrac{1}{t\ln 10}>0,\quad \forall t>0$,<br>suy ra hàm số *f(t)* đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. | 0,25<br>0,25 |
| | Kết hợp với (1) ta có $f(x)=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow x=y^2 \qquad (2)$ | 0,25 |
| | Thế (2) vào phương trình còn lại của hệ đã cho ta được:<br>$\sqrt{y^3-2}=\sqrt[3]{y^2-1}+y\Leftrightarrow \sqrt[3]{y^2-1}-2+y-3-\left(\sqrt{y^3-2}-5\right)=0$ | 0,5 |
| | $\left(y-3\right)\left(\dfrac{y+3}{\sqrt[3]{\left(y^2-1\right)^2}+2\sqrt[3]{y^2-1}+4}+1-\dfrac{y^2+3y+9}{\sqrt[3]{y^2-2}+5}\right)=0 \quad (3)\Leftrightarrow y=3$ | 0,5 |
| | Ta có $\dfrac{y+3}{\sqrt[3]{(y^2-1)^2}+2\sqrt[3]{y^2-1}+4}+1<2<\dfrac{y^2+3y+9}{\sqrt{y^3-2}+5}$ với $y\geq\sqrt[3]{2}$<br>Nên pt (3) có nghiệm duy nhất $y=3$. | 0,25 |
| | Vậy hệ pt có nghiệm $(x;y)=(9;3)$. | 0,25 |
| **Bài 3**<br>*4 điểm* | **1.**(2 điểm) Ta có<br>$\begin{cases}\tan A+\tan C=2\tan B\\ a^2+b^2=2c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos B=2\cos A\cos C\\ a^2=2c^2-b^2\end{cases}$ | 0,5 |
| | $\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=2.\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\ a^2=2c^2-b^2\end{cases}$ | 0,5 |
| | $\Rightarrow b^2(3c^2-2b^2)=(2b^2-c^2)c^2\Leftrightarrow b^2c^2+c^4-2b^4\Leftrightarrow(c^2-b^2)(c^2+2b^2)=0\Leftrightarrow c=b$ | 0,5 |
| | . Kết hợp với $a^2+b^2=2c^2\Rightarrow a=b=c$. Vậy tam giác $ABC$ là tam giác đều. | 0,5 |
| | **2.** (*2 điểm*) Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là $\Omega$<br>Số phần tử của không gian mẫu là: n( $\Omega$ )= $C_{12}^{5}=792$ | 0,25 |
| | Gọi *A* là biến cố " Chọn 5 tiết mục sao cho khối nào cũng có tiết mục được biểu diễn và trong đó có ít nhất hai tiết mục của khối 12" | 0,25 |
| | Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là :<br>+ 2 tiết mục khối 12, 2 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11<br>+ 2 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 2 tiết mục khối 11<br>+ 3 tiết mục khối 12, 1 tiết mục khối 10, 1 tiết mục khối 11<br>Số kết quả thuận lợi cho biến cố *A* là: n(*A*) $=C_4^2.C_3^2.C_5^1+C_4^2.C_3^1.C_5^2+C_4^3.C_3^1.C_5^1.=330$ | 0,5<br>0,5 |
| | Xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{330}{792}=\dfrac{5}{12}$. | 0,5 |
| **Bài 4**<br>*3 điểm* | Ta có $\begin{cases}\widehat{PNB}=\widehat{PCB}\\ \widehat{PCB}=\widehat{BAM}\\ \widehat{BAM}=\widehat{BNM}\end{cases}\Rightarrow\widehat{PNB}=\widehat{BNM}$, suy ra *BN* là đường phân giáctrongcủa $\widehat{PNM}$ | 0,5 |
| | Chứng minh tương tự *PC, AM* lần lượt là đường phân giác trong của góc $\widehat{MPN}$, $\widehat{PMN}$<br>Suy ra *H* là tâm đường tròn nội tiếp tam giác *MNP* | 0,25 |

