

BÀI 1: NGUYÊN HÀM.....	1
▲ <i>_DẠNG 1. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ NGUYÊN HÀM CƠ BẢN.....</i>	<i>1</i>
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	2
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	2
▲ <i>_DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN.....</i>	<i>5</i>
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	5
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	6
▲ <i>_DẠNG 3. NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN.....</i>	<i>8</i>
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	9
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	10
BÀI 2 - TÍCH PHÂN	13
▲ <i>_DẠNG 1. TÍCH PHÂN DÙNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT</i>	<i>13</i>
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	13
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	14
▲ <i>_DẠNG 2. TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ</i>	<i>15</i>
1. ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1	15
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	16
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	17
2. ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2	18
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	19
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	20
▲ <i>_DẠNG 3. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN.....</i>	<i>21</i>
1. Dạng 1: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$	21
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	21
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	22
2. Dạng 2: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln(ax) dx$	23
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	23
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	25
3. Dạng 3: $\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \cdot \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$	26
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	26
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	28
BÀI 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC	29
▲ <i>_DẠNG 1. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG.</i>	<i>29</i>
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	29
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	30
▲ <i>_DẠNG 2. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH.</i>	<i>33</i>
A. VÍ DỤ MINH HỌA:	33
B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:	34

BÀI 1: NGUYÊN HÀM

▲_DẠNG 1. ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

PHƯƠNG PHÁP:

① _ Sử dụng bảng nguyên hàm

Hàm sơ cấp	Hàm số hợp $u = u(x)$	Thường gặp
①. $\int dx = x + C$	①. $\int du = u + C$	①. Vi phân $d(ax+b) = \frac{1}{a}dx$
②. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	②. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$)	②. $\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\alpha+1} (ax+b)^{\alpha+1} + C$
③. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ ($x \neq 0$)	③. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ ($u(x) \neq 0$)	③. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$ ($a \neq 0$)
④. $\int \cos x dx = \sin x + C$	④. $\int \cos u du = \sin u + C$	④. $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
⑤. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	⑤. $\int \sin u du = -\cos u + C$	⑤. $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
⑥. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$ Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	⑥. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$ Với $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	⑥. $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
⑦. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ Với $x \neq k\pi$	⑦. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$ Với $u(x) \neq k\pi$	⑦. $\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
⑧. $\int e^x dx = e^x + C$	⑧. $\int e^u du = e^u + C$	⑧. $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
⑨. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)	⑨. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ ($0 < a \neq 1$)	⑨. $\int a^{px+q} dx = \frac{1}{p \cdot \ln a} a^{px+q} + C$ ($0 < a \neq 1$)

② _ Casio: Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Tìm $f(x)$ hoặc $F(x)$

- Nhấn SHIFT $\frac{d}{dx} \left(F(x) \right) \Big|_{x=x} - f(x)$
- Nhấn phím CALC nhập $x = 2.5$
- Nếu kết quả bằng 0 (gần bằng 0) thì đó là đáp án cần chọn.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

- A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C$. B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C$. C. $\ln|2x+3| + C$. D. $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$$

Ví dụ 2. Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- A. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. B. $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
C. $f(x) = 12x^2 + 2x$. D. $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x) = \left(\int f(x) dx \right)' = (4x^3 + x^2 + C)' = 12x^2 + 2x.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$ và $F(1) = 1$. Khi đó giá trị của $F(5)$ bằng

- A. $\ln 2$. B. $\ln 3$. C. $\ln 2 + 1$. D. $\ln 3 + 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + C$$

$$\text{Mặt khác theo đề ra ta có: } F(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 1 - 1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1$$

$$\text{Nên } F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x-1| + 1$$

$$\text{Do vậy } F(5) = \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 5 - 1| + 1 = \frac{1}{2} \ln 9 + 1 = \ln 3 + 1.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

- A. $\int f(x) dx = 3x^2 + \frac{1}{x^2} + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln x + C$.
C. $\int f(x) dx = 3x^2 - \frac{1}{x^2} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{x^4}{4} + \ln|x| + C$.

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$.

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

D. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C.$

B. $6x + \cos x + C.$

C. $x^3 - \cos x + C.$

D. $6x - \cos x + C.$

Câu 4. Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C.$

C. $\ln|2x+3| + C.$

D. $\frac{1}{\ln 2} \ln|2x+3| + C.$

Câu 5. Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa công thức nào sau đây sai?

A. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$

B. $\int e^x dx = e^x + C.$

C. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C.$

D. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

Câu 6. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là

A. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C.$

B. $F(x) = e^{2x} + x^3 + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C.$

D. $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C.$

Câu 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $F(x) = 3x^2 + 3x + C.$

B. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C.$

Câu 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

A. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C.$

B. $F(x) = 3e^x - x + C.$

C. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C.$

D. $F(x) = 3e^x + x + C.$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x$ là

A. $e^x - \sin x + C.$

B. $\frac{1}{x+1} e^{x+1} + \sin x + C.$

C. $xe^{x-1} - \sin x + C.$

D. $e^x + \sin x + C.$

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + 3^x$ là:

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

B. $F(x) = 1 + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3^x \cdot \ln 3 + C.$

- Câu 11.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$
- A. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$. B. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$.
 C. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$. D. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.
- Câu 12.** Tìm nguyên hàm $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$
- A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C$. B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$.
 C. $F(x) = \cot x - \tan x + C$. D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C$.
- Câu 13.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4e^{2x} + 2x$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Tìm $F(x)$.
- A. $F(x) = 4e^{2x} + x^2 - 3$. B. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 - 1$.
 C. $F(x) = 2e^{2x} + x^2 + 1$. D. $F(x) = 2e^{2x} - x^2 - 1$.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng
- A. 125. B. 625. C. 5. D. 25.
- Câu 15.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ và $F(0) = 1$. Tính $F(1)$.
- A. $F(1) = \ln 2 + 1$. B. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1$. C. $F(1) = 0$. D. $F(1) = \ln 2 + 2$.
- Câu 16.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 2^x$ thỏa mãn $F(0) = 0$. Ta có $F(x)$ bằng
- A. $x^2 + \frac{2^x - 1}{\ln 2}$. B. $x^2 + \frac{1 - 2^x}{\ln 2}$. C. $1 + (2^x - 1) \ln 2$. D. $x^2 + 2^x - 1$.
- Câu 17.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$. Biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(2)$ là
- A. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$. B. $F(2) = \ln 3 + 2$. C. $F(2) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. D. $F(2) = 2 \ln 3 - 2$.
- Câu 18.** Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là
- A. $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$. B. $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}$. C. $-\cot x + x^2 - 1$. D. $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$.
- Câu 19.** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin(\pi - 2x)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- A. $F(x) = \frac{-\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$. B. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + \frac{1}{2}$.
 C. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} + 1$. D. $F(x) = \frac{\cos(\pi - 2x)}{2} - \frac{1}{2}$.
- Câu 20.** Tìm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 1$ trên $(-\infty; +\infty)$, biết $F(0) = 2$.
- A. $F(x) = \ln x - x - 1$. B. $F(x) = e^x - x - 1$.
 C. $F(x) = \frac{1}{e^x} - x + 1$. D. $F(x) = e^x - x + 1$.

