

Mục lục

1 MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP	11
1. MỆNH ĐỀ	11
I. Tóm tắt lí thuyết	11
1. Mệnh đề	11
2. Mệnh đề chứa biến	11
3. Mệnh đề phủ định	11
4. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo	12
5. Mệnh đề tương đương	12
6. Các kí hiệu \forall và \exists	12
II. Các dạng toán	13
Dạng 1. Mệnh đề có nội dung đại số và số học	13
Dạng 2. Mệnh đề có nội dung hình học	18
Dạng 3. Thành lập mệnh đề - Mệnh đề phủ định	21
2. TẬP HỢP	25
I. Tóm tắt lí thuyết	25
1. Tập hợp và phần tử	25
2. Cách xác định tập hợp	25
3. Tập hợp rỗng	25
4. Tập con. Hai tập hợp bằng nhau	25
5. Tính chất	25
II. Các dạng toán	25
Dạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp	25
Dạng 2. Tập hợp rỗng	29
Dạng 3. Tập con. Tập bằng nhau	31
3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP	37
I. Tóm tắt lí thuyết	37
1. Giao của hai tập hợp	37
2. Hợp của hai tập hợp	37
3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp	37
II. Các dạng toán	38
Dạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp	38
Dạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp	40
Dạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$ để giải toán	41
4. CÁC TẬP HỢP SỐ	48
I. Tóm tắt lí thuyết	48
1. Các tập hợp số đã học	48
2. Các tập con thường dùng của \mathbb{R}	48
II. Các dạng toán	49
Dạng 1. Xác định giao - hợp của hai tập hợp	49
Dạng 2. Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp	53

	Dạng 3. Tìm m thỏa điều kiện cho trước	56
5.	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I	62
	I. Đề số 1a	62
	II. Đề số 1b	62
	III. Đề số 2a	63
	IV. Đề số 2b	64
	V. Đề số 3a	65
	VI. Đề số 3b	66
	VII. Đề số 4a	68
	VIII. Đề số 4b	69
2	HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI	73
1.	ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ	73
	I. Tóm tắt lí thuyết	73
	1. Hàm số và tập xác định của hàm số	73
	2. Cách cho hàm số	73
	3. Đồ thị của hàm số	73
	4. Sự biến thiên của hàm số	73
	5. Tính chẵn lẻ của hàm số	74
	II. Các dạng toán	74
	Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số	74
	Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm	75
	Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số	77
	Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất	81
	Dạng 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số	84
2.	HÀM SỐ $Y = AX + B$	88
	I. Tóm tắt lí thuyết	88
	II. Các dạng toán	88
	Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất	88
	Dạng 2. Xác định hệ số a và b của số bậc nhất	91
	Dạng 3. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có chứa giá trị tuyệt đối	93
	Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi hệ nhiều công thức	96
	Dạng 5. Sự tương giao giữa các đường thẳng	98
3.	HÀM SỐ BẬC HAI	103
	I. Tóm tắt lí thuyết	103
	1. Hàm số bậc hai	103
	2. Đồ thị của hàm số bậc hai	103
	3. Chiều biến thiên của hàm số bậc hai	103
	4. Phương trình hoành độ giao điểm	104
	5. Định lý Vi-ét	104
	6. Một vài công thức cần nhớ	105
	II. Các dạng toán	105
	Dạng 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai	105
	Dạng 2. Tìm tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tọa độ giao điểm giữa parabol (P) và một đường thẳng.	109
	Dạng 3. Dựa vào đồ thị biện luận theo m số giao điểm của parabol (P) và đường thẳng.	111
	Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.	113
	Dạng 5. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số trị tuyệt đối của một hàm bậc hai	117
	Dạng 6. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số đối với trị tuyệt đối của biến	118
	Dạng 7. Tính đơn điệu của hàm bậc hai	120
4.	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II	125

I.	Đề số 1a	125
II.	Đề số 1b	127
III.	Đề số 2a	129
IV.	Đề số 2b	131
V.	Đề số 3a	132
VI.	Đề số 3b	134
VII.	Đề số 4a	135
VIII.	Đề số 4b	138
IX.	Đề số 5a	140
X.	Đề số 5b	142
3	PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	145
1.	MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH	145
I.	Tìm tập xác định của phương trình	145
	Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình	145
II.	Phương trình hệ quả	150
	1. Tóm tắt lí thuyết	150
	2. Các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả thường gặp	150
	3. Phương pháp giải phương trình dựa vào phương trình hệ quả	150
	Dạng 2. Khử mẫu (nhân hai vế với biểu thức)	151
	Dạng 3. Bình phương hai vế (làm mất căn)	153
III.	Phương trình tương đương	156
	Dạng 4. Phương pháp chứng minh hai phương trình tương đương	157
	Bài tập tổng hợp	160
2.	PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI	164
I.	Tóm tắt lí thuyết	164
II.	Các dạng toán	164
	Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất	164
	Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn	168
	Dạng 3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối	173
	Dạng 4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương trình bậc bốn trùng phương	180
	Dạng 5. Biện luận theo m có áp dụng định lí Viète	184
	Bài tập tổng hợp	187
3.	PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN	194
I.	Tóm tắt lí thuyết	194
	1. Phương trình bậc nhất hai ẩn	194
	2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	194
	3. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn	194
II.	Các dạng toán	195
	Dạng 1. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số	195
	Dạng 2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn	200
	Dạng 3. Giải và biện luận hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có chứa tham số (PP Crame)	204
4.	HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN	211
I.	Hệ phương trình gồm các phương trình bậc nhất và bậc hai	211
II.	Hệ phương trình đối xứng loại 1	214
III.	Hệ phương trình đối xứng loại 2	217
	Dạng 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại 2.	217
	Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số thỏa điều kiện cho trước.	219
IV.	Hệ phương trình đẳng cấp	222
V.	Hệ phương trình hai ẩn khác	227

5.	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III	236
I.	Đề số 1a	236
II.	Đề số 1b	237
III.	Đề số 2a	238
IV.	Đề số 2b	239
V.	Đề số 3a	241
VI.	Đề số 3b	242
4	BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH	245
1.	BẤT ĐẲNG THỨC	245
I.	Tóm tắt lí thuyết	245
1.	Các khái niệm	245
2.	Tính chất	245
II.	Các dạng toán	246
	Dạng 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương	246
	Dạng 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si	249
	Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki	256
	Dạng 4. Sử dụng các bất đẳng thức hệ quả	257
	Dạng 5. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tọa độ véc-tơ	258
	Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối	259
2.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN	261
I.	Tóm tắt lí thuyết	261
1.	Giải và biện luận bất phương trình $ax + b > 0$	261
2.	Giải và biện luận bất phương trình $ax + b \leq 0$	261
II.	Các dạng toán	261
	Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn	261
	Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn	267
	Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước	268
	Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn	270
	Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn	272
	Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước	274
3.	DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT	278
I.	Tóm tắt lí thuyết	278
1.	Nhị thức bậc nhất	278
2.	Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất	278
3.	Các ví dụ minh họa	279
II.	Các dạng toán	279
	Dạng 1. Xét dấu tích - thương các nhị thức bậc nhất	279
	Dạng 2. Xét dấu nhị thức có chứa tham số	285
	Dạng 3. Giải bất phương trình tích	289
	Dạng 4. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức	291
	Dạng 5. Giải bất phương trình bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối.	295
4.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	304
I.	Tóm tắt lí thuyết	304
1.	Bất phương trình bậc nhất hai ẩn	304
2.	Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn	304
II.	Các dạng toán	304
	Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn	304
	Dạng 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.	307
	Dạng 3. Các bài toán thực tiễn	309

5.	DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI	320
I.	Tóm tắt lí thuyết	320
1.	Tam thức bậc hai	320
2.	Định lí về dấu của tam thức bậc hai	320
3.	Định lí về dấu của tam thức bậc hai	320
4.	Bất phương trình bậc hai một ẩn	320
II.	Các dạng toán	320
	Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai	320
	Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai luôn mang một dấu	322
	Dạng 3. Giải bất phương trình bậc hai.	324
	Dạng 4. Bài toán có chứa tham số	330
6.	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV	334
I.	Đề số 1a	334
II.	Đề số 1b	335
III.	Đề số 2a	336
IV.	Đề số 2b	337
V.	Đề số 3a	338
VI.	Đề số 3b	339
VII.	Đề số 4a	339
VIII.	Đề số 4b	341
5	THỐNG KÊ	343
1.	BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT	343
I.	Tóm tắt lí thuyết	343
1.	Bảng phân bố tần số và tần suất	343
2.	Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp	343
II.	Các dạng toán	344
	Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất	344
	Dạng 2. Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp	346
2.	BIỂU ĐỒ	352
I.	Tóm tắt lí thuyết	352
1.	Biểu đồ tần suất hình cột	352
2.	Đường gấp khúc tần suất	352
3.	Biểu đồ hình quạt	352
II.	Các dạng toán	353
	Dạng 1. Vẽ biểu đồ tần số và tần suất hình cột	353
	Dạng 2. Biểu đồ đường gấp khúc	356
	Dạng 3. Biểu đồ hình quạt	361
3.	SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MÔT	365
I.	Tóm tắt lí thuyết	365
1.	Số trung bình cộng	365
2.	Số trung vị	365
3.	Mốt	365
II.	Các dạng toán	366
	Dạng 1. Số trung bình	366
	Dạng 2. Số trung vị	367
	Dạng 3. Mốt	368
4.	PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN	374
I.	Tóm tắt lí thuyết	374
II.	Các dạng toán	375
	Dạng 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu KHÔNG ghép lớp	375
	Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu ghép lớp	377

5.	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG V	383
I.	Đề số 1a	383
II.	Đề số 1b	384
III.	Đề số 2a	386
IV.	Đề số 2b	388
V.	Đề số 3a	390
VI.	Đề số 3b	392
6	CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	395
1.	CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC	395
I.	Tóm tắt lí thuyết	395
1.	Khái niệm cung và góc lượng giác	395
2.	Số đo của cung và góc lượng giác	396
II.	Các dạng toán	397
	Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian	397
	Dạng 2. Độ dài cung lượng giác	398
	Dạng 3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác	400
2.	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG	409
I.	Tóm tắt lí thuyết	409
1.	Định nghĩa	409
2.	Hệ quả	409
3.	Ý nghĩa hình học của tang và côtang	410
4.	Công thức lượng giác cơ bản	410
5.	Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt	410
II.	Các dạng toán	412
	Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác	412
	Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một cung	415
	Dạng 3. Sử dụng cung liên kết để tính giá trị lượng giác	418
	Dạng 4. Rút gọn biểu thức và chứng minh đẳng thức	419
3.	CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	424
I.	Công thức cộng	424
	Dạng 1. Công thức cộng	424
II.	Công thức nhân đôi	427
III.	Các dạng toán	428
	Dạng 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc cho trước	428
	Dạng 3. Rút gọn biểu thức cho trước	429
	Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác	429
IV.	Công thức biến đổi	432
	Dạng 5. Biến đổi một biểu thức thành một tổng hoặc thành một tích	432
	Dạng 6. Chứng minh một đẳng thức lượng giác có sử dụng nhóm công thức biến đổi	435
	Dạng 7. Dùng công thức biến đổi để tính giá trị (rút gọn) của một biểu thức lượng giác	440
	Dạng 8. Nhận dạng tam giác. Một số hệ thức trong tam giác	444
4.	ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG VI	457
I.	Đề số 1a	457
II.	Đề số 1b	458
III.	Đề số 2a	459
IV.	Đề số 2b	460
V.	Đề số 3a	462
VI.	Đề số 3b	464
VII.	Đề số 4a	465
VIII.	Đề số 4b	467

IX.	Đề số 5a	468
X.	Đề số 5b	469

Chương 1

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP


§1. MỆNH ĐỀ

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Mệnh đề

Định nghĩa 1. Mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định **hoặc đúng hoặc sai**.

- Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- Một câu khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**. Một câu khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**.

 *Những điểm cần lưu ý.*

- Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải là mệnh đề.
- Mệnh đề thường được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa.
Ví dụ: Q : “6 chia hết cho 3”.
- Một câu mà chưa thể nói đúng hay sai nhưng chắc chắn nó chỉ đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai cũng là một mệnh đề.
Ví dụ: “Có sự sống ngoài Trái Đất” là mệnh đề.
- Trong thực tế, có những mệnh đề mà tính đúng sai của nó luôn gắn với một thời gian và địa điểm cụ thể: đúng ở thời gian hoặc địa điểm này nhưng sai ở thời gian hoặc địa điểm khác. Nhưng ở bất kì thời điểm nào, địa điểm nào cũng luôn có giá trị chân lí đúng hoặc sai.
Ví dụ: Sáng nay bạn An đi học.

2. Mệnh đề chứa biến

Định nghĩa 2. Những câu khẳng định mà tính **đúng-sai** của chúng tùy thuộc vào giá trị của biến gọi là những **mệnh đề chứa biến**.

Ví dụ: Cho $P(x) : x > x^2$ với x là số thực. Khi đó $P(2)$ là mệnh đề sai, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ là mệnh đề đúng.

3. Mệnh đề phủ định

Định nghĩa 3. Cho mệnh đề P . Mệnh đề “**Không phải P** ” được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là \bar{P} .

- Mệnh đề P và mệnh đề phủ định \bar{P} là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì \bar{P} sai, nếu P sai thì \bar{P} đúng.
- Mệnh đề phủ định của P có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, xét mệnh đề P : “2 là số chẵn”. Khi đó, mệnh đề phủ định của P có thể phát biểu là \bar{P} : “2 không phải là số chẵn” hoặc “2 là số lẻ”.

4. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo

Định nghĩa 4. Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là **mệnh đề kéo theo**.

- Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi P đúng Q sai.
- $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P kéo theo Q ”, “ P suy ra Q ” hay “Vì P nên Q ”.

⚠ Chú ý

- Trong toán học, định lý là một mệnh đề đúng, thường có dạng: $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói P là giả thiết, Q là kết luận của định lý, hoặc P là điều kiện đủ để có Q , hoặc Q là điều kiện cần để có P .
- Trong logic toán học, khi xét giá trị chân lý của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ người ta không quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề P, Q . Không phân biệt trường hợp P có phải là nguyên nhân để có Q hay không mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của chúng.

Ví dụ: “Nếu mặt trời quay quanh trái đất thì Việt Nam nằm ở châu Âu” là một mệnh đề đúng. Vì ở đây hai mệnh đề P : “Mặt trời quay xung quanh trái đất” và Q : “Việt Nam nằm ở châu Âu” đều là mệnh đề sai.

Định nghĩa 5. Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

⚠ Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là một mệnh đề đúng.

5. Mệnh đề tương đương

Định nghĩa 6. Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề có dạng “ P nếu và chỉ nếu Q ” được gọi là mệnh đề tương đương.

- Ký hiệu là $P \Leftrightarrow Q$
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng hoặc cùng sai. (Hay $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai)
- $P \Leftrightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P khi và chỉ khi Q ”, “ P tương đương với Q ”, hay “ P là điều kiện cần và đủ để có Q ”.

⚠ Hai mệnh đề P, Q tương đương với nhau hoàn toàn không có nghĩa là nội dung của chúng như nhau, mà nó chỉ nói lên rằng chúng có cùng giá trị chân lý (cùng đúng hoặc cùng sai).

Ví dụ: “Hình vuông có một góc tù khi và chỉ khi 100 là số nguyên tố” là một mệnh đề đúng.

6. Các ký hiệu \forall và \exists

- Ký hiệu \forall (với mọi): “ $\forall x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\forall x \in X : P(x)$ ”.
- Ký hiệu \exists (tồn tại): “ $\exists x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\exists x \in X : P(x)$ ”.

⚠ Chú ý

- Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Mệnh đề có nội dung đại số và số học

Ví dụ 1. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- A : “ $\sqrt{6}$ là số hữu tỉ”.
- B : “ n chia hết cho 3 và 5 thì n chia hết cho 15”.
- C : “ $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 3 > 0$ ”.
- D : “ $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ ”.

Lời giải.

- \bar{A} : “ $\sqrt{6}$ không là số hữu tỉ”.
- \bar{B} : “ n không chia hết cho 3 hoặc n không chia hết cho 5 thì nó không chia hết cho 15”.
- \bar{C} : “ $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 3 \leq 0$ ”.
- \bar{D} : “ $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \neq 2$ ”.

Ví dụ 2. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 6 > 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$.

Lời giải.

- Mệnh đề đúng.
Phủ định là $\bar{A} : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 6 \leq 0$.
- Mệnh đề sai vì phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm trong \mathbb{R} .
Phủ định là $\bar{B} : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \neq 0$ ”.
- Mệnh đề đúng, ví dụ $x = \frac{1}{2}$.
Phủ định là $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x^2$

Ví dụ 3. Điều chỉnh các mệnh đề sau để được các mệnh đề đúng:

- $\forall x \in \mathbb{R} : 3x - 1 = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}$.

Lời giải.

- a) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x - 1 = 0$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$ hoặc $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$.
- d) $\exists x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}$.

Ví dụ 4. Chứng minh “Nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn.”

Lời giải.

Giả sử n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
 $\Rightarrow n^2$ là số lẻ (trái giả thiết).

Vậy n là số chẵn.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng:

- a) Với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.
- b) Với mọi số nguyên n thì $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 6.

Lời giải.

- a) Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$.
 Do $n-1, n, n+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.
 Khi đó $(n-1)n(n+1)$ chia hết cho 3 hay $n^3 - n$ chia hết cho 3.
- b) Ta có $n-1, n$ là 2 số nguyên liên tiếp nên tích $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 2.
 Xét 3 số nguyên liên tiếp $n-1, n, n+1$, trong 3 số này có ít nhất 1 số chia hết cho 3.
- Nếu 1 trong 2 số $n-1, n$ cho hết cho 3 thì tích $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 3.
 - Nếu $n+1$ chia hết cho 3 thì $2n-1 = 2(n+1) - 3$ cũng chia hết cho 3. Suy ra tích $n(n-1)(2n-1)$ chia hết cho 3.
- Vậy tích $n(n-1)(2n-1)$ vừa chia hết cho 2 vừa chia hết cho 3 nên chia hết cho 6.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Hãy xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau đây và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

- a) $A : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1”$.
- b) $B : “\exists x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 13x + 6 = 0”$.
- c) $C : “\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y = x + 2”$.
- d) $D : “\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 0”$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai, ví dụ như $x = 0$.
 Phủ định là $\bar{A} : “\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1”$.

b) Mệnh đề sai vì $6x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$, cả hai nghiệm đều không thuộc \mathbb{Z} .

Phủ định là \bar{B} : " $\forall x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 13x + 6 \neq 0$ ".

c) Mệnh đề đúng.

Phủ định là \bar{C} : " $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : y \neq x + 2$ ".

d) Mệnh đề sai, ví dụ $x = 1, y = -2$.

Phủ định là \bar{D} : " $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 0$ ".

Bài 2. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau. Nếu mệnh đề sai hãy sửa lại cho đúng:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 4 \Rightarrow x > 16$.

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 36 \Rightarrow x > 6$.

c) $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$.

d) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Leftrightarrow a > c$.

e) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases} \Leftrightarrow ab : 6$.

Lời giải.

a) Mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề sai, ví dụ $x = -7$.

Sửa lại là $\forall x \in \mathbb{R} : x > 6 \Rightarrow x^2 > 36$ hoặc $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 36 \Rightarrow x > 6$.

c) Mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$ là đúng.

Mệnh đề $a > c \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$ là sai, ví dụ như $a = 3, c = 1, b = 0$.

Như vậy mệnh đề $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$ là sai.

Sửa lại mệnh đề đúng là $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$.

e) Mệnh đề $\begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases} \Rightarrow ab : 6$ là đúng.

Mệnh đề $ab : 6 \Rightarrow \begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases}$ là sai, ví dụ như $a = 6, b = 1$.

Như vậy mệnh đề $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases} \Leftrightarrow ab:6$ là sai.

Sửa lại mệnh đề đúng là $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases} \Rightarrow ab:6$

Bài 3. Xét tính đúng - sai các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

- a) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
 b) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 > b^2 + 1$.
 c) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a + b > 1$.
 d) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 < b$.
 e) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 = b + 1$.
 f) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $a + b + c = 0$ thì $-\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = ab + bc + ca$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai vì $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
 Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : (a+b)^2 \neq a^2 + 2ab + b^2$.
 b) Mệnh đề sai, ví dụ $a = 0, b = 2$.
 Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 \leq b^2 + 1$.
 c) Mệnh đề đúng.
 Phủ định là $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a + b \leq 1$.
 d) Mệnh đề sai, ví dụ $a = 3, b = 1$.
 Phủ định là $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 \geq b$.
 e) Mệnh đề đúng, số b xác định bởi $b = a^2 - 1, \forall a \in \mathbb{R}$.
 Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 \neq b + 1$.
 f) Mệnh đề đúng vì $a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$
 $\Leftrightarrow -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = ab + bc + ca$.
 Phủ định là $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $a + b + c \neq 0$ thì $-\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \neq ab + bc + ca$.

Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Lời giải.

Giả sử: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2 \Rightarrow a^2 + b^2 < 2ab \Rightarrow (a-b)^2 < 0$ (vô lý).

Vậy $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Bài 5. a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.

b) Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

c) Nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.

d) Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

Lời giải.

a) Giả sử $a \geq 1$ và $b \geq 1$, suy ra $a + b \geq 2$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.

b) Giả sử: $x + y + xy = 1 \Rightarrow x + 1 + y + xy = 0 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

c) Giả sử tổng $a + b$ là số lẻ thì một trong hai số a, b có 1 số là số lẻ còn số còn lại là số chẵn nên tích $a.b$ là số chẵn (trái giả thiết).

Vậy nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.

d) Giả sử $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$.

- Nếu $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (trái giả thiết).

- Nếu $y \neq 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

Bài 6. Chứng minh rằng $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

Lời giải.

Giả sử $|x + y| \geq |1 + xy| \Rightarrow (|x + y|)^2 \geq (|1 + xy|)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 1 + x^2y^2 + 2xy$

$\Rightarrow (1 - x^2)(1 - y^2) \leq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 - x^2 \leq 0 \\ 1 - y^2 \geq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - y^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \geq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |x| \leq 1 \\ |y| \geq 1 \end{cases}$ (trái giả thiết)

Vậy $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

Bài 7. Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}, \forall a > 0$.

Lời giải.

Giả sử $\sqrt{a} + \sqrt{a+2} \geq 2\sqrt{a+1}, \forall a > 0$

$\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{a+2})^2 \geq (2\sqrt{a+1})^2$

$\Rightarrow a + 2\sqrt{a(a+2)} + a + 2 \geq 4(a+1)$

$\Rightarrow \sqrt{a(a+2)} \geq a + 1, \text{ với } a + 1 > 0$

$\Rightarrow a^2 + 2a \geq a^2 + 2a + 1$

$\Rightarrow 0 > 1$ (vô lí)

Vậy $\forall a > 0: \sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}$.

Bài 8. Chứng minh rằng nếu $ac > 2(b+d)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

Lời giải. Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm, khi đó ta có

$$\begin{cases} \Delta_1 = a^2 - 4b < 0 \\ \Delta_2 = c^2 - 4d < 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + c^2 < 4(b+d)$$

$\Rightarrow a^2 + c^2 < 2ac$ (do $2(b+d) \leq ac$)

$\Rightarrow (a-c)^2 < 0$ (vô lí).

Vậy ít nhất 1 trong 2 phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 9. Chứng minh khi ta nhốt $n + 1$ con gà vào n cái lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con gà.

Lời giải. Giả sử không có lồng nào chứa nhiều hơn 1 con gà. Khi đó số gà sẽ không nhiều hơn số lồng. Vậy có nhiều nhất là n con gà. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có $n + 1$ con gà.

Vậy khi ta nhốt $n + 1$ con gà vào n cái lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con gà.

Bài 10. Chứng minh với mọi số tự nhiên n :

a) $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

b) $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

Lời giải.

a) Giả sử $n^2 + n + 1$ chia hết cho 9, khi đó $n^2 + n + 1 = 9k$, với k là số nguyên. Như vậy phương trình $n^2 + n + 1 - 9k = 0$ (1) sẽ có nghiệm nguyên.

Xét $\Delta = 1 - 4(1 - 9k) = 36k - 3 = 3(12k - 1)$. Ta thấy Δ chia hết cho 3, $12k - 1$ không chia hết cho 3 nên Δ không chia hết cho 9, do đó Δ không là số chính phương nên phương trình (1) không có nghiệm nguyên (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

b) Giả sử $n^2 + 11n + 39$ chia hết cho 49, khi đó $n^2 + 11n + 39 = 49k$, với k là số nguyên. Như vậy phương trình $n^2 + 11n + 39 - 49k = 0$ (1) sẽ có nghiệm nguyên.

Xét $\Delta = 11^2 - 4(39 - 49k) = 196k - 35 = 7(28k - 5)$. Ta thấy Δ chia hết cho 7, $28k - 5$ không chia hết cho 7 nên Δ không chia hết cho 49, do đó Δ không là số chính phương nên phương trình (1) không có nghiệm nguyên (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

Dạng 2. Mệnh đề có nội dung hình học

Ví dụ 6. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

a) P : “Hai véc-tơ bằng nhau thì có độ dài bằng nhau”.

b) Q : “Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng có độ dài bằng nhau”.

Lời giải.

a) Mệnh đề P là mệnh đề đúng theo định nghĩa hai véc-tơ bằng nhau.

b) Mệnh đề Q là mệnh đề sai. Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau. Như vậy còn thiếu điều kiện về hướng của hai véc-tơ.

Ví dụ 7. Cho tam giác ABC . Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

a) Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông tại B .

b) Nếu $AB > AC$ thì $\widehat{C} > \widehat{B}$.

c) Tam giác ABC đều khi và chỉ khi nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $AB = AC$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Lời giải.

a) Mệnh đề sai. Mệnh đề đúng là: “Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông tại A ”.

b) Mệnh đề đúng theo mối liên hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác.

c) Mệnh đề đúng theo dấu hiệu nhận biết tam giác đều.

Ví dụ 8. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó thỏa mãn $AC = BD$.
 b) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nếu nó có ba góc vuông.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai. Mệnh đề có cấu trúc $P \Leftrightarrow Q$ trong đó mệnh đề $P \Rightarrow Q$: “Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì $AC = BD$ ” là mệnh đề đúng còn mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai.
 b) Mệnh đề đúng, theo dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} cùng hướng với véc-tơ \vec{c} thì \vec{a}, \vec{b} cùng hướng.
 b) Trong ba véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ và cùng phương thì có ít nhất hai véc-tơ cùng hướng.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đúng theo cách hiểu về hướng của véc-tơ.
 b) Mệnh đề đúng. Thật vậy: Xét ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ và cùng phương. Khi đó có 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Hai véc-tơ \vec{a}, \vec{b} cùng hướng
 Trường hợp này phù hợp kết luận.

Trường hợp 2. Hai véc-tơ \vec{a}, \vec{b} ngược hướng
 Khi đó nếu véc-tơ \vec{c} ngược hướng với véc-tơ \vec{a} thì \vec{c} và \vec{b} cùng hướng.

Bài 12. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
 b) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có một góc bằng 60° và hai đường trung tuyến bằng nhau.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai vì hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau nhưng ngược lại, hai tam giác có diện tích bằng nhau thì có thể không bằng nhau. Ví dụ một tam giác vuông có cạnh góc vuông là 2 và 8, tam giác vuông thứ hai có cạnh góc vuông là 4 và 4 có cùng diện tích nhưng hai tam giác không bằng nhau.
 b) Mệnh đề đúng. Thật vậy, xét tam giác ABC tùy ý.
 +) Nếu tam giác ABC đều thì cả ba góc bằng 60° và cặp trung tuyến nào cũng bằng nhau.
 +) Ngược lại, giả sử có hai trung tuyến BM và CN bằng nhau. Khi đó hình thang $BCMN$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân. Do đó tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$ và góc một góc bằng 60° nên tam giác ABC đều.

Bài 13. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
 b) Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có hai đường chéo bằng nhau.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đúng, theo dấu hiệu nhận biết hình bình hành.
 b) Mệnh đề sai. Chẳng hạn hình thang cân có hai đường chéo bằng nhau nhưng không nhất thiết phải là hình bình hành.

Bài 14. Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề:

P : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông”.

Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

Lời giải. Phát biểu mệnh đề:

Cách 1. “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi nó là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Cách 2. “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông là điều kiện cần và đủ để nó là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Mệnh đề này đúng theo tính chất và dấu hiệu nhận biết hình vuông.

Bài 15. Xét các tập hợp:

X : tập hợp các tứ giác.

A : Tập hợp các hình vuông.

B : Tập hợp các hình chữ nhật.

D : Tập hợp các hình thoi.

E : Tập hợp các tứ giác có trục đối xứng.

Phát biểu thành lời nội dung các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

- a) $\forall x \in X, x \in B \Rightarrow x \in A$.
 b) $\forall x \in X, x \in A \Rightarrow x \in D$.
 c) $\forall x \in X, x \in E \Rightarrow x \in B$.
 d) $\forall x \in X, x \in D \Rightarrow x \in E$.
 e) $\exists x \in E: x \notin B$.

Lời giải.

- a) Phát biểu: “Mọi hình chữ nhật đều là hình vuông”.
 Mệnh đề này sai vì hai cạnh của hình chữ nhật không phải lúc nào cũng bằng nhau.
 b) Phát biểu: “Mọi hình vuông đều là hình thoi”.
 Mệnh đề này đúng vì mọi hình vuông đều là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.
 c) Phát biểu: “Mọi tứ giác có trục đối xứng đều là hình chữ nhật”.
 Mệnh đề này sai, ví dụ hình thang cân có trục đối xứng nhưng hình thang cân có các góc có số đo không nhất thiết phải bằng 90° .
 d) Phát biểu: “Mọi hình thoi đều có trục đối xứng”.
 Mệnh đề này đúng vì mỗi hình thoi đều có *ít nhất* hai trục đối xứng là hai đường chéo.

- e) Phát biểu: “Tồn tại một tứ giác có trục đối xứng mà không phải là hình chữ nhật”.
Mệnh đề này đúng, chẳng hạn hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° .

Dạng 3. Thành lập mệnh đề - Mệnh đề phủ định

- Phát biểu thành lời khi cho cho một mệnh đề dạng kí hiệu.
- Dùng kí hiệu \forall, \exists phát biểu một mệnh đề.
- Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề.
- Phủ định một mệnh đề.

Ví dụ 9. Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < \frac{1}{2}$ ”.
- “ $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} \geq x$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} > x$ ”.

Lời giải.

- Mọi số thực đều có bình phương khác không.
- Tồn tại một số thực mà bình phương của nó nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.
- Mọi số thực đều có nghịch đảo lớn hơn hoặc bằng chính nó.
- Tồn tại một số thực sao cho căn bậc hai của nó lớn hơn nó.

Ví dụ 10. Dùng các kí hiệu \forall, \exists phát biểu các mệnh đề sau:

- Tồn tại một số tự nhiên chia hết cho 9.
- Mọi số không âm đều lớn hơn không.
- Tồn tại một số thực không là số dương cũng không là số âm.

Lời giải.

- “ $\exists n \in \mathbb{N}, n : 9$ ”.
- “ $\forall x \geq 0, x > 0$ ”.
- “ $\exists x \in \mathbb{R}, x = 0$ ”.

Ví dụ 11. Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề sau:

- “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ”.
- “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$ ”.

Lời giải.

- a) $\exists x = 0 \in \mathbb{R}, 0^2 = 0 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.
 b) $\exists n = 1 \in \mathbb{N}, 1^2 = 1 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.

Ví dụ 12. Phủ định các mệnh đề sau đây:

- a) Tất cả bài tập trong sách này đều dễ.
 b) Có ít nhất một hình thang nội tiếp được trong đường tròn.
 c) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x + 3 = 5$ ”.
 d) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 5$ ”.

Lời giải.

- a) Tồn tại một bài tập trong sách không dễ.
 b) Mọi hình thang đều không nội tiếp được trong đường tròn.
 c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x + 3 \neq 5$ ”.
 d) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 5$ ”.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- a) “ $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} = x$ ”.
 b) “ $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ ”.
 c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 8 > 0$ ”.
 d) “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 5x \leq 0$ ”.

Lời giải.

- a) Tồn tại một số thực mà nghịch đảo của nó bằng với nó.
 b) Tồn tại số tự nhiên sao cho nghịch đảo của nó thuộc tập số tự nhiên.
 c) Với mọi số thực ta đều có bình phương của nó hiệu bốn lần nó và cộng thêm 8 lớn hơn 0.
 d) Tồn tại một số nguyên mà tổng bình phương của nó với năm lần nó bé hơn hoặc bằng 0.

Bài 17. Dùng các kí hiệu \forall, \exists phát biểu các mệnh đề sau:

- a) Có một số tự nhiên khác không mà căn bậc hai của nó thuộc tập số tự nhiên khác không.
 b) Mọi số nguyên đều là số tự nhiên.
 c) Có một số tự nhiên không là số nguyên.
 d) Mọi số tự nhiên đều là số thực.
 e) Tồn tại một số thực không có nghịch đảo.

Lời giải.

- a) “ $\exists n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \in \mathbb{N}^*$ ”.
- b) “ $\forall n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ”.
- c) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n \notin \mathbb{Z}$ ”.
- d) “ $\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}$ ”.
- e) “ $\exists x \in \mathbb{R}$, không tồn tại $\frac{1}{x}$ ”.

Bài 18. Phủ định các mệnh đề sau:

- a) Mọi học sinh trong lớp em đều biết dùng máy tính.
- b) Có một học sinh trong lớp em chưa được leo núi.
- c) Mọi học sinh trong lớp em không biết đá bóng.
- d) Có một học sinh trong lớp em thích bóng chuyền.

Lời giải.

- a) Có một học sinh trong lớp em không biết dùng máy tính.
- b) Mọi học sinh trong lớp em đều được leo núi.
- c) Có một học sinh trong lớp em biết đá bóng.
- d) Mọi học sinh trong lớp em không thích bóng chuyền.

Bài 19. Xét xem các mệnh đề sau đúng hay sai và nêu các mệnh đề phủ định của chúng.

- a) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 15 > 0$ ”.
- b) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 8x + 16 = 0$ ”.
- c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 5$ ”.
- d) “ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ ”.

Lời giải.

a) Ta có:

$$x^2 - 7x + 15 = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot x + \frac{49}{4} + 15 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 15 \leq 0$ ”.

b) $\exists x = -2 \in \mathbb{R}, (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 16 = 0 \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 8x + 16 \neq 0$ ”.

c) $\exists x = 0 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R}, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \neq 5 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.

Mệnh đề phủ định: “ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + 3y \neq 5$ ”.

d) $\exists x = 1 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R}, 1^2 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = -1 \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ ”.

Bài 20. Tìm hai giá trị thực của x để từ mỗi câu sau ta được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

- a) $x^2 < x$.

- b) $x = 5$.
 c) $x^2 > 0$.
 d) $x > \frac{1}{x}$.

Lời giải.

- a) Với $x = \frac{1}{2}$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = 1$ thì mệnh đề sai.
 b) Với $x = 5$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = 0$ thì mệnh đề sai.
 c) Với $x = 1$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = 0$ thì mệnh đề sai.
 d) Với $x = 2$ thì mệnh đề đúng.
 Với $x = \frac{1}{2}$ thì mệnh đề sai.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 21. Chứng minh rằng: Nếu nhốt 25 con thỏ vào 6 cái chuồng thì sẽ có ít nhất một chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Lời giải. Ta định nghĩa mệnh đề Q .

Q : Ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Suy ra mệnh đề \bar{Q} : Tất cả các chuồng chứa ít hơn hoặc bằng 4 con thỏ.

Giả sử mệnh đề \bar{Q} đúng, tức là tất cả các chuồng chứa ít hơn hoặc bằng 4 con thỏ. Khi đó số thỏ sẽ có tối đa là $4 \cdot 6 = 24$ con, mâu thuẫn với giả thiết số thỏ là 25 con.

Suy ra mệnh đề \bar{Q} sai, do đó mệnh đề Q đúng.

Vậy nếu nhốt 25 con thỏ vào 6 cái chuồng thì sẽ có ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Bài 22. Cho các mệnh đề chứa biến $P(n)$: “ n là số chẵn” và $Q(n)$: “ $7n + 4$ là số chẵn”.

- a) Phát biểu và chứng minh mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$ ”.
 b) Phát biểu và chứng minh mệnh đề đảo của mệnh đề ở câu 1.

Lời giải.

- a) Với mọi số tự nhiên n , nếu n là số chẵn thì $3n + 4$ cũng là số chẵn.

Chứng minh:

Với mọi số tự nhiên n chẵn, ta có: $3n$ và 4 là các số chẵn. Suy ra $3n + 4$ là một số chẵn.

Vậy mệnh đề đúng.

- b) Với mọi số tự nhiên n , nếu $3n + 4$ là số chẵn thì n cũng là số chẵn.

Chứng minh:

Với mọi số tự nhiên n mà $3n + 4$ là số chẵn thì ta suy ra $3n$ là số chẵn (do 4 là số chẵn). Khi đó n là một số chẵn.

Vậy mệnh đề đảo đúng.

§2. TẬP HỢP

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Tập hợp và phần tử

- Tập hợp (gọi tắt là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- Ta thường dùng các chữ cái in hoa để kí hiệu cho tập hợp.
- Cho tập hợp A và phần tử x . Nếu x có mặt trong tập A ta nói x là một phần tử của tập A hay x thuộc A , kí hiệu $x \in A$ hoặc $A \ni x$. Nếu x không có mặt trong tập A ta nói x không thuộc A , kí hiệu $x \notin A$ hoặc $A \not\ni x$.

2. Cách xác định tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

3. Tập hợp rỗng

Định nghĩa 1. Tập hợp rỗng, kí hiệu là \emptyset , là tập hợp không chứa phần tử nào.

4. Tập con. Hai tập hợp bằng nhau

- Tập hợp A gọi là tập con của tập hợp B , kí hiệu $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc B .
Với kí hiệu đó, ta có $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Tập rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu là \emptyset .
Qui ước : $\emptyset \subset A$ với mọi tập hợp A .
- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và ngược lại.
Với định nghĩa đó, ta có $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$

5. Tính chất

Tính chất 1.

- a) $\emptyset \subset A$, với mọi A .
- b) $A \subset A$, với mọi A
- c) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- Nêu đặc trưng của tập hợp.

Ví dụ 1. Xác định tập hợp A gồm 10 số nguyên tố đầu tiên bằng phương pháp liệt kê

Lời giải.

$$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$$

Ví dụ 2.

- a) Tập hợp A các số thực lớn hơn 1 và nhỏ hơn 3 là $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.
 b) Tập hợp S gồm các nghiệm của phương trình $x^8 + 9 = 0$ là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 9 = 0\}$.

Ví dụ 3. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
 b) B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
 b) $B = \{1; 2; 3; 4\}$.
 c) Ta có $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$
 Mà $x \in \mathbb{R}$ nên $C = \{-2; 1\}$.

Ví dụ 4. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0\}$.
 b) $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$.

Lời giải.

- a) Ta có:
 $(2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -5. \end{cases}$
 Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{1; -5\}$.
 b) Ta có:
 $(x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$
 Vì $x \in \mathbb{Q}$ nên $B = \{1; 2\}$.

Ví dụ 5. Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5) = 0\}$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2 < 40\}$.
- c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$.
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{1\}$.
- b) $B = \{3; 4; 5; 6\}$.
- c) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
- d) Ta có $|2x + 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$.
Vậy $C = \{2; -3\}$.

Ví dụ 6. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau:

- a) Tập hợp A các số chính phương không vượt quá 50.
- b) Tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n(n + 1) \leq 30\}$.

Lời giải.

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

Ví dụ 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

- a) $A = \{0; 4; 8; 12; 16; \dots; 52\}$.
- b) $B = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots; 51\}$.
- c) $C = \{2; 5; 8; 11; 14; \dots; 62\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 16 \text{ và } x : 4\}$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 51 \text{ và } x : 3\}$.
- c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 62 \text{ và } (x - 2) : 3\}$.

Ví dụ 8. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$.

b) $B = \{-2; 4; -8; 16; -32; 64\}$.

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 17 \text{ và } x \text{ là số nguyên tố}\}$.

b) $B = \{x = (-2)^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}$.

Ví dụ 9. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$B = \{0; 7; 14; 21; 28\}$$

Lời giải.

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 9\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 7 \text{ và } x \leq 28\}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 20. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải. $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$.

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$ Hãy xác định tập hợp A bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Lời giải. A là tập hợp các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 10.

Bài 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 8\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải. $A = \{1; 2; 4; 8\}$.

Bài 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là ước của } 15\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải. $A = \{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\}$.

Bài 5. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước chung của } 30 \text{ và } 20\}$.