| Bài | Sơ lược lời giải | Điểm |
|---|---|---|
| | Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{65}{72};\frac{65}{36}\right)$, viết được PT $MN$: $2x-y+3=0$ | 0,5 |
| |  | |
| | Tương tự ta có PT của $MP$: $3x-6y+2=0$;<br>$NP$: $4x+2y+1=0$ | 0,25<br>0,25 |
| | PT đường phân giác của $\widehat{MPN}$ : $6x+18y-1=0$ và $18x-6y+7=0$<br>do $M, N$ nằm cùng phía cua đường phân giác trong nên ta chon PT $PC$: $6x+18y-1=0$ | 0,25<br>0,25 |
| | Đường phân giác của $\widehat{PNM}$ : $4y-5=0$ và $8x+7=0$<br>Chọn được PT $NB$ là : $8x+7=0$ | 0,5 |
| | Ta có $NB\cap PC=H$, suy ra $H\left(-\frac{7}{8};\frac{25}{72}\right)$ | 0,25 |
| **Bài 5**<br>*4 điểm* | **1 (*3 điểm*)**<br>**a.** (*1,5 điểm*) Dựng $AH\perp BC\ \ (H\in BC)$, suy ra được $AH\perp(BCC'B')$<br>Trong tam giác vuông $ABC$ có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=a\sqrt{3}$ ; $AH=\frac{AB.AC}{BC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ | 0,5 |
| | Dựng $HI\perp BB'(I\in BB')$, ta có $\begin{cases}BB'\perp HI\\BB'\perp AH\end{cases}\Rightarrow BB'\perp(AHI)$ | 0,25 |
| | Suy ra được góc giữa 2 mặt phẳng ($BCC'B'$) và ($ABB'A'$) bằng góc giữa hai đường thẳng $AI$ và $HI$ bằng $\widehat{AIH}=\alpha$ ( do tam giác $AHI$ vuông tại $H$ nên $\widehat{AIH}$ là góc nhọn) | 0,25 |
| | Trong tam giác vuông $ABH$ tính được $BH=\frac{a}{2}$, ta có $\tan\alpha=\tan\widehat{AIH}=\frac{AH}{IH}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$<br>suy ra $IH=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{a\sqrt{6}}{5}\Rightarrow\sin\widehat{IBH}=\frac{a\sqrt{6}}{5}:\frac{a}{2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ | 0,25 |
| | Vậy $V_{ABCA'B'C'}=\frac{3}{2}V_{A.BCC'B'}=\frac{3}{2}.\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.4a^2.\frac{2\sqrt{6}}{5}=\frac{6a^3\sqrt{2}}{5}$.<br>(Hoặc tính đường cao $B'D$ và tính $S_{\Delta ABC}$ rồi suy ra thể tích khối lăng trụ ) | 0,25 |
| | **b.** (*1,5 điểm*) Dựng $B'D\perp BC\ (D\in BC)$, ta có $B'D\perp(ABC)$<br>Ta có $A'C'$ ∥ $AC$ nên $A'C'$ ∥ ($B'AC$), nên d($A'C'$, $B'C$) = d($A'C'$, ($B'AC$))<br>= d($C'$, ($B'AC$)) = d($B$, ($B'AC$)) = $\frac{BC}{DC}$. d($D$, ($B'AC$)) | 0,25<br>0,25 |
| | Dựng $DJ\perp AC$ tại $J$, có $DJ$ ∥ $AB$<br>Dựng $DK\perp JB'$ tại $K$. Chứng minh được $DK\perp(B'AC)\Rightarrow$ d($D$, ($B'AC$)) = $DK$ | 0,25 |