▲_DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

PHƯƠNG PHÁP:

①_Tự luận

- Đặt $t = \varphi(x)$, trong đó $\varphi(x)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp.
- Tính vi phân hai vế: $dt = \varphi'(x)dx$.
- Biểu thị: $f(x)dx = g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = g(t)dt$.
- Khi đó: $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

②_Casio: Cho $\int f(x)dx = F(x) + C$. Tìm $f(x)$ hoặc $F(x)$

- Nhấn SHIFT $\frac{d}{dx}(F(x)) \Big|_{x=x} - f(x)$
- Nhấn phím CALC nhập $x = 2.5$
- Nếu kết quả bằng 0 (gần bằng 0) thì đó là đáp án cần chọn.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1+3\cos x}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C$.

B. $\int f(x)dx = \ln|1+3\cos x| + C$.

C. $\int f(x)dx = 3\ln|1+3\cos x| + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{-1}{3}\ln|1+3\cos x| + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 1+3\cos x \Rightarrow dt = -3\sin x dx$

$\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{-1}{3}\ln|1+3\cos x| + C$.

Ví dụ 2. Tính nguyên hàm $I = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} dx$.

A. $I = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+1)^3} + C$.

B. $I = \sqrt{\ln x+1} + C$.

C. $I = \frac{1}{2}\sqrt{(\ln x+1)^2} + C$.

D. $I = 2\sqrt{\ln x+1} + C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{\ln x+1} \Rightarrow t^2 = \ln x+1 \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{x} dx$

$I = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} dx = 2\int dt = 2t + C = 2\sqrt{\ln x+1} + C$.

Ví dụ 3. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}$?

A. $F(x) = -\frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{8}{3}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

C. $F(x) = \frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{3}{4}} + C.$

D. $F(x) = \frac{3}{8}(x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow t^3 = x^2+1 \Rightarrow 3t^2 dt = 2x dx$

$\int x \cdot \sqrt[3]{x^2+1} dx = \frac{3}{2} \int t^3 dt = \frac{3}{8} t^4 + C = \frac{3}{8} (x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C.$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 21. Tìm $\int \frac{\ln x}{x} dx$ có kết quả là.

A. $\ln|\ln x| + C.$

B. $\ln \frac{x^2}{2} + C.$

C. $\frac{x^2}{2}(\ln x - 1) + C.$

D. $\frac{1}{2} \ln^2 x + C.$

Câu 22. Nguyên hàm $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ bằng.

A. $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C.$

B. $2\sqrt{x} + C.$

C. $2\ln|\sqrt{x}+1| + C.$

D. $2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1| + C.$

Câu 23. Cho hàm số $F(x) = \int x\sqrt{x^2+2} dx$. Biết $F(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}$, tính $F(\sqrt{7})$.

A. 7.

B. 11.

C. $\frac{23}{6}.$

D. $\frac{40}{3}.$

Câu 24. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = \frac{3}{2}$. Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

A. $\frac{1}{2}e + 2.$

B. $2e + 1.$

C. $\frac{1}{2}e + 1.$

D. $\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}.$

Câu 25. Tính nguyên hàm $\int \left(\frac{1}{2x+3} \right) dx$.

A. $2\ln|2x+3| + C.$

B. $\frac{1}{2} \ln|2x+3| + C.$

C. $\ln|2x+3| + C.$

D. $\frac{1}{2} \ln(2x+3) + C.$

Câu 26. Xét $I = \int x^3(4x^4-3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4-3$, khẳng định nào sau đây đúng.

A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du.$

B. $I = \int u^5 du.$

C. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du.$

D. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du.$

Câu 27. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4+x^3}$ là

A. $\frac{2}{9} \sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

B. $2\sqrt{4+x^3} + C.$

C. $\frac{1}{9} \sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

D. $2\sqrt{(4+x^3)^3} + C.$

Câu 28. Nguyên hàm $\int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx$ bằng.

A. $\frac{1}{33}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C.$

B. $\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C.$

C. $\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C.$

D. $-\frac{1}{11}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{11} + C.$

Câu 29. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ là

A. $\frac{1}{4} \cos^3 x + C.$

B. $\frac{1}{4} \sin^3 x + C.$

C. $\frac{1}{4} \sin^4 x + C.$

D. $\frac{1}{4} \sin^4 x + \cos x + C.$

Câu 30. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{4}{15}.$

B. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x + \frac{1}{15}.$

C. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

D. $F(x) = \frac{1}{6} \sin^3 2x - \frac{1}{10} \sin^5 2x - \frac{1}{15}.$

Câu 31. Nếu $F(x) = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$ thì

A. $F(x) = \ln \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x+3}} + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + C.$

C. $F(x) = \sqrt{x^2+2x+3} + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+2x+3} + C.$

Câu 32. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính $F(e) - F(1)$

A. $I = \frac{1}{2}.$

B. $I = 1.$

C. $I = \frac{1}{e}.$

D. $I = e.$

Câu 33. Hàm số nào sau đây là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}$?

A. $F(x) = \sqrt{x+1}.$

B. $F(x) = 4\sqrt{x+1}.$

C. $F(x) = 2\sqrt{x+1}.$

D. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$

Câu 34. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ là

A. $I = x + \ln|x| + C.$

B. $I = e^x + \ln(e^x + 1) + C.$

C. $I = x - \ln|x| + C.$

D. $I = e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C.$

Câu 35. Một nguyên hàm của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$ là:

A. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^6.$

B. $\frac{1}{3}(\sqrt{1+x^2})^3.$

C. $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^2.$

D. $\frac{x^2}{2}(\sqrt{1+x^2})^3.$

Câu 36. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{dx}{1+e^x}.$

A. $I = -x - \ln|1+e^x| + C.$

B. $I = x + \ln|1+e^x| + C.$

C. $I = x - \ln|1-e^x| + C.$

D. $I = x - \ln|1+e^x| + C.$

Câu 37. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A+7B$ bằng

- A. $\frac{23}{252}$. B. $\frac{241}{252}$. C. $\frac{52}{9}$. D. $\frac{7}{9}$.