Lời giải. $A = \{1; 2; 5; 10\}$.

Bài 6. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 15 \text{ và } 20, x \leq 60\}$.

Lời giải. $A = \{0; 30; 60\}$.

Bài 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) $B = \{0; 2; 4; 5; 6; 8\}$.

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x : 2 \text{ và } x \leq 8\right\}$.

Bài 8. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{0; 2; 7; 14; 23; 34; 47\}$

b) $B = \{-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$

Lời giải.

$$A = \{n^2 - 2 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 7\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2 = 0\}$$

Bài 9. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 8\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| < \frac{21}{4}\}$

Lời giải.

$$A = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$B = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

Bài 10. Cho tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid -5 < 5n + 2 < 303\}$. Tìm số phần tử của tập hợp X .

Lời giải. $-5 < 5n + 2 < 303 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 60$. Vậy số phần tử của tập hợp X là 62.

Bài 11. Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0\}$.

Lời giải. Ta có $(x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 4 \\ x = \pm \sqrt{5} \end{cases}$.

Từ đó ta có $A = \{0; -1; 1; 4\}$ chứa 4 phần tử.

Dạng 2. Tập hợp rỗng

Ví dụ 1. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 1 = 0\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}.$$

Lời giải. Các tập hợp rỗng là A, B .

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m \text{ và } x > 2m + 1\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m = 0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m \geq 2m + 1 \Leftrightarrow m \leq -1$.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta' = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - \sqrt{2} = 0\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - \frac{1}{4} = 0\right\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 0\}.$$

Lời giải. Tập hợp A, B .

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = m\}$. Tìm m để $A = \emptyset$.

Lời giải. Để $A = \emptyset$ thì $m \notin \mathbb{N}$.

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m + 3 \text{ và } x > 4m + 3\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m + 9 = 0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m + 3 \geq 4m + 3 \Leftrightarrow m \leq 0$. Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên không dương.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta' = -8 - m < 0 \Leftrightarrow m > -8$.
 Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên lớn hơn -8 .

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Viết tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}$.

Lời giải.

a) $A = \{1; 2; -1\}$.

b) $B = \{0; 1; 2\}$.

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của m để tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\}$ là tập hợp rỗng.

Lời giải. Để $A = \emptyset$ thì $m \leq 0$.

Bài 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{1\}$.

Lời giải. Để $A = \{1\}$ thì $1 - m = 2 \Leftrightarrow m = -1$.

Bài 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 < x < 3\}$. Liệt kê tất cả các phần tử của A .

Lời giải. Ta có $A = \{0; 1; 2\}$.

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$ là tập hợp rỗng.

Lời giải. Ta có $A = (m + 1; m + 3) \cap \mathbb{N}$. Do đó, $A = \emptyset \Leftrightarrow m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$.

Bài 6. Cho tập hợp $A = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}, \text{ với } a, b, c \text{ là các số thực dương}\right\}$. Tìm số nhỏ nhất của tập hợp A .

Lời giải. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Vậy số nhỏ nhất là 1.

Dạng 3. Tập con. Tập bằng nhau

- Tập hợp A là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều có trong B .
 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- $\emptyset \subset A$, với mọi tập hợp A .
- $A \subset A$, với mọi tập hợp A .
- Có tập A gồm có n phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, tập A có 2^n tập con.
- $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$.

Ví dụ 1. Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a, 1, 2\}$.

Lời giải. Tập A có $2^3 = 8$ tập con.

- 0 phần tử: \emptyset .
- 1 phần tử: $\{a\}, \{1\}, \{2\}$.
- 2 phần tử: $\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{1, 2\}$.
- 3 phần tử: $\{a, 1, 2\}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các tập con có 2 phần tử của tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lời giải. $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$.

Ví dụ 3. Xác định tập hợp X biết $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 5\}$.

Lời giải. Ta có

- Vì $\{1, 2\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa các phần tử 1, 2.
- Vì $X \subset \{1, 2, 5\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là 1, 2, 5.

Khi đó tập hợp X có thể là $\{1, 2\}, \{1, 2, 5\}$.

Ví dụ 4. Xác định tập hợp X biết $\{a, 1\} \subset X \subset \{a, b, 1, 2\}$.

Lời giải. Ta có

- Vì $\{a, 1\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa 2 phần tử là $a, 1$.
- Vì $X \subset \{a, b, 1, 2\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là $a, b, 1, 2$.

Suy ra, tập hợp X có 2 phần tử, 3 phần tử hoặc 4 phần tử.

Khi đó, tập hợp X có thể là $\{a, 1\}, \{a, 1, 2\}, \{a, b, 1\}, \{a, b, 2\}, \{a, b, 1, 2\}$.

Ví dụ 5. Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{x; 5\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.

Lời giải. $A = B \Leftrightarrow x = 2$.

Khi $x = 2$, ta có $C = \{2; y; 5\}$. Khi đó, ta có $\{2; y; 5\} \subset \{2; 5\}$ và $\{2; y; 5\} \supset \{2; 5\}$. Từ đây, suy ra $y = 2$ hoặc $y = 5$.

Vậy $(x; y) = (2; 2)$ hoặc $(x; y) = (2; 5)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 6. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 6\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 3. Vì 2, 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 6. Suy ra, $x \in B$.

Mặt khác, vì $6 = 2.3$ nên với phần tử $x \in B$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và 3. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$.

Ví dụ 7. Cho biết x là một phần tử của tập hợp A , xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $x \in A$. b) $\{x\} \in A$. c) $x \subset A$. d) $\{x\} \subset A$.

Lời giải.

- a) $x \in A$: đúng.
 b) $\{x\} \in A$: sai về quan hệ giữa hai tập hợp.
 c) $x \subset A$: sai về quan hệ giữa phần tử và tập hợp.
 d) $\{x\} \subset A$: đúng.

Ví dụ 8. Xác định tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp

- a) $A = \{x; y\}$. b) $B = \{1; 2; 3\}$

Lời giải.

- a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{x; y\}$ là: $\emptyset; \{x\}; \{y\}; \{x; y\}$.
 b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{1; 2; 3\}$ là: $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}$ và $\{1; 2; 3\}$.

Ví dụ 9. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp A sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

Lời giải. Để tổng của ba số nguyên là một số lẻ thì trong ba số chỉ có một số lẻ hoặc cả ba số đều lẻ. Nói cách khác tập con này của A phải có một số lẻ hoặc ba số lẻ.

Chỉ có một tập con gồm ba số lẻ của A là $\{1; 3; 5\}$. Các tập con gồm ba số của A trong đó có một số lẻ là: $\{1; 2; 4\}; \{1; 2; 6\}; \{1; 4; 6\}; \{3; 2; 4\}; \{3; 2; 6\}; \{3; 4; 6\}; \{5; 2; 4\}; \{5; 2; 6\}; \{5; 4; 6\}$.

Ví dụ 10. Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

- a) A là tập hợp các hình chữ nhật
 B là tập hợp các hình bình hành.
 b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước chung của } 12 \text{ và } 18\}$
 $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 6\}$

Lời giải.

- a) Tất cả các hình chữ nhật đều là hình bình hành nên $A \subset B$.
- b) $A = \{1; 2; 3; 6\}$. $B = \{1; 2; 3; 6\}$
Rõ ràng ta thấy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$.

Ví dụ 11. Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước của } 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$.

Lời giải. Liệt kê các phần tử của tập hợp A và B ta được :

$$A = \{1; 2\}; B = \{-1; 1; 2; 4\}.$$

Muốn tìm tập X thỏa điều kiện $A \subset X \subset B$ đầu tiên ta lấy $X = A$, sau đó ghép thêm các phần tử thuộc B mà không thuộc A . Với cách thực hiện như trên, ta có các tập hợp X thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $X = A = \{1; 2\}$, rồi ghép thêm vào một phần tử ta được: $\{-1; 1; 2\}; \{4; 1; 2\}$

Ghép thêm vào A hai trong bốn phần tử còn lại của B ta được : $X = B = \{-1; 1; 2; 4\}$

Ví dụ 12. Cho $A = \{8k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $A \subset B$.

Lời giải. Ta cần chứng minh mọi phần tử của A đều thuộc B .

Giả sử $x \in A, x = 8k + 3$.

Khi đó ta có thể viết $x = 8k + 2 + 1 = 2(4k + 1) + 1$.

Đặt $l = 4k + 1$, x được viết thành $x = 2l + 1$. Vậy $x \in B$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các tập con của mỗi tập hợp sau:

- a) $A = \{1; 2\}$. b) $B = \{a; b; c\}$.

Lời giải.

a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{1; 2\}$ là: $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}$.

b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{a; b; c\}$ là: $\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$; và $\{a; b; c\}$.

Bài 2. Cho các tập hợp

$$A = \{2; 3; 5\}; \quad B = \{-4; 0; 2; 3; 5; 6; 8\}; \quad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$$

Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập còn lại.

Lời giải. Ta có $x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow C = \{2; 5\}$. Vậy $C \subset A \subset B$.

Bài 3. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}; \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 4\}.$$

Hai tập hợp A và B , tập hợp nào là tập con của tập còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

Lời giải. Ta có $A = \{1; 2; 4\}$; $B = \{1; 2; 4\}$. Ta thấy $A \subset B$; $B \subset A$, nên $A = B$

Bài 4. Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0 \text{ hoặc } 3x^2 - 10x + 8 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0 \text{ và } 2x^2 - 7x + 6 = 0\}.$$

- a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Tìm tất cả các tập X sao cho $B \subset X$ và $X \subset A$.

Lời giải. Ta giải các phương trình:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

a) $A = \left\{2; -3; \frac{4}{3}\right\}; B = \{2\}$.

b) X là những tập hợp sau: $\{2\}; \{2; -3\}; \left\{2; \frac{4}{3}\right\}; \left\{2; -3; \frac{4}{3}\right\}$.

Bài 5. Tìm tập hợp

a) có đúng một tập con.

b) có đúng hai tập con.

Lời giải.

a) Tập hợp có đúng một tập con là \emptyset .

b) Tập $A = \{a\}$. A có đúng hai tập con là A và \emptyset .

Bài 6. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3 \text{ và } 4\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 12\}.$$

Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Giả sử $x \in B$, khi đó x chia hết cho 12, suy ra x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, suy ra $x \in A$, do đó $B \subset A$.

Giả sử $x \in A$, khi đó x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, mà 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên suy ra x chia hết cho 3.4, hay x chia hết cho 12, suy ra $x \in B$, do đó $A \subset B$.

Vậy $A = B$.

Bài 7. Gọi A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác có góc 60° , C là tập hợp các tam giác cân, D là tập hợp các tam giác vuông có góc 30° . Hãy nêu mối quan hệ giữa các tập hợp trên.

Lời giải. Vì tam giác đều là tam giác có ba góc bằng 60° nên $A \subset B$. Tam giác đều cũng là tam giác cân nên $A \subset C$. Tam giác vuông có góc 30° thì góc còn lại là 60° nên $D \subset B$.

Bài 8. Cho $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}; B = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

a) Chứng minh rằng $2 \in A, 7 \notin B$. Số 18 có thuộc tập A không?

b) Chứng minh rằng $B \subset A$.

Lời giải.

a) Ta có $2 = 2 + 3 \cdot 0 \Rightarrow 2 \in A$. Ta thấy $x \in B$ thì x có dạng $x = 6k + 2$ chia hết cho 2 nên $-7 \notin B$.

Giả sử số $18 \in A \Rightarrow 18 = 3k + 2 \Rightarrow k = \frac{16}{3}$ (vô lý) vì $k \in \mathbb{Z}$. Vậy $18 \notin A$.

b) Xét $x \in B$. Ta có $x = 2 + 6k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Suy ra $x = 2 + 3(2k)$. Do $2k \in \mathbb{Z}$ nên $x \in A$. Vậy $B \subset A$.

Bài 9. Tìm tất cả các tập con của tập hợp $B = \{a, b, 2, 5\}$.

Lời giải. Vì tập hợp B có 4 phần tử nên tập B có $2^4 = 16$ tập con.

- 0 phần tử: \emptyset .
- 1 phần tử: $\{a\}, \{b\}, \{2\}, \{5\}$.
- 2 phần tử: $\{a, b\}, \{a, 2\}, \{a, 5\}, \{b, 2\}, \{b, 5\}, \{2, 5\}$.
- 3 phần tử: $\{a, b, 2\}, \{a, b, 5\}, \{a, 5, 2\}, \{5, b, 2\}$.
- 4 phần tử: $\{a, b, 2, 5\}$

Bài 10. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp $D = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.

Lời giải. $\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 6, 7\}$.

Bài 11. Xác định tập hợp X biết $\{a\} \subset X \subset \{a, 3, 4\}$.

Lời giải. Tập hợp X có thể là $\{a\}, \{a, 3\}, \{a, 4\}, \{a, 3, 4\}$.

Bài 12. Xác định tập hợp X biết $\{a, 9\} \subset X \subset \{a, b, 7, 8, 9\}$ và tập hợp X có 3 phần tử.

Lời giải. Tập hợp X có thể là $\{a, 9, b\}, \{a, 7, 9\}, \{a, 8, 9\}$.

Bài 13. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 2 \text{ và } 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ có chữ số tận cùng bằng } 0\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 5. Vì 2, 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 10. Suy ra, $x \in B$.

Mặt khác, với phần tử $x \in B$ bất kì, vì x có chữ số tận cùng là 0 nên x chia hết cho 2 và 5. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$.

Bài 14. Tìm giá trị các tham số m và n sao cho $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\} = \{1; 2\}$.

Lời giải. Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\}$ và $B = \{1; 2\}$.

Vì $1 \in A$ nên $-m + n = 0$.

Vì $2 \in A$ nên $-4m + 2n = -7$.

Từ đây, ta có hệ phương trình $m = n = \frac{7}{2}$.

Ngược lại, với $m = n = \frac{7}{2}$, ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0\} = \{1; 2\} = B$.

Bài 15. Cho A là tập hợp tất cả các tứ giác lồi, B là tập hợp tất cả các hình thang, C là tập hợp tất cả các hình bình hành, D là tập hợp tất cả các hình chữ nhật. Xác định mối quan hệ giữa các tập hợp đã cho.

Lời giải. $D \subset C \subset B \subset A$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho các tập hợp

$$A = \{1; 2\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}.$$

Hãy xác định mối quan hệ giữa các tập hợp trên.

Lời giải. Ta có $B = \{1; 2\}$; $C = \{0; 1; 2\}$ Vậy $A \subset C$; $B \subset C$; $A = B$.

Bài 2. Cho A là tập hợp các số nguyên chia cho 3 dư 2, B là tập hợp các số nguyên chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải. Ta chứng minh mọi phần tử của A đều là phần tử của B và ngược lại.

Trước hết ta thấy rằng một số chia hết cho 3 thì chia cho 6 dư 0 hoặc dư 3 nên một số chia cho 3 dư 2 thì chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Tức là nếu $x \in A, x = 3k + 2$ thì x có thể viết thành $x = 6l + 2$ hoặc $x = 6l + 5$ hay $x \in B$. Ngược lại, $x \in B$ xét hai trường hợp:

- Nếu $x = 6k + 2 = 3(2k) + 2$. Đặt $l = 2k \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$
- Nếu $x = 6k + 5 = 3(2k + 1) + 2$. Đặt $l = 2k + 1 \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$

Vậy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$ (điều phải chứng minh).

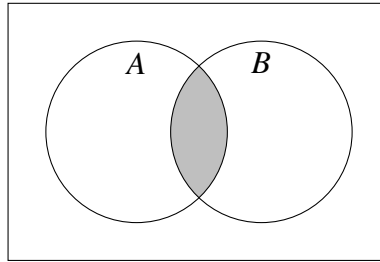
§3. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Giao của hai tập hợp

Định nghĩa 1. Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc tập hợp A , vừa thuộc tập hợp B được gọi là giao của A và B . Kí hiệu $C = A \cap B$.

Vậy $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.

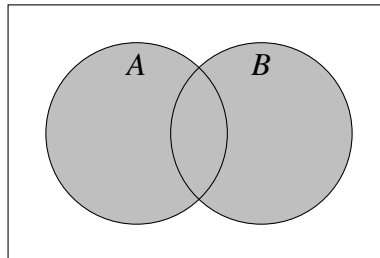


$$\triangle x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$$

2. Hợp của hai tập hợp

Định nghĩa 2. Tập hợp C gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là hợp của A và B . Kí hiệu $C = A \cup B$.

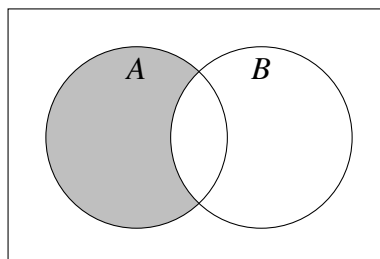
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.



$$\triangle x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$$

3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.



- Phép lấy phần bù: Cho $A \subset E$. Phần bù của A trong E là $\mathcal{C}_E A = E \setminus A$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp

Dựa vào định nghĩa giao và hợp của hai tập hợp để tìm kết quả.

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ là ước số của } 12\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Lời giải. Ta có: $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Vậy: $A \cap B = \{1; 2; 3\}$ và $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$.

Ví dụ 2. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 4\}$ và $C = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq a\}$. Tìm số nguyên a để tập hợp $B \cap C = \emptyset$.

Lời giải. Ta có $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, $C = \{\dots, a-1, a\}$.
Để $B \cap C = \emptyset$ thì $a \leq -4$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

Lời giải.

- $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, suy ra $A \cap B \subset A$.
- $x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \text{ (do } A \subset B) \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap B$, suy ra $A \subset A \cap B$.
Vậy $A \cap B = A$.

Ví dụ 4. Cho A là tập hợp học sinh lớp 12 của trường Buôn Ma Thuột và B là tập hợp học sinh của trường Buôn Ma Thuột dự kiến sẽ lựa chọn thi khối A vào các trường đại học. Hãy mô tả các học sinh thuộc tập hợp sau

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.

Lời giải.

- a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 12 thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.
b) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh hoặc lớp 12 hoặc chọn thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.

Ví dụ 5. Cho hai tập hợp A, B biết: $A = \{a; b\}$, $B = \{a; b; c; d\}$. Tìm tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Lời giải. $X = \{c; d\}; \{b; c; d\}; \{a; c; d\}; \{a; b; c; d\}$.

Ví dụ 6. Xác định tập hợp $A \cap B$ biết

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 7\}.$$

Lời giải. Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3 \text{ và bội của } 7\} = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 21\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai tập hợp A và B . Tìm $A \cap B, A \cup B$ biết

a) $A = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 12\}$ và $B = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 18\}$.

b) $A = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 27\}$ và $B = \{x|x \text{ là ước nguyên dương của } 15\}$.

Lời giải.

$$\text{a) } A = \{1; 2; 4; 6; 12\}, B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1; 2; 6\} \\ A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\} \end{cases}$$

$$\text{b) } A = \{1; 3; 9; 27\}, B = \{1; 3; 5; 15\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1; 3\} \\ A \cup B = \{1; 3; 5; 9; 15; 27\} \end{cases}$$

Bài 2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} | 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm $A \cap (B \cup C)$.

Lời giải. Ta có $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$; $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
 $B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ nên $A \cap (B \cup C) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{0; 2; 4\}$. Xác định $A \cap B, A \cup B$.

Lời giải. Ta có $A \cap B = \{2; 4\}$ và $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải. Ta có: $A = \left\{0; 2; -\frac{1}{2}\right\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$ nên $A \cap B = \{2\}$.

Bài 5. Cho a là số nguyên. Tìm a để giao của hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq a\}, B = \left\{x \in \mathbb{Z} | x > \frac{3a-4}{2}\right\}$$

bằng rỗng.

Lời giải. Ta có $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow a \leq \frac{3a-4}{2} \Leftrightarrow a \geq 4$.

Bài 6. Cho hai tập hợp bất kì A, B . Chứng minh rằng $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Lời giải.

- Nếu $A = B$ thì $A \cap B = A, A \cup B = A$ nên $A \cup B = A \cap B$.
- Ngược lại, giả sử $A \cup B = A \cap B$. Lấy một phần tử bất kì $x \in A$ ta suy ra $x \in A \cup B$. Vì $A \cup B = A \cap B$ nên $x \in A \cap B$. Từ đó suy ra $x \in B$ nên $A \subset B$. Tương tự ta cũng có $B \subset A$. Vậy $A = B$.

Bài 7. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 5\}$. Tìm $A \cap B; A \cup B$.

Lời giải. Ta có $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vậy $A \cap B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ và $A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Bài 8. Tìm điều kiện cần và đủ để hợp của hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} | n < a\}$ và $B = \{m \in \mathbb{Z} | m > 2a + 1\}$ bằng \mathbb{Z} .

Lời giải. Ta có $A \cup B = \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2a + 1 < a \Leftrightarrow a < -1$.

Bài 9. Cho tập $A = \{0; 1; 2\}$ và tập $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Tìm tập C sao cho $A \cup C = B$.

Lời giải. Đầu tiên ta tìm tập C có số phần tử ít nhất thỏa yêu cầu bài toán đó là tập $C_0 = B \setminus A = \{3; 4\}$. Kế tiếp ta ghép các phần tử của tập A vào. Vậy các tập cần tìm là

$$C_1 = \{3; 4; 0\}, C_2 = \{3; 4; 1\}, C_3 = \{3; 4; 2\},$$

$$C_4 = \{3; 4; 0; 1\}, C_5 = \{3; 4; 0; 2\}, C_6 = \{3; 4; 1; 2\}, C_7 = \{3; 4; 0; 1; 2\}.$$

Tổng cộng có 8 tập thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 10. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| > 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải. Ta có $|x-1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-1 < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 5$, $A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Lại có $|x-1| > 2 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3$, $B = \{\dots; -3; -2; 4; 5; 6; \dots\}$ nên $A \cap B = \{-2; 4\}$.

Bài 11. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2m-1 < x < 2m+3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải. Ta có $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\} = \{-1; 0; 1\}$ và $A = \{2m, \dots, 2m+2\}$.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+2 \leq -2 \\ 2m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases}$$

Bài 12. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$ và tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \text{ là số nguyên tố } n \leq 5\}$. Xác định tập hợp $A \cap B$ và $A \cup B$.

Lời giải. $A = \{0; 1; 2; 3\}$ và $B = \{2; 3; 5\}$. Khi đó $A \cap B = \{2; 3\}$ và $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 5\}$.

Bài 13. Cho tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm các tập con A, B của tập S sao cho $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ và $A \cap B = \{1; 2\}$.

Lời giải.

- A có hai phần tử $A = \{1; 2\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3; 4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1; 2; 3\} \Rightarrow B = \{1; 2; 4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1; 2; 4\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3\}$.
- A có bốn phần tử $A = \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow B = \{1; 2\}$.

Vậy ta có 4 cặp tập A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 14. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + m + 2 = 0\}$ và tập hợp $B = \{1; 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

- TH1: $A = \emptyset$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ vô nghiệm, tức là $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 2$.
- TH2: $A \neq \emptyset$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm khác 1, 2 $\Leftrightarrow m \neq 1; m \neq 2; m \leq 2$.
- Vậy kết hợp lại ta có $m \neq 1; m \neq 2$.

Dạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Dựa vào định nghĩa hiệu và phần bù của hai tập hợp để tìm kết quả.

 **Chú ý**

- Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A = C_B A$.
- Nếu $A = \emptyset$ thì $A \setminus B = \emptyset$ với mọi tập hợp B .

Ví dụ 7. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Tìm các tập hợp $A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải. Các phần tử 2, 4 thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B nên $A \setminus B = \{2, 4\}$.

Chỉ có phần tử 7 thuộc tập hợp B nhưng không thuộc tập hợp A nên $B \setminus A = \{7\}$

Ví dụ 8. Cho A là tập hợp các tự nhiên lẻ. Tìm phần bù của A trong tập \mathbb{N} các số tự nhiên.

Lời giải. Các số tự nhiên chẵn thuộc tập hợp \mathbb{N} nhưng không thuộc tập hợp A nên phần bù của A trong \mathbb{N} là tập hợp các số tự nhiên chẵn. Do đó $C_{\mathbb{N}} A = \{2k/k \in \mathbb{N}\}$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng $A \setminus B = \emptyset$ thì $A \subset B$.

Lời giải. Lấy $x \in A$. Nếu $x \notin B$ thì $x \in A \setminus B$ (mâu thuẫn). Do đó $x \in B$. Vậy $A \subset B$.

Ví dụ 10. Cho các tập hợp $A = \{4, 5\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho $A \setminus B = A$.

Lời giải. Ta có $B = \{0, 1, \dots, a\}$. Để $A \setminus B = A$ thì các phần tử của A không thuộc B . Suy ra $a \leq 3$. Vậy $a \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Ví dụ 11. Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{3\}$ và $B = \{3, 4, 5\}$. Tìm tập hợp A .

Lời giải. Ta có $A \setminus B = \{1, 2\}$ nên $1, 2 \in A$.
Mà $B \setminus A = \{3\}$ nên $3 \notin A$ và $4, 5 \in A$.
Suy ra $A = \{1, 2, 4, 5\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Cho A là tập hợp các học sinh của một lớp và B là tập hợp các học sinh giỏi Toán của lớp. Hãy mô tả tập hợp $C_A B$.

Lời giải. $C_A B$ là tập hợp các học sinh không giỏi Toán của lớp.

Bài 16. Cho A là tập hợp các ước nguyên dương của 12 và B là tập hợp các ước nguyên dương của 18. Tìm các tập hợp $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Lời giải. Ta có $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ và $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ nên $A \setminus B = \{4, 12\}$, $B \setminus A = \{9, 18\}$.

Bài 17. Chứng minh rằng $A \setminus B = B \setminus A$ thì $A = B$.

Lời giải. Lấy $x \in A \setminus B = B \setminus A$ thì $x \in A, x \notin B$ và $x \in B, x \notin A$. Suy ra $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$.
Suy ra $A \subset B$ và $B \subset A$. Vậy $A = B$.

Bài 18. Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{a, b, c\}$, $B \setminus A = \{d, e\}$ và $B = \{d, e, f\}$. Tìm tập hợp A .

Lời giải. $A = \{a, b, c, f\}$.

Bài 19. Cho các tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} | 2 < n \leq 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho:

a) $A \setminus B = A$.

b) $A \setminus B = \emptyset$.

Lời giải. $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, \dots, a\}$.

a) Ta có $A \setminus B = A$ khi mọi phần tử của A đều không thuộc B . Suy ra $a \leq 2$. Vậy $a \in \{0, 1, 2\}$.

b) Ta có $A \setminus B = \emptyset$ khi $A \subset B$. Suy ra $a \geq 7$.

Bài 20. Cho hai tập hợp $A = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ và $B = \{3k | k \in \mathbb{N}\}$. Tìm tập hợp $B \setminus A$.

Lời giải. $B \setminus A = \{6k | k \in \mathbb{N}\}$.

Dạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$ để giải toán

• Phương pháp biểu đồ Ven:

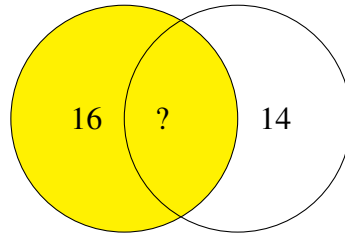
- Sử dụng các hình tròn giao nhau để mô tả các đại lượng và mối quan hệ giữa chúng.
- Biểu đồ Ven cho ta cách nhìn trực quan và mối quan hệ giữa các đại lượng từ đó tìm ra các yếu tố chưa biết.

• Công thức số phần tử $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Ví dụ 12. Trong năm vừa qua, trường THPT A có 25 bạn thi học sinh giỏi 2 môn Văn và Toán. Trong đó có 14 bạn thi Toán và 16 bạn thi Văn. Hỏi trường có bao nhiêu bạn thi cả 2 môn Văn và Toán.

Lời giải.

Cách 1: Sử dụng sơ đồ Ven như hình vẽ



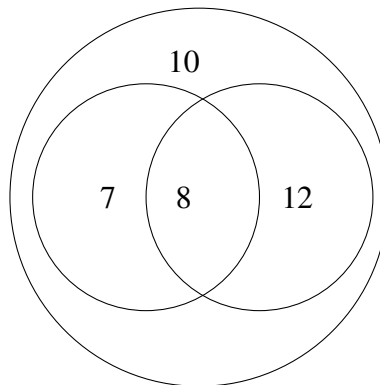
- Ta thấy Số bạn thi toán mà không thi văn là $25 - 16 = 9$ (bạn).

- Số bạn thi cả 2 môn (phần giao nhau) là $14 - 9 = 5$ (bạn).

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là tập hợp các bạn thi học sinh giỏi Toán và Văn. Ta có $|A| = 14$, $|B| = 16$, $|A \cup B| = 25$. Theo công thức ta có $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14 + 16 - 25 = 5$ (bạn).

Ví dụ 13. Lớp 10A có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn.

Lời giải. Ta sử dụng sơ đồ Ven để giải bài toán.



- Hình tròn to thể hiện số học sinh cả lớp.

Như vậy, ta có:

- Số bạn chỉ thích Văn là $15 - 8 = 7$ (bạn).

- Số bạn chỉ thích Toán là $20 - 8 = 12$ (bạn).

- Số học sinh cả lớp là tổng các phần không giao nhau: $7 + 8 + 12 + 10 = 37$.

Ví dụ 14. Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.

Lời giải. Ngoài sơ đồ Ven ta có thể dùng công thức số phần tử. Gọi A là tập hợp các học sinh chơi bóng đá, B là tập các học sinh chơi bóng chuyền. Do đó $A \cap B$ là tập các học sinh chơi cả hai môn. Ta có

$$|A| = 25, |B| = 20, |A \cap B| = 10.$$

Số học sinh cả lớp là số phần tử của tập $A \cup B$. Theo công thức ta có $|A \cup B| = 25 + 20 - 10 = 35$ (học sinh).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 21. Một lớp có 40 học sinh, mỗi học sinh đều đăng ký chơi ít nhất 1 trong 2 môn thể thao là bóng đá hoặc cầu lông. Có 30 học sinh có đăng ký môn bóng đá, 25 học sinh có đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả 2 môn.

Lời giải. Số học sinh đăng ký cả hai môn là $30 + 25 - 40 = 15$ (học sinh).

Bài 22. Ổ xứ sở của thần Thoại ngoài các vị thần thì còn có các sinh vật gồm 27 con người, 311 con yêu quái một mắt, 205 con yêu quái tóc răn và yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn. Tìm số yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn biết có tổng số sinh vật là 500 con.

Lời giải.

- Số sinh vật không phải con người là $500 - 27 = 473$ (con).
- Gọi A, B lần lượt là tập hợp yêu quái một mắt và yêu quái tóc răn. Khi đó $|A| = 311$, $|B| = 205$, $|A \cup B| = 473$.
- Vậy số yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn là $|A \cap B| = 311 + 205 - 473 = 43$ (con).

Bài 23. Trong 45 học sinh lớp 10A có 20 bạn xếp học lực giỏi, 15 bạn đạt hạnh kiểm tốt, trong đó có 7 bạn vừa đạt hạnh kiểm tốt vừa có học lực giỏi. Hỏi

- Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết muốn được khen thưởng thì hoặc học sinh giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.
- Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xét học lực giỏi và hạnh kiểm tốt.

Bài 24. Một lớp có 25 học sinh khá các môn tự nhiên, 24 học sinh khá các môn xã hội, 10 học sinh khá cả 2 và 3 học sinh không khá môn nào. Hỏi:

- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá tự nhiên.
- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu hoặc khá tự nhiên hoặc khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu em học sinh.

Bài 25. Lớp 10A có 35 bạn học sinh làm kiểm tra toán. Đề bài gồm 3 bài toán. Sau khi kiểm tra, cô giáo tổng hợp kết quả như sau: có 20 em giải được bài toán thứ nhất; 14 em giải được bài toán 2; 10 em giải được bài toán 3; 5 em giải được bài toán 2 và bài toán 3; 2 em giải được bài toán 1 và bài toán 2; 6 em giải được bài toán 1 và bài toán 3, chỉ có 1 học sinh đạt được điểm 10 vì giải được cả 3 bài. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh không giải được bài nào.

Lời giải. Đáp số: 3 bạn.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Cho tập hợp $F = \{n \in \mathbb{N} \mid -2 < n < 3\}$ và tập hợp \mathbb{Z} các số nguyên. Xác định tập hợp $F \cap \mathbb{Z}$.

Lời giải. $F \cap \mathbb{Z} = \{0; 1; 2\}$

Bài 27. Cho $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ biết tập $A \subset X$, $A \cap \{2; 4; 6\} = \{2\}$ và $A \cup \{2; 4; 6\} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tập A .

Lời giải. Ta thấy $2 \in A$ và $\{3; 5\} \subset A$ và các số $1 \notin A; 4 \notin A; 6 \notin A$. Vậy tập $A = \{2; 3; 5\}$.

Bài 28. Cho hai tập hợp $A = \{-3; -2; 0; 1; 2; 5; 9\}$, $B = \{-2; 0; 3; 8; 15\}$. Hãy xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Lời giải. Ta có:

$$A \cup B = \{-3; -2; 0; 1; 2; 3; 5; 8; 9; 15\}, A \cap B = \{-2; 0\}$$

$$A \setminus B = \{-3; 1; 2; 5; 9\}, B \setminus A = \{3; 8; 15\}.$$

Bài 29. Kí hiệu H là tập hợp các học sinh của lớp 10A; T là tập hợp các học sinh nam và G là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A. Hãy xác định các tập hợp sau:

a) $T \cup G$; b) $T \cap G$; c) $H \setminus T$; d) $G \setminus T$; e) $\mathbb{C}_H G$.

Lời giải.

a) $T \cup G$ là tập hợp các học sinh trong lớp 10A, $T \cup G = H$.

b) $T \cap G = \emptyset$.

c) $H \setminus T = G$.

d) $G \setminus T = G$.

e) $\mathbb{C}_H G = H \setminus G = T$.

Bài 30. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+2| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z}\}$. Tìm $A \cup B$.

Lời giải. Ta có $|x+2| < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1$ nên $A = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Lại có $\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$ nên $\frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} \in \mathbb{Z}$.

Từ đó suy ra $x+2 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ nên $B = \{-6; -4; -3; -1; 0; 2\}$.

Vì vậy $A \cup B = \{-6; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

Bài 31. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn và không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm

a) $A \cap (B \cup C)$; b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Lời giải. $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

a) $B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$.

b) Ta có: $A \setminus B = \{8; 10\}$, $A \setminus C = \{0; 2\}$, $B \setminus C = \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy:

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{0; 1; 2; 3; 8; 10\}.$$

Bài 32. Cho A, B, C là ba tập hợp rời nhau đôi một. X là tập hợp sao cho các tập $X \cap A$, $X \cap B$, $X \cap C$ có đúng 1 phần tử. Hỏi tập X có ít nhất là bao nhiêu phần tử?

Lời giải. Giả sử $X \cap A = \{a\}$, $X \cap B = \{b\}$, $X \cap C = \{c\}$. Khi đó $a, b, c \in X$. Do A, B, C rời nhau đôi một nên a, b, c phải khác nhau đôi một. Vậy tập X có ít nhất là 3 phần tử.

Bài 33. Cho $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Xác định tập hợp $B \setminus A$.

b) Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X$ và $X \subset B$.

Lời giải.

a) Ta có $B \setminus A = \{4; 5; 6\}$.

b) Vì $A \subset X$ nên $1, 2, 3$ thuộc X , do đó, để $X \subset B$ thì các tập hợp X thỏa mãn điều bài là:

$$\begin{aligned} X &= \{1; 2; 3\}, X = \{1; 2; 3; 4\}, X = \{1; 2; 3; 5\}, X = \{1; 2; 3; 6\}, \\ X &= \{1; 2; 3; 4; 5\}, X = \{1; 2; 3; 4; 6\}, X = \{1; 2; 3; 5; 6\}, X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}. \end{aligned}$$

Bài 34. Cho tập hợp A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

$$A \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\}, \quad (1)$$

$$A \cap \{1; 2; 3\} = \{1; 2\}. \quad (2)$$

Hãy xác định tập hợp A .

Lời giải. Từ (1) suy ra $A \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Từ (2) suy ra $\{1; 2\} \subset A$ và $3 \notin A$.

Điều kiện (1) cho ta $4 \in A$. Vậy ta có: $A = \{1; 2; 4\}$.

Bài 35. Hãy xác định tập hợp X biết rằng:

$$\{1; 3; 5; 7\} \subset X, \{3; 5; 9\} \subset X, X \subset \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

Lời giải. Từ giả thiết $\{1; 3; 5; 7\} \subset X, \{3; 5; 9\} \subset X$, ta có:

$$\{1; 3; 5; 7\} \cup \{3; 5; 9\} \subset X \Rightarrow \{1; 3; 5; 7; 9\} \subset X. \quad (1)$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có: $X \subset \{1; 3; 5; 7; 9\}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $X = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

Bài 36. Cho tập hợp $X = \{a; b; c; d; e; g\}$.

a) Hãy xác định tập hợp Y sao cho $Y \subset X$ và $X \setminus Y = \{b; c; e\}$.

b) Hãy xác định hai tập hợp A và B sao cho:

$$A \cup B = X, B \setminus A = \{d; e\} \text{ và } A \setminus B = \{a; b; c\}.$$

Lời giải.

a) $X \setminus Y = \{b; c; e\}$ nên b, c, e không thuộc tập Y . Hơn nữa do $Y \subset X$ nên $Y = \{a; d; g\}$.

b) Từ $A \setminus B = \{a; b; c\}$ ta suy ra A chứa a, b, c và B không chứa a, b, c . Từ $B \setminus A = \{d; e\}$ ta suy ra B chứa d, e và A không chứa d, e . Lại có $A \cup B = X$ nên phần tử g thuộc A hoặc thuộc B . Ngoài ra $g \notin A \setminus B$ và $g \notin B \setminus A$ nên $g \in A$ và $g \in B$. Do đó: $A = \{a; b; c; g\}, B = \{d; e; g\}$.

Bài 37. Cho hai tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z}\right\}, B = \{4; 6; 8; 10\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Giải. Ta có $\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$. Do đó với $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq -3$ thì $\frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $x+3$ là ước của 7, tức là

$$\begin{cases} x+3=1 \\ x+3=-1 \\ x+3=7 \\ x+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-4 \\ x=4 \\ x=-10. \end{cases}$$

Vậy $A = \{-2; -4; 4; -10\}$, suy ra: $A \cup B = \{-2; -4; -10; 4, 6, 8, 10\}, A \cap B = \{4\}$.

Bài 38. Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Tìm các tập hợp con A, B của S sao cho:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}, A \cap B = \{1; 2\}.$$

b) Tìm các tập C sao cho: $C \cup (A \cap B) = A \cup B$.

Lời giải.

a) Từ $A \cap B = \{1; 2\}$ ta có A và B phải có chung đúng hai phần tử 1 và 2. Từ $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ suy ra hai phần tử 3 và 4 phải thuộc một và chỉ một trong hai tập A và B . Do đó có bốn kết quả sau đây:

$$\begin{cases} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{1; 2; 4\}, \end{cases} \begin{cases} A = \{1; 2; 4\} \\ B = \{1; 2; 3\}, \end{cases} \begin{cases} A = \{1; 2; 3; 4\} \\ B = \{1; 2\}, \end{cases} \begin{cases} A = \{1; 2\} \\ B = \{1; 2; 3; 4\}. \end{cases}$$

b) Vì $C \cup (A \cap B) = A \cup B$ mà $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{1; 2\}$ nên $3, 4 \in C$. Do đó các tập C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\{3; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}.$$

Bài 39. Xét X và Y là hai tập hợp con của tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và thỏa mãn ba điều kiện:

- (1) $X \cap Y = \{4; 6; 9\}$.
- (2) $X \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$.
- (3) $Y \cup \{4; 8\} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

a) Hãy chỉ ra rằng từ điều kiện (1) và (2) ta suy ra $1 \in X$ và $1 \notin Y$, $8 \in X$ và $8 \notin Y$, $7 \notin X$.

b) Xác định các tập hợp X và Y mà thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3).

Lời giải.

a) Vì $1 \in X \cup \{3; 4; 5\}$ nên $1 \in X$ và vì $1 \notin X \cap Y$ nên $1 \notin Y$. Tương tự ta có $8 \in X$ và $8 \notin Y$. Từ (3) suy ra $7 \in Y$, do đó $7 \notin X$ vì nếu $7 \in X$ thì mâu thuẫn với (1).

b) Ta có:

- $1 \in X$ và $1 \notin Y$;
- $2 \notin X$ (do (2)) và $2 \in Y$ (do (3));
- $3 \in Y$ (do (3)) và $3 \notin X$ (do (1));
- $4 \in X$ và $4 \in Y$ (do (1));
- $5 \in Y$ (do (3)) và $5 \notin X$ (do (1));
- $6 \in X$ và $6 \in Y$ (do (1));
- $7 \in Y$ (do (3)) và $7 \notin X$ (do (1));
- $8 \in X$ và $8 \notin Y$ (do câu a));
- $9 \in X$ và $9 \in Y$ (do (1)).