| Bài | Sơ lược lời giải | Điểm |
|---|---|---|
| |  | |
| | Ta có $\cos\widehat{B'BD} = \cos\widehat{IBH} = \frac{1}{5}$<br>mà $\cos\widehat{B'BD} = \frac{BD}{BB'} \Rightarrow BD = \frac{2a}{5} \Rightarrow \frac{DJ}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{4}{5} \Rightarrow DJ = \frac{4a}{5}$<br>Ta có $\sin\widehat{B'BD} = \sin\widehat{IBH} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{B'D}{BB'} \Rightarrow B'D = \frac{4a\sqrt{6}}{5}$ | 0,25 |
| | Xét tam giác *B'DJ* vuông tại *D* có $\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{B'D^2} + \frac{1}{DJ^2} = \frac{25}{96a^2} + \frac{25}{16a^2} = \frac{175}{96a^2}$ | 0,25 |
| | Suy ra d(*A'C'*, *B'C*) $= \frac{BC}{DC}.DK = \frac{5}{4}.\frac{4a\sqrt{42}}{35} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$. | 0,25 |
| | **2) (*1 điểm*)** Dựng $HE \perp CC'$ $(E \in CC')$, ta có $\begin{cases} CC' \perp AH \\ CC' \perp HE \end{cases} \Rightarrow CC' \perp (AHE)$ | 0,25 |
| | Suy ra được góc giữa 2 mặt phẳng (*BCC'B'*) và (*ACC'A'*) bằng góc giữa hai đường thẳng *AE* và *HE* bằng $\widehat{AEH} = \beta$ ( do tam giác *AHE* vuông tại *H* nên $\widehat{AEH}$ là góc nhọn) | 0,25 |
| | Xét tam giác vuông *AHE*, ta có $\cot\beta = \frac{HE}{AH}$.<br>Ta có $BH = \frac{a}{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $IH = AH.\cot\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cot\alpha$ và do tam giác *BHI* vuông tại *I* nên *HI* < *BH* suy ra $\frac{a\sqrt{3}}{2}\cot\alpha < \frac{a}{2} \Rightarrow \cot\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 60^o < \alpha < 90^o$ | 0,25 |

| Bài | Sơ lược lời giải | Điểm |
|---|---|---|
| | Vì $BH=\frac{a}{2}=\frac{BC}{4}$ nên $\frac{HE}{HI}=\frac{HC}{HB}=3\Rightarrow HE=3HI$<br>$\Rightarrow \cot\beta=\frac{HE}{AH}=\frac{3HI}{AH}=3\cot\alpha$ Vậy $\cot\beta=3\cot\alpha$ với $60^o<\alpha<90^o$ | 0,25 |
| **Bài 6**<br>*2 điểm* | Không mất tính tổng quát giả sử $x=\min(x, y, z)\Rightarrow x^2\le\frac{1}{3}$. (*)<br>Xét : $P-\frac{1}{1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}}-\frac{1}{1-\frac{y^2+z^2}{2}}-\frac{1}{1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}}$<br>$=\frac{x\left(y-\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)}{(1-xy)\left(1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)}+\frac{x\left(z-\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)}{(1-zx)\left(1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)}-\frac{(y-z)^2}{2(1-yz)\left(1-\frac{y^2+z^2}{2}\right)}$<br>$\le\frac{x\left(\frac{y-z}{2}\right)}{(1-xy)\left(1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)}+\frac{x\left(\frac{z-y}{2}\right)}{(1-zx)\left(1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)}-\frac{(y-z)^2}{2(1-yz)\left(1-\frac{y^2+z^2}{2}\right)}$ | 0,25 |
| | $=\frac{(y-z)^2}{2}\left[\frac{x^2}{(1-xy)(1-zx)\left(1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)}-\frac{1}{(1-yz)\left(1-\frac{y^2+z^2}{2}\right)}\right]\le 0$ | 0,5 |
| | Đúng vì : $x^2\le 1-x\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}};1-xy\ge 1-yz;1-zx\ge 1-\frac{y^2+z^2}{2}$<br>$\Rightarrow P\le\frac{1}{1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}}-\frac{1}{1-\frac{y^2+z^2}{2}}-\frac{1}{1-x.\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}}=\frac{2}{1-x.\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}+\frac{1}{1-\frac{1-x^2}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{t(1-t)}}+\frac{2}{1+t}$ | 0,25 |
| | Với $t=x^2;0<t\le\frac{1}{3}$ . Hàm số $y=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{t(1-t)}}+\frac{2}{1+t}$ đồng biến trên $\left(0;\frac{1}{3}\right]$ do đó : | 0,5 |
| | $\Rightarrow f(x,y,z)\le\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{t(1-t)}}+\frac{2}{1+t}\le\frac{9}{2}$ Suy ra Max$P=\frac{9}{2}$ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0,5 |

**Các chú ý khi chấm:**

*1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược bài giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.*

*2. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất chi tiết nhưng không được quá số điểm dành cho câu, phần đó.*

*3. Có thể chia điểm thành từng phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm.*

*4. Điểm toàn bài là tổng số điểm các phần đã chấm. Không làm tròn điểm.*

*5. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.*

------------------------ Hết -------------------------