Câu 38. Tìm họ nguyên hàm của hàm số: $f(x) = \int \frac{3\sin x - 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} dx$.

- A. $\int f(x) dx = \ln|3\sin x - 2\cos x| + C$. B. $\int f(x) dx = -\ln|(3\cos x + 2\sin x)| + C$.
C. $\int f(x) dx = \ln|3\cos x + 2\sin x| + C$. D. $\int f(x) dx = -\ln|-3\cos x + 2\sin x| + C$.

Câu 39. Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

- A. $\int 2(u^2 - 4) du$. B. $\int (u^2 - 3) du$. C. $\int 2u(u^2 - 4) du$. D. $\int (u^2 - 4) du$.

Câu 40. Kết quả của phép tính $\int \frac{dx}{e^x - 2e^{-x} + 1}$ bằng

- A. $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$. B. $\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 2} \right| + C$.
C. $\ln(e^x - 2e^{-x} + 1) + C$. D. $\frac{1}{3} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 2} + C$.

▲_DẠNG 3. NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

PHƯƠNG PHÁP:

①_ Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. (*)

Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$).

Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u'.dx$.

Bước 2. Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Chú ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$.

Ta thường gặp các dạng sau:

⊛ **Dạng 1.** $I = \int P(x) \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \left[\frac{\sin x}{\cos x} \right] dx \end{cases}$.

⊛ **Dạng 2.** $I = \int P(x) e^{ax+b} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$.

⊛ **Dạng 3.** $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

②_ **Casio:** Cho $\int f(x) dx = F(x) + C$. Tìm $f(x)$ hoặc $F(x)$

- Nhấn SHIFT $\frac{d}{dx}(F(x)) \Big|_{x=x} - f(x)$
- Nhấn phím CALC nhập $x = 2.5$
- Nếu kết quả bằng 0 (gần bằng 0) thì đó là đáp án cần chọn.

Nguyên tắc chung để đặt u và dv : Tìm được v dễ dàng và $\int v \cdot du$ tính được.

Nhân mạnh: Thứ tự ưu tiên khi chọn đặt u : **“Nhất lô, nhì đa, tam lượng, tứ mũ”** (hàm lôgarit, hàm đa thức, hàm lượng giác, hàm mũ)

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cos 2x$ là

- A. $\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$. B. $x \sin 2x - \frac{\cos 2x}{2} + C$.
C. $x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + C$. D. $\frac{x \sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Ví dụ 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln 2x$ là

- A. $\frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{1}{2} \right) + C$. B. $x^2 \ln 2x - \frac{x^2}{2} + C$. C. $\frac{x^2}{2} (\ln 2x - 1) + C$. D. $\frac{x^2}{2} \ln 2x - x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln 2x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln 2x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln 2x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

Ví dụ 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$.

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int x.e^{2x} dx.$

Đặt

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 41. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

A. $-x \cos x + \sin x + C.$ **B.** $x \sin x + \cos x + C.$ **C.** $x \cos x + \sin x + C.$ **D.** $x \cos x - \sin x + C.$

Câu 42. Kết quả của $I = \int xe^x dx$ là

A. $I = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C.$ **B.** $I = e^x + xe^x + C.$ **C.** $I = \frac{x^2}{2}e^x + C.$ **D.** $I = xe^x - e^x + C.$

Câu 43. Tính $F(x) = \int x \sin 2x dx$. Chọn kết quả **đúng**?

A. $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C.$

B. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x + \sin 2x) + C.$

C. $F(x) = -\frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x) + C.$

Câu 44. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)e^x$ là

A. $xe^x + C.$

B. $(x+2)e^x + C.$

C. $(x-1)e^x + C.$

D. $2xe^x + C.$

Câu 45. Họ các nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là:

A. $\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$ **B.** $x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + C.$ **C.** $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$ **D.** $x \ln x + \frac{1}{2}x + C$

Câu 46. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x+2)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{2} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2+4x}{4} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2-4}{2} \ln(x+2) - \frac{x^2-4x}{4} + C.$

Câu 47. Cho hàm số $y = \int x \sin 2x dx$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$. B. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. C. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12}$. D. $y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{24}$.

Câu 48. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$. B. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$. D. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

Câu 49. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$.

A. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$. B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$. D. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$.

Câu 50. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+1)e^x$ và $F(0) = 3$. Tính $F(1)$.

A. $F(1) = e + 2$. B. $F(1) = 11e - 3$. C. $F(1) = e + 3$. D. $F(1) = e + 7$.

Câu 51. Kết quả của $\int \ln x dx$ là

A. $x \ln x + x + C$. B. $x \ln x + C$. C. $x \ln x - x + C$. D. $x \ln x - x$.

Câu 52. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{2}{9} x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 1) + C$.

Câu 53. Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

A. $ab = -\frac{1}{4}$. B. $ab = \frac{1}{8}$. C. $ab = \frac{1}{4}$. D. $ab = -\frac{1}{8}$.

Câu 54. Biết $\int xe^{2x} dx = axe^{2x} + be^{2x} + C$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tích ab .

A. $ab = \frac{1}{4}$. B. $ab = -\frac{1}{8}$. C. $ab = \frac{1}{8}$. D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Câu 55. Biết $I = \int_0^2 (3x-1)e^{\frac{x}{2}} dx = a + be$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

A. $S = 8$. B. $S = 10$. C. $S = 12$. D. $S = 16$.

Câu 56. Ta có $\int x^2 \cdot e^x dx = (x^2 + mx + n)e^x + C$ khi đó $m.n$ bằng.

A. 0. B. -4. C. 5. D. 4.

Câu 57. Nguyên hàm của hàm 2018 $f(x) = x.e^{2x}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$. B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$. D. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$.

- Câu 58.** Cho $F(x) = (ax^2 + bx - c)e^{2x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2018x^2 - 3x + 1)e^{2x}$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Tính $T = a + 2b + 4c$.
- A.** $T = 1011$. **B.** $T = -3035$. **C.** $T = 1007$. **D.** $T = -5053$.
- Câu 59.** Biết $\int (x+3).e^{-2x} dx = -\frac{1}{m}e^{-2x}(2x+n) + C$, với $m, n \in \mathbb{Q}$. Khi đó tổng $S = m^2 + n^2$ có giá trị bằng
- A.** 5. **B.** 65. **C.** 41. **D.** 10.
- Câu 60.** Tìm nguyên hàm $\int \sin \sqrt{x} dx$.
- A.** $\int \sin \sqrt{x} dx = -2 \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x} + C$. **B.** $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + C$.
- C.** $\int \sin \sqrt{x} dx = \cos \sqrt{x} + C$. **D.** $\int \sin \sqrt{x} dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} + C$.