Từ các điều kiện trên, ta đi tới:

$$X = \{1; 4; 6; 8; 9\}, Y = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}.$$

Bài 40. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - mx + 1 = 0\}$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để $A \cap B \neq \emptyset$

Lời giải. Vì $A \cap B \neq \emptyset$ nên tồn tại $a \in A \cap B$. Khi đó

$$\begin{cases} a^2 + a - m = 0 \\ a^2 - ma + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1+m)a - (1+m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Nếu $m = -1$ thử lại thấy $B = \emptyset$ nên không thỏa.
- Nếu $a = 1$ thay vào tập A tìm được $m = 2$. Thử lại khi $m = 2$ thấy $A \cap B = \{1\}$.

Vậy $m = 2$.

Bài 41. Cho 3 tập hợp:

$$A = \{x | x = 3n - 2, n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$B = \{x | x = 1003 - 2m, m \in \mathbb{N}^*\}$$

$$C = \{x | x = 6p + 1, p \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq 166\}.$$

Chứng minh rằng $A \cap B = C$.

Giải. Cần chứng minh $A \cap B \subset C$ và $C \subset A \cap B$.

- Giả sử $x \in A \cap B$, cần chỉ ra $x \in C$. Thực vậy, nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in A$ và $x \in B$, tức là tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho:

$$x = 3n - 2 = 1003 - 2m.$$

Khi đó: $m = \frac{1005 - 3n}{2} \Leftrightarrow m = 502 - n - \frac{n-1}{2}$. Vì m, n là những số nguyên dương nên suy ra $\frac{n-1}{2} = p \in \mathbb{Z}$. Từ đó $n = 2p + 1$ và

$$m = 502 - (2p + 1) - p = 501 - 3p.$$

Vì m, n là những số nguyên dương nên

$$\begin{cases} 2p + 1 \geq 1 \\ 501 - 3p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq \frac{500}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq p \leq 166.$$

Nhưng $x = 3n - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 6p + 1$, suy ra

$$x \in C \Rightarrow A \cap B \subset C. \quad (1)$$

- Chứng minh $C \subset A \cap B$. Giả sử $x \in C$, cần chứng minh $x \in A \cap B$. Thực vậy, nếu $x \in C$ thì tồn tại $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq 166$, sao cho $x = 6p + 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng x có thể được viết dưới dạng $x = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$x = 6p + 1 = (6p + 3) - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 3n - 2,$$

với $n = 2p + 1 \in \mathbb{N}^*$, suy ra $x \in A$. Ta còn phải chứng minh $x \in B$.

$$x = 6p + 1 = 1003 - (1002 - 6p) = 1003 - 2(501 - 3p) = 1003 - 2m,$$

với $m = 501 - 3p$. Ta có:

$$0 \leq p \leq 166 \Rightarrow 0 \leq 3p \leq 498 \Rightarrow 501 - 3p \geq 3 \Rightarrow m = 501 - 3p \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy $x \in B$. Từ $x \in A$ và $x \in B$ suy ra

$$x \in A \cap B \Leftarrow C \subset A \cap B. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \cap B = C$, điều phải chứng minh.

§4. CÁC TẬP HỢP SỐ

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Các tập hợp số đã học

Định nghĩa 1. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ và $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Định nghĩa 2. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Định nghĩa 3. Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu \mathbb{Q} , là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Định nghĩa 4. Tập hợp các số thực kí hiệu \mathbb{R} , gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.

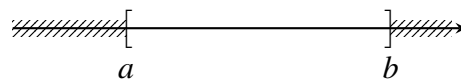
2. Các tập con thường dùng của \mathbb{R}

Trong toán học ta thường gặp các tập hợp con sau đây của tập hợp các số thực \mathbb{R}

a. Khoảng

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	
$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a < x\}$	
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} x < b\}$	

b. Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$



c. Nửa khoảng

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	
$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x\}$	
$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$	

⚠ Kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng), kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xác định giao - hợp của hai tập hợp

a) Xác định giao của hai tập hợp ta làm như sau

- Biểu diễn các tập hợp lên trục số.
- Dùng định nghĩa giao để xác định các phần tử của tập hợp.

b) Cho hai tập con của tập số thực A và B . Tìm $A \cup B$ ta làm như sau

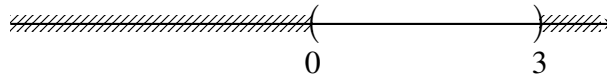
- Biểu diễn tập A trên trục số, gạch chéo phần không thuộc A .
- Làm tương tự đối với tập B .
- Phần không gạch chéo trên hình là $A \cup B$.

c) Đối với hai tập A và B khác để tìm $A \cup B$ ta nhớ rằng $x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

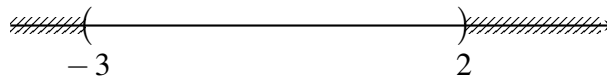
Ví dụ 1. Xác định tập hợp $(0;3) \cup (-3;2)$ và biểu diễn trên trục số

Lời giải.

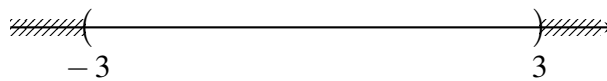
- Biểu diễn tập hợp A trên trục số



- Biểu diễn tập B trên trục số



- Kết hợp hai trục số trên ta được tập $A \cup B = (-3; 3)$.

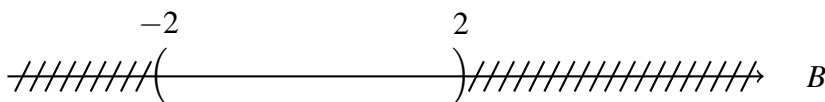


Ví dụ 2. Cho $m > 5$. Xác định tập hợp $[-2; m) \cup [0; 4)$.

Lời giải. Vì $m > 5$ nên $m > 4 \Rightarrow [0; 4) \subset [-2; m) \Rightarrow [-2; m) \cup [0; 4) = [-2; m)$.

Ví dụ 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải.



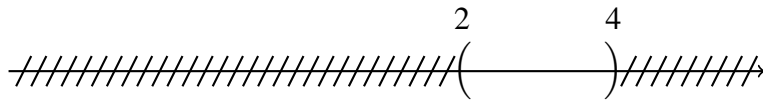
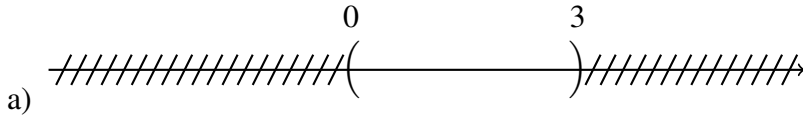
$\Rightarrow A \cap B = [-1; 2)$.

Ví dụ 4. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

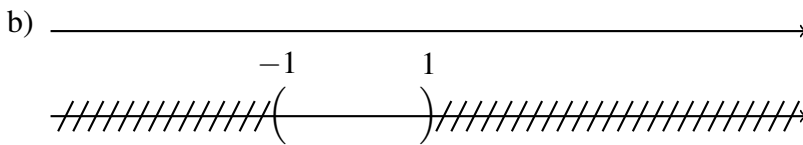
a) $(0;3) \cap (2;4)$.

b) $\mathbb{R} \cap (-1;1)$.

Lời giải.



$\Rightarrow (0;3) \cap (2;4) = (2;3)$.



$\Rightarrow \mathbb{R} \cap (-1;1) = (-1;1)$.

Ví dụ 5. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+4| \geq 3\}$, $C = [-5;3]$. Tìm các tập hợp

a) $A \cap B$.

b) $B \cap C$.

c) $A \cap B \cap C$.

d) $A \cup B$.

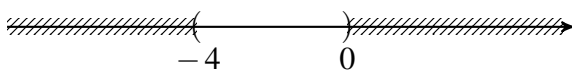
e) $A \cap B \cup C$.

f) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

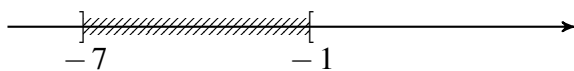
Lời giải. $|x+2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+2 < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$. Do đó $A = (-4;0)$.

$|x+4| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \leq -3 \\ x+4 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ x \geq -1 \end{cases}$. Do đó $B = (-\infty; -7] \cup [-1; +\infty)$.

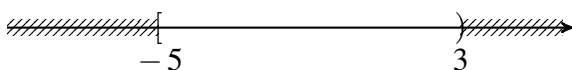
Biểu diễn tập A trên trục số:



Biểu diễn tập B trên trục số:



Biểu diễn tập C trên trục số:



a) $A \cap B = [-1;0)$.

b) $B \cap C = (-\infty; -7] \cup [-5; +\infty)$.

c) $A \cap B \cap C = [-1; 0)$.

d) $A \cup B = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.

e) $A \cap B \cup C = [-5; 3)$.

f) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

$(A \cup B) = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.

$(B \cup C) = (-\infty; -7] \cup [-5; +\infty)$.

Do đó $(A \cup B) \cap (B \cup C) = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.

Ví dụ 6. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x-1} \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 \leq 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{x+1}{x+3} \right| \leq 1\}$.

Tìm các tập hợp

a) $A \cap B \cap C$.

b) $(A \cup B) \cap C$.

c) $(A \cup C) \cap B$.

d) $A \cap (B \cup C)$.

Lời giải.

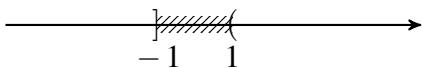
• $\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 1 \end{cases}$. Do đó $A = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.

• $9 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{cases}$. Do đó $B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

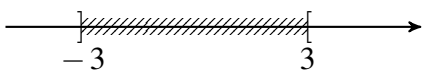
• $\left| \frac{x+1}{x+3} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x+1}{x+3} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x+3} \geq -1 \\ \frac{x+1}{x+3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+4}{x+3} \geq 0 \\ \frac{-2}{x+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup [-2; +\infty) \\ x \in (-3; -\infty) \end{cases}$. Do

đó $C = [-2; +\infty)$.

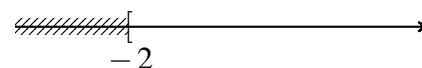
Biểu diễn tập A trên trục số:



Biểu diễn tập B trên trục số:



Biểu diễn tập C trên trục số:



a) $A \cap B \cap C = [3; +\infty)$.

b) $(A \cup B) = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.
 $(A \cup B) \cap C = [-2; -1] \cup (1; +\infty)$.

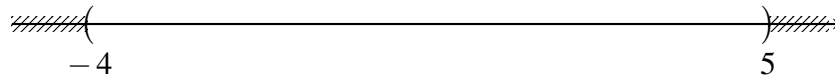
c) $(A \cup C) = \mathbb{R}$.
 $(A \cup C) \cap B = B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

d) $(B \cup C) = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$
 $A \cap (B \cup C) = (-\infty; -3] \cup (1; +\infty).$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định tập hợp $[0; 5) \cup (-4; 2)$ và biểu diễn trên trục số.

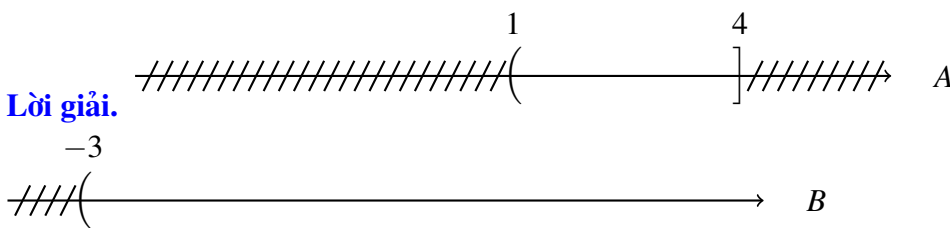
Lời giải. Lần lượt biểu diễn hai tập hợp $[0; 5)$ và $(-4; 2)$ từ đó thu được tập hợp $[0; 5) \cup (-4; 2) = (-4; 5)$.
 được biểu diễn trên trục số sau



Bài 2. Cho hai tập hợp $A = [m + 1; 10)$ với $m < 0$ và tập hợp $B = (5; 8)$. Hãy xác định tập hợp $A \cup B$.

Lời giải. Vì $m < 0 \Rightarrow m + 1 < 1 < 5 \Rightarrow A \cup B = [m + 1; 10) \cup (5; 8) = [m + 1; 10)$.

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $A \cap B$.

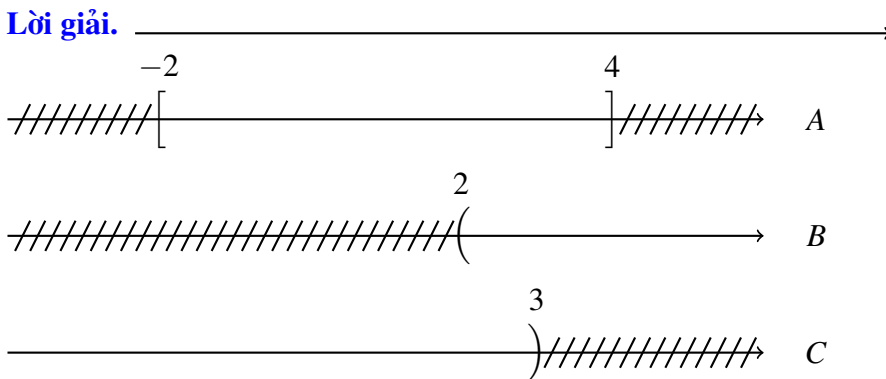


$\Rightarrow A \cap B = (1; 4]$.

Bài 4. Cho $A = [-2; 4]$, $B = (2; +\infty)$, $C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A \cap B, B \cap C$.

b) $\mathbb{R} \cap A, \mathbb{R} \cap B$.



a) $A \cap B = (2; 4], B \cap C = (2; 3)$.

b) $\mathbb{R} \cap A = [-2; 4], \mathbb{R} \cap B = (2; +\infty)$.

Bài 5. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | |2x - 1| \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | |3x - 6| > 3\}$, $C = [1; 2]$. Tìm các tập hợp

a) $A \cap B \cap C$.

b) $A \cup B \cup C$.

c) $(A \cap B) \cup C$.

d) $A \cup (B \cap C)$.

Lời giải.

- a) $A \cap B \cap C = \emptyset$.
- b) $A \cup B \cup C = (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.
- c) $(A \cap B) \cup C = [0; 2]$.
- d) $A \cup (B \cap C) = [0; 1]$.

Bài 6. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 4}{1 + x^2} > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{1 - 3x}{x + 2} \right| \geq 2\}$, $C = [0; 3]$. Tìm các tập hợp

- a) $A \cap B \cap C$.
- b) $A \cup B \cup C$.
- c) $(A \cap B) \cup C$.
- d) $A \cup (B \cap C)$.
- e) $B \cap (A \cup C)$.
- f) $(A \cup B) \cap C$.

Lời giải.

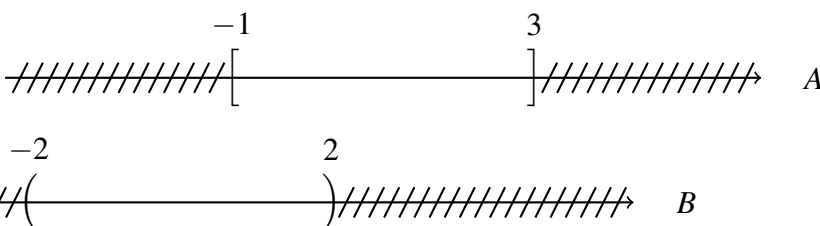
- a) $A \cap B \cap C = \emptyset$.
- b) $A \cup B \cup C = (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{3}{5}) \cup [0; +\infty)$.
- c) $(A \cap B) \cup C = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty) \cup [0; 3]$.
- d) $A \cup (B \cap C) = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
- e) $B \cap (A \cup C) = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$.
- f) $(A \cup B) \cap C = (2; 3]$.

Dạng 2. Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp

- Biểu diễn các tập hợp lên trục số.
- Dùng định nghĩa các phép toán hiệu, phần bù để xác định các phần tử của tập hợp.

Ví dụ 7. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải.



$\Rightarrow A \setminus B = [2; 3], B \setminus A = (-2; -1)$.

Ví dụ 8. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

Lời giải.

$\Rightarrow C_B A = (-3; 1] \cup (4; +\infty)$.

Ví dụ 9. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(0; 3) \setminus (2; 4)$.
- b) $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

Lời giải.

a)

$\Rightarrow (0; 3) \setminus (2; 4) = (0; 2]$.

b)

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1; 1) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Ví dụ 10. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $\mathbb{R} \setminus ((0; 1) \cup (2; 3))$.
- b) $\mathbb{R} \setminus ((3; 5) \cap (4; 6))$.

Lời giải.

a)

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus ((0; 1) \cup (2; 3)) = (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$.

b) Ta có $((3; 5) \cap (4; 6)) = (4; 5)$.

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus ((3; 5) \cap (4; 6)) = (-\infty; 4] \cup [5; +\infty)$.

Ví dụ 11. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0], B = [0; 1)$. Tìm $A \setminus B$ và $C_{\mathbb{R}}A$.

Lời giải.

$\Rightarrow A \setminus B = (-1; 0)$ và $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x\}$. Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải.

$\Rightarrow A \setminus B = (-\infty; -2]$, $B \setminus A = (2; +\infty)$.

Bài 8. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 0$ và $2 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

Lời giải.

$\Rightarrow C_B A = (-3; -2] \cup [0; 2] \cup (4; +\infty)$.

Bài 9. Cho a, b, c, d là những số thực và $a < b < c < d$. Tìm $(a; d) \setminus (b; c)$ và $(b; d) \setminus (a; c)$.

Lời giải.

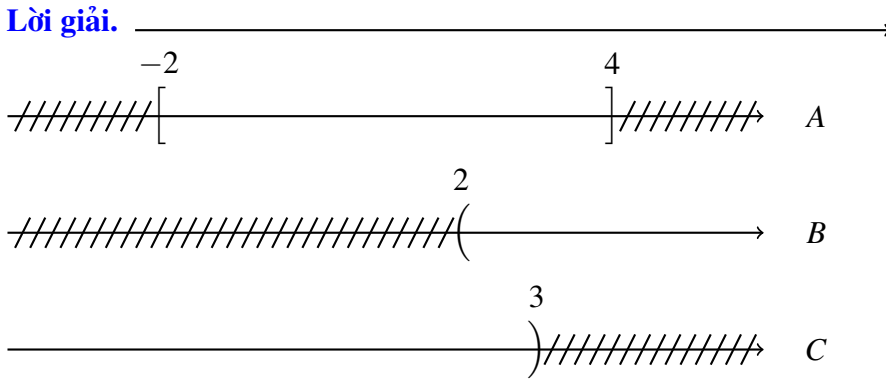
$\Rightarrow (a; d) \setminus (b; c) = (a; b] \cup [c; d)$.

$\Rightarrow (b; d) \setminus (a; c) = [c; d)$.

Bài 10. Cho $A = [-2; 4], B = (2; +\infty), C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A \setminus B, B \setminus A$.

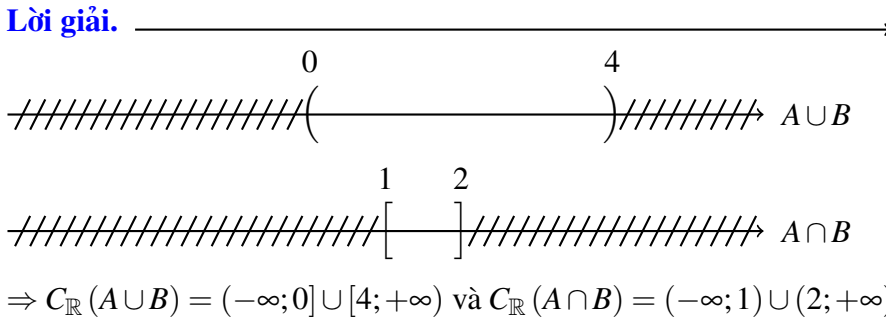
b) $\mathbb{R} \setminus A, \mathbb{R} \setminus B, \mathbb{R} \setminus C.$



a) $A \setminus B = [-2; 2], B \setminus A = (4; +\infty).$

b) $\mathbb{R} \setminus A = (\infty; -2) \cup (4; +\infty), \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; 2], \mathbb{R} \setminus C = [3; +\infty).$

Bài 11. Cho hai nửa khoảng $A = (0; 2], B = [1; 4)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ và $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.



Dạng 3. Tìm m thỏa điều kiện cho trước

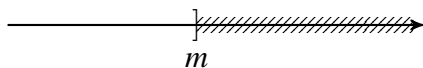
Ví dụ 12. Cho $A = (-\infty; m], B = [6; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \cap B \neq \emptyset.$

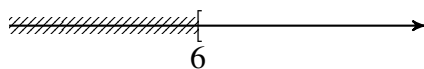
b) $(A \cap B) \subset [1; 8].$

Lời giải.

a) Biểu diễn tập hợp $A = (-\infty; m]$ trên trục số:



Biểu diễn tập hợp $B = [6; +\infty)$ trên trục số:



$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \geq 6.$

b) Với $m \geq 6 : A \cap B = [6; m].$

$(A \cap B) \subset [1; 8] \Leftrightarrow m \leq 8.$

Vậy $6 \leq m \leq 8$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 13. Tìm m biết

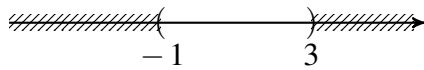
a) $(-1; 3) \cap (m; +\infty) = \emptyset$.

b) $(5; m) \cup (3; 9) = (3; 9)$.

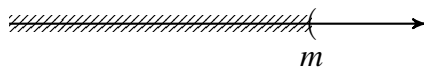
c) $(4; 12) \setminus (-\infty; m) = \emptyset$.

Lời giải.

a) Biểu diễn tập hợp $(-1; 3)$ trên trục số:

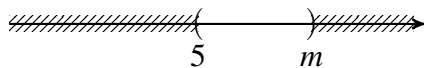


Biểu diễn tập hợp $(m; +\infty)$ trên trục số:

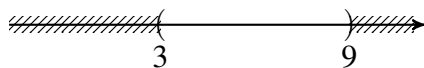


$$(-1; 3) \cap (m; +\infty) = \emptyset \Leftrightarrow m \geq 3.$$

b) Biểu diễn tập hợp $(5; m)$ trên trục số:

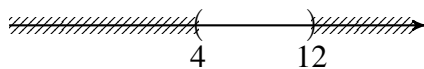


Biểu diễn tập hợp $(3; 9)$ trên trục số:

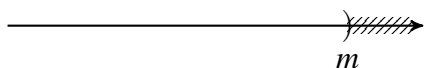


$$(5; m) \cup (3; 9) = (3; 9) \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 9.$$

c) Biểu diễn tập hợp $(4; 12)$ trên trục số:



Biểu diễn tập hợp $(-\infty; m)$ trên trục số:



$$(4; 12) \setminus (-\infty; m) = \emptyset \Leftrightarrow m \geq 12.$$

Ví dụ 14. Cho 2 tập khác rỗng: $A = (m - 1; 5]$ và $B = (-3; 2m + 3)$; $m \neq \mathbb{R}$. Tìm m để

a) $A \cap B \neq \emptyset$.

b) $A \subset B$.

c) $B \subset A$.

d) $(A \cap B) \subset (-2; 4)$.

Lời giải. Đầu tiên ta cần xét điều kiện để 2 tập A, B khác \emptyset là:

$$\begin{cases} m - 1 < 5 \\ 2m + 3 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6 (*).$$

Với điều kiện (*) ta có:

a) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow 2m + 3 > m - 1 \Leftrightarrow m > -4$.

Đối chiếu với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $-3 < m < 6$.

$$b) A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -3 \\ 2m+3 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Đổi chiều với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $1 < m < 6$.

$$c) B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq -3 \\ 2m+3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Đổi chiều với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $-3 < m \leq -2$.

$$d) (A \cap B) \subset (-2; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -2 \\ 2m+3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \text{ (thỏa yêu cầu điều kiện (*)).}$$

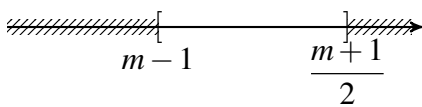
Ví dụ 15. Cho tập $A = \left[m-1; \frac{m+1}{2} \right]$, $B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \subset B$.

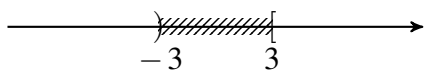
b) $(A \cap B) = \emptyset$.

Lời giải. Trước tiên ta cần tìm điều kiện để tồn tại tập A là: $m-1 \leq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 3$ (*)

Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



$$a) A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset (-\infty; -3) \\ A \subset [3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} < -3 \\ m-1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ m \geq 4 \end{cases}.$$

Đổi chiều điều kiện (*), ta có $m < -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

$$b) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -3 \\ \frac{m+1}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 5.$$

Đổi chiều điều kiện (*), ta có $-2 \leq m \leq 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 16. Cho $A = (-\infty; m)$, $B = [2m-1; 2m+2)$. Tìm m để

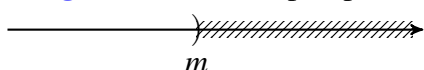
a) $A \cap B = \emptyset$.

b) $B \subset A$.

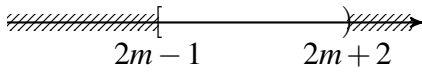
c) $A \subset C_{\mathbb{R}}B$.

d) $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải. Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow m \leq 2m - 1 \Leftrightarrow m \geq 1.$

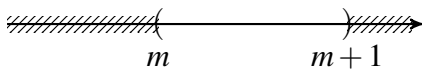
b) $B \subset A \Leftrightarrow 2m + 2 < m \Leftrightarrow m < -2.$

c) $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 2m - 1) \cup (2m + 2; +\infty).$
 $A \subset C_{\mathbb{R}}B \Leftrightarrow m \leq 2m - 1 \Leftrightarrow m \geq 1.$

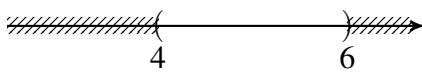
d) $C_{\mathbb{R}}A = [m; +\infty).$
 $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 2m + 2 \Leftrightarrow m \geq -2.$

Ví dụ 17. Cho $A = (m; m + 1), B = (4; 6)$. Tìm m để $A \cup B$ là 1 khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

Lời giải. Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



$A \cup B$ là 1 khoảng $\Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m + 1 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 6.$

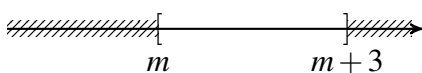
TH1: Nếu $3 < m \leq 4$ thì $A \cup B = (m; m + 1) \cup (4; 6) = (m; 6).$

TH2: Nếu $4 < m \leq 5$ thì $A \cup B = (4; 6).$

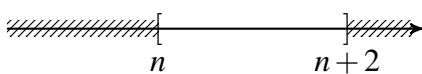
TH3: Nếu $5 < m < 6$ thì $A \cup B = (4; m + 1).$

Ví dụ 18. Cho $A = [m; m + 3], B = [n; n + 2]$. Tìm điều kiện m, n để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải. Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



Đầu tiên ta tìm điều kiện của m và n để $A \cap B = \emptyset$.

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 < n \\ n + 2 < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < n - 3 \\ m > 2 + n \end{cases}$

Từ trên ta suy ra: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow n - 3 \leq m \leq 2 + n.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Tìm m để

a) $(1; m] \cap (3; +\infty) \neq \emptyset.$

b) $(-\infty; -2) \cup [2m + 1; +\infty) = \mathbb{R}.$

c) $(m - 2; 3) \subset [-1; 5].$

Lời giải.

- a) $1 < m < 2$.
 b) $m < -\frac{3}{2}$.
 c) $1 \leq m < 5$.

Bài 13. Cho $A = (-\infty; m)$, $B = [5m - 2; 5m + 5]$. Tìm m để

- a) $A \cap B = \emptyset$.
 b) $B \subset A$.
 c) $A \subset (\mathbb{R} \setminus B)$.
 d) $(\mathbb{R} \setminus A) \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

- a) $m \geq \frac{1}{2}$.
 b) $m < -\frac{5}{4}$.
 c) $m \geq \frac{1}{2}$.
 d) $m \geq -\frac{5}{4}$.

Bài 14. Cho $A = \left[m - 3; \frac{m + 3}{2} \right]$, $B = (-\infty; -4) \cup [4; +\infty)$. Tìm m để

- a) $A \subset B$.
 b) $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

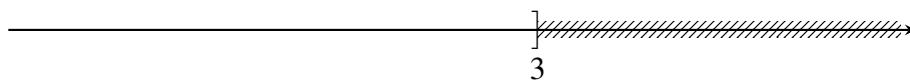
- a) $\begin{cases} m < -11 \\ 7 \leq m < 9 \end{cases}$.
 b) $-1 \leq m < 5$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

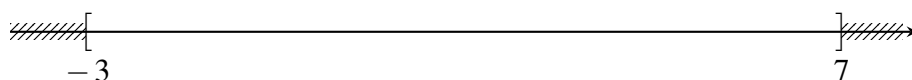
Bài 15. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 3\}$ và $D = \{x \in \mathbb{Z} | -4 \leq x \leq 5\}$. Biểu diễn các tập A, B, C, D trên trục số và xác định tập hợp $(A \cap B) \setminus (C \cap D)$.

Lời giải. Biểu diễn các tập trên trục số như sau

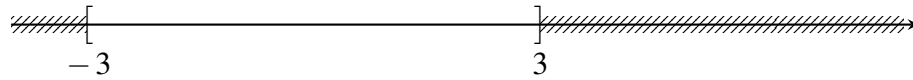
- Tập $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\} = (-\infty; 3]$



- Tập $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 7\} = [-3; 7]$



- Tập $A \cap B = [-3; 3]$



- Tập $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- Tập $D = \{x \in \mathbb{Z} | -4 \leq x \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
 $\Rightarrow C \cap D = \{1, 2, 3\}$

Từ đó ta có tập $(A \cap B) \setminus (C \cap D) = [-3; 3] \setminus \{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 3, x \neq 1, 2, 3\}$.

Bài 16. Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left((0; a] \cap \left(\frac{a}{2}; 2a\right)\right) \setminus \{a\}$.

Lời giải. Ta lần lượt biểu diễn từng tập $(0; a]$, $\left(\frac{a}{2}; 2a\right)$ trên trục số và nhớ rằng $a > 0$ thu được

$$(0; a] \cap \left(\frac{a}{2}; 2a\right) \setminus \{a\} = \left(\frac{a}{2}; a\right] \setminus \{a\} = \left(\frac{a}{2}; a\right).$$

Bài 17. Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left(\left[\frac{a}{3}; 5a\right] \cup (0; a)\right) \cap (3a; 6a)$.

Lời giải. Lần lượt biểu diễn các tập hợp $\left[\frac{a}{3}; 5a\right]$, $(0; a)$, $(3a; 6a)$ trên trục số và nhớ rằng $a > 0$ thu được

$$\left(\left[\frac{a}{3}; 5a\right] \cup (0; a)\right) \cap (3a; 6a) = (0; 5a] \cap (3a; 6a) = (3a; 5a].$$

§5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG I

I. Đề số 1a

Bài 1. (3 điểm)

- a) Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -3 "$.
- b) Cho tam giác ABC , xét hai mệnh đề $P : AB^2 + AC^2 = BC^2$, $Q : \widehat{A} = 90^\circ$. Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Lời giải.

- a) Mệnh đề P là sai. Phủ định của P là $\bar{P} : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -3$.
- b) Cho tam giác ABC , mệnh đề $P \Rightarrow Q$ phát biểu như sau: Trong tam giác ABC , nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì góc $\widehat{A} = 90^\circ$.
Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng.

Bài 2. (2 điểm) Cho hai tập hợp $A = (2; 5)$, $B = [-1; 3)$. Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Lời giải. $A \cap B = (2; 3)$, $A \cup B = [-1; 5)$, $A \setminus B = [3; 5)$, $B \setminus A = [-1; 2]$.

Bài 3. Cho các tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-3; 2)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-2; 3)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

Lời giải. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-3; 2) \Rightarrow A = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$.

Tập hợp $C_{\mathbb{R}}B = (-2; 3) \Rightarrow B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

Tập hợp $A \cap B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = [-3; 3)$.

Bài 4. (2 điểm) Mỗi học sinh lớp 10A đều chơi bóng bàn hoặc cầu lông. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng bàn, 23 bạn chơi cầu lông và 10 bạn chơi cả hai môn. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

Lời giải. Gọi X và Y là tập hợp các bạn chơi bóng bàn và cầu lông của lớp 10A. Ta có số phần tử của $X \cap Y$ bằng 10. Số phần tử của $X \cup Y$ là $25 + 23 - 10 = 38$. Vậy lớp 10A có 38 học sinh.

Bài 5. (1 điểm) Độ cao của một cái cây là $h = 50,54m \pm 0,1m$. Hãy viết số quy tròn của số 50,54.

Lời giải. Số quy tròn của 50,54 là 51.

II. Đề số 1b

Bài 1. (3 điểm)

- a) Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : " \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3 "$.
- b) Cho tam giác ABC , xét hai mệnh đề $P : AB = BC$, $Q : \widehat{A} = \widehat{C}$. Hãy lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Lời giải.

- a) Mệnh đề P là đúng. Phủ định của P là $\bar{P} : " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 3 "$.
- b) Cho tam giác ABC , mệnh đề $P \Rightarrow Q$ phát biểu như sau: Trong tam giác ABC , nếu $AB = BC$ thì góc \widehat{A} bằng góc \widehat{C} . Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng.

Bài 2. (2 điểm) Cho hai tập hợp $A = (1; 6)$, $B = [0; 4)$. Xác định các tập hợp sau: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Lời giải. $A \cap B = (1; 4)$, $A \cup B = [0; 6)$, $A \setminus B = [4; 6)$, $B \setminus A = [0; 1]$.

Bài 3. Cho các tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-4; 2)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-3; 3)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

Lời giải. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-4; 2) \Rightarrow A = (-\infty; -4) \cup [2; +\infty)$.

Tập hợp $C_{\mathbb{R}}B = (-3; 3) \Rightarrow B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Tập hợp $A \cap B = (-\infty; -4) \cup [3; +\infty) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = [-4; 3)$.

Bài 4. (2 điểm) Mỗi học sinh lớp 10B đều giỏi Toán hoặc giỏi Tiếng Anh. Biết rằng có 28 bạn giỏi Toán, 22 bạn giỏi Tiếng Anh và 10 bạn giỏi cả hai môn. Hỏi lớp 10B có bao nhiêu học sinh?

Lời giải. Gọi X và Y là tập hợp các bạn giỏi Toán và giỏi Tiếng Anh của lớp 10B. Ta có số phần tử của $X \cap Y$ bằng 10. Số phần tử của $X \cup Y$ là $28 + 22 - 10 = 40$. Vậy lớp 10B có 40 học sinh.

Bài 5. (1 điểm) Chiều dài của một cây cầu là $l = 150,45\text{m} \pm 0,1\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số 150,45.

Lời giải. Số quy tròn của 150,45 là 150.

III. Đề số 2a

Bài 1. (3,0 điểm)

- Mệnh đề sau đây đúng hay sai? giải thích.
"Mọi số thực chia hết cho 6 đều chia hết cho 3".
- Dùng kí hiệu \exists để viết mệnh đề: "Có một số thực mà bình phương của nó bằng -1 ."
- Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} > x$."

Lời giải.

- Số 6 chia hết cho 3 nên
Số chia hết cho 6 cũng chia hết cho 3. Vậy mệnh đề đã cho là một mệnh đề đúng.
- Mệnh đề được viết là: " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$."
- Mệnh đề phủ định là: " $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 1} \leq x$."

Bài 2. (2,0 điểm)

- Liệt kê các phần tử của tập hợp $B = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - 7x + 3 = 0\}$.
- Liệt kê các tập con của tập hợp $C = \{1, 2, 3\}$

Lời giải.

- $B = \left\{ \frac{3}{4}, 1 \right\}$.
- Các tập con của tập hợp C là:
 $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}$.

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho hai tập hợp $A = \{2, 3, 4, 7, 9\}$ và $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$. Tìm: $A \cup B; A \cap B; B \setminus A; A \setminus B$.

Lời giải. $*A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

$*A \cap B = \{2, 4, 7, 9\}$.

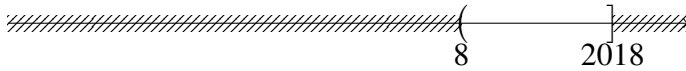
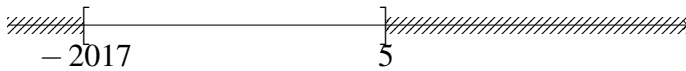
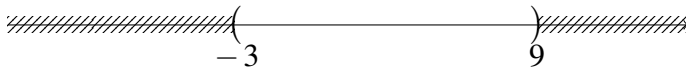
$*B \setminus A = \{5, 6\}$.

$*A \setminus B = \{3\}$.

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các tập hợp $A = (-3; 9); B = [-2017; 5]; C = (8; 2018]$. Tìm:

- $A \cup B; A \cap B$.
- $A \setminus B; (A \cup B) \setminus C$.

Lời giải.

a) $A \cup B = [-2017; 9);$
 $A \cap B = (3; 5].$

b) $A \setminus B = (5; 9);$
 $(A \cup B) \setminus C = [-2017; 8].$

Bài 5. (1,0 điểm)

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 2,7182$ biết $\bar{a} = 2,7182 \pm 0,001$.

Lời giải. Do độ chính xác đến hàng phần nghìn nên số quy tròn là: 2,72.

IV. Đề số 2b**Bài 1. (3,0 điểm)**

- a) Mệnh đề sau đây đúng hay sai? giải thích.
 " Bình phương của một số thực đều lớn hơn chính nó."
- b) Dùng kí hiệu \forall để viết mệnh đề: " Mọi số thực bình phương đều lớn hơn 0. "
- c) Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x + 1 = 0.$ "

Lời giải.

- a) Số $0,1^2 = 0,01 < 0,1$
 Nên mệnh đề đã cho là sai.
- b) " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0.$ "
- c) Mệnh đề phủ định là: " $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x + 1 \neq 0.$ "

Bài 2. (2,0 điểm)

- a) Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - x - 6 = 0\}.$
- b) Liệt kê các tập con của tập hợp $P = \{3, 5, 7\}$

Lời giải.

- a) $A = \{3\}.$
- b) Các tập con của tập hợp P là:
 $\emptyset; \{3\}; \{5\}; \{7\}; \{3, 5\}; \{3, 7\}; \{5, 7\}; \{3, 5, 7\}.$

Bài 3. (2,0 điểm)

Cho hai tập hợp $A = \{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ và $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tìm: $A \cup B; A \cap B; B \setminus A; A \setminus B$.

Lời giải. * $A \cup B = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

* $A \cap B = \{5, 7, 8, 9\}$.

* $B \setminus A = \{6\}$.

* $A \setminus B = \{2, 3\}$.

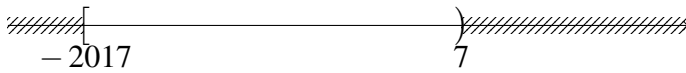
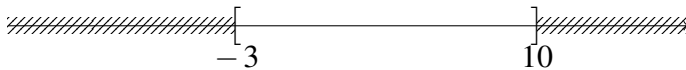
Bài 4. (2,0 điểm)

Cho các tập hợp $A = [-3; 10]; B = [-2017; 7]; C = (-10; 2017]$. Tìm:

a) $B \cup C; B \cap C$.

b) $A \setminus C; (A \cup B) \setminus C$.

Lời giải.



a) $B \cup C = [-2017; 2017]$;

$B \cap C = (-10; 7)$.

b) $A \setminus C = \emptyset$;

$(A \cup B) \setminus C = [-2017; -10]$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 3, 141592$ biết $\bar{a} = 3, 141592 \pm 0, 0001$.

Lời giải. Do độ chính xác đến hàng phần chục nghìn nên số quy tròn là: 3, 142.

V. Đề số 3a

Bài 1. (2,5 điểm) Cho mệnh đề $A : \forall k \in \mathbb{N}, k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6".

a) Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề A .

b) Chứng minh rằng mệnh đề A là một mệnh đề đúng.

Lời giải.

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề A là:

$\bar{A} : \exists k \in \mathbb{N}, k(k+1)(k+2)$ không chia hết cho 6..

b) Ta có $k(k+1)$ chia hết cho 2. .

Trong 3 số tự nhiên liên tiếp luôn tồn tại một số chia hết cho 3 nên $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 3.