BÀI 2 - TÍCH PHÂN**▲_DẠNG 1. TÍCH PHÂN DÙNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT****PHƯƠNG PHÁP:****1. Định nghĩa**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Tính chất:

$$\bullet \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\bullet \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\bullet \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\bullet \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Giá trị của $\int_{-1}^0 e^{x+1} dx$ bằng

A. $1-e$.B. $e-1$.C. $-e$.D. e .**Lời giải****Chọn B**

$$\text{Ta có } \int_{-1}^0 e^{x+1} dx = e^{x+1} \Big|_{-1}^0 = e-1.$$

Ví dụ 1. Cho biết $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = -2$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [2x + f(x) - 2g(x)] dx$.

A. $I = 11$.B. $I = 18$.C. $I = 5$.D. $I = 3$.**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 [2x + f(x) - 2g(x)] dx = \int_0^2 2x dx + \int_0^2 f(x) dx - 2 \int_0^2 g(x) dx = 4 + 3 - 2(-2) = 11.$$

Ví dụ 3. Cho $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_1^5 (2f(x)) dx = 6$ khi đó $\int_0^5 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải**Chọn A**

$$\int_1^5 (2f(x)) dx = 6 \Leftrightarrow \int_1^5 f(x) dx = 3$$

$$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = -2 + 3 = 1.$$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG:

Câu 1. Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

A. $\int_1^2 (x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^2$.

B. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx = (\sin x) \Big|_{\pi}^{2\pi}$.

C. $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx = (\ln x) \Big|_{-3}^{-2}$.

D. $\int_1^3 e^x dx = (e^x) \Big|_1^3$.

Câu 2. Tích phân $\int_0^1 x(x^2+3)dx$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. $\frac{4}{7}$.

D. $\frac{7}{4}$.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

A. $I = -\frac{21}{100}$.

B. $I = \ln \frac{5}{2}$.

C. $I = \log \frac{5}{2}$.

D. $I = \frac{4581}{5000}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $F(2) - F(0) = 16$.

B. $F(2) - F(0) = 1$.

C. $F(2) - F(0) = 8$.

D. $F(2) - F(0) = 4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(-1) = -2$ và $f(3) = 2$. Tính $I = \int_{-1}^3 f'(x)dx$

A. $I = 4$.

B. $I = 3$.

C. $I = 0$.

D. $I = -4$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(b) = 5$ và $\int_a^b f'(x)dx = 1$, khi đó $f(a)$ bằng

A. -6.

B. 6.

C. -4.

D. 4.

Câu 7. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 3$, $\int_2^5 f(x)dx = -1$ thì $\int_1^5 f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. 4.

Câu 8. Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + 2g(x)]dx$ bằng

A. -3.

B. -8.

C. 12.

D. 1.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^2 f(x)dx = 3$, $\int_0^2 f(x)dx = -5$. Giá trị của biểu

thức $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 8.

B. -11.

C. -8.

D. -2.

- Câu 10.** Biết $\int_2^5 f(x)dx = 3$, $\int_2^5 g(x)dx = 9$. Tích phân $\int_2^5 [f(x) + g(x)]dx$ bằng
A. 10. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 12.
- Câu 11.** Cho $\int_{-2}^0 f(x)dx = 2$, $\int_0^2 f(x)dx = 2$. Tích phân $\int_{-2}^2 f(x)dx$ bằng
A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 1.
- Câu 12.** Cho biết $\int_0^1 \frac{x-1}{x+2}dx = a + b \ln \frac{3}{2}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a - 2b$ bằng
A. 6. **B.** 3. **C.** -5. **D.** 7.
- Câu 13.** Tìm số thực $a < 0$ thỏa mãn $\int_1^a (x^3 - 6x)dx = \frac{875}{4}$.
A. $a = -4$. **B.** $a = -5$. **C.** $a = -6$. **D.** $a = -3$.
- Câu 14.** Giá trị của tích phân $\int_1^2 \frac{dx}{2x+5}$ là $\frac{1}{a} \ln \frac{b}{c}$. Tổng $a + b + c$ bằng
A. 18. **B.** 14. **C.** 16. **D.** 10.
- Câu 15.** Biết $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1}dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ (a, b, c là các số nguyên). Giá trị $a + b - c$ bằng
A. 2. **B.** -4. **C.** 3. **D.** -1.
- Câu 16.** Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 - \sin x)dx = a\pi + b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng
A. -4. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 1.
- Câu 17.** Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)dx$ bằng
A. $b^3 - b^2a - b$. **B.** $b^3 + b^2a + b$. **C.** $b^3 - ba^2 - b$. **D.** $3b^2 - 2ab - 1$.
- Câu 18.** Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị $a + b$ bằng
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.
- Câu 19.** Có bao nhiêu số thực $a \in (0; 2\pi]$ sao cho $\int_0^1 \cos^2(ax)dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4a}$.
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.
- Câu 20.** Biết $I = \int_1^3 \frac{x+2}{x}dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.
A. $S = 7$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 8$. **D.** $S = 6$.

▲_DẠNG 2. TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

1. ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

PHƯƠNG PHÁP:

Để tính tích phân: $I = \int_a^b g(x)dx$ ta thực hiện các bước:

✓ **Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$

✓ **Bước 2.** Thực hiện phép đổi cận:

Với $x = a$ thì $t = u(a)$.

Với $x = b$ thì $t = u(b)$. (Nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)

✓ **Bước 3.** Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$ đơn giản và dễ tính hơn.

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tích phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt
1.	Có $\sqrt{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)}$
2.	Có $(ax+b)^n$	$t = ax+b$
3.	Có $a^{f(x)}$	$t = f(x)$
4.	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t = \ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$
5.	Có $e^x dx$	$t = e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x
6.	Có $\sin x dx$	$t = \cos x$
7.	Có $\cos x dx$	$t = \sin x$
8.	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$
9.	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$:

A. $I = \frac{16}{5}$.

B. $I = \frac{31}{10}$.

C. $I = \frac{1}{10}$.

D. $I = -\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$

Nên $I = \int_1^2 \frac{t^4}{2} dt = \frac{t^5}{10} \Big|_1^2 = \frac{31}{10}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du$.

B. $I = \int_1^2 \sqrt{u} du$.

C. $I = \int_0^3 \sqrt{u} du$.

D. $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du$

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$$

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2xdx$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0$; $x=2 \Rightarrow u=3$

Nên $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$.

B. $I = -\pi^4$.

C. $I = 0$.

D. $I = -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow -dt = \sin x dx$

Đổi cận: với $x=0 \Rightarrow t=1$;

với $x=\pi \Rightarrow t=-1$.

Vậy $I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \left. \frac{t^4}{4} \right|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x^2 + x + 2)^5 (2x+1)dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = (x^2 + x)^5 dx$.

B. $t = 2x+1$.

C. $t = (x^2 + x)^5 (2x+1)$.

D. $t = x^2 + x + 2$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 \sqrt{x^5 + x^3 + 1} (5x^4 + 3x^2) dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = (x^5 + x^3) dx$.

B. $t = 5x^4 + 3x^2$.

C. $t = \sqrt{x^5 + x^3 + 1}$.

D. $t = \sqrt{x^5 + x^3} dx$.

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^5 x dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = \frac{1}{x}$.

B. $t = \ln x$.

C. $t = \ln^5 x$.

D. $t = \frac{dx}{x}$.

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^{x^2+x} (2x+1) dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = x^2 + 3x + 1$.

B. $t = 2x+1$.

C. $t = x^2 + x$.

D. $t = e^{x^2+x} (2x+1)$.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int_0^1 3^{x^3+x} (3x^2+1) dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = x^3 + 3x^2$.

B. $t = 3x^2 + x$.

C. $t = x^3 + x$.

D. $t = 3^{x^3+x} (3x^2+1)$.

Câu 6. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x \cdot \sin x dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = \cos^6 x$.

B. $t = \sin x$.

C. $t = \cos x$.

D. $t = \cos^6 x \cdot \sin x$.

- Câu 7.** Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất
- A. $t = \tan^6 x$. B. $t = \tan x$. C. $t = \cos x$. D. $t = \cos^2 x$.
- Câu 8.** Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{b}$ khi đó $a+b$ bằng
- A. 6. B. 8. C. 9. D. 10.
- Câu 9.** Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$, với cách đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?
- A. $\int_0^{\sqrt{2}} t dt$. B. $\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt$. C. $\int_0^{\sqrt{2}} t^2 dt$. D. $\int_1^{\sqrt{2}} dt$.
- Câu 10.** Tích phân $\int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x dx$ bằng
- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 11.** Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.
- A. 1. B. 9. C. 3. D. 7.
- Câu 12.** Cho $\int_0^4 f(x) dx = 2018$. Tính tích phân $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx$
- A. $I = 0$. B. $I = 2018$. C. $I = 4036$. D. $I = 1009$.
- Câu 13.** Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x) dx = 32$. Tính tích phân $J = \int_0^2 f(2x) dx$.
- A. $J = 32$. B. $J = 64$. C. $J = 8$. D. $J = 16$.
- Câu 14.** Cho $I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó $a+b$ bằng
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 4.
- Câu 15.** Với cách đổi biến $u = \sqrt{1+3\ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+3\ln x}} dx$ trở thành
- A. $\frac{2}{3} \int_1^2 (u^2-1) du$. B. $\frac{2}{9} \int_1^2 (u^2-1) du$. C. $2 \int_1^2 (u^2-1) du$. D. $\frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2-1}{u} du$.

2. ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Để tính tích phân: $I = \int_a^b f(x) dx$, mà biểu thức dưới dấu tích phân có dạng:

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

3. $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a \cdot \cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn.

Ví dụ, để tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì phải đổi biến dạng 2.

Còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = \sin t$ ta có $dx = \cos t dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{12}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x = \tan t$, ta có $dx = (1 + \tan^2 t) dt$.

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 3. Khi đổi biến $x = \sqrt{5} \tan t$ thì tích phân $I = \int_0^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x^2 + 5}$ trở thành tích phân nào sau đây?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{5} dt.$

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5}}{5} dt.$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{5} t dt.$

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt.$

Lời giải

Chọn B

Đổi biến số

$$x = \sqrt{5} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{5} (1 + \tan^2 t) dt$$

Đổi cận.

$$x = \sqrt{5} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}; x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5} (1 + \tan^2 t) dt}{5 \tan^2 t + 5} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5} (1 + \tan^2 t) dt}{5 (\tan^2 t + 1)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{5} dt}{5}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 16. Tính tích phân $I = \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + 16}$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = x^2 + 16.$

B. $t = 4 \sin x.$

C. $x = 4 \tan t.$

D. $x = t^2 + 4.$

Câu 17. Tính tích phân $I = \int_0^5 \frac{dx}{x^2 + 25}$ chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $t = x^2 + 25.$

B. $x = t^2 + 5.$

C. $t = 5 \sin x.$

D. $x = 5 \tan t.$

Câu 18. Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, chọn cách đổi biến hợp lí nhất

A. $x = 2 \tan t.$

B. $t = 4 - x^2.$

C. $x = 2 \sin t.$

D. $t = 2 \sin x.$

Câu 19. Đổi biến số $x = 4 \sin t$ của tích phân $\int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16 - x^2} dx$ ta được:

A. $I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$

B. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt.$

C. $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt.$

D. $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt.$

Câu 20. Tích phân $\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{\frac{9}{25} + x^2}$ bằng

A. $\frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt.$

B. $\frac{5}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt.$

C. $-\frac{3}{5} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt.$

D. $-\frac{5}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt.$

▲_DẠNG 3. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

1. Dạng 1. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx$

PHƯƠNG PHÁP:

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \int \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \\ e^{ax} \end{bmatrix} dx \end{cases}$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x dx$.

A. $I = e^2$.

B. $I = -e^2$.

C. $I = e$.

D. $I = 3e^2 - 2e$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = \int_1^2 xe^x dx = xe^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x \Big|_1^2 \\ = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$.