Mà $(2, 3) = 1$ nên $k(k+1)(k+2)$ chia hết cho 6.

Bài 2. (3,5 điểm) Cho hai tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x+1| \leq 3\}$ và

$Y = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-2)(x^2-8x+15) = 0\}$

a) Viết các tập X, Y bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm $X \cap Y, X \cup Y$ và $X \setminus Y$.

Lời giải.

a) Ta có $|2x + 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x + 1 \leq 3$
 $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow X = \{-2; -1; 0; 1\}$.

Ta lại có $(x + 1)(x - 2)(x^2 - 8x + 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x^2 - 8x + 15 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow Y = \{-1; 2; 3; 5\}$.

b) $X \cap Y = \{-1\}$
 $X \cup Y = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$
 $X \setminus Y = \{-2, 0, 1\}$

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hai tập hợp $A = [m; m + 2]; B = [-1; 2]$.

a) Khi $m = 0$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A \cap B$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

Lời giải.

a) Với $m = 0$ thì $A = [0; 2] \Rightarrow C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
 Khi đó $C_{\mathbb{R}}A \cap B = [-1; 0)$.

b) Để $A \subset B$ thì $\begin{cases} m \geq -1 \\ m + 2 \leq 2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$

Bài 4. (1,0 điểm) Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10C1 có 45 học sinh trong đó có 17 bạn đạt học sinh giỏi Văn, 25 bạn đạt học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10C1.

Lời giải. Số bạn đạt học sinh giỏi: $45 - 13 = 32$ (học sinh).

Số học sinh giỏi cả Văn và Toán là: $25 + 17 - 32 = 10$ (học sinh).

Bài 5. (1,0 điểm) Bác nông dân đo mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $4 \pm 0,2m$ và chiều rộng $3 \pm 0,3m$. Hỏi diện tích của mảnh vườn có thể lớn nhất là bao nhiêu (quy tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải. Chiều dài và chiều rộng lớn nhất lần lượt là $4,2m$ và $3,3m$.

Diện tích lớn nhất của mảnh vườn là: $S = 4,2 \cdot 3,3 = 13,86 \approx 13,9m^2$.

VI. Đề số 3b

Bài 1. (2,5 điểm) Cho mệnh đề $A : "\forall k \in \mathbb{R}, k^2 + 3k + 5 > 0"$.

a) Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề A .

b) Chứng minh rằng mệnh đề A là một mệnh đề đúng.

Lời giải.

a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề A là:

$$\bar{A} : \exists k \in \mathbb{R}, k^2 + 3k + 5 \leq 0.$$

b) Ta có $k^2 + 3k + 5 = \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$

$$\forall k \left(k + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ nên } k^2 + 3k + 5 > 0, \forall k \in \mathbb{R}.$$

Bài 2. (3,5 điểm) Cho hai tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x - 1| \leq 2\}$ và $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1)(x^2 - 6x + 8) = 0\}$

a) Viết các tập X, Y bằng cách liệt kê các phần tử.

b) Tìm $X \cap Y, X \cup Y$ và $X \setminus Y$.

Lời giải.

a) Ta có $|2x - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2x - 1 \leq 2$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow X = \{0; 1\}.$$

$$\text{Ta lại có } x(x-1)(x^2 - 6x + 8) = 0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow Y = \{0; 1; 2; 4\}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } X \cap Y &= \{0, 1\} \\ X \cup Y &= \{0, 1, 2, 4\} \\ X \setminus Y &= \emptyset \end{aligned}$$

Bài 3. (2,0 điểm) Cho hai tập hợp $A = (m - 2; m + 1]; B = [-1; 4)$.

a) Khi $m = 2$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A \cap B$.

b) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

Lời giải.

a) Với $m = 2$ thì $A = (0; 3] \Rightarrow C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } C_{\mathbb{R}}A \cap B = [-1; 0] \cup (3; 4).$$

b) Để $A \subset B$ thì $\begin{cases} m - 2 \geq -1 \\ m + 1 < 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m < 3$$

Bài 4. (1,0 điểm) Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 11C1 có 40 học sinh trong đó có 15 bạn đạt học sinh giỏi Tiếng Anh, 20 bạn đạt học sinh giỏi Lý và 10 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Tiếng Anh và Lý của lớp 11C1.

Lời giải. Số bạn đạt học sinh giỏi: $40 - 10 = 30$ (học sinh).

Số học sinh giỏi cả Tiếng Anh và Lý là: $20 + 15 - 30 = 5$ (học sinh).

Bài 5. (1,0 điểm) Bác nông dân đo mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $5 \pm 0,3$ m và chiều rộng $3 \pm 0,1$ m. Hỏi diện tích của mảnh vườn có thể nhỏ nhất là bao nhiêu (quy tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải. Chiều dài và chiều rộng nhỏ nhất lần lượt là 4,7m và 2,9m.

Diện tích nhỏ nhất của mảnh vườn là: $S = 4,7 \cdot 2,9 = 13,63 \approx 13,6$ m².

VII. Đề số 4a

Bài 1. Cho các câu sau:

1. Mở cửa ra!
 2. Chủ tịch Hồ Chí Minh sinh năm 1890.
 3. $2x - 1 < 0$.
 4. 2018 chia 3 dư 1.
 5. $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.
 6. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$.
- a) Trong các câu cho ở trên câu nào là mệnh đề? Với câu là mệnh đề hãy xác định xem mệnh đề đó đúng hay sai.
- b) Trong các câu cho ở trên, với câu là mệnh đề hãy nêu mệnh đề phủ định của nó.

Lời giải.

- a) Các câu là mệnh đề là: câu 2, câu 4, câu 5, câu 6. Các câu không phải là mệnh đề là: câu 1, câu 3. **0,5 điểm**
 Câu 2 là mệnh đề và là mệnh đề đúng.
 Câu 4 là mệnh đề và là mệnh đề sai.
 Câu 5 là mệnh đề và là mệnh đề đúng
 Câu 6 là mệnh đề và là mệnh đề sai. **0,5 điểm**
- b) P_2 : "Chủ tịch Hồ Chí Minh sinh năm 1890." $\Rightarrow \overline{P_2}$: "Chủ tịch Hồ Chí Minh không phải sinh năm 1890".
 P_4 : "2018 chia 3 dư 1". $\Rightarrow \overline{P_4}$: "2018 chia 3 không phải dư 1". **0,5 điểm**
 P_5 : " $\sqrt{3}$ là số vô tỉ". $\Rightarrow \overline{P_5}$: " $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ."
 P_6 : " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ ". $\Rightarrow \overline{P_6}$: " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ". **0,5 điểm**

Bài 2. Cho định lí có dạng mệnh đề kéo theo như sau: "Nếu một hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân".

- a) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho.
- b) Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu lại định lí đã cho.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho là: "Nếu một hình thang là hình thang cân thì nó có hai đường chéo bằng nhau". **0,5 điểm.**
- b) Định lí được phát biểu lại là: "Để một hình thang là hình thang cân, điều kiện đủ là hai đường chéo của nó bằng nhau". **0,5 điểm**

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{-2; 1; 3; 4\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$. Hãy xác định:

- a) $A \cap B, A \cup B$.
- b) $A \setminus B, C_A(A \cap B)$.

Lời giải.

- a) Ta có $A \cap B = \{1; 3\}$ **0,5 điểm**
 $A \cup B = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4\}$ **0,5 điểm**
- b) Ta có $A \setminus B = \{-2; 4\}$ **0,5 điểm**
 $C_A(A \cap B) = \{-2; 0; 2; 4\}$ **0,5 điểm**

Bài 4. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{36}{m}\right\}$.

- a) Khi $m = 1$, tìm $A \cap B$.
- b) Tìm $m < 0$ để $A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

- a) Khi $m = 1$ có $A(-\infty; 1)$, $B = (36; +\infty)$ **0,5 điểm**
 $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ **0,5 điểm**
- b) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{36}{m} < m \Leftrightarrow m^2 < 36$ (do $m < 0$) **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow (m - 6)(m + 6) < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 6$.
 Kết hợp với điều kiện $m < 0$ ta được $-6 < m < 0$ **0,5 điểm**

Bài 5. Trong số 45 cán bộ của nhóm phiên dịch được triệu tập để phục vụ hội nghị quốc tế có 25 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 15 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 10 cán bộ vừa phiên dịch được tiếng Anh, vừa phiên dịch được tiếng Pháp. Hỏi

- a) Nhóm có bao nhiêu cán bộ được cấp thẻ đỏ, biết rằng muốn được cấp thẻ đỏ cán bộ đó phải phiên dịch được tiếng Anh hoặc phiên dịch được tiếng Pháp.
- b) Nhóm có bao nhiêu cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp.

Lời giải.

- a) Số cán bộ được cấp thẻ đỏ là $25 + 15 - 10 = 30$ **1,0 điểm**
- b) Số cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp chính là số cán bộ không được cấp thẻ đỏ và bằng: $45 - 30 = 15$ **1,0 điểm**

Bài 6. Tính độ dài cạnh hình vuông có độ dài đường chéo bằng 3, biết $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ (lấy kết quả 3 chữ số thập phân).

Lời giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông, áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $x^2 + x^2 = 3$ **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2,121320344$. Vậy $x \approx 2,121$ **0,5 điểm**

VIII. Đề số 4b

Bài 1. Cho các câu sau:

- Đóng cửa vào!
- Chủ tịch Hồ Chí Minh ra đi tìm đường cứu nước vào năm 1911.
- $2x - 1 \geq 0$.
- 2018 chia hết cho 3.
- $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ.
- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$.

- a) Trong các câu cho ở trên câu nào là mệnh đề? Với câu là mệnh đề hãy xác định xem mệnh đề đó đúng hay sai.
- b) Trong các câu cho ở trên, với câu là mệnh đề hãy nêu mệnh đề phủ định của nó.

Lời giải.

- a) Các câu là mệnh đề là: câu 2, câu 4, câu 5, câu 6. Các câu không phải là mệnh đề là: câu 1, câu 3. **0,5 điểm**
 Câu 2 là mệnh đề và là mệnh đề đúng.
 Câu 4 là mệnh đề và là mệnh đề sai.
 Câu 5 là mệnh đề và là mệnh đề sai
 Câu 6 là mệnh đề và là mệnh đề đúng. **0,5 điểm**
- b) P_2 : "Chủ tịch Hồ Chí Minh ra đi tìm đường cứu nước vào năm 1911." $\Rightarrow \overline{P_2}$: "Chủ tịch Hồ Chí Minh không ra đi tìm đường cứu nước vào năm 1911".
 P_4 : "2018 chia hết cho 3". $\Rightarrow \overline{P_4}$: "2018 không chia hết cho 3". **0,5 điểm**
 P_5 : " $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ". $\Rightarrow \overline{P_5}$: " $\sqrt{3}$ là số vô tỉ."
 P_6 : " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ ". $\Rightarrow \overline{P_6}$: " $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ ". **0,5 điểm**

Bài 2. Cho định lí có dạng mệnh đề kéo theo như sau: "Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau".

- a) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho.
- b) Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu lại định lí đã cho.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đảo của mệnh đề đã cho là: "Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau". **0,5 điểm.**
- b) Định lí được phát biểu lại là: "Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để hai tam giác đó bằng nhau". **0,5 điểm**

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{-2; 0; 1; 2; 5\}$. Hãy xác định:

- a) $A \cap B, A \cup B$.
- b) $A \setminus B, C_A(A \cap B)$.

Lời giải.

- a) Ta có $A \cap B = \{1; 2\}$ **0,5 điểm**
 $A \cup B = \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ **0,5 điểm**
- b) Ta có $A \setminus B = \{3; 4\}$ **0,5 điểm**
 $C_B(A \cap B) = \{-2; 0; 5\}$ **0,5 điểm**

Bài 4. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 2a)$ và $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{18}{a}\right\}$.

- a) Khi $a = 1$, tìm $A \cap B$.
- b) Tìm $a < 0$ để $A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

- a) Khi $a = 1$ có $A(-\infty; 2)$, $B = (18; +\infty)$ **0,5 điểm**
 $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ **0,5 điểm**
- b) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{18}{a} < 2a \Leftrightarrow a^2 < 9$ (do $a < 0$) **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow (a - 3)(a + 3) < 0 \Leftrightarrow -3 < a < 3$.
 Kết hợp với điều kiện $a < 0$ ta được $-3 < a < 0$ **0,5 điểm**

Bài 5. Trong số 50 cán bộ của nhóm phiên dịch được triệu tập để phục vụ hội nghị quốc tế có 35 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 20 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 15 cán bộ vừa phiên dịch được tiếng Anh, vừa phiên dịch được tiếng Pháp. Hỏi

- a) Nhóm có bao nhiêu cán bộ được cấp thẻ đỏ, biết rằng muốn được cấp thẻ đỏ cán bộ đó phải phiên dịch được tiếng Anh hoặc phiên dịch được tiếng Pháp.
- b) Nhóm có bao nhiêu cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp.

Lời giải.

- a) Số cán bộ được cấp thẻ đỏ là $35 + 20 - 15 = 40$ **1,0 điểm**
- b) Số cán bộ không phiên dịch được tiếng Anh và không phiên dịch được tiếng Pháp chính là số cán bộ không được cấp thẻ đỏ và bằng: $50 - 40 = 10$ **1,0 điểm**

Bài 6. Tính độ dài cạnh hình vuông có độ dài đường chéo bằng 5, biết $\sqrt{2} \approx 1,414213562$ (lấy kết quả 3 chữ số thập phân).

Lời giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông, áp dụng định lý Pi-ta-go ta có $x^2 + x^2 = 5$ **0,5 điểm**
 $\Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,535533906$. Vậy $x \approx 3,536$ **0,5 điểm**

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Hàm số và tập xác định của hàm số

Định nghĩa 1. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập \mathcal{D} có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực \mathbb{R} thì ta có một **hàm số**. Ta gọi x là **biến số** và y là **hàm số** của x . Tập hợp \mathcal{D} được gọi là **tập xác định** của hàm số.

2. Cách cho hàm số

- Hàm số cho bằng bảng
- Hàm số cho bằng biểu đồ
- Hàm số cho bằng công thức



Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta quy ước: **Tập xác định của hàm số** $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

Định nghĩa 2. **Đồ thị** của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập \mathcal{D} là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc \mathcal{D} .

Ta thường gặp trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường (đường thẳng, đường cong,...). Khi đó, ta nói $y = f(x)$ là **phương trình** của đường đó.

4. Sự biến thiên của hàm số

Định nghĩa 3. Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của hàm số đó.

5. Tính chẵn lẻ của hàm số

Định nghĩa 4. Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định \mathcal{D} .

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

\triangle Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta làm như sau:

+ Tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa.

+ Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $f(x)$ có nghĩa tìm được chính là tập xác định của hàm số.

Một số trường hợp thường gặp:

$$\sqrt{f(x)} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) \geq 0.$$

$$\frac{1}{f(x)} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) \neq 0.$$

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2017$.

Lời giải. Điều kiện $-x^3 + 3x + 2017$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = x - \frac{2}{x-3}$.

Lời giải. Điều kiện $x - \frac{2}{x-3}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = x + \sqrt{x+1}$.

Lời giải. Điều kiện $x + \sqrt{x+1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $[-1; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .

Bài 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{4x^2+5x-9}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{9}{4}; 1\}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3+x}{x^2+2x+5}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .

Bài 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $[-4; 2) \cup (2; +\infty)$.

Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x+3}{(2x-1)(x+3)}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{-3; \frac{1}{2}\right\}$.

Bài 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $[2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Bài 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+2}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Bài 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x+2} + \frac{x}{\sqrt{-x+1}}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{|x-1| + |x-2|}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .

Bài 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{|x|-3}$.

Lời giải. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

- Để tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ ta thay thế x bởi x_0 vào công thức $f(x)$ để tính $f(x_0)$.
- Đối với các hàm số được cho bởi hai hay nhiều công thức với các miền xác định đã cho, chẳng hạn:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_1 \\ f_2(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

Khi tính giá trị hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, tùy theo x_0 thuộc \mathcal{D}_1 hay \mathcal{D}_2 mà ta sử dụng công thức $f(x) = f_1(x)$ hay $f(x) = f_2(x)$ để tính $f(x_0)$.

! Với hàm số $f(x)$ được cho bởi công thức phức tạp, để tính một cách nhanh và chính xác giá trị $f(x_0)$ ta sử dụng máy tính cầm tay để tính. Quy trình bấm máy:

- Nhập công thức $f(x)$;
- Bấm r ;
- Nhập giá trị x_0 ;
- Bấm $=$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 3x - 1$. Tính giá trị của hàm số đó tại $x = -2$.

Lời giải. Ta có $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) - 1 = 13$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{với } x \geq 1 \\ 1 - 2x^2 & \text{với } x < 1. \end{cases}$
 Tính $f(1), f(2), f(0), f(-3)$.

Lời giải. Ta có $f(1) = 1, f(2) = 4, f(0) = 1, f(-3) = -17$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{với } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{với } x > 0. \end{cases}$
 Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 1; x = 0; x = -2$.

Lời giải. Ta có $f(1) = \frac{2}{3}; f(0) = -1; f(-2) = 4$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tính $f(-2)$.

Lời giải. Đáp số: $f(-2) = 9$.

Bài 12. Cho hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ và $g(x) = 1 - x$. Tính giá trị $\frac{f(-1)}{g(2)}$.

Lời giải. Đáp số: $\frac{f(-1)}{g(2)} = -3$.

Bài 13. Cho hàm số $f(y) = 4 - \sqrt{y}$. Tính $f(4y^2)$.

Lời giải. Đáp số: $f(4y^2) = 4 - 2y$, với $y \geq 0$.

Bài 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{với } x < 3 \\ \sqrt{x+5} & \text{với } x \geq 3. \end{cases}$

Tính $f(-4), f(1), f(4)$.

Lời giải. Đáp số: $f(-4) = 3, f(1) = 2, f(4) = 3$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{với } x < -1 \\ 3 & \text{với } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{với } x \geq 1. \end{cases}$

Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

Lời giải. Đáp số: $f(-2) = 7, f(-1) = 3, f(0) = 3, f(1) = 0, f(2) = \sqrt{3}$.

Bài 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{với } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}} & \text{với } x > 2. \end{cases}$

Tính $f(1), f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3}), f(\sqrt{2}+1)$.

Lời giải. Đáp số: $f(1) = 0, f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2, f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2, f(\sqrt{2}+1) = \sqrt{3}$.

Bài 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{với } -4 \leq x < -1 \\ -x^2 + 2 & \text{với } -1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & \text{với } x > 2. \end{cases}$

Tính $f(0), f(\sqrt{2}), f(-1), f(\sqrt{2}), f(3)$.

Lời giải. Đáp số: $f(0) = 2, f(\sqrt{2}) = 0, f(-1) = 1, f(3) = -1$.

Bài 18. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Tính $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$, với $x \neq 3$.

Lời giải. Đáp số: $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\frac{x+3}{9x^2}$.

Bài 19. Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tính $f(a), f(x+2)$ (với a là một số thực).

Lời giải. Đáp số: $f(a) = -a^2 + 2a + 3, f(x+2) = -x^2 - 2x + 3$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2$. Tìm giá trị của số thực a sao cho $f(a-1) = 2$.

Lời giải. Ta có: $f(a-1) = a^2 - 2a - 1 = 2 \Rightarrow a = -1, a = 3$.

Bài 21. Cho hàm số $f(x) = 2x + m$, với m là tham số. Tính m để $f(1) = 4$.

Lời giải. Ta có: $f(1) = 2 + m = 4 \Rightarrow m = 2$.

Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \Leftrightarrow & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \end{aligned}$$

- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \Leftrightarrow & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = 2x + 3$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc \mathbb{R} , ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1 + 3) - (2x_2 + 3)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0.$$

- Vậy hàm số $y = 2x + 3$ luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

Ví dụ 8. Dùng định nghĩa xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-5; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 + 10x_1 + 9) - (x_2^2 + 10x_2 + 9)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 10)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 10.$$

- Do $x_1 > -5, x_2 > -5$ nên $x_1 + x_2 > -10 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 10 > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

- Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; +\infty)$.

Ví dụ 9. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{4}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$.

Lời giải. - Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-1; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{4}{x_1+1} - \frac{4}{x_2+1}}{x_1 - x_2} = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{-4}{(x_1+1)(x_2+1)}.$$

- Do $x_1 > -1, x_2 > -1$ nên $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.
- Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 10. Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $[1; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{x_2 - 1}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1 - 1} + \sqrt{x_2 - 1}} > 0.$$

- Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.
- Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
y	0	$+\infty$

Ví dụ 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty; 2)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Do $x_1 < 2, x_2 < 2$ nên $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ thì $m > 0$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(2; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Do $x_1 > 2, x_2 > 2$ nên $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ thì $m > 0$.
- Tóm lại $m > 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x + 5$ trên \mathbb{R} .

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc \mathbb{R} , ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_1 + 5) - (-x_2 + 5)}{x_1 - x_2} = -1 < 0.$$

- Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên \mathbb{R} .

Bài 23. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = 2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

- Xét

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1^2 + 4x_1 + 1) - (2x_2^2 + 4x_2 + 1)}{x_1 - x_2} = 2(x_1 + x_2 + 2).$$

- Trường hợp x_1, x_2 phân biệt cùng thuộc $(-\infty; -1)$ thì $x_1 + x_2 + 2 < 0$ suy ra hàm số nghịch biến.

- Trường hợp x_1, x_2 phân biệt cùng thuộc $(-1; +\infty)$ thì $x_1 + x_2 + 2 > 0$ suy ra hàm số đồng biến.

Bài 24. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{1+x}{1-x}$ trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty; 1)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1+x_1}{1-x_1} - \frac{1+x_2}{1-x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{2}{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

- Do $x_1 < 1, x_2 < 1$ nên $(1-x_1)(1-x_2) > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

- Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Bài 25. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = \sqrt{3-x}$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{3-x_1} - \sqrt{3-x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{\sqrt{3-x_1} + \sqrt{3-x_2}} < 0.$$

- Vậy hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định.

Bài 26. Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = |x-3|$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Xét

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|x_1 - 3| - |x_2 - 3|}{x_1 - x_2}.$$

- Với $x_1, x_2 \in (-\infty; 3)$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3-x_1) - (3-x_2)}{x_1 - x_2} = -1 < 0$.

Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 3)$.

- Với $x_1, x_2 \in (3; +\infty)$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1-3) - (x_2-3)}{x_1 - x_2} = 1 > 0$.

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Bài 27. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = |\sqrt{2-x} + 1|$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị tùy ý thuộc $(-\infty; 2]$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|\sqrt{2-x_1} + 1| - |\sqrt{2-x_2} + 1|}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{\sqrt{2-x_1} + \sqrt{2-x_2}} < 0.$$

- Vậy hàm số đã cho luôn nghịch biến trên tập xác định.

Bài 28. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ trên $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

Lời giải.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1}}{x_1 - x_2} = 1 - x_1x_2.$$

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (0; 1)$ suy ra $0 < x_1, x_2 < 1 \Rightarrow 1 - x_1x_2 > 0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ suy ra $x_1, x_2 > 1 \Rightarrow 1 - x_1x_2 < 0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bài 29. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-2)x + 5$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc \mathbb{R} , ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{((m-2)x_1 + 5) - ((m-2)x_2 + 5)}{x_1 - x_2} = \frac{(m-2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = m - 2.$$

- Để hàm số đồng biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

- Vậy $m > 2$.

Bài 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1-2} - \frac{m}{x_2-2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

- Nhận thấy trên từng khoảng xác định $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$ thì tích $(x_1-2)(x_2-2) > 0$, từ đó ta có để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

- Vậy với $m < 0$ thì hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

Bài 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m+1}{x}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m+1}{x_1} - \frac{m+1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-(m+1)}{x_1 x_2}$$

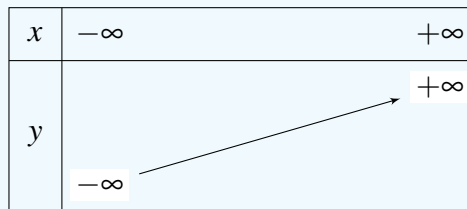
- Nhận thấy trên từng khoảng xác định $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ thì tích $x_1 x_2 > 0$, từ đó ta có để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow -(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

- Vậy với $m < -1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

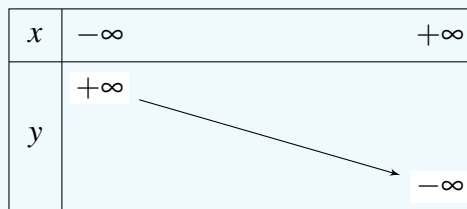
Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất

a) Sự biến thiên của hàm số $y = ax + b$ trên \mathbb{R} .

- Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .



- Khi $a < 0$ hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

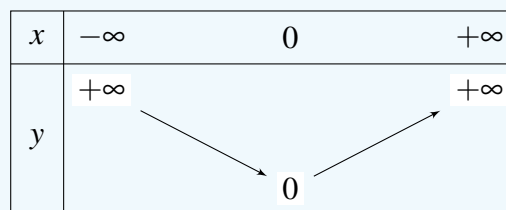


b) Sự biến thiên của hàm số $y = |x|$ trên \mathbb{R} .

- Ta có $y = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

- Do đó, khi $x \geq 0$ thì $y = x$ là hàm số đồng biến, khi $x < 0$ thì $y = -x$ là hàm số nghịch biến.

- Bảng biến thiên



Ví dụ 12. Xét sự biến thiên của hàm số $y = 2x - 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Do $a = 2 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ 13. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = |1 - x| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

- Do đó, khi $x \geq 1$ thì $y = x - 1$ là hàm số đồng biến, còn khi $x < 1$ thì $y = 1 - x$ là hàm số nghịch biến.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Ví dụ 14. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |x + 2| + |x - 2|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = |x + 2| + |x - 2| = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 4 & \text{khi } -2 \leq x < 2 \\ -2x & \text{khi } x < -2 \end{cases}$

- Do đó, khi $x < -2$ thì $y = -2x$ là hàm số nghịch biến, khi $-2 \leq x < 2$ thì $y = 4$ là hàm hằng, còn khi $x \geq 2$ thì $y = 2x$ là hàm đồng biến.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y	$+\infty$	4	4	$+\infty$

Ví dụ 15. Cho hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Để hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$ nghịch biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi

$$1 - 2m < 0 \Leftrightarrow 1 < 2m \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

- Vậy với $m > \frac{1}{2}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 32. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Do $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên \mathbb{R} .

Bài 33. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 3x - 1$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Do $a = 3 > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên \mathbb{R} .

Bài 34. Xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = |2x - 1|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = |2x - 1| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

- Từ đó ta có

+ Với $x < \frac{1}{2}$ thì hàm số $y = 1 - 2x$ nghịch biến.

+ Với $x \geq \frac{1}{2}$ thì hàm số $y = 2x - 1$ đồng biến.

Bài 35. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$.

- Với $x < -3$ thì $y = -x - 3$ là hàm nghịch biến.

- Với $x \geq -3$ thì $y = x + 3$ là hàm số đồng biến.

Bài 36. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x| + |2x + 4|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Với $x < -2$ thì $y = -3x - 3$ là hàm số nghịch biến.

- Với $-2 \leq x \leq 1$ thì $y = x + 5$ là hàm số đồng biến.

- Với $x > 1$ thì $y = 3x + 3$ là hàm số đồng biến.

Bài 37. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2|x - 1|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = |x - 2| - 2|x - 1| = \begin{cases} x & \text{khi } x < 1 \\ -3x + 4 & \text{khi } 1 \leq x < 2 \\ -x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	-2	$-\infty$

Bài 38. Xác định a để hàm số $y = (2a + 3)x + a - 1$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Để hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $2a + 3 > 0 \Leftrightarrow 2a > -3 \Leftrightarrow a > -\frac{3}{2}$.

- Vậy với $a > -\frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

Bài 39. Cho hàm số $y = (m - 1)x + (2 - m)$. Biện luận tính đơn điệu của hàm số đã cho theo tham số m .

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có, khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì hàm số nghịch biến, khi $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì hàm số đồng biến, còn khi $m = 1$ thì $y = 1$ là hàm hằng.

Dạng 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định \mathcal{D} được gọi là hàm số chẵn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x). \end{cases}$$

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định \mathcal{D} được gọi là hàm số lẻ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

- Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy .
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Ví dụ 16. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^2 + 3$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ do đó với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$; $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$. Vậy hàm đang xét là hàm chẵn.

Ví dụ 17. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{1}{x^3}$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suy ra $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$; $f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$. Vậy hàm đang xét là hàm lẻ.

Ví dụ 18. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \sqrt{2x - 3}$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, do đó $x = 4 \in \mathcal{D}$ thì $-x = -4 \notin \mathcal{D}$. Vậy hàm đang xét không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 19. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 3$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $f(-x) = 3 = f(x), \forall x$. Vậy hàm đang xét là hàm chẵn.

Ví dụ 20. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^4 + 3x^3 - 2$.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^3 - 2 = x^4 - 3x^3 - 2 \neq \pm f(x)$. Vậy hàm đã cho không chẵn, không lẻ.

Ví dụ 21. Có hàm số nào vừa chẵn, vừa lẻ không?

Lời giải. Hàm số $y = 0$.

Ví dụ 22. Tìm m để hàm số $y = x^2 + (m+1)x + 2$ là hàm chẵn.

Lời giải. TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Hàm đã cho là hàm số chẵn khi $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ hay $(m-1)x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $m = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 40. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{3x-4}$

b) $f(x) = \frac{2x^2-4}{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-4}$

d) $f(x) = -5$

e) $f(x) = 0$

f) $f(x) = -x^4 + 5x - 3$

g) $f(x) = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{3x}$

h) $f(x) = -5x^3 + 7x$

i) $f(x) = |-x+5| - |x+5|$

j) $f(x) = |7-5x| + |5x+7|$

k) $f(x) = \frac{|x+3| + |x-3|}{|x+3| - |x-3|}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \left| \frac{x-4}{x+4} \right| + \left| \frac{x+4}{x-4} \right|$

m) $f(x) = \begin{cases} 5-x, & x \geq 0 \\ 5+x, & x < 0. \end{cases}$

Bài 41. Tùy theo m , hãy xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = f(x) = \frac{1}{mx^2 + 2(m-1)x - m}$.

b) $y = f(x) = \frac{1}{(m+1)x^2 + mx - 1}$.

Bài 42. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số là hàm lẻ.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 43. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 1$. Tính $f(x+h) - f(h)$ (với h là một số thực).

Lời giải. Đáp số: $f(x+h) - f(h) = x^2 + 2xh - x$.

Bài 44. Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 1 mét so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $y = f(x) = -0,0097x^2 + x + 1$. Trong đó x và $f(x)$ được tính bằng mét. Hỏi quả bóng có bay qua được một hàng rào cao 4 mét và nằm cách vị trí người đánh bóng 100 mét hay không?

Lời giải. Vì hàng rào cách người đánh bóng 100 mét nên ta tính độ cao quả bóng tại vị trí $x = 100$.

Ta có $f(100) = 4$. Ta thấy ở tại vị trí hàng rào thì độ cao của quả bóng cao hơn hàng rào nên quả bóng sẽ bay qua được hàng rào.

Bài 45. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{5+x+2\sqrt{x+4}}$.

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét tính chẵn lẻ của hàm số.
- Xét tính đơn điệu của hàm số.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Tính các giá trị $f(-5), f(-4), f(-3), f(0)$.

Lời giải.

- a) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 5+x+2\sqrt{x+4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (\sqrt{x+4}+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -4$.

Vậy ta có tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = [-4; +\infty)$.

- b) Hàm số không chẵn cũng không lẻ do $4 \in \mathcal{D}$ nhưng $-4 \notin \mathcal{D}$.

- c) Ta có $y = \sqrt{(\sqrt{x+4}+1)^2} = \sqrt{x+4}+1$. Với mọi x_1, x_2 phân biệt lớn hơn -4 ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{x_1+4}+1) - (\sqrt{x_2+4}+1)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1+4} + \sqrt{x_2+4}} > 0.$$

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.

- d) Bảng biến thiên

x	-4	$+\infty$
y	1	$+\infty$

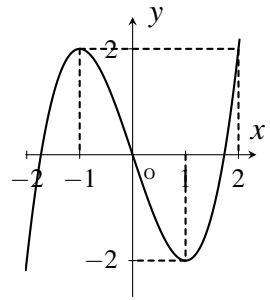
- e) Ta có

- $f(-5)$ không xác định do $-5 \notin \mathcal{D}$.
- $f(-4) = 1$.
- $f(-3) = 2$.
- $f(0) = 3$.

Bài 46.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- a) Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.
 b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.



Lời giải. a) Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

b) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ là 2 và -2

§2. HÀM SỐ $Y = AX + B$

I. Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 1. Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ gọi là hàm số bậc nhất.

- Hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên \mathbb{R} nếu $a > 0$, nghịch biến trên \mathbb{R} nếu $a < 0$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax + b, a \neq 0$ là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục toạ độ. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ còn gọi là đường thẳng $y = ax + b$, trong đó a gọi là hệ số góc của đường thẳng.
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ song song với nhau nếu $a = a'$ và $b \neq b'$.
- Hai đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ và $y = a'x + b', a' \neq 0$ vuông góc với nhau nếu $aa' = -1$.

Định nghĩa 2. Hàm số $y = b$ gọi là hàm số hằng.

- Hàm số $y = b$ có giá trị không đổi trên \mathbb{R} .
- Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

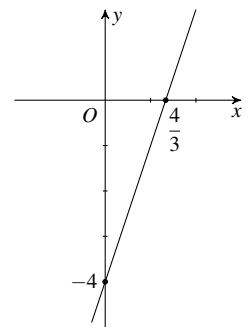
Để vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$, ta tìm hai điểm phân biệt mà đồ thị đi qua. Sau đó vẽ một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Thông thường ta chọn hai điểm $(0; b)$ và $(-\frac{b}{a}; 0)$.

Đặc biệt: Đồ thị của hàm số hằng $y = b$ là một đường thẳng vuông góc và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$.

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x - 4$.

Lời giải.

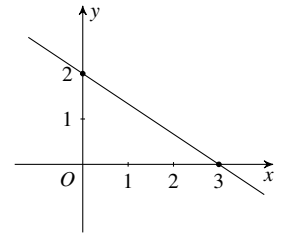
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0; -4)$ và $(\frac{4}{3}; 0)$.



Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Lời giải.

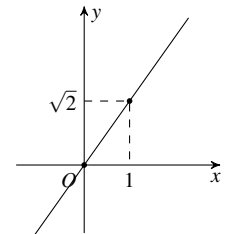
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(3;0)$.



Ví dụ 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2}x$.

Lời giải.

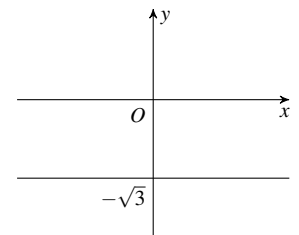
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0;0)$ và $(1; \sqrt{2})$.



Ví dụ 4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho vuông góc với trục tung tại điểm $(0; -\sqrt{3})$.

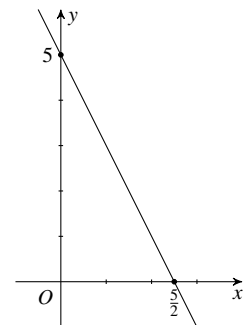


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x + 5$.

Lời giải.

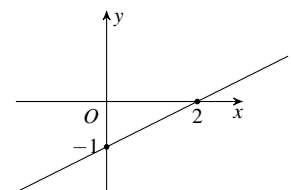
Đồ thị như hình vẽ



Bài 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Lời giải.

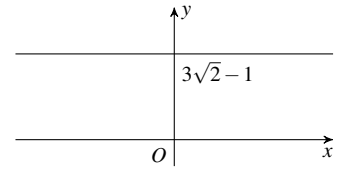
Đồ thị như hình vẽ



Bài 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3\sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

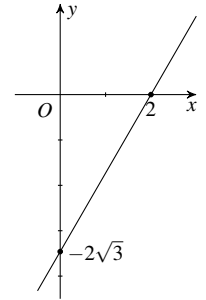
Đồ thị như hình vẽ



Bài 4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}(x - 2)$.

Lời giải.

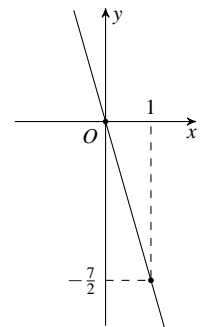
Đồ thị như hình vẽ



Bài 5. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{7}{2}x$.

Lời giải.

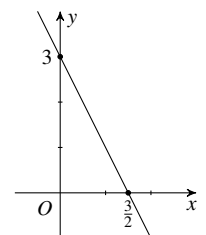
Đồ thị như hình vẽ



Bài 6. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2(x - 1) + 1$.

Lời giải.

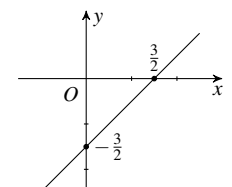
Đồ thị như hình vẽ



Bài 7. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x - 3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị như hình vẽ



Dạng 2. Xác định hệ số a và b của số bậc nhất

Phương pháp: Dựa vào các yếu tố điểm thuộc đường, lý thuyết hai đường song song, vuông góc, hệ số góc, giao điểm của hai đường để tìm ra mối quan hệ giữa a và b .

Những điểm cần chú ý:

- Nếu có hai tham số a, b chưa biết thì ta cần tìm hai quan hệ của a, b độc lập để giải hệ phương trình tìm a, b .
- Nếu điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường thẳng $d : y = ax + b$ thì ta có $y_M = ax_M + b$.
- Cho $(d) : y = ax + b$ và $(d') : y = a'x + b'$.
 Nếu $(d) \parallel (d')$ thì $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$.
 Nếu $(d) \perp (d')$ thì $a' = \frac{-1}{a}$.
- Nếu cho hệ số góc k tức là cho hệ số a của đường thẳng $(d) : y = ax + b$.
- Nếu cho góc của đường thẳng $(d) : y = ax + b$ tạo với trục hoành là α thì ta hiểu là cho $a = \tan(\alpha)$.

Ví dụ 5. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + b$. Tìm b biết (d) đi qua điểm $M(1; 2)$.

Lời giải. Vì $M \in (d)$ nên ta có $2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy: $b = 1$ tức là (d) có phương trình là $y = x + 1$.

Ví dụ 6. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$ và $B(2; 3)$.

Lời giải. Vì $A, B \in (d)$ nên ta có $\begin{cases} 2 = a \cdot (-1) + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases}$.

Vậy: $a = \frac{1}{3}$ và $b = \frac{7}{3}$ tức là (d) có phương trình là $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$.

Ví dụ 7. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; -2)$ và có hệ số góc là 3.

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $-2 = a \cdot (-1) + b$.

Mặt khác ta có hệ số góc là 3 nên $a = 3 \Rightarrow b = 1$.

Vậy: $a = 3$ và $b = 1$ tức là (d) có phương trình là $y = 3x + 1$.

Ví dụ 8. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(-3; 2)$ và song song với $(\Delta) : y = -x + 2$.

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $2 = a \cdot (-3) + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \parallel (d)$ nên $a = -1 \Rightarrow b = -1$ (nhận vì $b \neq 2$).

Vậy: (d) có phương trình là $y = -x - 1$.

Ví dụ 9. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2; 5)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Lời giải. Vì $M \in (d)$ nên ta có $5 = a \cdot 2 + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \perp (d)$ nên $a = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2 \Rightarrow b = 1$.

Vậy: (d) có phương trình là $y = 2x + 1$.

Ví dụ 10. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 3 và đi qua điểm $A(1; 2)$.

Lời giải. Vì (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 3 $\Rightarrow x = -\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow a = -\frac{b}{3}$.

và $A \in (d)$ nên $2 = a \cdot 1 + b$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} a + b = 2 \\ a = -\frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy: (d) có phương trình là $y = -x + 3$.

Ví dụ 11. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết đường thẳng d đi qua giao điểm của $(d_1) : y = x + 1$ và $(d_2) : y = -2x + 1$ và điểm $B(-1; 2)$.

Lời giải. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0, 1) \text{ nên } 1 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Mặt khác $B \in (d) \Rightarrow 2 = a(-1) + b \Rightarrow a = -1$.

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{9}{4}$ tức là (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

Ví dụ 12. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ và $f(2x + 1) = 3$ là có nghiệm là $x = -1$.

Lời giải. Vì phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ nên $a(2 + 1) + b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$.

và phương trình $f(2x + 1) = 3$ là $x = -1$ nên $a(2 \cdot (-1) + 1) + b = 3 \Leftrightarrow -a + b = 3$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} 3a + b = 0 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{9}{4}$ tức là (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất và đi qua điểm $A(3; 1)$.

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $1 = a \cdot 3 + b$ và (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất ($y = x$) nên $a = 1 \Rightarrow b = -2$.

Vậy: $a = 1, b = -2$.

Bài 9. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1, 2)$ và gốc tọa độ O .

$$\text{Lời giải.} \text{ Vì } A, O \in (d) \text{ nên ta có } \begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b \\ 0 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy: $a = 2$ và $b = 0$.

Bài 10. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1; -2)$ và (d) tạo với Ox một góc là 45° .

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $-2 = a.1 + b$.

Mặt khác ta có hệ số góc là $a = \tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow b = -3$.

Vậy: $a = 1$ và $b = -3$ tức là (d) có phương trình là $y = x - 3$.

Bài 11. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(3, 2)$ và song song với Ox .

Lời giải. Vì $A \in (d)$ nên ta có $2 = a.3 + b$.

Mặt khác ta có $(Ox) \parallel (d)$ nên $a = 0 \Rightarrow b = 2$ (nhận vì $b \neq 0$).

Vậy: (d) có phương trình là $y = 2$.

Bài 12. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2, 1)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = 3x + 2$.

Lời giải. Vì $M \in (d)$ nên ta có $1 = a.2 + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \perp (d)$ nên $a = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{5}{3}$.

Vậy: (d) có phương trình là $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Bài 13. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 và cắt trục Oy với tung độ là 3.

Lời giải. Vì (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 $\Rightarrow x = -\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$.

và (d) cắt Oy tại điểm có tung độ là 3 $\Rightarrow y = a.0 + b = b = 3$.

Do đó $a = -\frac{3}{2}$

Vậy: (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Bài 14. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm phương trình a, b biết phương trình $f(x+1) = 0$ có nghiệm là $x = 1$ và $f(2) = 3$.

Lời giải. Vì phương trình $f(x+1) = 0$ có nghiệm là $x = 1$ nên $a(1+1) + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$.

và $f(-1) = 3 \Leftrightarrow -a + b = 3$.

Do đó $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy: $a = -1; b = 2$ tức là (d) có phương trình là $y = -x + 2$.

Dạng 3. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có chứa giá trị tuyệt đối

Để vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$ ta sử dụng định nghĩa của giá trị tuyệt đối:

$$y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Sau đó ta xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

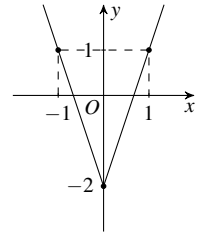
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 13. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3|x| - 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = 3|x| - 2 = \begin{cases} 3x - 2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x - 2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -2)$, $(-1; 1)$ và $(1; 1)$.

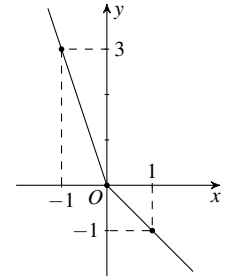


Ví dụ 14. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |x| - 2x = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 0)$, $(-1; 3)$ và $(1; -1)$.



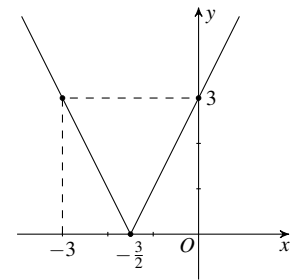
Ví dụ 15. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |2x + 3|$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3 & \text{nếu } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x - 3 & \text{nếu } x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



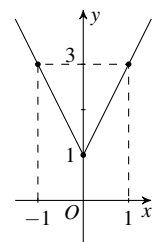
Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-\frac{3}{2}; 0)$, $(0; 3)$ và $(-3; 3)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|x| + 1$.

Lời giải.

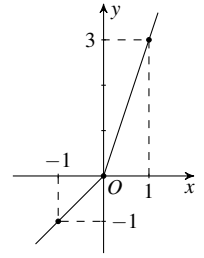
Đồ thị như hình vẽ.



Bài 16. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x + |x|$.

Lời giải.

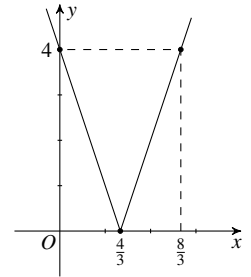
Đồ thị như hình vẽ.



Bài 17. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |3x - 4|$.

Lời giải.

Đồ thị như hình vẽ.

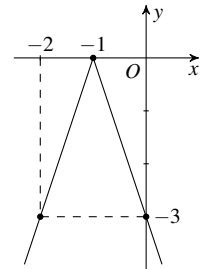


Bài 18. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -3|x + 1|$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

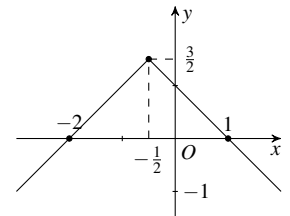


Bài 19. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}|2x + 1| + \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$



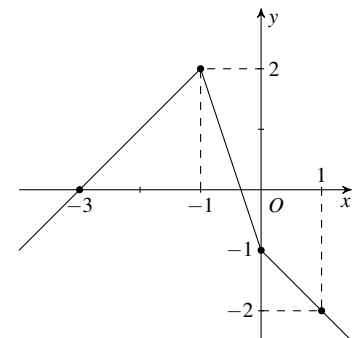
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2|x + 1| + 1$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y	$-\infty$	2	-1	$-\infty$

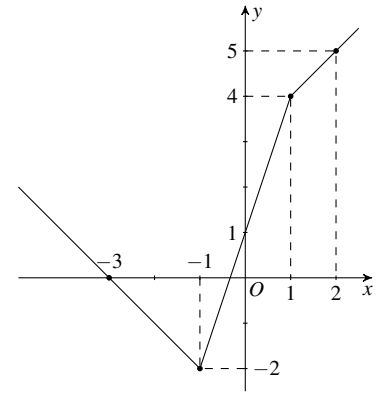


Bài 21. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|x + 1| - |x - 1|$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	4	$+\infty$



Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi hệ nhiều công thức

Vẽ đồ thị hàm số trùng với từng đồ thị hàm số thành phần tương ứng với điều kiện x ở phía sau.

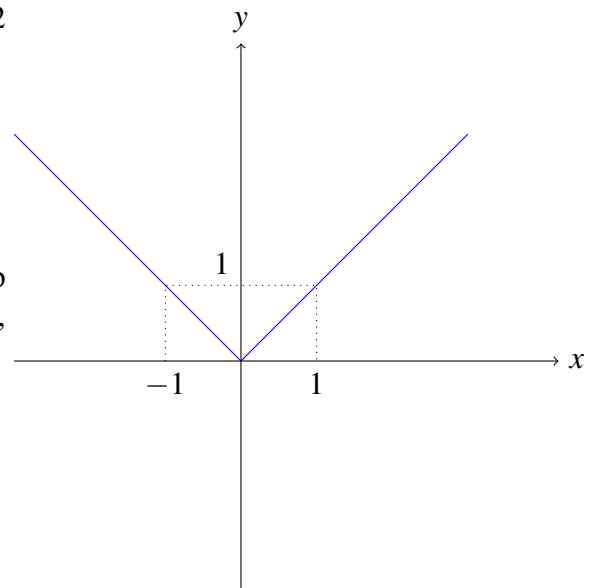
Ví dụ 16. Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ là sự "lắp ghép" của 2 đồ thị:

- Đồ thị hàm số $y = x$ (chỉ lấy phần ứng với $x \geq 0$).
- Đồ thị hàm số $y = -x$ (chỉ lấy phần ứng với $x < 0$).

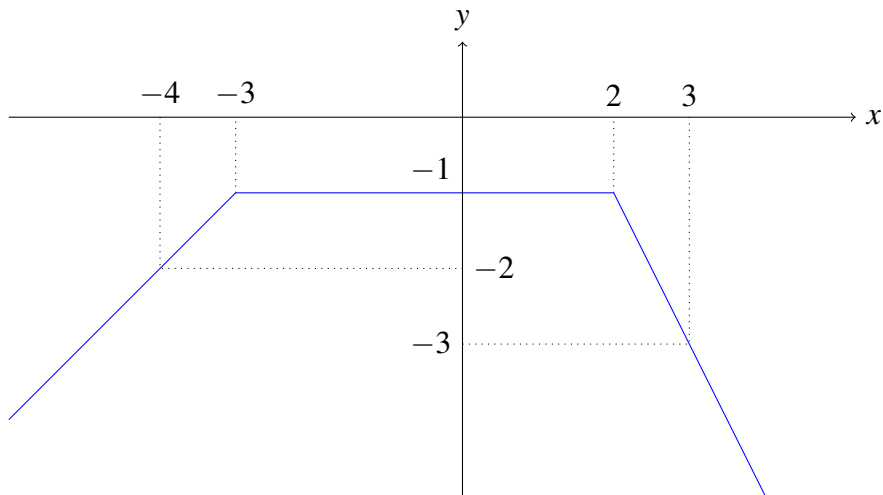
Ta dễ dàng thấy được, đồ thị của hàm số đã cho là sự lắp ghép của 2 tia phân giác của góc phần tư thứ (I) và (II), chúng đối xứng với nhau qua trục Oy .



Ví dụ 17. Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} -2x+3 & \text{nếu } x > 2 \\ -1 & \text{nếu } -3 \leq x \leq 2. \\ x+2 & \text{nếu } x < -3 \end{cases}$

Lời giải. Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -2x+3 & \text{nếu } x > 2 \\ -1 & \text{nếu } -3 \leq x \leq 2. \\ x+2 & \text{nếu } x < -3 \end{cases}$

- Trùng với đồ thị hàm số $y = -2x + 3$ trên $(2; +\infty]$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = -1$ trên $[-3; 2]$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = x + 2$ trong $(-\infty; -3)$.



Ví dụ 18. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 < x \leq 1. \\ x-3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

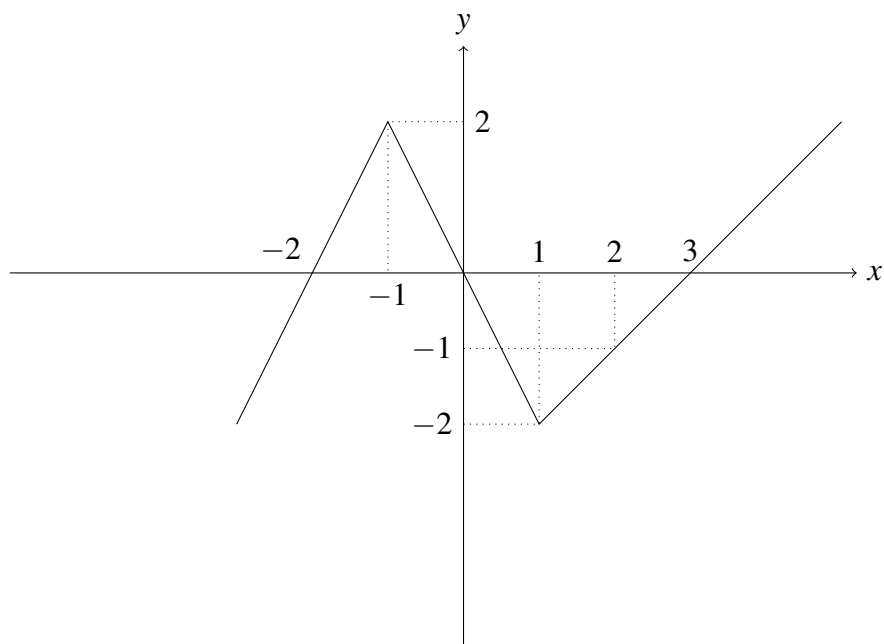
- Tìm tập xác định và vẽ đồ thị hàm số trên.
- Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (-1; 1); (1; +\infty)$ và lập bảng biến thiên.

Lời giải.

a. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 < x \leq 1. \\ x-3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

- Trùng với đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ nếu $x \leq -1$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = -2x$ nếu $-1 < x \leq 1$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = x - 3$ nếu $x > 1$.



- b. Trên khoảng $(-2; -1)$ và $(1; 3)$ hàm số đồng biến.
 Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
 Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \begin{cases} 3x - 6 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 6 - 3x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Lời giải. Với $x \geq 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 3x - 6$.
 Với $x < 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 6 - 3x$.

Bài 23. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & \text{nếu } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x - 6 & \text{nếu } 4 < x \leq 5 \end{cases}$$

Lời giải. Với $0 \leq x < 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = x + 1$.
 Với $2 \leq x \leq 4$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
 Với $4 < x \leq 5$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 2x - 6$.

Bài 24. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } -2 \leq x < -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & \text{nếu } 1 < x \leq 3 \end{cases}$.

- a. Tìm tập xác định và vẽ đồ thị hàm số trên.
 b. Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$; $(-2; 4)$; $(4; +\infty)$ và lập bảng biến thiên.

Dạng 5. Sự tương giao giữa các đường thẳng

Phương pháp:

- Cho 2 đường thẳng $d_1 : y = a_1x + b_1$ và $d_2 : y = a_2x + b_2$ ($a_1 \neq 0; a_2 \neq 0$)
 - d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
 - $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
 - $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
 - $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.
- d_1 cắt d_2 tại một điểm trên trục tung $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$ và $b_1 = b_2$.
- Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh 2 trong 3 đường thẳng cắt nhau và giao điểm của chúng thuộc đường còn lại.

Ví dụ 19. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng đã cho sau đây.

a. $d_1 : y = 3 + \frac{x}{2}$.

d. $d_4 : 2y + x = 6$.

b. $d_2 : 3y - 6x + 1 = 0$.

e. $d_5 : 2x - y = 1$.

c. $d_3 : y = -0,5x - 4$.

f. $d_6 : y = 0,5x + 1$.

Lời giải. Đưa mỗi đường thẳng về dạng: $y = ax + b$

a. $d_1 : y = 3 + \frac{x}{2}$.

b. $d_2 : y = 2x - \frac{1}{3}$.

c. $d_3 : y = -0,5x - 4$.

d. $d_4 : -\frac{1}{2}x + 6$.

e. $d_5 : y = 2x - 1$.

f. $d_6 : y = 0,5x + 1$.

Các cặp đường thẳng song song là d_1 và d_6 ; d_2 và d_5 ; d_3 và d_4 .

Ví dụ 20. Tìm giao điểm của 2 đường thẳng $d_1 : y = x - 5$ và $d_2 : y = 1 + 3x$.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 :

$$x - 5 = 1 + 3x \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3.$$

Giao điểm của d_1 và d_2 là $(-3; -8)$.

Ví dụ 21. Tìm giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với

a. Trục Ox .

b. Trục Oy .

Lời giải.

a. Trục $Ox : y = 0$.

Giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với Ox là $A(-\frac{1}{2}; 0)$.

b. Trục $Oy : x = 0$.

Giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với Oy là $B(0; 1)$.

Ví dụ 22. Cho 2 đường thẳng: $d_1 : y = mx + 3$ và $d_2 : y = (2m + 1)x - 5$. Tìm m để

a. $d_1 \parallel d_2$.

b. d_1 cắt d_2 .

Lời giải.

$$a. d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2m + 1 \\ 3 \neq 5 \\ m \neq 0 \\ 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

$$b. d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow m \neq 2m + 1 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Ví dụ 23. Cho $d_1 : y = mx - m + 2$; $d_2 : y = (m - 3)x + m$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

Lời giải. d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq m - 3 \\ -m + 2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq -3 \\ 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Ví dụ 24. Cho $d_1 : y = 2x - 6$; $d_2 : y = -x + 3$.

- Tìm tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 .
- d_1 và d_2 cắt trục tung tại B và C . Tính diện tích ΔABC .

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là

$$2x - 6 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = 0.$$

Vậy tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 là $(3; 0)$.

- d_1 và d_2 lần lượt cắt trục tung tại B và C . Dễ dàng suy ra được tọa độ của B và C là $B(0; -6)$ và $C(0; 3)$.

$$\text{Diện tích } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AO \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \frac{27}{2} (\text{đvdt}).$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Cho đường thẳng $d : y = (m^2 - 2)x + m - 1$. Xác định giá trị của m sao cho

- d song song với $d_1 : y = 2x + 1$.
- d cắt $d_2 : y = m(2x - 1) + 3 + x$.

Lời giải.

$$a. m = -2.$$

$$b. \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$$

Bài 26. Cho 2 đường thẳng: $(d_1) : y = (m + 2)x - 3$; $(d_2) : y = 4x + 2m + 1$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

Lời giải. Không tồn tại giá trị m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 27. Cho 3 đường thẳng: $(d_1) : y = 2x$; $(d_2) : y = x + 1$; $(d_3) : y = (m - 2)x + 2m + 1$. Tìm m để

- $d_1 \perp d_3$.
- d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải.

a. $m = \frac{3}{2}$.

b. $m = 1$.

Bài 28. Tìm m để 3 đường thẳng sau phân biệt và đồng quy.

a. $d_1 : y = 2x, d_2 : y = -3 - x, d_3 : y = mx + 5$.

b. $d_1 : y = -5(x + 1), d_2 : y = mx + 3, d_3 : y = 3x + m$.

c. $d_1 : y = x + 2m, d_2 : y = 3x + 2, d_3 : y = -mx + 2$.

Lời giải.

a. $m = 7$.

b. $m = -13$.

c. $m = 1$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP**Bài 29.** Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $(d_1) : y = x + 1; (d_2) : y = 2x + 1$.a) Tìm giao điểm M của (d_1) và (d_2) .b) Tìm phương trình đường thẳng (d) , biết (d) cắt (d_1) tại $A(1, 2)$ và cắt (d_2) tại $B(-1, 3)$.**Lời giải.**

a) Xét $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy: $M(0, 1)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

b) Vì (d) cắt (d_1) tại $A(1, 2) \Rightarrow A(1, 2) \in (d) \Rightarrow 2 = a + b$.

và (d) cắt (d_2) tại $B(-1, 3) \Rightarrow B(-1, 3) \in (d) \Rightarrow 3 = -a + b$.

Do đó: $\begin{cases} 1 = 2a + b \\ 3 = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Bài 30. Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $(d_1) : y = x - 1; (d_2) : y = -2x - 1$.a) Tìm giao điểm N của (d_1) và (d_2) .b) Xác định phương trình đường thẳng d , biết $(d); (d_1); (d_2)$ đồng qui và (d) đi qua $A(1, -5)$.**Lời giải.**

a) Xét $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy: $N(0, -1)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

b) Vì $(d); (d_1); (d_2)$ đồng qui nên $N(0, -1) \in (d) \Rightarrow -1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -1$.

và $A \in (d) \Rightarrow -5 = a + b \Rightarrow a = -4$.

Vậy: $(d) : y = -4x - 1$.

Bài 31. Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $A(6, -2)$.

- a) Tìm d sao cho d đi qua A và gốc tọa độ O .
- b) Xác định phương trình đường thẳng d , biết (d) đi qua A và cắt Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác OBC có diện tích là 3.

Lời giải.

a) Vì $O \in (d)$ nên $b = 0$.

Mặt khác $A \in (d)$ nên $-2 = 6a + b \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{3}x$.

b) Ta có: $A \in (d)$ nên $-2 = 6a + b$ và $B(0, b); C(-\frac{b}{a}, 0)$.

Do đó: Diện tích tam giác OCB là $\frac{1}{2}|b| \left| \frac{-b}{a} \right| = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{b^2}{6} \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases}$.

Vì vậy ta được $\begin{cases} 6a + b = -2 \\ \left[\begin{array}{l} a = -\frac{b^2}{6} \\ a = \frac{b^2}{6} \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 6a + b = -2 \\ a = -\frac{b^2}{6} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 6a + b = -2 \\ a = \frac{b^2}{6} \end{array} \right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} -b^2 + b - 2 = 0 \\ a = -\frac{b^2}{6} \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1; a = -\frac{1}{3} \\ b = 2; a = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \left\{ \begin{array}{l} b^2 + b - 2 = 0 \\ a = \frac{b^2}{6} \end{array} \right. \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases}$. Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{3}x - 1$ hay $(d) : y = -\frac{4}{3}x + 2$

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Hàm số bậc hai

Định nghĩa 1. Hàm số bậc hai được cho bởi công thức $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

Định nghĩa 2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

* Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai.

a) Xác định tọa độ của đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

b) Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

c) Lập bảng giá trị

x	x_1	x_2	$-\frac{b}{2a}$	x_3	x_4
y	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$y(x_3)$	$y(x_4)$

! Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục tung tại điểm $(0; c)$.

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

d) Vẽ Parabol

! Khi vẽ cần chú ý đến dấu của hệ số a ($a > 0$ bề lõm quay lên trên, $a < 0$ bề lõm quay xuống dưới).

3. Chiều biến thiên của hàm số bậc hai

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), ta có bảng biến thiên của nó trong hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ như sau

+ Với $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

+ Với $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

Từ đó ta có định lí sau

Định lí 1. Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

4. Phương trình hoành độ giao điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2) . Khi đó, nếu $M(x; y)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) thì tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x). (*)$$

Phương trình (*) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) . Và nếu giao điểm M có mang những đặc điểm, tính chất nào đó thì phương trình (*) cũng sẽ tồn tại những đặc điểm tương ứng với các đặc tính đó. Từ đây suy ra, để giải một bài toán về tính chất giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) , ta có thể tiến hành theo các bước sau:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và C_2 (tức là phương trình (*)).
- Biến đổi phương trình về dạng bậc hai đơn giản.
- Dựa vào điều kiện ban đầu của bài toán để chuyển về điều kiện cho phương trình hoành độ giao điểm.

5. Định lý Vi-ét

Định lí 2. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

a) Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thì ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$.

c) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

d) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

e) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác x_0 khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \end{cases}$$

6. Một vài công thức cần nhớ

⚠ Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

⚠ Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ (lấy $x = 0$ thế vào hàm số).

⚠ Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị với trục hoành.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai

Vẽ đồ thị của hàm số bậc hai ta thực hiện theo bốn bước như trên.

Để lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai ta cần xem xét dấu của hệ số a , tính tọa độ của đỉnh và điền vào bảng thích hợp.

Ví dụ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$.

Lời giải. Ta có $a = 1, b = -2, c = 0$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(1; -1)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

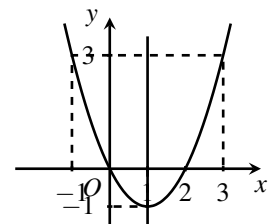
Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1; -1)$ và trục đối xứng là $x = 1$.

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ là



Ví dụ 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

Lời giải. Ta có $a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = -2$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(2; 0)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

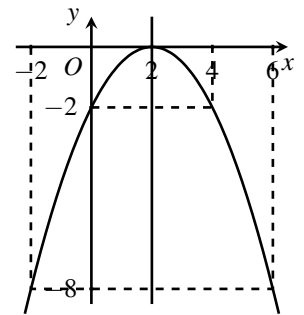
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(2; 0)$ và trục đối xứng là $x = 2$.

Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	-8	-2	0	-2	-8

Ta có đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ là



Ví dụ 3. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -3x^2 + 2x - 1$.

Lời giải. Ta có $a = -3, b = 2, c = -1$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\infty$

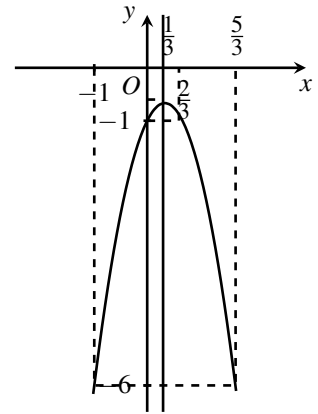
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ và nghịch biến trên khoảng $(\frac{1}{3}; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và trục đối xứng là $x = \frac{1}{3}$.

Bảng giá trị

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
y	-6	-1	$-\frac{2}{3}$	-1	-6

Ta có đồ thị của hàm số $y = -3x^2 + 2x - 1$ là



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 2x + 3$.

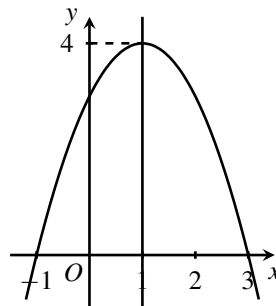
c) $y = 3x^2 - 2x + 1$.

b) $y = -x^2 + 2x - 2$.

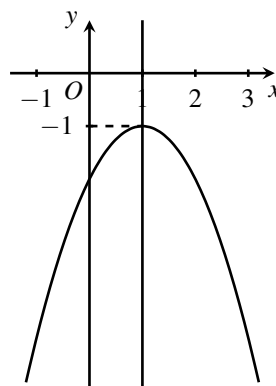
d) $y = -3x^2 + 2x - 1$.

Lời giải.

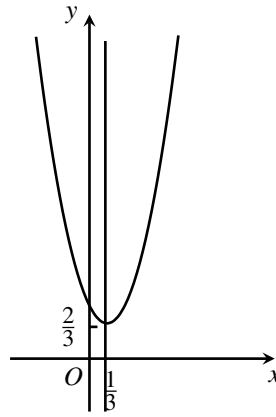
a) Đồ thị



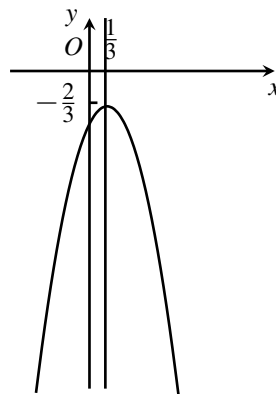
b) Đồ thị



c) Đồ thị



d) Đồ thị

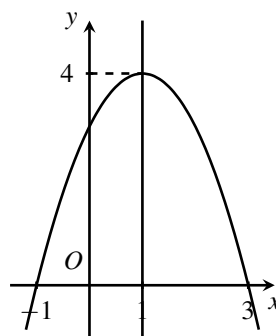


Bài 2. Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

Lời giải.

a) Đồ thị



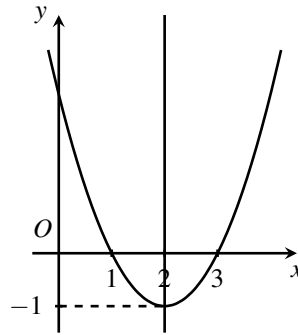
- Để $y > 0$ thì $x \in (-1; 3)$ và $y < 0$ thì $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

Lời giải.

a) Đồ thị

b) Để $y > 0$ thì $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ và $y < 0$ thì $x \in (1; 3)$.

Dạng 2. Tìm tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tọa độ giao điểm giữa parabol (P) và một đường thẳng.

Phương pháp:

- Dựa vào các công thức cần nhớ để tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tuy nhiên, khi tìm tọa độ của đỉnh I thì ta chỉ cần tìm hoành độ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Rồi sau đó thế x_0 vào hàm số ban đầu để tìm $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ là tung độ của đỉnh I .
- Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm để xác định giao điểm của parabol (P) với đường thẳng.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

Lời giải. Từ đề ta có: $a = 1, b = -4, c = 3$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$.

$\Rightarrow y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. Vậy đỉnh $I(2; -1)$.

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 3)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy (P) cắt trục Ox tại hai điểm $B(1; 0)$ và $C(3; 0)$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = -x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

Lời giải. Từ đề ta có: $a = -1, b = -3, c = 1$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \cdot (-1)} = -\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow y_0 = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{13}{4}$. Vậy đỉnh $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 1)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $-x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$. Vậy (P) cắt trục

Ox tại hai điểm $B\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; 0\right)$ và $C\left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = -x^2 + x + 2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: 4x + y - 3 = 0$. Tìm giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng d .

Lời giải. Đường thẳng $d: y = -4x + 3$. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$-x^2 + x + 2 = -4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 5 \Rightarrow y = 11 \end{cases}$. Vậy đồ thị (P) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm: $A(0; 1)$ và $B(5; 11)$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = -x^2 - x + 2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Tìm giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng d .

Lời giải. Đường thẳng $d: y = x + 3$. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$-x^2 - x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$. Vậy (P) và d tiếp xúc với nhau tại điểm $A(-1; 2)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Tìm tọa độ đỉnh, giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của các parabol sau:

a) $y = x^2 + 4x - 1$.

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$.

Lời giải.

a) Đáp số: Tọa độ đỉnh $I(-2; -5)$; giao điểm của parabol (P) với trục tung và trục hoành lần lượt là: $A(0; -1)$; $B(-2 + \sqrt{5}; 0)$; $C(-2 - \sqrt{5}; 0)$.

b) Đáp số: Tọa độ đỉnh $I(2; -2)$; giao điểm của parabol (P) với trục tung là $A(0; -4)$; đồ thị không cắt trục hoành.

Bài 5. Tìm giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d trong các trường hợp sau:

a) $y = -x^2$ và $y = x - 2$.

c) $y = x^2 - x - 3$ và $y = x - 4$.

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ và $y = -3x + 3$.

d) $y = x^2 + 6x + 4$ và $y = -x + 1$.

Lời giải.

a) Số giao điểm của (P) và d là số nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } (P) \text{ và } d \text{ cắt nhau tại 2 điểm } A(1; -1) \text{ và } B(-2; -4).$$

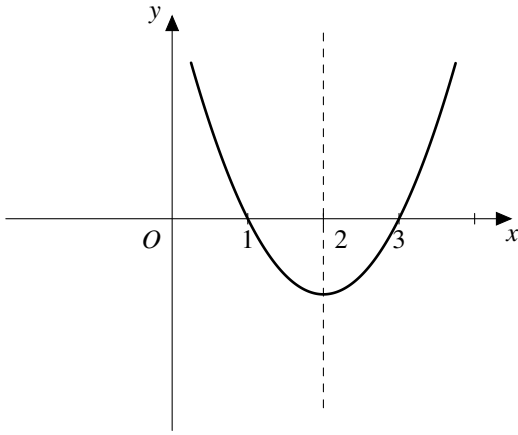
b) (P) và d không cắt nhau.

c) (P) và d tiếp xúc với nhau tại $A(1; -3)$.

d) (P) và d không cắt nhau.

Bài 6. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$. Dùng (P) tìm tập hợp các giá trị của x để $y \leq 0$.

Lời giải.



Đáp số: Từ hình vẽ ta có: $1 \leq x \leq 3$.

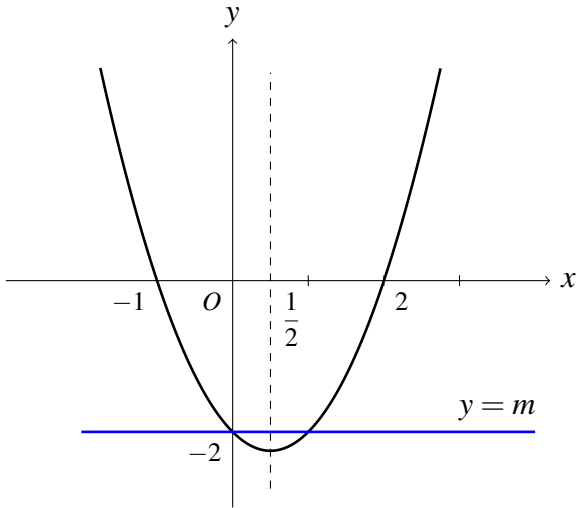
Dạng 3. Dựa vào đồ thị biện luận theo m số giao điểm của parabol (P) và đường thẳng.

CÂU DẪN

- Sử dụng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình.
- Sử dụng phương trình hoành độ giao điểm để đưa bài toán tìm giao điểm về bài toán biện luận số nghiệm của phương trình.

Ví dụ 8. Cho parabol (P): $y = x^2 - x - 2$. Dùng đồ thị (P), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^2 - x - (m - 2) = 0$.

Lời giải.



Xét phương trình: $x^2 - x - (m - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = m$ (1).

Nghiệm số của phương trình là hoành độ giao điểm của 2 đường parabol (P): $y = x^2 - x - 2$ và đường thẳng Δ : $y = m$. Theo đồ thị ta có kết quả:

- $m < -\frac{9}{4}$: (Δ) và (P) không có điểm chung \Rightarrow phương trình (1) vô nghiệm.
- $m = -\frac{9}{4}$: (Δ) tiếp xúc với (P) \Rightarrow phương trình (1) có nghiệm kép.
- $m > -\frac{9}{4}$: (Δ) cắt (P) tại 2 điểm \Rightarrow phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 9. Cho parabol (P): $y = x(2 - x) + 3$ và đường thẳng $d: y = -x + m$. Định m để:

- d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- d và (P) tiếp xúc.
- d và (P) không có điểm chung.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x(2 - x) + 3 = -x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 3 = 0 \quad (1).$$

$$\Delta = 9 - 4(m - 3) = -4m + 21$$

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt \Leftrightarrow phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{21}{4}.$$

b) d và (P) tiếp xúc \Leftrightarrow phương trình (1) có nghiệm kép: $\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4}$.

c) d và (P) không có điểm chung \Leftrightarrow phương trình (1) vô nghiệm: $\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{21}{4}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng $d: y = 4x + m$. Biện luận theo m số giao điểm của d và (P).

Lời giải. HD: Sử dụng phương trình hoành độ giao điểm để đưa bài toán về biện luận theo m số nghiệm của phương trình.

Đáp số: $m > -12$: d cắt (P) tại hai điểm phân biệt; $m = -12$: d tiếp xúc với (P); $m < -12$: d và (P) không có điểm chung.

Bài 8. Cho parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y = x + m$. Với giá trị nào của m thì parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt?

Lời giải. $m < 1$ thì parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Bài 9. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$. Tìm giá trị của m và n để đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm $(0; -1)$ và tiếp xúc với parabol.

Lời giải. Đáp số: $m = \sqrt{2}; n = -1$ và $m = -\sqrt{2}; n = -1$.

Bài 10. Cho hai parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 3$. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt cả hai parabol.

Lời giải. HD: vẽ hai parabol trên 1 hệ trục tọa độ.

Đáp số: $-5 \leq m \leq 4$.

Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Bước 2: Dựa vào giả thiết đề bài để xác định a, b, c .

Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

- Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.

- Parabol có trục đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$.

- Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$

(hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$).

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 10. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 11)$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$). Ta có $c = 3$.

Vì (P) đi qua $A(1; 2)$ nên $2 = a + b + 3 \Leftrightarrow a + b = -1$ (1).

Vì (P) đi qua $B(-2; 11)$ nên $11 = 4a - 2b + 3 \Leftrightarrow 4a - 2b = 8$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$.

Vậy parabol $(P) : y = x^2 - 2x + 3$.

Ví dụ 11. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$ và có trục đối xứng $x = -2$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Ta có $a = -1$.

Vì (P) có trục đối xứng $x = -2$ nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a = 4 \cdot (-1) = -4$.

Vì $M(-2; 4) \in (P)$ nên $4 = -(-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Leftrightarrow 4 = -4 - 2b + c \Leftrightarrow -2b + c = 8$. Mà $b = -4$ nên $8 + c = 8 \Leftrightarrow c = 0$.

Vậy $(P) : y = -x^2 - 4x$.

Ví dụ 12. Cho parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh $I(1; -3)$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Ta có $b = -2$.

Cách 1: Vì (P) có đỉnh $I(1; -3)$ nên (P) có trục đối xứng $x = 1$.

Khi đó $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Hơn nữa, vì đỉnh $I(1; -3) \in (P)$ nên $-3 = 1.1^2 - 2.1 + c \Leftrightarrow c = -2$. Vậy $(P) : y = x^2 - 2x - 2$.

Cách 2: Vì (P) có đỉnh $I(1; -3)$ nên
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = 12a \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2a \\ (-2)^2 - 4ac = 12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4 - 4c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \end{cases}$. Vậy $(P) : y = x^2 - 2x - 2$.

Ví dụ 13. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$. Xác định a, b, c biết (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 và đi qua hai điểm $M(1; -1), N(0; 4)$.

Lời giải. Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì $M(1; -1) \in (P)$ nên $-1 = a + b + c$ (1).

Vì $N(0; 4) \in (P)$ nên $4 = c$ (2).

Vì (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 nên
$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac = 20a \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3), ta có
$$\begin{cases} a + b + 4 = -1 \\ b^2 - 16a = 20a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ b^2 - 36a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 - 36(-5 - b) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 + 36b + 180 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = 1 \text{ (nhận)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -30 \\ a = 25 \text{ (nhận)} \end{cases}$

Vậy $(P_1) : y = x^2 - 6x + 4$ và $(P_2) : y = 25x^2 - 30x + 4$.

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = x^2 - mx + m + 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để đồ thị hàm số là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x$ sao cho hoành độ đỉnh không âm.

Lời giải. Với giá trị m cố định, gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của parabol ($x_0 \geq 0$).

Khi đó
$$\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2} \\ y_0 = x_0^2 - mx_0 + m + 1 \end{cases}$$
. Suy ra $y_0 = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1$.

Vì đỉnh I nằm trên đường thẳng $y = x$ nên $y_0 = x_0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1 = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Vì $x_0 \geq 0$ nên $m \geq 0$, do đó $m = 1 + \sqrt{5}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 4$. Xác định a, b biết:

- (P) đi qua hai điểm $M(-1; 7)$ và $N(-4; 4)$.
- (P) có trục đối xứng $x = 3$ và đi qua điểm $A(2; -4)$.
- (P) có tung độ đỉnh bằng $\frac{9}{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 4.

Lời giải.

a) Thay tọa độ điểm M, N vào (P) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 16a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ nên $b = -6a$.

Mà $A(2; -4) \in (P)$ nên $-4 = 4a + 2b + 4 \Leftrightarrow -8a = -8 \Leftrightarrow a = 1$. Suy ra $b = -6$.

$$c) \text{ Hoành độ đỉnh } x = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow b^2 - 4ac = -18a \Leftrightarrow b^2 = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{b^2}{2}.$$

$$(P) \text{ cắt } Ox \text{ tại điểm có tọa độ } (4;0) \text{ nên } 0 = 16a + 4b + 4 \Leftrightarrow -8b^2 + 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } b = 1 \text{ thì } a = -\frac{1}{2}. \text{ Với } b = -\frac{1}{2} \text{ thì } a = -\frac{1}{8}.$$

Bài 12. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết:

- (P) có đỉnh $I(1;4)$.
- (P) đối xứng qua trục tung và có giá trị lớn nhất bằng 3.
- (P) có hoành độ đỉnh bằng tung độ đỉnh và đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải.

$$a) \text{ Vì } (P) \text{ có đỉnh } I(1;4) \text{ nên } \begin{cases} -\frac{b}{2 \cdot (-1)} = 1 \\ 4 = -1 + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$b) \text{ Vì } (P) \text{ đối xứng qua trục tung nên } -\frac{b}{-2} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có giá trị lớn nhất bằng 3 nên } b^2 - 4ac = -12a \Leftrightarrow 4c = 12 \Leftrightarrow c = 3.$$

$$c) \text{ Vì } (P) \text{ đi qua gốc tọa độ } O \text{ nên } c = 0.$$

$$\text{Mà hoành độ đỉnh bằng tung độ đỉnh nên } -\frac{b}{-2} = -\frac{b^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{-4} \Leftrightarrow 2b = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Bài 13. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + 3x + c$. Xác định a, c biết:

- (P) có hoành độ đỉnh bằng -1 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.
- (P) có tung độ đỉnh gấp 2 lần hoành độ đỉnh và đi qua điểm $A(1;4)$.
- (P) đạt giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{9}{2}$ và đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải.

$$a) \text{ Vì } (P) \text{ cắt trục tung tại điểm } (0;4) \text{ nên } c = 4.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có hoành độ đỉnh bằng } -1 \text{ nên } -\frac{3}{2a} = -1 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

$$b) \text{ Vì } A(1;4) \in (P) \text{ nên } a + 3 + c = 4 \Leftrightarrow a + c = 1 \Leftrightarrow a = 1 - c \quad (1).$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có tung độ đỉnh gấp 2 lần hoành độ đỉnh nên } \frac{-\Delta}{4a} = 2 \cdot \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \frac{9 - 4ac}{4a} = \frac{3}{a}$$

$$\Leftrightarrow 9a - 4a^2c = 12a \Leftrightarrow 4a^2c = -3a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ 4ac = -3 \quad (2) \end{cases}.$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có } 4(1-c)c = -3 \Leftrightarrow 4c^2 - 4c - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$c) \text{ Vì } O \in (P) \text{ nên } c = 0.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } -\frac{9}{2} \text{ nên } \begin{cases} -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{2} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Bài 14. Xác định parabol (P) biết:

- a) (P) đi qua ba điểm $A(1; 7)$, $B(0; 5)$ và $C(4; 1)$. ($-x^2 + 3x + 5$)
 b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ và đi qua hai điểm $M(-1; 0)$, $N(0; 7)$.
 c) (P) có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $H(-2; 1)$, $K(0; 9)$.

Lời giải.

a) (P) đi qua ba điểm $A(1; 7)$, $B(0; 5)$ và $C(4; 1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ c = 5 \\ 16a + 4b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases}.$$

b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ nên $b = -6a$.

Mà (P) đi qua hai điểm $M(-1; 0)$, $N(0; 7)$ nên $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 \\ 7a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 \\ a = -1 \end{cases}$. Suy ra $b = 6$.

c) Vì (P) có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$.