A. $I = \frac{5-3e^2}{4}$.

B. $I = \frac{5-3e^2}{4}$.

C. $I = \frac{5-3e^2}{4}$.

D. $I = \frac{5-3e^2}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \text{ (chọn } C=0)$

$$\Rightarrow I = (x-2)\frac{1}{2}e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{5-3e^2}{4}$$

Ví dụ 3. Tích phân $\int_0^{\pi} (3x+2)\cos^2 x dx$ bằng

A. $\frac{3}{4}\pi^2 - \pi$.

B. $\frac{3}{4}\pi^2 + \pi$.

C. $\frac{1}{4}\pi^2 + \pi$.

D. $\frac{1}{4}\pi^2 - \pi$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $I = \int_0^{\pi} (3x+2)\cos^2 x \, dx$. Ta có:

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (3x+2)(1+\cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi} (3x+2) \, dx + \int_0^{\pi} (3x+2)\cos 2x \, dx \right] = \frac{1}{2}(I_1 + I_2).$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} (3x+2) \, dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi^2 + 2\pi.$$

$I_2 = \int_0^{\pi} (3x+2)\cos 2x \, dx$. Dùng tích phân từng phần

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x+2 \\ dv = \cos 2x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 \, dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

Khi đó

$$I_2 = \frac{1}{2} (3x+2) \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx$$

$$= 0 + \frac{3}{4} (\cos 2x) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\pi^2 + 2\pi \right) = \frac{3}{4}\pi^2 + \pi.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x-1)\cos x \, dx$

A. $\pi - 2$.

B. $\pi - 3$.

C. $\pi - 1$.

D. $\pi - 4$.

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x \, dx$

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{7}{9}$.

C. $\frac{8}{9}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Câu 3. Tính tích phân $I_8 = \int_1^2 (2x-1)e^x \, dx$

A. $e^2 - e$.

B. $e^2 + e + 1$.

C. $e^2 + e$.

D. $e^2 + e - 1$.

Câu 4. Tính tích phân $I = \int_0^1 (x-1)e^{3x} \, dx$

A. $\frac{4-e^2}{9}$.

B. $\frac{4+e^3}{9}$.

C. $\frac{4-2e^3}{9}$.

D. $\frac{4-e^3}{9}$.

Câu 5. Cho $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$. Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

- A.** $I = 3e - 1 + 2 \int_0^1 e^x dx$. **B.** $I = 3e - 1 - 2 \int_0^1 e^x dx$. **C.** $I = 3e + 2 \int_0^1 e^x dx$. **D.** $I = 3e - 2 \int_0^1 e^x dx$.

Câu 6. Biết tích phân $\int_0^1 (x-3)e^x dx = a + be$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tìm tổng $a+b$.

- A.** $a+b=1$. **B.** $a+b=25$. **C.** $a+b=4-3e$. **D.** $a+b=-1$.

Câu 7. Cho biết tích phân $I = \int_1^e x(2x^2 + \ln x) dx = \frac{a.e^4 + b.e^2 + c}{4}$ với a, b, c là các ước nguyên của 4.

Tính tổng: $a+b+c$

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8. Cho $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = 2$ và $2f(1) - f(0) = 1$. Tính $\int_0^1 f(x) dx = ?$

- A.** $I = -1$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = -2$. **D.** $I = 2$.

Câu 9. Biết $\int_0^1 (x+2020)e^x dx = a.e + b$. Với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a+b$

- A.** $T = 1$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 4$.

Câu 10. Tính $I = \int_1^2 xe^x dx$.

- A.** $I = e^2$. **B.** $I = -e^2$. **C.** $I = 3e^2 - 2e$. **D.** $I = e$.

2. Dạng 2: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \ln(ax) dx$

PHƯƠNG PHÁP:

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \ln(ax) \\ dv = f(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int f(x) dx \end{cases}$$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a.e^2 + b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a+b+c$.

- A.** 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Vậy $T = a + b + c = 6$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_4^5 (x+1) \ln(x-3) dx$?

- A. $10 \ln 2$. B. $10 \ln 2 + \frac{19}{4}$. C. $\frac{19}{4} - 10 \ln 2$. D. $10 \ln 2 - \frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-3) \\ dv = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-3} dx \\ v = \frac{1}{2} x^2 + x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \ln(x-3) \Big|_4^5 - \int_4^5 \frac{\frac{1}{2} x^2 + x}{x-3} dx \\ &= \frac{35}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_4^5 \frac{x^2 - 9 + 9}{x-3} dx - \int_4^5 \frac{x-3+3}{x-3} dx \\ &= \frac{35}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + 3 + 9 \ln 2 \right) - (1 + 3 \ln 2) \\ &= 10 \ln 2 - \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

- A. 33. B. 25. C. 42. D. 39.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_0^2 2x \ln(x+1) dx = 6.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= (x^2 - 1) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx \\ &= 3 \ln 3 - \int_0^2 (x-1) dx = 3 \ln 3 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3. \end{aligned}$$

Vậy $a = 3, b = 3 \Rightarrow 6a + 7b = 39$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 11. Tính tích phân $I = \int_1^e (x+2) \ln x \, dx$:

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{e^2 - 2}{2}$. C. $I = \frac{e^2 + 1}{4}$. D. $I = \frac{e^2 - 1}{4}$.

Câu 12. Nếu đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x+1)dx \end{cases}$ thì tích phân $I = \int_1^e (2x+1) \ln x \, dx$ trở thành

- A. $I = (x^2 + x) \Big|_1^e - \int_1^e (x+1) dx$. B. $I = x^2 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x+1) dx$.
C. $I = x^2 \ln x \Big|_1^e + \int_1^e x \, dx$. D. $I = (x^2 + x) \ln x \Big|_1^e + \int_1^e (x+1) dx$.

Câu 13. Tính tích phân $J = \int_0^2 x \ln(x+1) \, dx$

- A. $J = \frac{4}{3} \ln 3$. B. $J = \frac{5}{3} \ln 3$. C. $J = \frac{3}{2} \ln 3$. D. $J = \frac{3}{4} \ln 3$.

Câu 14. Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

- A. 42. B. 21. C. 12. D. 32.

Câu 15. Biết $\int_2^3 \ln(x-1) dx = a \ln 2 + b$ với a, b là các số nguyên. Khi đó, $a + b$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 16. Tích Phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$ là:

- A. $3 \ln 3$. B. $2 \ln 2$. C. $3 \ln 3 - 2$. D. $2 - 3 \ln 3$.

Câu 17. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ bằng:

- A. $\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$. B. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$. C. $\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)$. D. $\frac{1}{4}(1 + \ln 2)$.

Câu 18. Tích phân $K = \int_1^2 (2x-1) \ln x dx$ bằng:

- A. $K = 3 \ln 2 + \frac{1}{2}$. B. $K = \frac{1}{2}$. C. $K = 3 \ln 2$. D. $K = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Câu 19. Cho $\int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{3e^a + 1}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 20. B. 10. C. 17. D. 12.

Câu 20. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

A. 33.

B. 25.

C. 42.

D. 39.

3. Dạng 3: $\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax} \cdot \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} dx$

PHƯƠNG PHÁP:

Đặt: $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin ax \\ \cos ax \end{bmatrix} \\ dv = e^{ax} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \begin{bmatrix} a \cos ax \\ -a \sin ax \end{bmatrix} dx \\ v = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$.

A. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 2}{2}$.

B. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{2}$.

C. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$.

D. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$I = \cos x \cdot e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^x dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^x dx \quad (*)$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^x dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$J = \sin x \cdot e^x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^x dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - I \quad (2*)$$

Thay (2*) vào (*) ta có: $I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{-x} dx$.

A. $\frac{-e^{\frac{\pi}{2}} + 2}{2}$.

B. $\frac{-e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{2}$.

C. $\frac{-e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$.

D. $\frac{-e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{-x} dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = -\sin x \cdot e^{-x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{-x} dx = -e^{-\frac{\pi}{2}} + J(*)$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{-x} dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\sin x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$J = -\cos x \cdot e^{-x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{-x} dx$$

$$= 1 - I \quad (2*)$$

$$\text{Thay (2*) vào (*) ta có: } I = \frac{-e^{-\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.$$

Ví dụ 3. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \sin 2x dx$

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \sin x \cos x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sin x \\ dv = e^{\sin x} \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos x dx \\ v = e^{\sin x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = 2 \sin x e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cdot \cos x dx$$

$$= 2e - 2e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 21. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos 2x dx$:

A. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 1}{5}.$

B. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 2}{5}.$

C. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 3}{5}.$

D. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - 4}{5}.$

Câu 22. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x} \cos 2x dx$:

A. $I = \frac{1 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

B. $I = \frac{2 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

C. $I = \frac{3 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

D. $I = \frac{4 - 2e^{-\frac{\pi}{4}}}{3}.$

Câu 23. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$.

A. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + 2.$

B. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + 1.$

C. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + 3.$

D. $I = e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}.$

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \sin 2x dx$.

A. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 3}{5}.$

B. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 1}{5}.$

C. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 2}{5}.$

D. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} + 4}{5}.$

Câu 25. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \sin 3x dx$

A. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{7}.$

B. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{8}.$

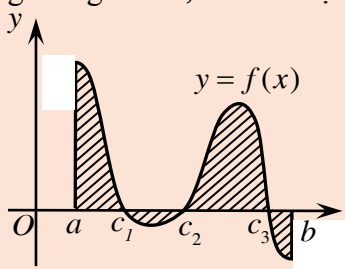
C. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{9}.$

D. $I = \frac{e^{\frac{\pi}{6}} + 1}{10}.$

BÀI 3: ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC**▲_DẠNG 1. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG.****PHƯƠNG PHÁP:**

❶ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành

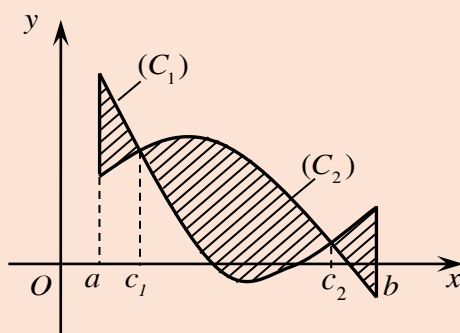
và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)| dx$.



$$(H) \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \quad \boxed{S = \int_a^b |f(x)| dx}$$

❷ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và

hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



$$(H) \begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

Chú ý:

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx}$$

- Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

- Nhớ vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2 - x^2$ và $y = x$.

A. $\frac{9}{2}$.

B. 7.

C. 5.

D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là: $2 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$.

Diện tích của hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-2}^1 |-x^2 - x + 2| dx = \left| \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx \right| = \left| \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \right|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$. **B.** $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$. **C.** $S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$. **D.** $S = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)^2 dx$.

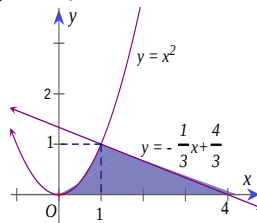
Lời giải

Chọn B

Ta có $S = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x^2} \right| dx$.

Vì $\forall x \in [1; e]$, $\ln x \geq 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x^2} \geq 0 \Rightarrow S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Ví dụ 3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ và trục hoành như hình vẽ.



A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{56}{3}$. **C.** $\frac{39}{2}$. **D.** $\frac{11}{6}$

Lời giải

Chọn D

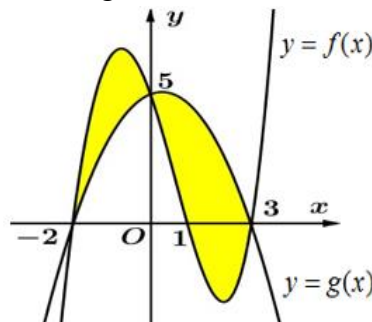
Dựa vào đồ thị ta có:

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^4 \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{4}{3}x \right) \Big|_1^4 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}.$$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG:

Câu 1. Diện tích phần hình phẳng tô đen trong hình vẽ bên dưới được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^3 (f(x) - g(x)) dx$. **B.** $\int_{-2}^3 (g(x) - f(x)) dx$.

C. $\int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^3 (g(x) - f(x)) dx.$ D. $\int_{-2}^0 (g(x) - f(x)) dx + \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx.$

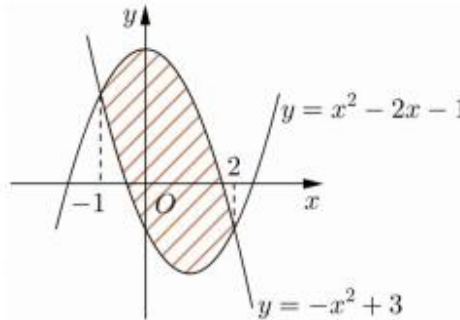
Câu 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^3 + 11x - 6$ và $y = 6x^2$ là

A. 52. B. 14. C. $\frac{1}{4}.$ D. $\frac{1}{2}.$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ bằng

A. $\frac{7}{3}.$ B. $\frac{4}{3}.$ C. $\frac{8}{3}.$ D. 1.

Câu 4. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x + 4) dx.$ B. $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$
C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$ D. $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

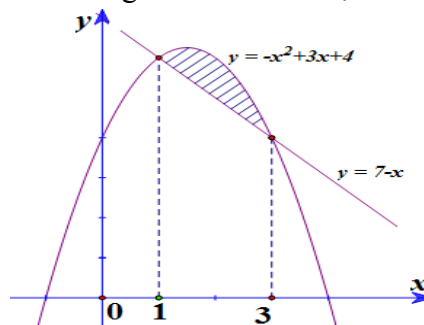
Câu 5. Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