Mà (P) đi qua $H(-2; 1)$, $K(0; 9)$ nên $\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ c = 9 \end{cases}$.

Do đó ta có $\begin{cases} b^2 - 36a = 0 \\ 4a - 2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b-4}{2} \\ b^2 - 18b + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \\ a = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = 6 \\ a = 1 \end{cases}$.

Bài 15. Cho parabol (P): $y = ax^2 - 2ax + 2a$ với ($a \neq 0$). Xác định a để (P) có đỉnh nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$.

Lời giải. (P) có đỉnh $I(1; a)$. Vì I nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$ nên $2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Bài 16. Xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh I cách đều hai trục tọa độ, đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và nhận $x = \frac{1}{2}$ làm trục đối xứng.

Lời giải. Giả sử (P): $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Vì (P) đi qua điểm O nên $c = 0$.

Vì (P) nhận $x = \frac{1}{2}$ làm trục đối xứng nên $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = -a$.

Vì (P) cách đều hai trục tọa độ nên $\left| -\frac{b}{2a} \right| = \left| -\frac{\Delta}{4a} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|b|}{4} \Leftrightarrow |b| = 2 \Leftrightarrow b = \pm 2$.

Với $b = 2$ thì $a = -2$, với $b = -2$ thì $a = 2$.

Bài 17. Xác định parabol (P) biết (P) đi qua điểm $A(0; 1)$ và có đỉnh I thuộc đường thẳng $x + y - 3 = 0$ sao cho độ dài đoạn IM ngắn nhất, biết $M(-1; 3)$.

Lời giải. Giả sử (P): $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của parabol. Vì I thuộc đường thẳng $x + y - 3 = 0$ nên $y_0 = 3 - x_0$. Do đó

$$IM = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (y_0 - 3)^2} = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (-x_0)^2} = \sqrt{2x_0^2 + 2x_0 + 1}.$$

Vì $2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 2\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, nên IM ngắn nhất khi $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $y_0 = \frac{7}{2}$. Nên (P) có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

$$\text{Vì } A(0;1) \in (P) \text{ nên } c = 1. \text{ Hơn nữa ta có } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\Delta}{4a} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b^2 - 4a = -14a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b^2 = -10b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -10 \\ a = -10 \end{cases}.$$

Dạng 5. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số trị tuyệt đối của một hàm bậc hai

Xét hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ có đồ thị là (P_1) . Để ý rằng

$$y = |ax^2 + bx + c| = \begin{cases} ax^2 + bx + c \text{ nếu } ax^2 + bx + c \geq 0 \\ -(ax^2 + bx + c) \text{ nếu } ax^2 + bx + c \leq 0, \end{cases}$$

nên để vẽ (P_1) , ta làm như sau.

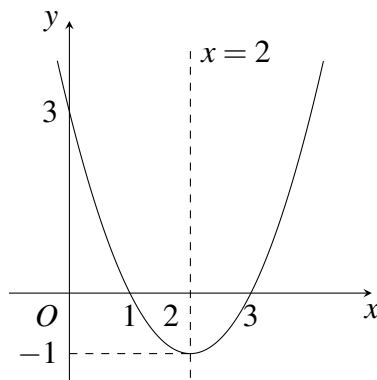
- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.
- Giữ nguyên phần của (P) mà ở phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng qua trục hoành đối với phần của (P) mà ở dưới trục hoành (sau đó bỏ đi phần của (P) mà ở dưới trục hoành).

Ví dụ 15. Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x + 3| = m$.

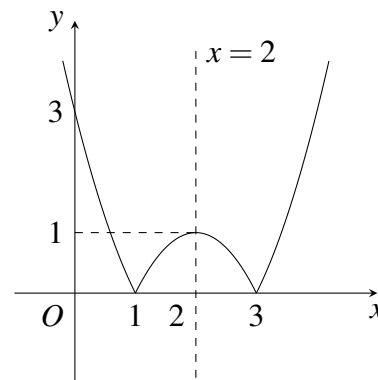
Lời giải. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ với đường thẳng (nằm ngang) $y = m$.

Ta vẽ $(P) : y = x^2 - 4x + 3$ (Hình 1). Từ đó, ta suy ra đồ thị (P_1) của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ (Hình 2). Từ đồ thị (P_2) , ta có kết luận như sau.

- $m < 0$: phương trình vô nghiệm.
- $m = 0$ hoặc $m > 1$: hai nghiệm.
- $0 < m < 1$: 4 nghiệm.
- $m = 1$: 3 nghiệm.



Hình 1



Hình 2

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^2 + 3x| = m$.

Lời giải. Giải tương tự ví dụ 1.

Đáp số:

- a) $m < 0$: phương trình vô nghiệm.
 b) $m = 0$ hoặc $m > \frac{9}{4}$: hai nghiệm.
 c) $0 < m < \frac{9}{4}$: 4 nghiệm.
 d) $m = \frac{9}{4}$: 3 nghiệm.

Dạng 6. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số đối với trị tuyệt đối của biến

Xét hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$. Khi $x \geq 0$ hoặc $x \leq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc hai. Hơn nữa, hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

Do đó, ta có thể vẽ đồ thị (P_2) của hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ như sau.

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.
 b) Bỏ phần của (P) ở bên trái trục tung. Sau đó lấy đối xứng qua trục tung đối với phần của (P) mà ở bên phải trục tung.

Lưu ý: Ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ từ đồ thị hàm số $y = ax^2 - bx + c$.

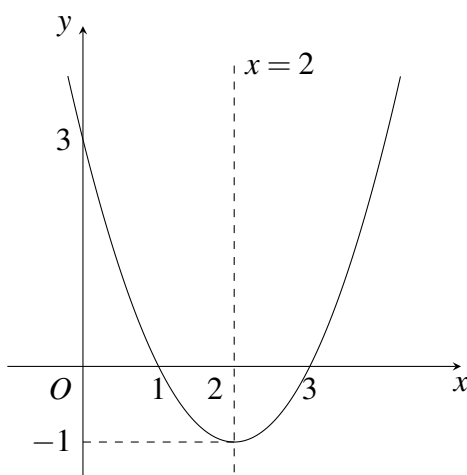
- Ví dụ 16.** a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.
 b) Tìm m để phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải. a) Xem hình 3.

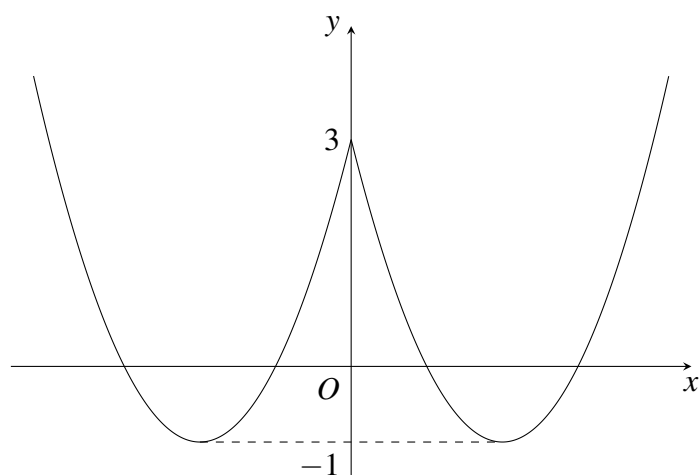
b) Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ và đường thẳng $y = m$.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ ở câu a), ta suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ như ở hình 4.

Từ đó, ta suy ra tất cả các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-1 < m < 3$.



Hình 3



Hình 4

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Tìm m để phương trình $2x^2 - |x| = m$ có đúng 3 nghiệm.

Lời giải. Giải tương tự ví dụ 2.

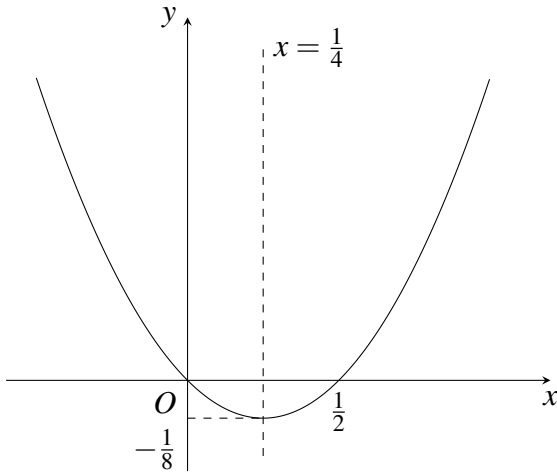
Đáp số: $m = 0$.

Bài 20. Hỏi phương trình $|2x^2 - |x|| = m$ có tối đa bao nhiêu nghiệm?

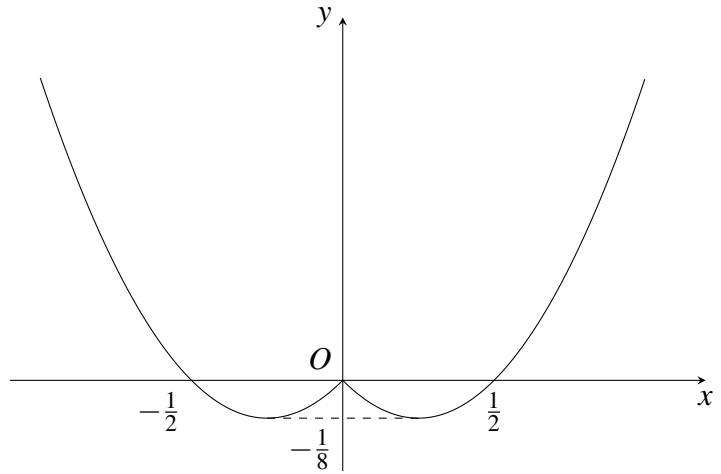
Lời giải. Ta vẽ đồ thị hàm số $y = |2x^2 - |x||$.

Trước hết, vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x$ (hình 5), rồi suy ra đồ thị hàm số $y = 2x^2 - |x|$ (hình 6), từ đó, vẽ được đồ thị hàm số $y = |2x^2 - |x||$ (hình 7).

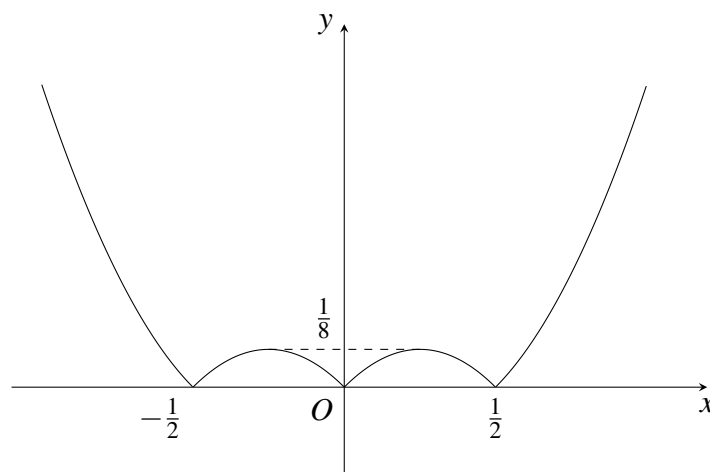
Đáp số: phương trình đã cho có tối đa 6 nghiệm.



Hình 5



Hình 6



Hình 7

Dạng 7. Tính đơn điệu của hàm bậc hai

Sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến (*tăng*) trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến (*tăng*) trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Ví dụ 17. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$ và $y = -\frac{\Delta}{4a} = -4$.
- Do $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

Ví dụ 18. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2x - 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$.

- Do $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ví dụ 19. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^2 + 2|x|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $y = x^2 + 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$

- Mặt khác, hàm số $y = x^2 - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = x^2 + 2x$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- Từ đó suy ra hàm số $y = x^2 + 2|x|$ nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x \geq 0$.

Ví dụ 20. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-3)x + m$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3-m}{2}$.

- Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\frac{3-m}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 3-m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

- Vậy $m \geq 1$.

Ví dụ 21. Cho hàm số $y = (m-1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số đồng biến trên $(1; 7)$.

Lời giải.

• Với $m > 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{m-1}; +\infty\right)$. Vậy, để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 7)$ thì $1 \geq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow m \geq -1$. Kết hợp điều kiện ta được $m > 1$.

• Với $m < 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{m-1}\right)$. Vậy, để hàm số đồng biến trên $(1; 7)$ thì $7 \leq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow 7m-7 \geq -2 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{7}$.

Tóm lại $m \in \left[\frac{5}{7}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 21. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 6x - 5$.

Lời giải. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Bài 22. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2017$.

Lời giải. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài 23. Xác định các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x|x - 2|$.

Lời giải.

$$\text{- Ta có } y = x|x - 2| = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}.$$

- Mặt khác, hàm số $y = -x^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = x^2 - 2x$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Từ đó suy ra

+ Hàm số $y = x|x - 2|$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $[2; +\infty)$.

+ Hàm số $y = x|x - 2|$ nghịch biến trên các khoảng $(1; 2)$.

Bài 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (2m - 3)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{- Ta có } x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m - 3}{2}.$$

- Do $a = -1 < 0$, nên để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ khi và chỉ khi

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2m - 3}{2} \geq -5 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}.$$

- Vậy $m \geq -\frac{7}{2}$.

Bài 25. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số nghịch biến trên $(-5; 2)$.

Lời giải.

• Với $m < 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{m-1}; +\infty\right)$. Vậy, để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5; 2)$ thì $-5 \geq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow -5m + 5 \leq -2 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{5}$, điều này mâu thuẫn với điều kiện.

• Với $m > 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{m-1}\right)$. Vậy, để hàm số nghịch biến trên $(-5; 2)$ thì $2 \leq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow 2m - 2 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq 0$, điều này mâu thuẫn với điều kiện.

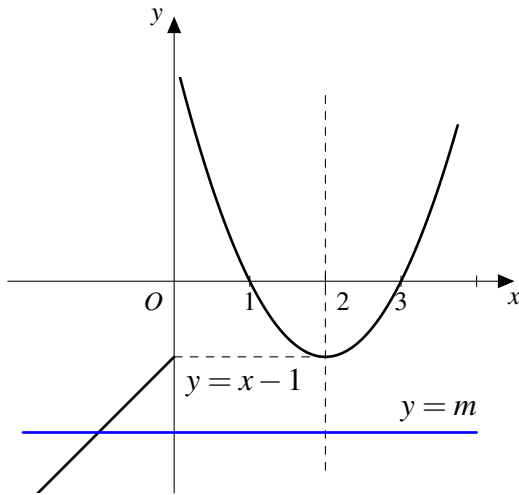
Vậy không tồn tại giá trị của m .

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 26. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$f(x) = m.$$

Lời giải.



Dựa vào hình vẽ ta có: $m \leq -1$: phương trình có 1 nghiệm; $m > -1$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 27. Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có đồ thị là (C_m) . Chứng minh rằng (C_m) luôn cắt xx' tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm m để A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .

Lời giải. Để (C_m) luôn cắt Ox tại 2 điểm phân biệt thì $\Delta > 0, \forall m$. Để A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O thì $m = 0$.

Bài 28. Cho hàm số $y = x^2 - 4mx + 4m + 3$ (P_m) với $m \in \mathbb{R}$. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = x - 1$ và đi qua điểm cố định của họ parabol (P_m).

Lời giải. Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ parabol (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = x_0^2 - 4mx_0 + 4m + 3$, với mọi m .

Suy ra $y_0 - x_0^2 - 3 = 4m(1 - x_0)$, với mọi m .

Nên $\begin{cases} 1 - x_0 = 0 \\ y_0 - x_0^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 4 \end{cases}$. Vậy $M(1; 4)$.

Vì d vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = x - 1$ nên $d : y = -x + b$, với $b \neq -1$. Mà $M(1; 4) \in d$ nên $4 = -1 + b \Leftrightarrow b = 5$. Vậy $d : y = -x + 5$.

Bài 29. Cho hàm số $y = x^2 - (m - 1)x + m - 2$ (P_m) với $m \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ đỉnh của (P_m) đến trục hoành bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Với m tùy ý, gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của (P_m).

Khi đó khoảng cách từ đỉnh của (P_m) đến trục hoành bằng $|y_0| = \left| \frac{(m - 1)^2 - 4(m - 2)}{4} \right|$.

Theo giả thiết $|y_0| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{(m - 1)^2 - 4(m - 2)}{4} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |m^2 - 6m + 9| = 2 \Leftrightarrow m = 7$ hoặc $m = -1$.

Bài 30. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 4x + 3$.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$.

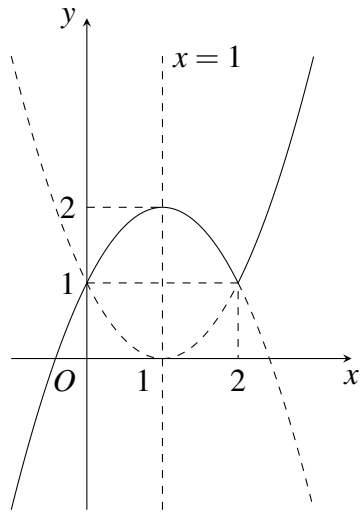
Lời giải. Gợi ý câu b). Ở bên trái trục tung, đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y = x^2 + 4x + 3$. Hơn nữa, đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Bài 31. Tìm m để phương trình $x|x - 1| = m$ có đúng 2 nghiệm.

Lời giải. Số nghiệm của phương trình bằng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x|x - 2| + 1$ và đường thẳng $y = m$.

Đồ thị hàm số $y = x|x - 1|$ bao gồm hai phần: phần của parabol $y = x(x - 2) + 1$ với $x \geq 2$, và phần của parabol $y = x(2 - x) + 1$ với $x \leq 2$ (đường nét liền trong hình 6).

Từ đó, ta suy ra giá trị m phải tìm là $m = 1$ hoặc $m = 2$.



Hình 8

§4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG II

I. Đề số 1a

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x - 3}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^3 - 3x$.

Lời giải. a) Điều kiện xác định là $2x - 3 \geq 0$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ 0,25 điểm

Vậy tập xác định là $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ 0,25 điểm

b) Tập xác định là \mathbb{R} 0,25 điểm

Ta có $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ 0,25 điểm

Đặt $y = f(x) = x^3 - 3x$, ta có $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ 0,5 điểm.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x + m(x + 2)$ có đồ thị (d) . Tìm m để đường thẳng (d)

a) Đi qua gốc tọa độ.

b) Song song với đường thẳng $(d') : y = 3x - 2$.

Lời giải. a) Ta có $0 = 2 \cdot 0 + m(0 + 2)$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow m = 0$ 0,5 điểm

b) Ta có $y = (m + 2)x + 2m$ 0,5 điểm

$d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 3 \\ 2m \neq -2 \end{cases}$ 0,25 điểm

$\Leftrightarrow m = 1$ 0,25 điểm

Bài 3. Cho hàm số $y = x^2 - 4x$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x|$.

Lời giải. a) Tập xác định \mathbb{R} 0,25 điểm

Chiều biến thiên: hàm số nghịch biến trên miền $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên miền $(2; +\infty)$... 0,25 điểm

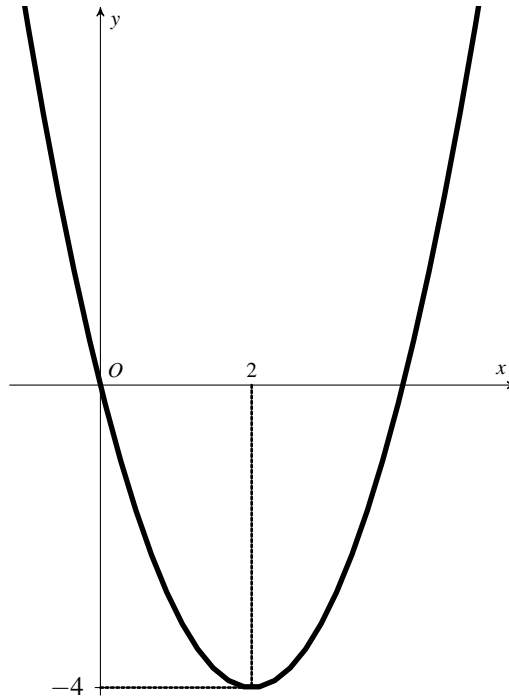
Bảng biến thiên 0,25 điểm

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

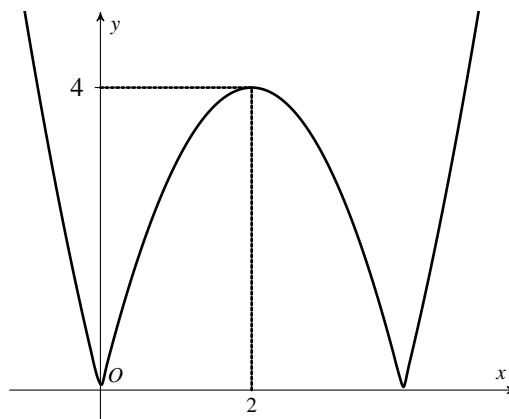
Đồ thị

Tọa độ đỉnh $I(2; -4)$, trục đối xứng $x = 2$ 0,25 điểm

Vẽ 0,25 điểm



b)0,5 điểm



Bài 4. Xác định Pa-ra-bol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(-1; 1)$ và có tọa độ đỉnh là $I(1; -3)$.

Lời giải. (P) qua M nên $a - b + c = 1$ 0,25 điểm

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a$ 0,25 điểm

(P) qua I nên $a + b + c = -3$ 0,25 điểm

Ta có hệ $\begin{cases} a - b + c = 1 \\ b = -2a \\ a + b + c = -3 \end{cases}$ 0,25 điểm

Suy ra $\begin{cases} 3a + c = 1 \\ -a + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \end{cases}$ 0,5 điểm

Suy ra $b = -2$. Vậy $y = x^2 - 2x - 2$ 0,5 điểm

Bài 5. a) Tìm m để hàm số $y = \frac{2 - 5x}{x^2 - 4x + 2m - 1}$ xác định trên \mathbb{R} .

b) Chứng minh rằng đỉnh của pa-ra-bol $(P) : y = x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 5$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Tìm đường thẳng cố định đó.

Lời giải.

a) Để hàm số có tập định trên \mathbb{R} thì không tồn tại x sao cho $x^2 - 4x + 2m - 1 = 0$ (*) 0,25 điểm

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 5 - 2m$ 0,25 điểm

(*) vô nghiệm khi $(x - 2)^2 = 5 - 2m$ vô nghiệm, suy ra $5 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}$ 0,5 điểm

- b) Tọa độ đỉnh $(x_0; y_0) = (m + 1; -2m - 6)$ 0,25 điểm
- Ta có $\begin{cases} x_0 = m + 1 \\ y_0 = -2m - 6 \end{cases}$ 0,25 điểm
- Suy ra $\begin{cases} m = x_0 - 1 \\ y_0 = -2m - 6 \end{cases}$ 0,25 điểm
- Do đó $y_0 = -2x_0 - 4$. Vậy đường thẳng cố định là $y = -2x - 4$ 0,25 điểm

II. Đề số 1b

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - 3x}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^4 + 5x^2$.

Lời giải. a) Điều kiện xác định là $1 - 3x \geq 0$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$ 0,25 điểm

Vậy $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$ 0,25 điểm

b) Tập xác định là \mathbb{R} 0,25 điểm

Ta có $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ 0,25 điểm

Đặt $y = f(x) = x^4 + 5x^2$, ta có $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn 0,5 điểm.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x - m(x + 3)$ có đồ thị (d) . Tìm m để đường thẳng (d)

a) Đi qua gốc tọa độ.

b) Vuông góc với đường thẳng $(d') : y = \frac{1}{2}x + 3$.

Lời giải. a) Ta có $0 = 2 \cdot 0 - m(0 + 3)$ 0,5 điểm

$\Leftrightarrow m = 0$ 0,5 điểm

b) Ta có $y = (2 - m)x - 3m$ 0,5 điểm

$d \perp d' \Leftrightarrow (2 - m) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 4$ 0,5 điểm

Bài 3. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4|x|$.

Lời giải. a) Tập xác định \mathbb{R} 0,25 điểm

Chiều biến thiên: Hàm số đồng biến trên miền $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$ 0,25 điểm

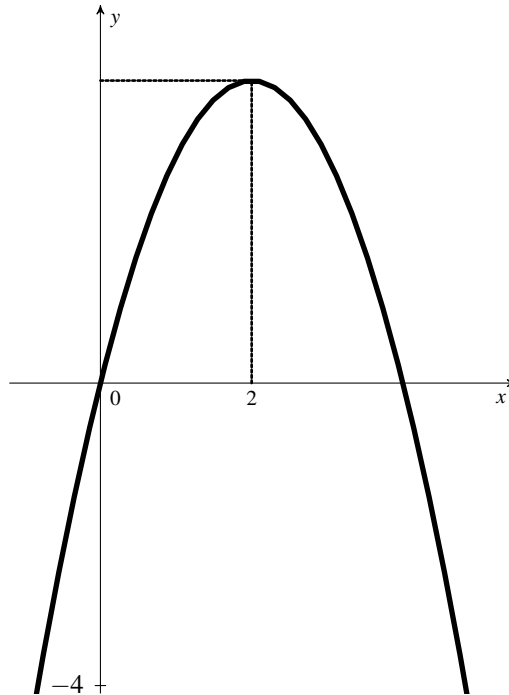
Bảng biến thiên 0,5 điểm

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	4	$-\infty$

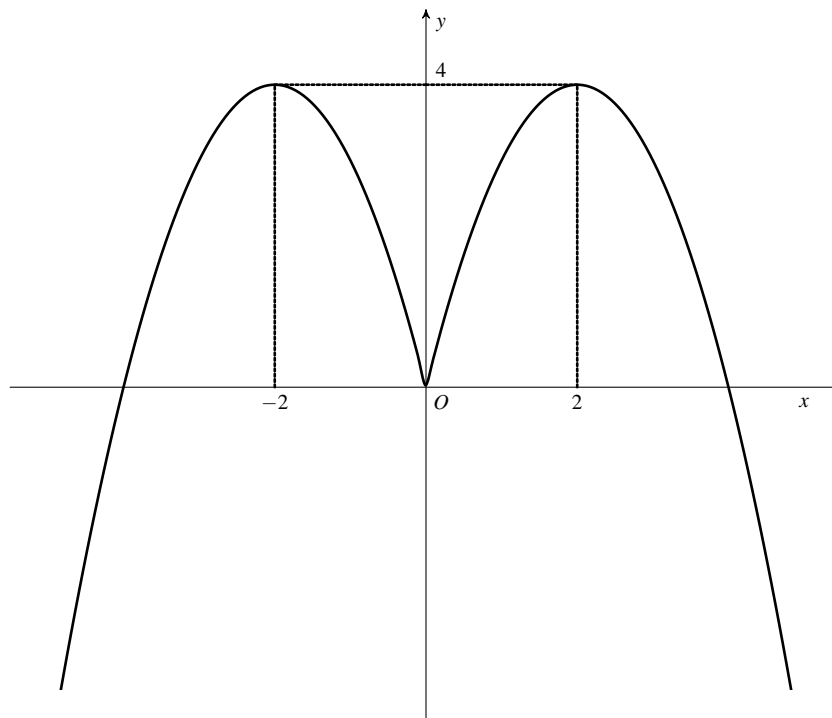
Đồ thị

Tọa độ đỉnh $I(2; 4)$, trục đối xứng $x = 2$ 0,25 điểm

Vẽ đồ thị 0,25 điểm



b) 0,5 điểm



Bài 4. Xác định Pa-ra-bol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và có tọa độ đỉnh là $I(2; -2)$.

Lời giải. (P) qua M nên $a + b + c = -1$ 0,25 điểm

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -4a$ 0,25 điểm

(P) qua I nên $4a + 2b + c = -2$ 0,25 điểm

Ta có hệ $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ b = -4a \\ 4a + 2b + c = -2 \end{cases}$ 0,25 điểm

Suy ra $\begin{cases} -3a + c = 1 \\ -4a + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \end{cases}$ 0,5 điểm

Suy ra $b = -4$. Vậy $y = x^2 - 4x + 2$ 0,5 điểm

Bài 5. a) Tìm m để hàm số $y = \frac{x+4}{x^2+2x+m-3}$ xác định trên \mathbb{R} .

b) Chứng minh rằng đỉnh của pa-ra-bol $(P) : y = x^2 - 2(m-2)x + m^2 + 7$ luôn nằm trên một đường thẳng cố định. Tìm đường thẳng cố định đó.

Lời giải.

a) Để hàm số xác định trên \mathbb{R} thì không tồn tại x sao cho $x^2 + x + m - 3 = 0$ (*) 0,25 điểm

$\Leftrightarrow (x+1)^2 + m - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 4 - m$ 0,25 điểm

(*) vô nghiệm khi $(x+1)^2 = 4 - m$ vô nghiệm, suy ra $4 - m < 0 \Leftrightarrow m > 4$ 0,5 điểm

b) Tọa độ đỉnh $(x_0; y_0) = (m-2; 4m+3)$ 0,25 điểm

Ta có $\begin{cases} x_0 = m-2 \\ y_0 = 4m+3 \end{cases}$ 0,25 điểm

Suy ra $\begin{cases} m = x_0 + 2 \\ y_0 = 4m + 3 \end{cases}$ 0,25 điểm

Do đó $y_0 = 4x_0 + 11$. Vậy đường thẳng cố định là $y = 4x + 11$ 0,25 điểm

III. Đề số 2a

Bài 1. Tìm tập xác định các hàm số

a) $y = \frac{x+2}{x^2-4x+3}$

b) $y = \sqrt{4-3x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

Lời giải.

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ 1,00.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$ 0,50.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x \leq \frac{4}{3}$ 1,00.

Tập xác định $D = \left(-3; \frac{4}{3}\right]$ 0,50.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng d là đồ thị của hàm số $y = kx + k^2 - 3$.

a) Tìm k để d đi qua gốc tọa độ.

b) Tìm k để d song song với đường thẳng $d' : y = -2x + 9$.

Lời giải.

a) Vì d đi qua gốc tọa độ nên $k^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$ 0,50.

Vậy $k = -\sqrt{3}; k = \sqrt{3}$ 0,50.

b) Vì d song song với đường thẳng d' nên $k = -2$ 0,50.

Thay vào ta được đường thẳng $y = -2x + 1$ thỏa yêu cầu. Vậy $k = -2$ 0,50.

Bài 3. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

a) Biết (P) là đồ thị của hàm số đã cho có đỉnh $S(3; -4)$ và (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 5. Tìm a, b, c .

b) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta có
$$\begin{cases} c = 5 \\ -\frac{b}{2a} = 3 \\ 9a + 3b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 5 \end{cases} \dots\dots\dots 1,0.$$

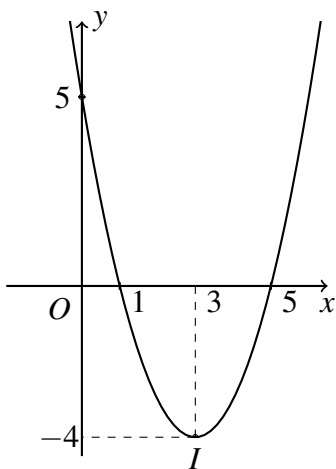
Vậy $a = 1; b = -6; c = 5 \dots\dots\dots 0,50.$

b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

$\dots\dots\dots 1,00.$

Đồ thị



$\dots\dots\dots 0,50.$

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải.

a) Tập xác định $D = [0; 1) \cup (1; +\infty) \dots\dots\dots 0,50.$

b) Xét trên nửa khoảng $[0; 1)$. Lấy x_1, x_2 bất kỳ thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2 < 1$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)} > 0$$

nên hàm số nghịch biến trên $[0; 1) \dots\dots\dots 0,25.$

c) Xét trên nửa khoảng $(1; +\infty)$. Lấy x_1, x_2 bất kỳ thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{(\sqrt{x_1} - 1)(\sqrt{x_2} - 1)} > 0$$

nên hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty) \dots\dots\dots 0,25.$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 + 2x^2 + 1}$.

Lời giải.

a) Viết lại hàm số đã cho ta được $y = \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \dots\dots\dots 0,25.$

- b) Đặt $t = \frac{x}{x^2 + 1}$, ta được $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ 0,25.
- c) Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t) = t^2 + t$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ 0,25.
- d) Vì $f(t)$ đồng biến trên $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ nên $\max f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$; đạt được khi $x = 1$ 0,25.

IV. Đề số 2b

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{1}{x-1}$;
- b) $y = \sqrt{x+3} - \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ 0,5.
 Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 0,50.
- b) Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x < 2 \end{cases}$ 0,50.
 Vậy $D = [-3; 2)$ 0,50.

Bài 2. Xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x} + 2$ trên $(0; +\infty)$.

Lời giải.

- a) Với $\forall x_1; x_2 \in (0; +\infty)$ ta xét: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dots = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$ 0,75.
- b) Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$ 0,25.

Bài 3. Cho hàm số $y = -x^2 + 2(m-3)|x| + m^2 + 2m - 4$. Hãy tìm tất cả giá trị để giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải.

- a) Ta đặt $t = |x| \geq 0$. Hàm số trở thành $y = -t^2 + 2(m-3)t + m^2 + 2m - 4$ với tập xác định là $D = [0; +\infty)$.Hoành độ đỉnh là $t_0 = m - 3$ 0,25
- b) Nếu $t_0 = m - 3 \geq 0$ thì GTLN của hàm số $y = -\frac{\Delta}{4a} = 2m^2 - 4m + 13 = 2(m-1)^2 + 11 \geq 11$ đạt được khi $m = 1$ không thỏa điều kiện. 0,25
- c) Nếu $t_0 = m - 3 < 0$ thì GTLN của hàm số $y(0) = m^2 + 2m - 4 = (m+1)^2 - 5 \geq -5$ đạt được khi $m = -1$ thỏa điều kiện. 0,25
- d) Vậy giá trị $m = -1$ là giá trị cần tìm và giá trị nhỏ nhất của giá trị lớn nhất của hàm số là $y = -5$.
 0,25

Bài 4.

- a) Xác định a và b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(1;2)$ và $B(-1;-4)$;

b) Xác định a và b để đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx - 1$ có đỉnh $I(-1; -2)$.

Lời giải.

a) Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(1; 2)$ nên $a + b = 2$ 0,25.

Và đi qua $B(-1; -4)$ nên $-a + b = -4$ 0,25.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$ 0,50.

b) Đồ thị có trục đối xứng là $x = -\frac{b}{2a} = -1$ 0,25.

Đồ thị đi qua $I(-1; -2)$ nên $a - b = -1$ 0,25.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ 0,50.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + m - 5$ (P_m).

a) Vẽ đồ thị hàm số (P) khi $m = 2$;

b) Tìm m để đồ thị (P_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $-(x_1 + x_2) = x_1 x_2$.

Lời giải.

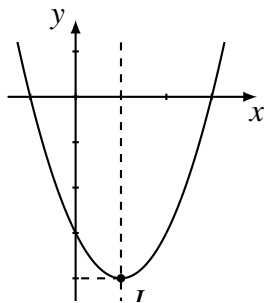
a) Với $m = 2$ thì $y = x^2 - 2x - 3$ 0,25.

Trục đối xứng là $x = -1$.

Tọa độ đỉnh là $I(-1; -4)$ 0,25.

Giao điểm với các trục tọa độ là $(-1; 0), (3; 0), (0; -3)$ 0,25.

Đồ thị



..... 0,25.

b) Ta có: $x^2 - 2x + m - 5 = 0$ 0,25.

$\Delta = 6 - m > 0 \Leftrightarrow m < 6$ 0,25.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = m - 5 \end{cases}$

Vậy: $-(x_1 + x_2) = x_1 x_2 \Leftrightarrow m = 3$ (nhận) 0,50.

V. Đề số 3a

Bài 1. Xác định tính chẵn-lẻ của hàm số sau: $y = f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^{2018} + (x+1)^{2018}}}{|x-1| - |x+1|}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $|x-1| - |x+1| \neq 0$ 0,25

Điều này tương đương với $|x-1| \neq |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq x+1 \\ x-1 \neq -(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$ 0,50

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0,25

Ta có:

- $\forall x \in \mathcal{D} : -x \in \mathcal{D} \dots\dots\dots 0,25$
- $\forall x \in \mathcal{D} : f(-x) = \frac{\sqrt{(-x-1)^{2018} + (-x+1)^{2018}}}{|-x-1| - |-x+1|} = -f(x) \dots\dots\dots 0,50$

Do đó, hàm số đã cho là hàm số lẻ $\dots\dots\dots 0,25$

Bài 2. Tìm m để hàm số $y = (1+m)x + m - 4x + 4$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

Lời giải.

Ta có $y = (1+m)x + m - 4x + 4 = (m-3)x + m + 4 \dots\dots\dots 0,25$

Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi $m-3 < 0 \dots\dots\dots 0,50$

Điều này tương đương với $m < 3 \dots\dots\dots 0,25$

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2x-m-1} + \sqrt{x+m}$ xác định trên $(-3;4]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x-m-1 \neq 0 \\ x+m \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$

Điều này tương đương với $\begin{cases} x \neq \frac{m+1}{2} \\ x \geq -m \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$

Hàm số xác định trên $(-3;4]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \left[\frac{m+1}{2} \leq -3 \right. \\ \left. \frac{m+1}{2} > 4 \right. \\ \left. -m \leq -3 \right. \end{cases} \dots\dots\dots 1,00$

Điều này tương đương với $m > 7 \dots\dots\dots 0,50$

Bài 4. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[0;3]$.
- Tìm m để đồ thị hàm số $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng một điểm có hoành độ thuộc $[0;3]$.

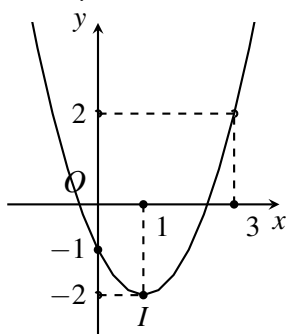
Lời giải.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

$\dots\dots\dots 1,00$

- Đồ thị



$\dots\dots\dots 1,00$

b) Dựa vào đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Trên $[0; 3]$ giá trị lớn nhất của hàm số là 2 đạt tại $x = 3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 đạt tại $x = 1$ 1,00

c) Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[0; 3]$ ta có:

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} -1 < m \leq 2 \\ m = -2 \end{cases}$ 1,00

Bài 5. Tìm hàm số bậc nhất biết rằng đồ thị (Δ) của nó có hệ số góc là -2 chắn hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải. (Δ) có hệ số góc bằng -2 nên phương trình của nó có dạng: $y = -2x + b$ 0,25

Giao điểm của (Δ) với Ox và Oy lần lượt là $A\left(\frac{b}{2}, 0\right)$ và $B(0; b)$ 0,25

Từ giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{b}{2}\right| \cdot |b| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ 0,50

VI. Đề số 3b

Bài 1. Xác định tính chẵn-lẻ của hàm số sau: $y = f(x) = \frac{\sqrt{|x-1| + |x+1|}}{|x-1| - |x+1|}$

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $|x-1| - |x+1| \neq 0$ 0,25

Điều này tương đương với $|x-1| \neq |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq x+1 \\ x-1 \neq -(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$ 0,50

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0,25

Ta có:

• $\forall x \in \mathcal{D} : -x \in \mathcal{D}$ 0,25

• $\forall x \in \mathcal{D} : f(-x) = \frac{\sqrt{|-x-1| + |-x+1|}}{|-x-1| - |-x+1|} = -f(x)$ 0,50

Do đó, hàm số đã cho là hàm số lẻ 0,25

Bài 2. Tìm m để hàm số $y = (1+m)x + m + 4x - 4$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Lời giải.

Ta có $y = (1+m)x + m + 4x - 4 = (m+5)x + m - 4$ 0,25

Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} khi và chỉ khi $m+5 > 0$ 0,50

Điều này tương đương với $m > -5$ 0,25

Bài 3. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2x-m+1} + \sqrt{x+m}$ xác định trên $(-3; 4]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x-m+1 \neq 0 \\ x+m \geq 0 \end{cases}$ 0,25

Điều này tương đương với $\begin{cases} x \neq \frac{m-1}{2} \\ x \geq -m \end{cases}$ 0,25

Hàm số xác định trên $(-3; 4]$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \left[\frac{m-1}{2} \leq -3 \right. \\ \left. \frac{m-1}{2} > 4 \right. \\ \left. -m \leq -3 \right. \end{cases}$ 1,00

Điều này tương đương với $m > 9$ 0,50

Bài 4. Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 1$

- a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$.
- b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-3; 0]$.
- c) Tìm m để đồ thị hàm số $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại đúng hai điểm có hoành độ thuộc $[-3; 0]$.

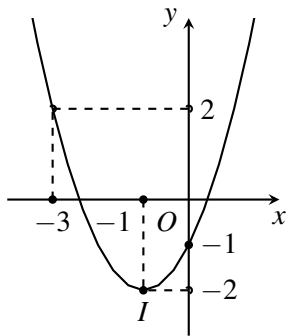
Lời giải.

a) • Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

..... 1,00

• Đồ thị



..... 1,00

b) Dựa vào đồ thị hàm số ta nhận thấy:

Trên $[-3; 0]$ giá trị lớn nhất của hàm số là 2 đạt tại $x = -3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -2 đạt tại $x = -1$

1,00

c) Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 0]$ ta có:

Yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $-2 < m \leq -1$

1,00

Bài 5. Tìm hàm số bậc nhất biết rằng đồ thị (Δ) của nó có hệ số góc là 2 chắn hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải.

(Δ) có hệ số góc bằng 2 nên phương trình của nó có dạng: $y = 2x + b$

0,25

Giao điểm của (Δ) với Ox và Oy lần lượt là $A\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$ và $B(0; b)$

0,25

Từ giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{b}{2}\right| \cdot |b| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ b = 4 \end{cases}$

0,50

VII. Đề số 4a

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{6-2x}}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}$.

Lời giải.

a) $y = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{6-2x}}$

Biểu thức hàm số có nghĩa khi $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 6-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 3 \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm.}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-1; 3)$ 0,5 điểm

b) $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x}$

Tập xác định của hàm số $D = [-3; 3] \setminus \{0\}$ 0,5 điểm

Thấy $x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1).

Ta có $f(-x) = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{-x} = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{x} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho là hàm số chẵn. 0,5 điểm

Bài 2. Cho đường thẳng $d : y = 2x - 4$.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d và các trục tọa độ.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $\Delta : y = (2m - 1)x + m + 1$ song song với đường thẳng d .

Lời giải.

a) $d : y = 2x - 4$.

$A = d \cap Ox \Rightarrow A(2; 0); B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; -4)$ 0,5 điểm

ΔOAB vuông tại O nên có diện tích $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot |2| \cdot |-4| = 4$ (đvdt). 0,5 điểm

b) $d : y = 2x - 4$ và $\Delta : y = (2m - 1)x + m + 1$.

$d \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 2 \\ m + 1 \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ 1,0 điểm.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + bx + c$ có đồ thị là Pa-ra-bol (P).

a) Tìm hệ số b, c để (P) có đỉnh là $I(1; -4)$.

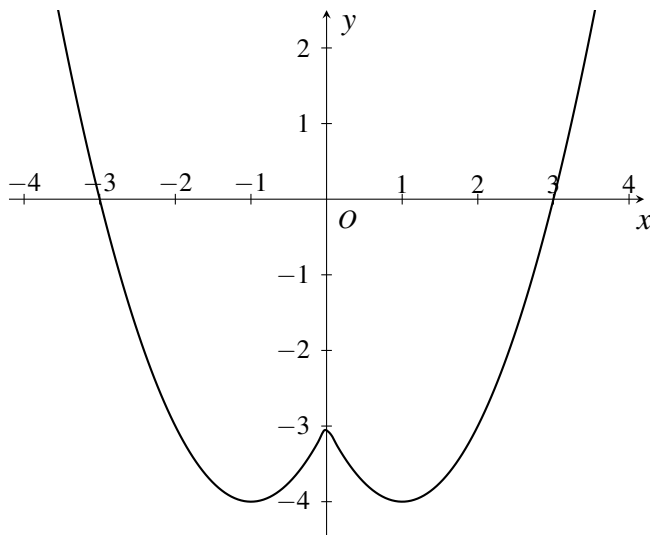
b) Với b, c tìm được ở trên, vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, từ đó tìm x để $f(|x|) < 0$.

Lời giải.

a) hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2} = 1 \Leftrightarrow b = -2$ 0,5 điểm

$I(1; -4) \in P$ nên có $1 + b + c = -4 \Leftrightarrow c = -3$.

Vậy $b = -2, c = -3$ 0,5 điểm



b) 0,5 điểm

Từ đồ thị suy ra $f(|x|) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ 0,5 điểm

Bài 4. Cho Pa-ra-bol $(P) : y = -x^2 + 4x + 3$ và đường thẳng $d : y = x + m$. Tìm m để

- a) (P) và (d) có đúng một điểm chung.
- b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta : y = -x + 2$.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :
 $-x^2 + 4x + 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 3 = 0$ (1)..... **0,5 điểm**
 (P) và (d) có đúng một điểm chung \Leftrightarrow phương trình (1) có đúng một nghiệm
 $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} = 9 - 4(m - 3) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4}$ **0,5 điểm**

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(d) : x^2 - 3x + m - 3 = 0$ (1).
 Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} > 0 \Leftrightarrow$
 $m < \frac{21}{4}$ (*). **0,25 điểm**

Ta có $d : y = x + m, \Delta : y = -x + 2$ nên $d \perp \Delta$ **0,25 điểm**

Để A, B đối xứng nhau qua Δ thì trung điểm M của AB phải thuộc Δ .

A, B là giao điểm của (P) và (d) nên $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). **0,25 điểm**

Ta có
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{x_1 + m + x_2 + m}{2} = \frac{3 + 2m}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3 + 2m}{2}\right).$$

$M \in \Delta$ nên $\frac{3 + 2m}{2} = -\frac{3}{2} + 2 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn (*)).

Vậy $m = -1$ **0,25 điểm**

Bài 5. a) Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 2mx + m^2 - 1}$ xác định trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 4x - 5$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $\frac{21}{2}$ (đvdt), với A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành.

Lời giải.

a) Ta có $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - m - 1)(x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$ **0,5 điểm**

Do đó để hàm số xác định trên khoảng $(2; +\infty)$ thì $m + 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$ **0,5 điểm**

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(P) : -x^2 + 4x - 5 = -x + m$
 $\Leftrightarrow x^2 - 5x + m + 5 = 0$ (1).

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Delta_{(1)} = 25 - 4(m + 5) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$ (*). **0,25 điểm**

Gọi hoành độ của A, B lần lượt là x_1, x_2 . Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Ta có tứ giác $ABB'A'$ là hình thang vuông với độ dài hai đáy là

$AA' = |-x_1^2 + 4x_1 - 5| = x_1^2 - 4x_1 + 5 = x_1^2 - 5x_1 + m + 5 + x_1 - m = x_1 - m, BB' = x_2 - m$ và chiều cao $A'B' = |x_1 - x_2|$ **0,25 điểm**

Diện tích $S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')A'B'}{2} = \frac{21}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 2m)|x_1 - x_2| = 21$ **0,25 điểm**

$\Leftrightarrow (5 - 2m) \left| \frac{\sqrt{\Delta_{(1)}}}{1} \right| = 21 \Leftrightarrow (5 - 2m)\sqrt{5 - 4m} = 21 \Leftrightarrow (5 - 2m)^2(5 - 4m) = 441$

$\Leftrightarrow 4m^3 - 25m^2 + 50m + 79 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)(4m^2 - 29m + 79) = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn (*)). **0,25 điểm**

VIII. Đề số 4b

Bài 1. a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2} - 3x}{\sqrt{8-2x}}$.

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{|x|}$.

Lời giải.

a) $y = \frac{\sqrt{x+2} - 3x}{\sqrt{8-2x}}$

Biểu thức hàm số có nghĩa khi $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 8-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 4. \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm.}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = [-2; 4)$ 0,5 điểm

b) $f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{|x|}$

Tập xác định của hàm số $D = [-3; 3] \setminus \{0\}. \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

Thấy $x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1).

Ta có $f(-x) = \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{|-x|} = -\frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{|x|} = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ. 0,5 điểm

Bài 2. Cho đường thẳng $d : y = 2x - 6$.

a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d và các trục tọa độ.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $\Delta : y = (2m - 3)x + m + 1$ song song với đường thẳng d .

Lời giải.

a) $d : y = 2x - 6$.

$A = d \cap Ox \Rightarrow A(3; 0); B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; -6). \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

ΔOAB vuông tại O nên có diện tích $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot |3| \cdot |-6| = 9$ (đvdt). 0,5 điểm

b) $d : y = 2x - 6$ và $\Delta : y = (2m - 3)x + m + 1$.

$d \parallel \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 = 2 \\ m + 1 \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}. \dots\dots\dots 1,0 \text{ điểm.}$

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = -x^2 + bx + c$ có đồ thị là Pa-ra-bol (P).

a) Tìm hệ số b, c để (P) có đỉnh là $I(1; 4)$.

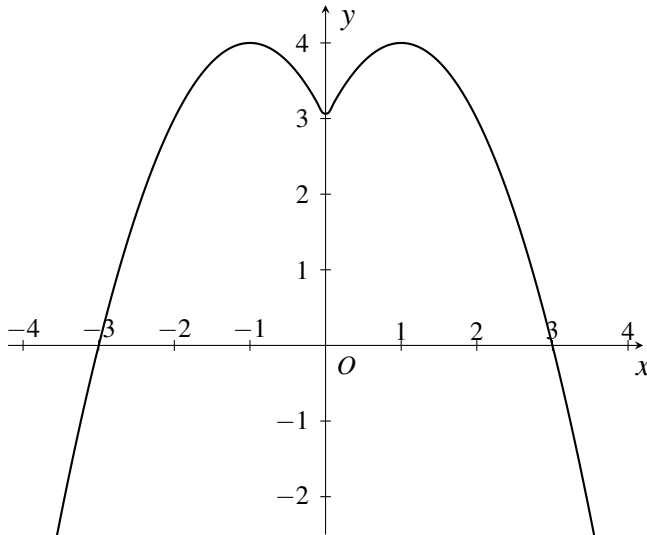
b) Với b, c tìm được ở trên, vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, từ đó tìm x để $f(|x|) > 0$.

Lời giải.

a) Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{-2} = 1 \Leftrightarrow b = 2. \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$

$I(1; 4) \in P$ nên có $-1 + b + c = 4 \Leftrightarrow c = 3$.

Vậy $b = 2, c = 3. \dots\dots\dots 0,5 \text{ điểm}$



b) Từ đồ thị suy ra $f(|x|) > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$ **0,5 điểm.**
 **0,5 điểm**

Bài 4. Cho Pa-ra-bol $(P) : y = -x^2 + 4x + 2$ và đường thẳng $d : y = x + m$. Tìm m để

- a) (P) và (d) có đúng một điểm chung.
- b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta : y = -x + 1$.

Lời giải.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :
 $-x^2 + 4x + 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 2 = 0$ (1) **0,5 điểm**
 (P) và (d) có đúng một điểm chung \Leftrightarrow phương trình (1) có đúng một nghiệm
 $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} = 9 - 4(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{17}{4}$ **0,5 điểm**

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và $(d) : x^2 - 3x + m - 2 = 0$ (1).
 Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{(1)} > 0 \Leftrightarrow$
 $m < \frac{17}{4}$ (*). **0,25 điểm**

Ta có $d : y = x + m, \Delta : y = -x + 1$ nên $d \perp \Delta$ **0,25 điểm**
 Để A, B đối xứng nhau qua Δ thì trung điểm M của AB phải thuộc Δ .
 A, B là giao điểm của (P) và (d) nên $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1). **0,25 điểm**

Ta có
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{x_1 + m + x_2 + m}{2} = \frac{3 + 2m}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{3 + 2m}{2}\right).$$

$M \in \Delta$ nên $\frac{3 + 2m}{2} = -\frac{3}{2} + 1 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn (*)).

Vậy $m = -2$ **0,25 điểm**

Bài 5. a) Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 2mx + m^2 - 1}$ xác định trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d : y = -x + m$ cắt đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 4x - 6$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng $\frac{27}{2}$ (đvdt), với A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành.

Lời giải.

a) Ta có $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - m - 1)(x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$ **0,5 điểm**

Do đó để hàm số xác định trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $m + 1 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 2$ **0,5 điểm**

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $-x^2 + 4x - 6 = -x + m$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + m + 6 = 0 \quad (1).$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $\Delta_{(1)} = 25 -$

$$4(m + 6) > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \quad (*). \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

Gọi hoành độ của A, B lần lượt là x_1, x_2 . Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Ta có tứ giác $ABB'A'$ là hình thang vuông với độ dài hai đáy là

$$AA' = |-x_1^2 + 4x_1 - 6| = x_1^2 - 4x_1 + 6 = x_1^2 - 5x_1 + m + 6 + x_1 - m = x_1 - m, BB' = x_2 - m \text{ và chiều cao } A'B' = |x_1 - x_2|. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$\text{Diện tích } S_{ABB'A'} = \frac{(AA' + BB')A'B'}{2} = \frac{27}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 2m)|x_1 - x_2| = 27. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

$$\Leftrightarrow (5 - 2m) \left| \frac{\sqrt{\Delta_{(1)}}}{1} \right| = 27 \Leftrightarrow (5 - 2m)\sqrt{1 - 4m} = 21 \Leftrightarrow (5 - 2m)^2(1 - 4m) = 729$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 - 21m^2 + 30m + 176 = 0 \Leftrightarrow (m + 2)(4m^2 - 29m + 88) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa mãn (*))}. \dots\dots\dots 0,25 \text{ điểm}$$

IX. Đề số 5a

Bài 1.

a) Tìm tập xác định của các hàm số sau.

$$1. y = \frac{x + 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x}}{(x - 1)(x + 2)}.$$

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6$.

Lời giải.

$$1.a) \text{ Hàm số xác định khi } x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\} \dots\dots\dots 0,25$$

$$b) \text{ Hàm số xác định khi } \begin{cases} x \geq 0 \\ (x - 1)(x + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Tập xác định: } D = (0; +\infty) \setminus \{1\} \dots\dots\dots 0,25$$

$$2. \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Với mọi } x \in D \text{ thì } -x \in D \dots\dots\dots 0,25$$

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 6 = 3x^4 - 5x^2 + 6 \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Vậy } f \text{ là hàm số chẵn} \dots\dots\dots 0,25$$

Bài 2. Tìm phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua hai điểm $M(-2; 2)$ và $N(4; -10)$.

b) d đi qua $A(2; 1)$ và song song với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$.

$$\text{Lời giải. } 1. \text{ Ta có } d: y = ax + b \dots\dots\dots 0,25$$

$$(d) \text{ đi qua } M \text{ và } N \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2 = a(-2) + b \\ -10 = a.4 + b \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \dots\dots\dots 0,25$$

$$\text{Vậy } d: y = -2x - 2 \dots\dots\dots 0,25$$

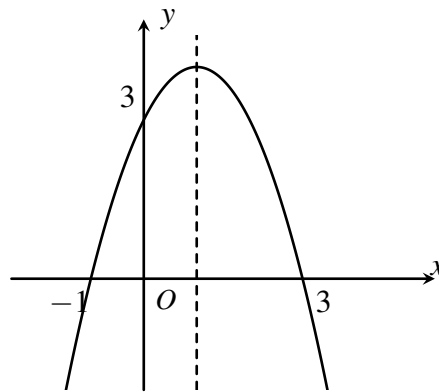
$$2. d \text{ song song với } \Delta \text{ nên } d: y = 2x + b \text{ (} b \neq 1 \text{)} \dots\dots\dots 0,25$$

d đi qua A nên $1 = 2.2 + b \Rightarrow b = -3$ 0,5
 Vậy $d : y = 2x - 3$ 0,25

Bài 3.

- a) Xác định tọa độ đỉnh và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$;
- b) Xác định parabol $P : y = ax^2 + bx + c$, biết P có đỉnh $I(2; -1)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$.

Lời giải. 1. Tọa độ đỉnh $I(1; 4)$ 0,5
 Đồ thị0,5



2. P có đỉnh $I(2; -1)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$ nên ta có $\begin{cases} 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases}$ 0,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 3 \\ c = 3 \end{cases}$ 0,5

Bài 4. Cho parabol $P : y = x^2 - 2x$ và hai đường thẳng $d_1 : y = x$ và $d_2 : y = 2x + m$

- a) Tìm tọa độ giao điểm của parabol P và đường thẳng d_1 ;
- b) Xác định giá trị của m để parabol P và đường thẳng d_2 có một điểm chung duy nhất M . Tìm tọa độ điểm M .

Lời giải. 1. Phương trình hoành độ giao điểm của P và d_1
 $x^2 - 2x = x \Leftrightarrow x = 0; x = 3$ 0,5
 $\begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 3; y = 3 \end{cases}$. Vậy P và d_1 cắt nhau tại $O(0; 0)$ và $A(3; 3)$ 0,5

2. Phương trình hoành độ điểm chung của d_2 và P

$$x^2 - 2x = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x - m = 0 \quad (1)$$

d_2 và P có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) cho nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$ 0,5
 Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0$. Vậy tọa độ điểm $M(2; 0)$ 0,5

Bài 5. a) Biết hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 thuộc đường thẳng $f(x) = mx + 2m - 4$ cùng nằm phía trên trục hoành.

b) Biết đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 5$ ($m \neq 0$) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 2$.

Lời giải.

1. Giả sử A và B lần lượt là các điểm có hoành độ $x = -1$ và $x = 2$ thuộc đường thẳng đã cho. Ta có $A(-1; m-4)$, $B(2; 4m-4)$ 0,5

Ta có A và B cùng nằm phía trên trục $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y_A > 0 \\ y_B > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 > 0 \\ 4m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$ 0,5

2. Ta có (P) có đỉnh $S \begin{cases} x = 2 \\ y = -3m - 5 \end{cases}$ 0,5

Đỉnh của parabol thuộc đường thẳng $y = 3x - 2 \Leftrightarrow -3m - 5 = 3 \cdot 2 - 2 \Leftrightarrow m = -3$ 0,5

X. Đề số 5b

Bài 1.

a) Tìm tập xác định của các hàm số sau.

$$1. y = \frac{x+2}{x^2+4x-5}$$

$$2. y = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x-2)}$$

b) Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = 4x^3 - 2x^5 + 6x$.

Lời giải.

1.a) Hàm số xác định khi $x^2 + 4x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -5 \end{cases}$ 0,25

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -5\}$ 0,25

b) Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$ 0,25

Tập xác định: $D = (0; +\infty) \setminus \{2\}$ 0,25

2. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ 0,25

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ 0,25

$f(-x) = 4(-x)^3 - 2(-x)^5 + 6(-x) = -(4x^3 - 2x^5 + 6x) = -f(x)$ 0,25

Vậy f là hàm số lẻ 0,25

Bài 2. Tìm phương trình đường thẳng d biết

a) d đi qua hai điểm $M(2; -2)$ và $N(-4; 10)$.

b) d đi qua $A(1; 2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: y = 3x + 1$.

Lời giải. 1. Ta có $d: y = ax + b$ 0,25

(d) đi qua M và N nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -4a + b = 10 \end{cases}$ 0,25

$\begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$ 0,25

Vậy $d: y = -2x + 2$ 0,25

2. d song song với Δ nên $d: y = 3x + b$ ($b \neq 1$) 0,25

d đi qua A nên $2 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$ 0,5

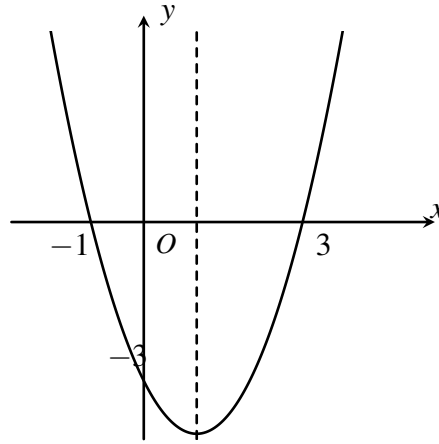
Vậy $d: y = 3x - 1$ 0,25

Bài 3.

a) Xác định tọa độ đỉnh và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 3$;

b) Xác định parabol $P : y = ax^2 + bx + c$, biết P có đỉnh $I(-2; -9)$ và đi qua điểm $D(-5; 0)$.

Lời giải. 1. Tọa độ đỉnh $I(1; -4)$ 0,5
 Đồ thị 0,5



2. P có đỉnh $I(-2; -9)$ và đi qua điểm $D(-5; 0)$ nên ta có $\begin{cases} 4a - 2b + c = -9 \\ 25a - 5b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \end{cases}$ 0,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -5 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 4x - 5$ 0,5

Bài 4. Cho parabol $P : y = x^2 + 3x$ và hai đường thẳng $d_1 : y = -x$ và $d_2 : y = x + m$

a) Tìm tọa độ giao điểm của parabol P và đường thẳng d_1 ;

b) Xác định giá trị của m để parabol P và đường thẳng d_2 có một điểm chung duy nhất M . Tìm tọa độ điểm M .

Lời giải. 1. Phương trình hoành độ giao điểm của P và d_1

$x^2 + 3x = -x \Leftrightarrow x = 0; x = -4$ 0,5

$\begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = -4; y = 4 \end{cases}$. Vậy P và d_1 cắt nhau tại $O(0; 0)$ và $A(-4; 4)$ 0,5

2. Phương trình hoành độ điểm chung của d_2 và P

$$x^2 + 3x = x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x - m = 0 \quad (1)$$

d_2 và P có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) cho nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ 0,5

Khi đó (1) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$. Vậy tọa độ điểm $M(-1; -2)$ 0,5

Bài 5. Tìm tham số m .

a) Biết hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và -3 thuộc đường thẳng $f(x) = mx + 2m - 4$ cùng nằm phía dưới trục hoành.

b) Biết đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 5$ ($m \neq 0$) có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 2x - 3$.

Lời giải.

1. Giả sử A và B lần lượt là các điểm có hoành độ $x = 1$ và $x = -3$ thuộc đường thẳng đã cho. Ta có $A(1; 3m - 4)$, $B(-3; -m - 4)$ 0,5

Ta có A và B cùng nằm phía dưới trục $Ox \Leftrightarrow \begin{cases} y_A < 0 \\ y_B < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 4 < 0 \\ -m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < \frac{4}{3}$ 0,5

2. Ta có (P) có đỉnh $S \begin{cases} x = 2 \\ y = -3m - 5 \end{cases}$ 0,5

Đỉnh của parabol thuộc đường thẳng $y = 2x - 3 \Leftrightarrow -3m - 5 = 2 \cdot 2 - 3 \Leftrightarrow m = -2$ 0,5

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I. Tìm tập xác định của phương trình

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

Điều kiện xác định của phương trình (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện cần của ẩn x để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.
Các dạng thường gặp:

a) Điều kiện để biểu thức $\sqrt{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \geq 0$;

b) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \neq 0$;

c) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ có nghĩa là $f(x) > 0$.

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+1} = 3$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = x+1$;

b) $\sqrt{x-5} = 1$;

d) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3} = x+5$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

c) Điều kiện xác định của phương trình là $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

d) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{3}{x^2-4} = \frac{\sqrt{3-x}}{3}$;

b) $\frac{2x-1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{1-x}$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ 3 \geq x \end{cases}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn cả hai điều kiện này.

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra nghiệm của các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x-4} = \sqrt{4-3x}$;

c) $\frac{\sqrt{5x+15}}{x+3} = \sqrt{-x-3}$.

b) $3x+5 - \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 2018$;

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ 4-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases}$ hay $x = \frac{4}{3}$. Thay $x = \frac{4}{3}$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{4}{3}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Thay $x = 3$ vào phương trình ta có $3 \cdot 3 - 0 = 0 + 2018$ (vô lý), vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 5x+15 \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \\ -x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq -3 \\ x \leq -3 \end{cases}$. Vậy không có x nào thỏa điều kiện xác định của phương trình nên phương trình vô nghiệm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $1 + \sqrt{2x-5} = 0$;

c) $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = x-3$;

b) $\frac{2x+1}{2x^2-3x+1} = x-1$;

d) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{2-3x}{5x+1}$.

Lời giải.

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2-3x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$.

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 5x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{1}{5} \end{cases}$.

Bài 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = x - 1;$

c) $\sqrt{5 - 2x} = \sqrt{x^2 + x + 1};$

b) $\frac{1}{x^2 + 1} = x - 3;$

d) $\frac{x + 1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 5}} = x - 3.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 + 2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 3 \geq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) Điều kiện xác định của phương trình là:

$$\begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $-x^2 + 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) - 1 > 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2 - 1 > 0$ (vô lý). Vậy không tồn tại giá trị của x để phương trình xác định.

Bài 3. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x - 1} + \sqrt{x + 2} = 7 - x;$

c) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} + \sqrt{2x - 5} = 2x^2 - 5x;$

b) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0;$

d) $\sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^3 - 2}.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}.$

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 6.$

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 4.$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^3 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{2}.$

Bài 4. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $(x + 1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1;$

c) $\sqrt{\sqrt{2} - 1 - x} + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}};$

b) $x(x + 1)(x - 3) + 3 = \sqrt{4 - x} + \sqrt{1 + x};$

d) $\sqrt{1 - x^2} = \left(\frac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4.$

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} \sqrt{2}-1-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2}-1.$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$

Bài 5. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x;$

c) $2\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} - x + 3;$

b) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2;$

d) $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x+1}.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -2 \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \end{cases}$ (luôn đúng). Vậy

phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{3x}{\sqrt{|x^2-1|}} = x+1;$

b) $\frac{2x+3}{x-3} = \frac{24}{x^2-9} + \frac{2(x+5)}{x+3}.$

Lời giải.

a) Vì $|x^2-1| \geq 0$ nên điều kiện xác định của phương trình là: $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 3.$

Bài 7. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4;$

b) $\sqrt{\frac{6}{2-x}} + \sqrt{\frac{10}{3-x}} = 4.$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x+2+\sqrt{x+1} \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1}+1)^2 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2.$

Bài 8. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

- a) $\sqrt[4]{57-x} + \sqrt[4]{x+40} = 5;$
- b) $\frac{\sqrt{x}-1}{|x|-3} = 0.$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 57-x \geq 0 \\ x+40 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 57 \\ x > -40 \end{cases} \Leftrightarrow -40 \leq x \leq 57.$
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x \geq 0 \\ |x|-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 3.$

Bài 9. Tìm m để phương trình $\frac{x^2+x}{x-m+3} = 1$ xác định trên $[-1; 1)$.

Lời giải. Phương trình xác định khi $x-m+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m-3.$

Để phương trình xác định trên $[-1; 1)$ thì $m-3 \notin [-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < -1 \\ m-3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \geq 4 \end{cases}.$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài 10. Tìm giá trị của m để các phương trình sau xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- a) $\sqrt{2x^2+m} = x-2;$
- b) $\frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+4x+5-m}} = x-1;$
- c) $\frac{x+1}{x^2-m+5} = x-3;$
- d) $\frac{3x-2}{mx^2+9} = x^3+2.$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2+m \geq 0$. Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $m \geq 0$.
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2+4x+5-m > 0 \Leftrightarrow 2(x^2+2x+1)+3-m > 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2+3-m > 0$. Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $3-m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2-m+5 \neq 0$. Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $x^2-m+5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = m-5$ vô nghiệm, điều này xảy ra khi $m-5 < 0 \Leftrightarrow m < 5$.
- d) Điều kiện xác định của phương trình là: $mx^2+9 \neq 0$.

- Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $\frac{3x-2}{9} = x^3+2$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Nếu $m \neq 0$, để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $mx^2+9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{9}{m}$ vô nghiệm, điều này xảy ra khi $-\frac{9}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy $m \geq 0$ thì phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

II. Phương trình hệ quả

1. Tóm tắt lý thuyết

Khái niệm. Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là **phương trình hệ quả** của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

Nhận xét. Từ khái niệm trên, ta thấy các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ luôn là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$, do đó nếu ta tìm được tất cả các nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì bằng cách thử lại, ta sẽ tìm được tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Đây cũng chính là phương pháp giải một phương trình dựa vào phương trình hệ quả của nó.

Các nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ mà không thỏa phương trình $f(x) = g(x)$ được gọi là các **nghiệm ngoại lai**.

2. Các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả thường gặp

A. Bình phương hai vế

Ví dụ 4.

$$\sqrt{2x-1} = x-1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2x-1 = (x-1)^2 \quad (2)$$

Qua phép biến đổi **bình phương hai vế** , ta được phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

B. Nhân hai vế của phương trình với một đa thức

Ví dụ 5.

$$\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(x+1) + \frac{x}{2}(x-3) = 2x \quad (2)$$

Qua phép biến đổi **nhân hai vế** với $(x+1)(x-3)$, ta được phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).


3. Phương pháp giải phương trình dựa vào phương trình hệ quả

Bước 1: Sử dụng các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả, đưa phương trình đã cho về một phương trình đơn giản hơn (*có thể giải được dễ dàng hơn*).

Bước 2: Giải phương trình hệ quả để tìm tất cả các nghiệm.

Bước 3: Thử lại các nghiệm để loại nghiệm ngoại lai.

Bước 4: Kết luận.

 *Khi giải phương trình, ta có thể thực hiện liên tiếp các phép biến đổi. Tuy nhiên, trong các phép biến đổi liên tiếp đó, nếu có một phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả thì phương trình cuối cùng vẫn chỉ là phương trình hệ quả của phương trình ban đầu.*

Dạng 2. Khử mẫu (nhân hai vế với biểu thức)

Ở dạng này, ta sẽ đặt điều kiện xác định rồi nhân hai vế với mẫu của phân thức. Sau khi giải xong phương trình, kiểm tra nghiệm có thỏa mãn phương trình ban đầu hay không.

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$\frac{x^2 + x + 3}{x + 2} = 3$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x \neq -2$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x + 3}{x + 2} &= 3 \\ \Rightarrow x^2 + x + 3 &= 3(x + 2) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x &= 3 \end{aligned}$$

Hai nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện xác định và thỏa phương trình ban đầu.

Vậy $S = \{-1; 3\}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình sau : $\frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1}$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x - 1}} &= \sqrt{x - 1} \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 3 &= x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện và thử lại phương trình đã cho ta được một nghiệm là $x = 4$. Vậy $S = \{4\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Giải phương trình sau: $2x + \frac{3}{x - 2} = \frac{3x}{x - 2}$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} 2x + \frac{3}{x - 2} &= \frac{3x}{x - 2} \\ \Leftrightarrow \frac{2x(x - 2) + 3}{x - 2} &= \frac{3x}{x - 2} \\ \Rightarrow 2x^2 - 4x + 3 &= 3x \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại phương trình ban đầu ta được các nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $S = \left\{3; \frac{1}{2}\right\}$.

Bài 12. Giải phương trình: $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > -1$.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} &= \sqrt{x+1} \\ \Rightarrow x+1 &= x+1 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $S = (-1; +\infty)$.

Bài 13. Giải phương trình:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x+5}{\sqrt{x-1}}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > 1$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x-1}} &= \frac{x+5}{\sqrt{x-1}} \\ \Rightarrow 2x^2 + 5x - 1 &= x+5 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Hai nghiệm này đều không thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy $S = \emptyset$.

Bài 14. Giải phương trình sau: $1 + \frac{2}{x-4} = \frac{10}{x+5} - \frac{24}{(4-x)(x+5)}$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -5 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{x-4} &= \frac{10}{x+5} - \frac{24}{(4-x)(x+5)} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+5) + 2(x+5)}{(x-4)(x+5)} &= \frac{10(x-4) + 24}{(x-4)(x+5)} \\ \Rightarrow x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$. Vậy $S = \{1; 6\}$

Bài 15. Giải phương trình:

$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{\sqrt{3x-1}} = \sqrt{3x-1}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 7x + 2}{\sqrt{3x - 1}} &= \sqrt{3x - 1} \\ \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 &= (\sqrt{3x - 1})^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 &= 3x - 1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, ta được nghiệm $x = 3$. Vậy $S = \{3\}$.

Dạng 3. Bình phương hai vế (làm mất căn)

Sau khi đặt điều kiện ban đầu, tiến hành chuyển vế và sử dụng kỹ thuật bình phương hai vế để làm mất căn thức, đưa phương trình ban đầu về phương trình hệ quả, dưới dạng đa thức.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{x+2} = \sqrt{3-2x}$ (1).

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-2x \geq 0 \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow x+2 = 3-2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Thử lại nghiệm ta thấy thỏa mãn phương trình.

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\sqrt{-10x+10} = x-1$

Lời giải. Điều kiện xác định $-10x+10 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{-10x+10} &= x-1 \\ \Rightarrow -10x+10 &= (x-1)^2 \\ \Leftrightarrow -10x+10 &= x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow x^2+8x-9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -9 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại phương trình đã cho ta được một nghiệm là $x = 1$.
Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4x^2+5x-1}}{x+1} = \sqrt{2}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x^2 + 5x + 1 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 5x - 1} &= \sqrt{2}(x+1) \\ \Rightarrow 4x^2 + 5x - 1 &= 2(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình. Vậy $S = \{1\}$.

Bài 17. Giải phương trình sau $\frac{\sqrt{x-1}}{x+2} = \frac{-x-11}{x+2} + 2$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} &= \frac{-x-11}{x+2} + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} &= \frac{x-7}{x+2} \\ \Rightarrow \sqrt{x-1} &= x-7 \\ \Rightarrow x-1 &= (x-7)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, phương trình đã cho có nghiệm $x = 10$. Vậy $S = \{10\}$.

Bài 18. Giải phương trình sau: $\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+1} = 2$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq 4 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+1} &= 2 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x - 4} &= 2x+2 \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 &= 4x^2 + 8x + 4 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 11x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{8}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{8}{3}$. Vậy $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$.

Bài 19. Giải phương trình $\sqrt{3x-5} = \sqrt{2-x}$

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x - 5} &= \sqrt{2 - x} \\ \Rightarrow 3x - 5 &= 2 - x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{7}{4} \right\}$.

Bài 20. Giải phương trình $\sqrt{3x + 1} = 2x$.

Lời giải. Điều kiện xác định $3x + 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x + 1} &= 2x \\ \Rightarrow 3x + 1 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \{1\}$.

Bài 21. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 10x - 44} = 8 - x$.

Lời giải. Điều kiện xác định $3x^2 - 10x - 44 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 10x - 44} &= 8 - x \\ \Rightarrow 3x^2 - 10x - 44 &= x^2 - 16x + 64 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 108 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} x = 6 \\ x = -9 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \{-9; 6\}$.

Bài 22. Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4x^2 - 3} - x}{x - 1} = 0$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x^2 - 3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4x^2 - 3} - x}{x - 1} &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 3} &= x \\ \Rightarrow 4x^2 - 3 &= x^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta loại nghiệm $x = 1$ vì không thỏa điều kiện xác định. Còn $x = -1$ không là nghiệm của phương trình ban đầu. Vậy $S = \emptyset$.

Bài 23. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{12x-4}}{(x+1)(2x+5)} + \frac{2x}{2x+5} = \frac{x}{x+1}$.

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} 12x-4 \geq 0 \\ (x+1)(2x+5) \neq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{12x-4}}{(x+1)(2x+5)} + \frac{2x}{2x+5} = \frac{x}{x+1} \quad (1) \\ \Rightarrow & \sqrt{12x-4} + 2x(x+1) = x(2x+5) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{12x-4} = 3x \\ \Rightarrow & 12x-4 = 9x^2 \\ \Leftrightarrow & 9x^2 - 12x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & (3x-2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Thay $x = \frac{2}{3}$ vào phương trình (1) ta thấy thỏa mãn. Vậy $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

Bài 24. Giải phương trình $\frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x}$.

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x} \quad (1) \\ \Rightarrow & 2x+1 = \sqrt{x+1} \quad (\text{nhân cả hai vế cho } x\sqrt{x+1}) \\ \Rightarrow & (2x+1)^2 = x+1 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 4x + 1 = x+1 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy $S = \emptyset$.

III. Phương trình tương đương

Định nghĩa 1. Hai phương trình (cùng ẩn) gọi là tương đương nếu chúng có chung một tập hợp nghiệm. Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

Định lý 1. Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương:

- Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.
- Nhân hoặc chia cả hai vế cùng với một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

 **Chú ý:**

- Hai phương trình bất kỳ vô nghiệm có cùng ẩn là tương đương với nhau.

- b) Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.
- c) Khi muốn nhân mạnh hai phương trình có cùng tập xác định \mathbb{D} (hay có cùng điều kiện xác định mà ta cũng kí hiệu là \mathbb{D}) và tương đương với nhau, ta nói:
- Hai phương trình tương đương với nhau trên \mathbb{D} , hoặc
 - Với điều kiện \mathbb{D} , hai phương trình tương đương với nhau.

Dạng 4. Phương pháp chứng minh hai phương trình tương đương

Khi giải phương trình hoặc xét sự tương đương của hai phương trình thông thường ta sử dụng một trong những cách sau:

- a) Giải từng phương trình để so sánh các tập nghiệm
- b) Sử dụng các phép biến đổi tương đương: Các phép biến đổi sau mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình thì ta thu được phương trình mới tương đương:
 - Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.
 - Nhân hoặc chia cả hai vế cùng với một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.
 - Bình phương hai vế của một phương trình có hai vế luôn cùng dấu khi ẩn lấy mọi giá trị thuộc tập xác định của phương trình.

Ví dụ 10. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$
- b) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$.

Lời giải.

- a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ là sai vì $|x| = 2 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$
- b) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ là đúng vì hai phương trình $x - 1 = 0$ và $(x - 1)^2 = 0$ có chung tập nghiệm là $S = \{1\}$

Ví dụ 11. Cặp phương trình nào sau đây là tương đương?

- a) $3x - \frac{21}{4} = 0$ và $4x - 7 = 0$.
- b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $-2x^2 + 8x - 6 = 0$

Lời giải.

- a) Phương trình $3x - \frac{21}{4} = 0$ có nghiệm $x = \frac{10}{6}$, phương trình $4x - 7 = 0$ có nghiệm $x = \frac{7}{4}$. Vậy hai phương trình đã cho không tương đương.
- b) Nhân hai vế của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ với -2 ta được phương trình $-2x^2 + 8x - 6 = 0$. Vậy hai phương trình đã cho tương đương.

Ví dụ 12. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2$. Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang vế phải thì ta thu được phương trình tương đương.
- Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2}$. Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ cả hai vế ta được phương trình tương đương.

Lời giải.

- Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang vế phải thì ta thu được phương trình tương đương vì tuân thủ phép biến đổi tương đương (Cộng hai vế của phương trình với $-\sqrt{x-2}$ và không làm thay đổi điều kiện). Khẳng định đã cho là đúng.
- Điều kiện của phương trình là: $x \leq 2$. Khi lược bỏ $\sqrt{x-2}$ cả hai vế ta đã thay đổi điều kiện của phương trình ban đầu nên kết quả không thu được phương trình tương đương. Khẳng định ban đầu là sai.

Ví dụ 13. Giải phương trình :

$$\frac{5x+3}{4} - x = \frac{|2x-3|}{2} \quad (3.1)$$

Lời giải. (3.1) $\Leftrightarrow x+3 = 2|2x-3|$

- Nếu $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ thì $|2x-3| = 2x-3$.
Khi đó: (3.1) $\Leftrightarrow x+3 = 2(2x-3) \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$)
- Nếu $2x-3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ thì $|2x-3| = 3-2x$.
Khi đó: (3.1) $\Leftrightarrow x+3 = 2(3-2x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$ (thỏa điều kiện $x < \frac{3}{2}$)

Vậy phương trình (3.1) có hai nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{3}{5}$

Ví dụ 14. Xác định m để phương trình $\frac{3x+2}{x^2+x+1} = 2$ và phương trình $-x^2 + (1-m)x - m + \frac{1}{2} = 0$ tương đương.

Lời giải. Vì $x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có :

$$\frac{3x+2}{x^2+x+1} = 2 \Leftrightarrow 3x+2 = 2x^2+2x+2 \Leftrightarrow 2x^2-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Để hai phương trình tương đương thì phương trình $-x^2 + (1-m)x - m + \frac{1}{2} = 0$ phải có nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$. Thay $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình $-x^2 + (1-m)x - m + \frac{1}{2} = 0$ ta được $m = -\frac{1}{2}$. Lúc đó phương

trình đó trở thành: $x^2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Các phương trình nào sau đây là tương đương?

a) $\sqrt{x-3} + x = \sqrt{x-3} + 1$ và $x = 1$

b) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{x^2+1}}$ và $x^2 = 9$

Lời giải.

a) Điều kiện thì hai phương trình $\sqrt{x-3} + x = \sqrt{x-3} + 1$ là $x \geq 3$ nên phương trình $\sqrt{x-3} + x = \sqrt{x-3} + 1$ vô nghiệm. Do đó không tương đương với phương trình $x = 1$.

b) Ta có $x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên nhân hai vế của phương trình $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{x^2+1}}$ với $\sqrt{x^2+1}$ ta được phương trình $x^2 = 9$. Vậy hai phương trình đã cho tương đương.