A. $S = \frac{937}{12}.$ B. $S = \frac{343}{12}.$ C. $S = \frac{793}{4}.$ D. $S = \frac{397}{4}.$

Câu 6. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H): y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

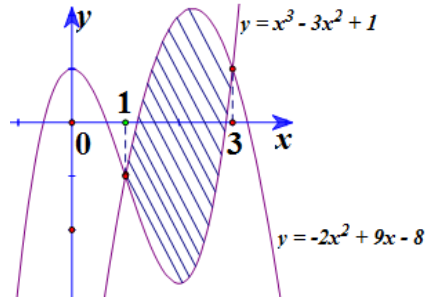
A. $S = 2\ln 2 - 1.$ B. $S = \ln 2 + 1.$ C. $S = \ln 2 - 1.$ D. $S = 2\ln 2 + 1.$

Câu 7. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx.$ B. $\int_1^3 (-x^2 + 2x + 11) dx.$
C. $\int_1^3 (x^2 - 2x - 11) dx.$ D. $\int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx.$

Câu 8. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



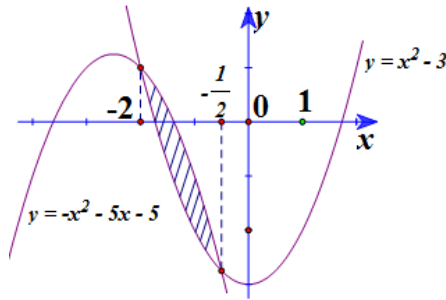
A. $\int_1^3 (x^3 - 5x^2 + 9x - 7) dx.$

B. $\int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 9x + 7) dx.$

C. $\int_1^3 (-x^3 + x^2 + 9x - 9) dx.$

D. $\int_1^3 (x^3 - x^2 - 9x + 9) dx.$

Câu 9. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (5x - 8) dx.$

B. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (2x^2 + 5x + 2) dx.$

C. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-5x - 8) dx.$

D. $\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} (-2x^2 - 5x - 2) dx.$

Câu 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^3$ và $y = x^5$?

A. $S = 1.$ B. $S = 2.$ C. $S = \frac{1}{6}.$ D. $S = \frac{1}{3}.$

Câu 11. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}.$ B. $S = 2008.$ C. $S = 2000.$ D. $S = \frac{2008}{3}.$

Câu 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox .

A. 11. B. $\frac{34}{3}.$ C. $\frac{31}{3}.$ D. $\frac{32}{3}.$

Câu 13. Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^{2x}$, trục Ox, Oy và đường thẳng $x = 2$. Tính S hình phẳng trên.

A. $e^4 - 1.$ B. $\frac{1}{2}(e^4 - 1).$ C. $\frac{1}{2}e^4.$ D. $\frac{1}{2}(e^4 + 1).$

Câu 14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $(P): y = -\frac{1}{3}(x^2 - 8x + 7)$, $(H): y = \frac{x-7}{3-x}$.

A. 3,455. B. $9 - 8\ln 2.$ C. $3 - \ln 4.$ D. $\frac{161}{9} + 4\ln 3 + 8\ln 2.$

Câu 15. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}$.

B. $S = 2008$.

C. $S = 2000$.

D. $S = \frac{2008}{3}$.

▲_DẠNG 2. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH.

PHƯƠNG PHÁP:

1. Bài toán 1: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y = f(x)$; $y = 0$ và $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox .

* Phương pháp giải: Áp dụng công thức: $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

2. Bài toán 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y = f(x)$; $y = g(x)$ quay quanh trục Ox .

* Phương pháp giải:

• Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = a$, $x = b$

• Khi đó thể tích cần tìm: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{4\pi}{3}$.

B. $V = 2\pi$.

C. $V = \frac{4}{3}$.

D. $V = 2$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Ví dụ 2. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = -x^3 + x^2 + 2$, $y = 2$.

A. $\frac{12}{35}\pi$.

B. $\frac{3564}{35}\pi$.

C. $\frac{3654}{35}\pi$.

D. $\frac{729}{35}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } -x^3 + x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Thể tích: } V = \pi \int_0^1 \left| (-x^3 + x^2 + 2)^2 - 2^2 \right| dx = \frac{12}{35}\pi.$$

B. BÀI TẬP ỨNG DỤNG:

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **D.** $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$.

Câu 17. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sin x$; Ox ; $x = 0$; $x = \pi$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

A. $\frac{\pi^2}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** π . **D.** π^2 .

Câu 18. Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$. **B.** $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. **C.** $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. **D.** $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$.

Câu 19. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y = \sqrt{\ln x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 2$ quay xung quanh trục Ox .

A. $2 \ln 2 + 1$. **B.** $2\pi \ln 2 + \pi$. **C.** $2\pi \ln 2 - \pi$. **D.** $2 \ln 2 - 1$.

Câu 20. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2\pi^2$. **B.** $V = 2\pi(\pi + 1)$. **C.** $V = 2\pi$. **D.** $V = 2(\pi + 1)$.

Câu 21. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. **B.** $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. **C.** $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. **D.** $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 22. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. **B.** $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$. **C.** $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$. **D.** $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$.

Câu 23. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. **B.** $V = \int_a^b f^2(x) dx$. **C.** $V = \pi \int_a^b f(x) dx$. **D.** $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

Câu 24. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 3x - x^2, y = 0$.

A. $\frac{16}{15}$. B. $\frac{16}{15}\pi$. C. $\frac{81}{10}\pi$. D. $\frac{16}{15\pi}$.

Câu 25. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2x^2, y = x^3$.

A. $\frac{1536}{35}\pi$. B. $\frac{256}{35}\pi$. C. $\frac{1536}{35}$. D. $\frac{265}{35}$.

Câu 26. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^3, y = 0, x = 1$.

A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{4\pi}{7}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{7}$.

Câu 27. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2x^2 - 3; y = 1; y = 2; x = 0$.

A. 8π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{9\pi}{4}$. D. $\frac{206}{15}$.

Câu 28. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $xy = 9, y = 0, x = 1, x = 3$.

A. 54π . B. 6π . C. 12π . D. 6 .

Câu 29. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = 2 \ln x, y = 0, x = 1, x = e$.

A. π . B. $e - 2$. C. $\pi(e - 2)$. D. $4\pi(e - 2)$.

Câu 30. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục tung hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^3; y = 0; x = 1$.

A. $\frac{56\pi}{5}$. B. $\frac{2\pi}{5}$. C. $\frac{93}{5}$. D. $\frac{\pi}{7}$.