Bài 26. Đúng hay sai?

a) $\sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1$.

b) $\sqrt{x-2} = 3-x \Leftrightarrow x-2 = (3-x)^2$

Lời giải.

a) Vì hai vế đều không âm nên bình phương hai vế ta được phương trình tương đương. Hay $\sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1$ là đúng.

b) Do vế phải của phương trình $\sqrt{x-2} = 3-x$ có thể cùng dấu hoặc trái dấu với vế trái nên bình phương hai vế chỉ nhận được phương trình hệ quả. Khẳng định $\sqrt{x-2} = 3-x \Leftrightarrow x-2 = (3-x)^2$ là sai.

Bài 27. Cách giải sau sai ở đâu?

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{x+3} - 3 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+3} &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= -3 \end{aligned}$$

Lời giải. Cách giải trên sai ở bước cuối cùng ta đã làm mất điều kiện của phương trình nên không thể nhận được phương trình tương đương, $x = -3$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 28. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào cho ta phương trình tương đương, phép biến đổi nào cho ta phương trình không tương đương?

a) Lược bỏ số hạng $\frac{4}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 - 4x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} - 4$.

b) Lược bỏ số hạng $\frac{5}{x+2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 + 1 + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x+2} + 2x$.

Lời giải.

a) Khi ta lược bỏ số hạng $\frac{4}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 - 4x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} - 4$ ta được phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, tuy nhiên nó lại không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Nên phép biến đổi trên không nhận được phương trình tương đương.

- b) Với điều kiện $x \neq -2$ thì phương trình $x^2 + 1 + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x+2} + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nó cũng chính là nghiệm của phương trình đã cho sau khi lược bỏ đi hạng tử $\frac{5}{x+2}$ ở cả hai vế. Vậy kết quả của phép biến đổi trên ta vẫn thu được một phương trình tương đương.

Bài 29. Xác định m để các cặp phương trình sau đây tương đương với nhau?

- a) $2x - 3 = 0$ và $\frac{2mx}{x-2} + 2m + 1 = 0$.
 b) $x^2 - 4 = 0$ và $3x^2 + (m+3)x + 7m + 9 = 0$.

Lời giải.

- a) $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Để hai phương trình tương đương thì $x = \frac{3}{2}$ phải là nghiệm của phương trình

$$\frac{2mx}{x-2} + 2m + 1 = 0 \text{ hay } \frac{2m \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 2} + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{8}.$$

Vậy với $m = -\frac{1}{8}$ thì hai phương trình tương đương.

- b) Giải phương trình $x^2 - 4 = 0$ ta được nghiệm $x = \pm 2$. Thay vào phương trình $3x^2 + (m+3)x + 7m + 9 = 0$ ta được $m = -3$, khi đó phương trình $3x^2 + (m+3)x + 7m + 9 = 0$ trở thành phương trình : $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy $m = -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 30. Với giá trị nào của m thì hai phương trình $x^2 - 1 = 0$ và $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ có chung một tập hợp nghiệm.

Lời giải. Giải phương trình $x^2 - 1 = 0$ ta được nghiệm $x = \pm 1$

- Thay $x = 1$ vào phương trình $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ ta được $m = 2$, khi đó phương trình $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ trở thành phương trình : $4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán.
- Thay $x = -1$ vào phương trình $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ ta được $-2m^2 + 2m - 4 = 0$ phương trình này vô nghiệm nên không có giá trị của m .

Vậy $m = 2$ thì hai phương trình đã cho tương đương nhau hay là chúng có chung một tập nghiệm.

Bài 31. Giải phương trình $|2x - 1| = |-5x - 2|$

Lời giải. $|2x - 1| = |-5x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -5x - 2 \\ 2x - 1 = 5x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -1 \\ 3x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ x = -1 \end{cases}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 32. Tìm điều kiện của mỗi phương trình rồi suy ra tập nghiệm:

a) $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{-x-2}$

c) $\frac{x}{\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

b) $x + \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 - x^2} - 3$

d) $x + 2\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{-x-1}$

Lời giải.

- a) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ -x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$b) \text{ Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

- Với $x = 3$: thay vào phương trình ta thấy vô lí.
- Với $x = -3$: thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3\}$.

$$c) \text{ Điều kiện } x > 2.$$

Vì $x > 2 > 0$ nên $VT > 0$. Mà $VP < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$d) \text{ Điều kiện } \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Thay $x = -1$ vào phương trình ta thấy vô lí. Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 33. Tìm điều kiện của mỗi phương trình rồi suy ra tập nghiệm:

$$a) \sqrt{-x^2 - (y+1)^2} + xy = (x+1)(y+1)$$

$$b) \sqrt{-x^2 + 6x - y^2 + 2y - 10} + x + y = 4 + (x-3)(y+2)$$

Lời giải.

$$a) \text{ Điều kiện } -x^2 - (y+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Thay $x = 0, y = -1$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{(x; y) = (0; -1)\}$.

$$b) \text{ Điều kiện } -x^2 + 6x - y^2 + 2y - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Thay $x = 3, y = 1$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{(x; y) = (3; 1)\}$.

Bài 34. Giải các phương trình sau:

$$a) x^3 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = x$$

$$b) 1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = x^2$$

$$c) x\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$$

Lời giải.

$$a) \text{ Điều kiện } x > 1.$$

Vì $x > 1 \Rightarrow x^3 > x \Rightarrow VT > VP \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$b) \text{ Điều kiện } -1 < x < 1.$$

Vì $-1 < x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow VT > VP \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$c) \text{ Điều kiện } x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vì } x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow VT \geq 0 \Rightarrow VP \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Bài 35. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} = 0$

c) $x + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$

b) $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$

d) $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$

Lời giải.a) Điều kiện $x \geq -1$.

$$\text{Phương trình tương đương } \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ \sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (TM)} \\ x = -2 \text{ (Loại)} \\ x = -1 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) Điều kiện $x > 3$.Phương trình tương đương $x = 4$ (TM). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.c) Điều kiện $x \neq 2$.Phương trình tương đương $x - 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 2$ (Loại). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.d) Điều kiện $x \neq 1$.

$$\text{Phương trình tương đương } 2x = \frac{3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (TM)}. \text{ Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

Bài 36. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $\sqrt{4-x} - 2 = \sqrt{x} - x$

b) $3\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2}$

Lời giải.a) Điều kiện $0 \leq x \leq 4$.Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 3$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 4$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{0; 4\}$.b) Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$.Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

- Với $x = -2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = -1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{0\}$.**Bài 37.** Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế:

a) $|x - 2| = x + 2$

b) $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x}$

c) $\sqrt{5 - 2x} = x - 1$

Lời giải.

a) $|x - 2| = x + 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x = 0.$

Thay $x = 0$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.

b) $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x} \Rightarrow x - 3 = 9 - 2x \Rightarrow x = 4.$

Thay $x = 4$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

c) $\sqrt{5 - 2x} = x - 1 \Rightarrow 5 - 2x = (x - 1)^2 \Rightarrow x = \pm 2.$

- Thay $x = 2$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Thay $x = -2$ vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Bài 38. Xét sự tương đương của các phương trình sau:

a) $\frac{x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x - 4}} = \sqrt{x - 4}$ và $\frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x - 1}} = 0$

b) $|2 - x| = 2x - 1$ và $x^2 - 1 = 0$

Lời giải.

a) Xét phương trình $\frac{x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x - 4}} = \sqrt{x - 4}$ (1).

Điều kiện $x > 4$.

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (Loại)} \\ x = 5 \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{5\}.$$

Xét phương trình $\frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x - 1}} = 0$ (2).

Điều kiện $x > 1$.

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (Loại)} \\ x = 5 \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{5\}.$$

Vì $S_1 = S_2$ nên hai phương trình đã cho tương đương.

b) Xét phương trình $|2 - x| = 2x - 1$ (1).

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Vì } |2 - x| \geq 0 \Rightarrow 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

- Xét $2 - x = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$ (TM).
- Xét $2 - x = -2x + 1 \Rightarrow x = -1$ (Loại).

Vậy $S_1 = \{1\}$.

Xét phương trình $x^2 - 1 = 0$ (2).

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow S_2 = \{\pm 1\}.$$

Vì $S_1 \neq S_2$ nên hai phương trình đã cho không tương đương.

§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Các dạng toán

Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất

Phương pháp giải:

- a) $a \neq 0$: Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
- b) $a = 0$ và $b \neq 0$: Phương trình vô nghiệm.
- c) $a = 0$ và $b = 0$: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m^2x + 2 = x + 2m \quad (1)$$

Lời giải. Ta có biến đổi tương đương

$$(1) \Leftrightarrow m^2x - x = 2m - 2 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1) \quad (2)$$

Ta xét các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Khi $m \neq \pm 1$, ta có $m^2 - 1 \neq 0$ nên (2) có nghiệm

$$x = \frac{2(m - 1)}{m^2 - 1} = \frac{2}{m + 1}.$$

Đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Trường hợp 2: Khi $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0 \cdot x = 0$. Phương trình này có nghiệm đúng với mọi số thực x nên phương trình (1) cũng có nghiệm đúng với mọi số thực x . **Trường hợp 3:** Khi $m = -1$, phương trình (2) trở thành $0 \cdot x = -4$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 1$: (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{m + 1}$.
- Với $m = -1$: (1) vô nghiệm.
- Với $m = 1$: (1) có vô số nghiệm.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình $\frac{2x + a}{a - 2} - \frac{a - 2x}{a + 2} = \frac{6a}{a^2 - 4}$. (1)

Lời giải. Ta có $\begin{cases} a - 2 \neq 0 \\ a + 2 \neq 0 \\ a^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm 2$.

Phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$(2x + a)(a + 2) - (a - 2x)(a - 2) = 6a \Leftrightarrow 2ax = a. \quad (2)$$

Trường hợp 1: Nếu $a \neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $a = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 0.x = 0$, phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x .

Kết luận:

- Với $a \neq 0$ và $a \neq \pm 2$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.
- Với $a = 0$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x .
- Với $a = \pm 2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có tập hợp nghiệm là \mathbb{R}

$$m(m^2x - 1) = 1 - x \quad (1)$$

Lời giải. Phương trình đã cho viết dưới dạng $(m^3 + 1)x = m + 1$. (2)

Do đó, phương trình (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$m = -1$.

Vậy với $m = -1$ thì phương trình (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} .

Ví dụ 4. Tìm giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm $x > 2$

$$2x - 3m = 1 \quad (1)$$

Lời giải. Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng $x = \frac{3m + 1}{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm $x > 2$ khi và chỉ khi $\frac{3m + 1}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận phương trình $(m^2 + 4)x - 3m = x - 3$. (1)

Lời giải. Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng $(m^2 + 3)x = 3m - 3$. (2).

Vì $m^2 + 3 > 0$, với mọi giá trị thực của m nên phương trình (2) có 1 nghiệm duy nhất là $x = \frac{3m - 3}{m^2 + 3}$.

Bài 2. Giải và biện luận phương trình $m(x - 2m) = x + m + 2$. (1)

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 1)x = 2m^2 + m + 2$. (2)

- Với $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0.x = 5$. Điều này vô lí, phương trình đã cho vô nghiệm.

- Với $m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{m^2 + 2 + m}{m - 1}$.

Bài 3. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 2 = x + 2m$. (1)

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 1)x = 2m - 2$. (2)

- Với $m \neq \pm 1$, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2m - 2}{m^2 - 1} = \frac{2}{m + 1}$.
- Với $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0.x = 0$. Phương trình đúng với mọi số thực x .
- Với $m = -1$, phương trình (2) trở thành $0.x = -4$. Điều này vô lí nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 4. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 1 = (m - 1)x + m$. (1).

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - m + 1)x = m - 1$. (2).

Vì $m^2 - m + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình (2) luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{m - 1}{m^2 - m + 1}$.

Bài 5. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$. (1).

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 4)x = 3m - 6$. (2).

- Với $m \neq \pm 2$, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m - 6}{m^2 - 4} = \frac{3}{m + 2}$.
- Với $m = 2$, phương trình (2) trở thành $0 \cdot x = 0$. Phương trình đúng với mọi số thực x .
- Với $m = -2$, phương trình (2) trở thành $0 \cdot x = -12$. Điều này vô lí nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$ (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} .

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^3 - 4m)x = 2m + m^2$. (2).

Phương trình (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm là \mathbb{R} . Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m^3 - 4m = 0 \\ 2m + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Bài 7. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} .

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 2)x = m^2 - 3m + 2$. (2).

Phương trình (1) có tập nghiệm là \mathbb{R} khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm là \mathbb{R} . Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Bài 8. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 2)x = m^2 - 3m + 2$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Bài 9. Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m + 3)(x - m) = 2(x - 2)$ (1) vô nghiệm.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m + 1)x = m^2 + 3m - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m + 1 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 1 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Bài 10. Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m - 1)^2x = 4x + m + 1$ (1) vô nghiệm.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 + 2m - 3)x = m + 1$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Bài 11. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x - 1) = 2(mx - 2)$ (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 2m)x = m^2 - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Bài 12. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x - 1) = -4(mx + 1)$ (1) có nghiệm dương duy nhất.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 + 4m)x = m^2 - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm dương duy nhất.

$$\text{Điều này xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 + 4m \neq 0 \\ \frac{m^2 - 4}{m^2 + 4m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq 0 \end{cases} \quad m^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Giải và biện luận phương trình $(x - 1)(x - mx + 2) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = 1 \\ (1 - m)x = -2 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 1$, phương trình (*) trở thành $0 \cdot x = -2$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m = 3$, phương trình (*) trở thành $-2x = -2$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m \neq 1$ và $m \neq 3$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{1 - m} \neq 1$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{2}{1 - m}$.

Bài 14. Giải và biện luận phương trình $(x^2 - 4)(mx - 3) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ mx = 3 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 0$, phương trình (*) trở thành $0 \cdot x = 3$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = -\frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $-\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m \neq \pm 2$ và $m \neq 0$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{3}{m} \neq \pm 2$. Do đó, phương trình (1) có ba nghiệm $x = \pm 2$ và $x = -\frac{3}{m}$.

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn là phải tìm cách làm mất dấu căn. Có các phương pháp thường dùng như: bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, đưa phương trình về dạng tích, ...

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Thiết lập điều kiện rồi sau đó bình phương hai vế.

$$\bullet \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Nhiều phương trình, việc bình phương không thể làm mất hết căn hoặc lại đưa về những phương trình bậc cao hơn hai. Những câu như vậy ta không nên bình phương hai vế mà nên sử dụng phương pháp khác.

Sau đây là một số dạng hay gặp trong đặt ẩn phụ:

$$\bullet af(x) + b\sqrt{f(x)} = c. \text{ Đặt } \sqrt{f(x)} = t.$$

$$\bullet a(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}) + b\sqrt{A \cdot B} = c \text{ (A, B là biểu thức của } x). \text{ Đặt } \sqrt{A} \pm \sqrt{B} = t \Rightarrow \sqrt{A \cdot B} = \dots \text{ (Bình phương } t \text{ để đưa ra } \sqrt{A \cdot B}).$$

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Nếu phương trình đưa được về tích ta có thể chuyển về các phương trình dễ giải hơn. Chúng ta có thể thực hiện theo một trong những hướng sau:

• Ghép nhóm tạo ra nhân tử chung.

$$\bullet \text{Biến đổi liên hợp } \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}.$$

• Khi nhầm được nghiệm thì thêm bớt hệ số để liên hợp tạo ra nhân tử chung.

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

$$\text{Ví dụ 5. Giải phương trình } \sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}.$$

Lời giải.

$$\sqrt{2x-4} = \sqrt{x^2-3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 = x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$.

$$\text{Ví dụ 6. Giải phương trình } \sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1.$$

Lời giải.

$$\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+5 = (3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$.

Lời giải. Phân tích: 2 vế không âm nên ta có thể bình phương được, bình phương sẽ mất dần số lượng căn đi.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3 \text{ (ĐK: } x \geq \frac{1}{2}\text{)} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1})^2 = 9 \\ \Leftrightarrow & 3x+2 + 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 9 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 7-3x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 4(2x^2+5x-3) = (7-3x)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ x^2-62x+61=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ \begin{cases} x=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (TMĐK)} \\ x=61 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6}$.

Lời giải. $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+3 = 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm $x = -1; x = 3$.

Bài 16. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2} = x+1$.

Lời giải. $\sqrt{2x^2+2} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2+2 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1$.

Bài 17. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -3$. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+10x+3} = 6-2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^2+10x+3 = (6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (tmđk)}$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1$.

Bài 18. Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2$.

Lời giải. ĐK: $\frac{-3}{2} \leq x \leq 4$.

$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{4-x} + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{4-x} = 3x-5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 16(4-x) = (3x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$

Phương trình có 1 nghiệm $x = 3$.

Bài 19. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 2} = 2$.

Lời giải. ĐK: $x^2 + 2x - 2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 2} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{x^2 + 2x - 2} + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x - 2 + 4 + 4\sqrt{x^2 + 2x - 2} &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2x - 2} = x + 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 2 = (x + 1)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Phương trình có 1 nghiệm $x = 1$.

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 8. Giải phương trình $2x^2 - 2x + \sqrt{(x+1)(x-2)} = 14$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{(x+1)(x-2)} = t$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow x^2 - x - 2 = t^2 \Rightarrow x^2 - x = t^2 + 2$.

Vậy ta có phương trình:

$$2(t^2 + 2) + t = 14 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{5}{2} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x+1)(x-2)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = -2; x = 3$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 3$.

Lời giải. ĐK: $1 \leq x \leq 3$ Đặt $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = t$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$)

$$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \frac{t^2 - 2}{2}.$$

Khi đó ta có phương trình:

$$t + \frac{t^2 - 2}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó ta có $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{x+3} = 4$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -3$.

Đặt $\sqrt[3]{x+7} = a; \sqrt{x+3} = b$ ($b \geq 0$)

Ta có hệ

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 - b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^3 - (4 - a)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^3 - a^2 + 8a - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ (a - 2)(a^2 + a + 10) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Vậy $\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 20. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2x^2 + 2x - 2$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2} (t \geq 0)$ có phương trình:

$$t = 2t^2 - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1; x = -2$.

Bài 21. Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2x^2 + 2x - 10$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{(x-1)(x+2)} = t (t \geq 0)$ thì $x^2 + x = t^2 + 2$ ta có phương trình

$$t = 2(t^2 + 2) - 10 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x-1)(x+2)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 2; x = -3$

Bài 22. Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2} = 5$.

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq 1$ Đặt $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = t (\sqrt{2} \leq t \leq 2)$ thì $\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 2}{2}$ khi đó ta có phương trình

$$t + 3 \frac{t^2 - 2}{2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{8}{3} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài 23. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 8$.

Lời giải. ĐK: $x \geq 2$.

Đặt $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = t (t \geq 0)$ thì $x + \sqrt{x^2 - x - 2} = \frac{t^2 + 1}{2}$ ta có

$$t + \frac{t^2 + 1}{2} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 5 - x \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Bài 24. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 5$.

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{x-1} = a; \sqrt{x+2} = b (b \geq 0)$ ta có hệ

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 3$.

Lời giải. ĐK: $1 \leq x \leq 3$.

$$\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) + (3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) - \sqrt{3-x}(\sqrt{x-1} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3)(\sqrt{3-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 3 \\ \sqrt{3-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10(\text{loại}) \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x - 4$.

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} &= x^2 - 3x - 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x+3 - 2x+1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} &= (x-4)(x+1) \\ \Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} &= (x-4)(x+1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{-1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} = x+1(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì với $x \geq \frac{1}{2}$ thì $VT < 0 < VP$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Lời giải. Phân tích: Ta nhận được một nghiệm của phương trình là $x = 3$ và nếu tại $x = 3$ thì $\sqrt{x-2}$ là 1 nên nếu ta trừ nó cho 1 thì sẽ tạo được nhân tử $x - 3$

. ĐK: $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1) + x^2 - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x = 0(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) với điều kiện $x \geq 2$ thì phương trình (2) có $VT > 0$ nên (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Giải phương trình $-\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Lời giải. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1+x}-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình có nghiệm $x = 0$.

Bài 26. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0$

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2) + (\sqrt{2x-1}-1) + x^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x+1 \right) &= 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Bài 27. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -3$

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+3} = 3(x^3 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \frac{x}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3}} = 3(x-1)(x^2+x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3} = 3(x^2+x+1)(2) \end{cases}$$

Thấy phương trình (2) vô nghiệm vì $VT \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq VP$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Dạng 3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là phải tìm cách làm mất dấu giá trị tuyệt đối. Các phương pháp thường dùng là: biến đổi tương đương, chia khoảng trên trục số, ...

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

Với $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số. Khi đó

$$\begin{aligned} |f(x)| = g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases} \\ |f(x)| = |g(x)| &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \\ |f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| &\Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Phương pháp 2. Chia khoảng trên trục số

Ta lập bảng xét dấu của các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối rồi xét các trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Một số cách khác

- Đặt ẩn phụ.
- Sử dụng bất đẳng thức ta so sánh $f(x)$ và $g(x)$ từ đó tìm nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.
- Sử dụng đồ thị cần chú ý số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Phương pháp này thường áp dụng cho các bài toán biện luận nghiệm.

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

Ví dụ 14. Giải phương trình sau $|2x-3| = 5-x$.

Lời giải. Phương trình $|2x-3| = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ \begin{cases} 2x-3 = 5-x \\ 2x-3 = -(5-x) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{8}{3}$ và $x = -2$.

Ví dụ 15. Giải phương trình $|x-2| = |3x+2|$.

Lời giải. Phương trình $|x-2| = |3x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3x+2 \\ x-2 = -(3x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 0$.

Ví dụ 16. Giải phương trình $|x-2| + |x+2| = |2x|$.

Lời giải. Phương trình $|x-2| + |x+2| = |2x| \Leftrightarrow |x-2| + |x+2| = |x-2+x+2| \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Giải phương trình $|x-3| = 2x+4$.

Lời giải. Ta có $|x-3| = 2x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x-3 = 2x+4 \\ x-3 = -2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = -7 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = -\frac{1}{3}$.

Bài 29. Giải phương trình $|x+1| = |3x-1|$.

Lời giải. Ta có $|x+1| = |3x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3x-1 \\ x+1 = -3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 0$.

Bài 30. Giải phương trình sau $|3x-6| = 2x+1$.

Lời giải. Phương trình $|3x-6| = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ 3x-6 = 2x+1 \\ 3x-6 = -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x = 7 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 7$ và $x = 1$

Bài 31. Giải phương trình $|x-1| + |2x+1| = |3x|$.

Lời giải. Phương trình $|x-1| + |2x+1| = |3x| \Leftrightarrow |x-1| + |2x+1| = |x-1+2x+1| \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Bài 32. Giải phương trình $|3x-5| + |2x-1| = |-5x+6|$.

Lời giải. Phương trình $|3x-5| + |2x-1| = |-5x+6| \Leftrightarrow |3x-5| + |2x-1| = |5x-6| = |3x-5+2x-1| \Leftrightarrow$

$$(3x-5)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Bài 33. Giải và biện luận phương trình $|x-2m| = x+m$.

Lời giải. Phương trình $|x-2m| = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x+m \geq 0 \\ x-2m = x+m \\ x-2m = -x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ 3m = 0 \\ x = \frac{3m}{2} \end{cases}.$

Với $x = \frac{3m}{2} \geq -m \Rightarrow m \geq 0$.

Kết luận:

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $m = 0$ phương trình có tập nghiệm $S = [0; +\infty)$.

Với $m > 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m}{2}$.

Phương pháp 2. Chia khoảng trên trục số

Ví dụ 17. Giải phương trình $|x - 2| = 2x - 1$.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp

TH1: Với $x \geq 2$ phương trình trở thành $x - 2 = 2x - 1 \Rightarrow x = -1 < 2$ (loại).

TH2: Với $x < 2$ phương trình trở thành $-x + 2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 1 < 2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 18. Giải phương trình $|x - 2| + |3x - 9| = |x + 1|$.

Lời giải. Lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$x - 2$	-	-	0	+	+
$3x - 9$	-	-	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	+	+

Khi đó ta xét từng trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối như sau:

TH1: Với $x < -1$ phương trình trở thành

$$-(x - 2) - (3x - 9) = -(x + 1) \Leftrightarrow x = 4 > -1 \Rightarrow \text{loại.}$$

TH2: Với $-1 \leq x < 2$ phương trình trở thành

$$-(x - 2) - (3x - 9) = x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \text{loại.}$$

TH3: Với $2 \leq x < 3$ phương trình trở thành

$$x - 2 - (3x - 9) = x + 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

TH4: Với $x \geq 3$ phương trình trở thành

$$x - 2 + 3x - 9 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 4$.

Ví dụ 19. Biện luận số nghiệm của phương trình $|2x - 4m| = 3x + 2m$.

Lời giải. Ta sẽ xét từng trường hợp để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x \geq 2m$ thì phương trình trở thành

$$2x - 4m = 3x + 2m \Rightarrow x = -6m \text{ vì } x \geq 2m \Rightarrow -6m \geq 2m \Rightarrow m \leq 0$$

Vậy với $m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -6m$.

TH2: Với $x < 2m$ thì phương trình trở thành

$$-2x + 4m = 3x + 2m \Rightarrow x = \frac{2m}{5} \text{ vì } x < 2m \Rightarrow \frac{2m}{5} < 2m \Rightarrow m > 0$$

Vậy $m > 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{2m}{5}$.

Kết luận: Với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì phương trình có một nghiệm.

Bài 34. Giải phương trình $|3x - 2| = x + 1$.

Lời giải. **TH1:** Với $x \geq \frac{2}{3}$ phương trình trở thành $3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

TH2: Với $x < \frac{2}{3}$ phương trình trở thành $-3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{1}{4}$.

Bài 35. Giải phương trình $|2x - 1| = |x + 2| + |x - 1|$.

Lời giải. Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x - 1$	-	-	0	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+

Từ đó ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x < -2$ phương trình trở thành $-2x + 1 = -x - 2 - x + 1 \Leftrightarrow 0 = -3 \Rightarrow$ loại.

TH2: Với $-2 \leq x < \frac{1}{2}$ phương trình trở thành $-2x + 1 = x + 2 - x + 1 \Leftrightarrow x = -1$.

TH3: Với $\frac{1}{2} \leq x < 1$ phương trình trở thành $2x - 1 = x + 2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 2 > 1 \Rightarrow$ loại.

TH4: Với $x \geq 1$ phương trình trở thành $2x - 1 = x + 2 + x - 1 \Leftrightarrow -1 = 1 \Rightarrow$ loại.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$.

Bài 36. Giải phương trình $|x^2 - 3x + 2| + |3x - 6| = 2$.

Lời giải. Ta lập bảng xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+
$3x - 6$	-	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

TH1: Với $x < 1$ phương trình trở thành

$$x^2 - 3x + 2 - 3x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{3} \\ x = 3 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

TH2: Với $1 \leq x < 2$ phương trình trở thành $-x^2 + 3x - 2 - 3x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$ kết hợp với

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

TH3: Với $x \geq 2$ phương trình trở thành $x^2 - 3x + 2 + 3x - 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ x = \sqrt{6} \end{cases}$ kết hợp với

$$x \geq 2 \Rightarrow x = \sqrt{6}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \sqrt{2}$ và $x = \sqrt{6}$.

Bài 37. Giải phương trình $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| = x+5$.

Lời giải. Điều kiện $x \neq 1$. Ta lập bảng xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối, có $2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ và $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$\frac{2x-1}{x-1}$		+	0	-	0	+

Bài 38. Giải phương trình $|3x-2| + |x^2-3x+2| = |x-2| + |x-1|$.

Lời giải. Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} 3x-2=0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \\ x^2-3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	2	$+\infty$		
$3x-2$		-	0	+	+	+	
x^2-3x+2		+	+	0	-	0	+
$x-2$		-	-	-	0	+	
$x-1$		-	-	0	+	+	

Từ bảng xét dấu ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x < \frac{2}{3}$ phương trình trở thành

$$-3x+2+x^2-3x+2 = -x+2-x+1 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{cases} \text{ kết hợp với } x < \frac{2}{3} \Rightarrow x=2-\sqrt{3}.$$

Tương tự xét đối với các trường hợp còn lại ta được phương trình có hai nghiệm là $x=2-\sqrt{3}$ và $x=1$.

Bài 39. Giải phương trình $\frac{|2x+4|-3|x|}{|x-2|+x-1} = 4$.

Lời giải. Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có

Bài 40. Biện luận số nghiệm các phương trình $|3x-4m| = x+m$.

Lời giải. TH1: Với $x < \frac{4m}{3}$ thì phương trình trở thành $3x-4m = x+m \Leftrightarrow x = \frac{5m}{2}$ kết hợp với $x < \frac{4m}{3} \Rightarrow \frac{5m}{2} < \frac{4m}{3} \Leftrightarrow m < 0$.

TH2: Với $x \geq \frac{4m}{3}$ thì phương trình trở thành $-3x+4m = x+m \Leftrightarrow x = \frac{3m}{4}$ kết hợp với $x \geq \frac{4m}{3} \Rightarrow \frac{3m}{4} \geq \frac{4m}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{12}m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết luận: Vậy phương trình đã cho luôn có duy nhất một nghiệm.

Một số cách khác

Ví dụ 20. Giải phương trình $|x^2 - 4x + 2| = 2x^2 - 8x + 3$.

Lời giải. Ta có $|x^2 - 4x + 2| = 2x^2 - 8x + 3 \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 2| = 2(x^2 - 4x + 2) - 1 \Rightarrow$ đặt $t = x^2 - 4x + 2$. Khi đó, phương trình trở thành

$$|t| = 2t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} t = 2t - 1 \\ t = -2t + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} t = 1 \Rightarrow t = 1. \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2 + \sqrt{3}$ và $x = 2 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 21. Biện luận số nghiệm của phương trình $|x| + |x - 2| = m$.

Lời giải. Trước hết ta vẽ đồ thị hàm số $y = |x| + |x - 2|$ lập bảng xét dấu

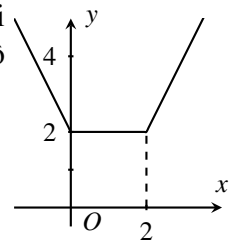
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x		-	0	+
$x - 2$		-	0	+

Từ đó vẽ đồ thị ứng với mỗi khoảng trong bảng xét dấu ta được đồ thị hình bên. Khi đó, số nghiệm của phương trình $|x| + |x - 2| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x| + |x - 2|$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Với $m < 2$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $m = 2$ thì phương trình có tập nghiệm $S = [0; 2]$.

Với $m > 2$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.



Ví dụ 22. Giải phương trình $|x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 = 1$.

Lời giải. Ta thấy $x = 2016$ hoặc $x = 2017$ là nghiệm của phương trình.

TH1: Với $x < 2016 \Rightarrow x - 2017 < -1 \Rightarrow |x - 2017| > 1 \Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 > 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $x < 2016$.

TH2: Với $2016 < x < 2017 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - 2016 < 1 \\ -1 < x - 2017 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2016|^4 < |x - 2016| < x - 2016 \\ |x - 2017|^5 < |x - 2017| < 2017 - x \end{cases}$

$\Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 < x - 2016 + 2017 - x = 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $2016 < x < 2017$.

TH3: Với $x > 2017 \Rightarrow x - 2016 > 1 \Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 > 1$

\Rightarrow phương trình không có nghiệm $x > 2017$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2016$ và $x = 2017$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 41. Giải phương trình $|2x^2 - 4x + 3| = |x^2 - 3x + 1|$.

Lời giải. Phương trình $|2x^2 - 4x + 3| = |x^2 - 3x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 3x - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 = 0 \\ 3x^2 - 7x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{4}{3}$.

Bài 42. Giải phương trình $|5 - |2x - 1|| = 3$.

Lời giải. Đặt $t = |2x - 1|$ với $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$|5 - t| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - t = 3 \\ 5 - t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 8 \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow |2x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Với $t = 8 \Rightarrow |2x - 1| = 8 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 8 \\ 2x - 1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$

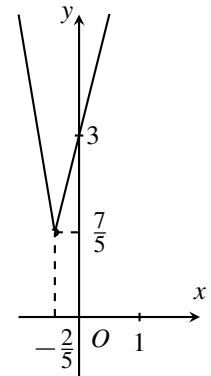
Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{9}{2} \right\}$.

Bài 43. Biện luận số nghiệm của phương trình $|5x + 2| + |x - 1| = m$

Lời giải. Trước tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = |5x + 2| + |x - 1|$ bằng cách lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	1	$+\infty$
$5x - 2$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+

Từ đó vẽ đồ thị ứng với mỗi khoảng trong bảng xét dấu ta được đồ thị hình bên. Khi đó, số nghiệm của phương trình $|5x + 2| + |x - 1| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |5x + 2| + |x - 1|$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị ta thấy:



Với $m < \frac{7}{5}$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $m = \frac{7}{5}$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm.

Với $m > \frac{7}{5}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 44. Giải phương trình $|x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} = 1$.

Lời giải. Ta thấy $x = 2017$ hoặc $x = 2018$ là nghiệm của phương trình.

TH1: Với $x < 2017 \Rightarrow x - 2018 < -1 \Rightarrow |x - 2018| > 1 \Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} > 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $x < 2017$.

TH2: Với $2017 < x < 2018 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - 2017 < 1 \\ -1 < x - 2018 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2017|^{2018} < |x - 2017| < x - 2017 \\ |x - 2018|^{2017} < |x - 2018| < 2018 - x \end{cases}$
 $\Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} < x - 2017 + 2018 - x = 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $2017 < x < 2018$.

TH3: Với $x > 2018 \Rightarrow x - 2017 > 1 \Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} > 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm $x > 2018$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2017$ và $x = 2018$.

Bài 45. Giải phương trình $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| = 100x$.

Lời giải. Ta có $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| \geq 0 \Rightarrow |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| = 100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$x + 1 + x + 2 + x + 3 + \dots + x + 99 = 100x \Leftrightarrow 99x + 4950 = 100x \Rightarrow x = 4950$.
 Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4950$

Dạng 4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương trình bậc bốn trùng phương

Loại 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

- Đặt điều kiện xác định của phương trình.
- Biến đổi phương trình đã cho về phương trình bậc nhất, bậc hai đã biết cách giải.
- Chọn nghiệm thỏa điều kiện xác định của phương trình.

\triangle Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta phải chú ý điều kiện xác định của phương trình.

Loại 2. Phương trình trùng phương

Để giải phương trình trùng phương dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) ta đặt $t = x^2 \geq 0$ để đưa về phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$ (*').

- Nếu phương trình (*') vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm thì phương trình (*) vô nghiệm.
- Nếu phương trình (*') có nghiệm $t = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm $x = 0$.
- Nếu phương trình (*') có một nghiệm $t = t_0 > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.

Loại 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ 23. Giải phương trình $\frac{x^2 + 3x + 4}{2x - 1} = \frac{x + 1}{2}$.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho thành $2(x^2 + 3x + 4) = (x + 1)(2x - 1) \Leftrightarrow 5x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}$.

So điều kiện ta nhận $x = -\frac{9}{5}$.

Ví dụ 24. Giải phương trình $\frac{5x - 3}{3x + 5} = \frac{2x - 5}{x - 1}$.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq -\frac{5}{3}, x \neq 1$.

Phương trình đã cho thành $(5x - 3)(x - 1) = (2x - 5)(3x + 5) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -7 \end{cases}$.

So điều kiện ta nhận $x = -7, x = 4$.

Ví dụ 25. Giải phương trình $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$ (*).

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \notin \{-7, -6, -5, -4\}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

So điều kiện ta nhận $x = -13, x = 2$.

Ví dụ 26. Giải và biện luận phương trình $\frac{(3m-2)x-4}{x-1} = 2m+3$.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq 1$.

Phương trình đã cho thành $(3m-2)x-4 = (2m+3)(x-1) \Leftrightarrow (m-5)x = 1-2m$.

Với $m = 5$ phương trình cuối thành $0x = -9$ vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m \neq 5$ thì $(m-5)x = 1-2m \Leftrightarrow x = \frac{1-2m}{m-5}$. Nghiệm này thỏa mãn điều kiện của phương trình đã cho

khi và chỉ khi $\frac{1-2m}{m-5} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Kết luận:

+ Với $m = 5$ hoặc $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $m \neq 5$ và $m \neq 2$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1-2m}{m-5}$.

Ví dụ 27. Tìm m để phương trình $\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$ vô nghiệm.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq m-1, x \neq -m-2$.

Phương trình đã cho thành $(x+1)(x+m+2) = x(x-m+1) \Leftrightarrow 2(m+1)x = -m-2$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $m = -1$ thì $2(m+1)x = -m-2$ thành $0x = -1$ (vô nghiệm), nên $m = -1$ nhận.

+ Với $m \neq -1$ thì $2(m+1)x = -m-2 \Leftrightarrow x = \frac{-m-2}{2(m+1)}$. Kiểm tra điều kiện:

$$\begin{cases} x \neq m-1 \\ x \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq m-1 \\ \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Vậy với $m \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 46. Giải phương trình $\frac{2x^2+3x-1}{x+3} = \frac{4x-5}{2}$.

Lời giải. Điều kiện $x \neq -3$.

Biến đổi phương trình ta được nghiệm $x = 13$ thỏa điều kiện.

Bài 47. Giải phương trình $\frac{2x^2 - 2}{2x + 1} + \frac{x + 2}{2x + 1} = 2$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq -\frac{1}{2}$.

Biến đổi phương trình thành $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

So điều kiện ta nhận $x = 2$.

Bài 48. Giải phương trình $\frac{3x^2 - x - 2}{\sqrt{3x - 2}} = \sqrt{3x - 2}$.

Lời giải. Điều kiện $x > \frac{2}{3}$.

Biến đổi phương trình thành $3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$.

So điều kiện ta nhận $x = \frac{4}{3}$.

Bài 49. Giải và biện luận phương trình $\frac{2mx - m^2 + m - 2}{x^2 - 1} = 1$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình thành $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$.

Phương trình có biệt thức $\Delta' = m - 1$.

Với $m < 1$ phương trình cuối vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m = 1$ phương trình cuối có nghiệm $x = 1$ (loại) nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m > 1$ phương trình cuối có nghiệm $x = m \pm \sqrt{m - 1}$.

• TH1: $f(1) = m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = 2$.

• TH2: $f(-1) = m^2 + m + 2 \neq 0 \forall m$.

Kết luận:

+ $m \leq 1$ hoặc $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

+ $1 < m \neq 2$ phương trình có hai nghiệm $x = m \pm \sqrt{m - 1}$.

Bài 50. Tìm m để phương trình $\frac{3x - m}{\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x - 2}}$ có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện $x > 2$.

Biến đổi phương trình thành $3x - m + x - 2 = 2x + 2m - 1 \Leftrightarrow 2x = 3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3m + 1}{2}$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\frac{3m + 1}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 1$.

Loại 2. Phương trình trùng phương

Ví dụ 28. Giải phương trình $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = \frac{5}{2}$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = \frac{5}{2}$ thì $x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Ví dụ 29. Giải phương trình $(1 - \sqrt{2})x^4 + 2x^2 - 1 - \sqrt{2} = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $(1 - \sqrt{2})t^2 + 2t - 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

Với $t = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ thì $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}$.

Ví dụ 30. Tìm m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$.

Phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \neq 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 51. Giải phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ phương trình thành $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 4$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bài 52. Giải phương trình $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 13t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 9, t = 4$.

Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bài 53. Giải phương trình $x^4 + 24x^2 - 25 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 + 24t - 25 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -25$. Nghiệm $t = 1$ nhận, còn nghiệm $t = -25 < 0$ nên loại.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bài 54. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 3m + 1$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = 3m + 1$ thì $x^2 = 3m + 1$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình $x^2 = 3m + 1$ có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và nhỏ hơn 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Bài 55. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - (m^2 + 10)t + 9 = 0$.

Phương trình $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khi và chỉ khi phương trình $t^2 - (m^2 + 10)t + 9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \text{ (luôn thỏa với mọi)} \\ S > 0 \end{cases}$

giá trị tham số m).

Nhận xét rằng nếu x là nghiệm của phương trình thì $-x$ cũng là nghiệm nên $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 16$.

Theo định lý Vi-et thì $t_1 + t_2 = m^2 + 10, t_1 t_2 = 9$.

Do đó ta được $m^2 + 10 = 10 \Leftrightarrow m = 0$.

Dạng 5. Biến luận theo m có áp dụng định lí Viète**Định lí Viète**

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Ví dụ 31. Biết phương trình $x^2 + 2mx - 12 = 0$ có một nghiệm $x_1 = 3$. Tìm m và nghiệm còn lại.

Lời giải.

- Thay $x_1 = 3$ vào phương trình ta được

$$9 + 6m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

- Theo định lí Viète, ta có $x_1 x_2 = -12 \Rightarrow x_2 = -4$.

Ví dụ 32. Biết phương trình $x^2 - x + m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ và $x_2 - x_1 = 5$. Tìm m .

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3. \end{cases}$

Do đó $x_1 x_2 = m - 7 = -6 \Leftrightarrow m = 1$.

Ví dụ 33. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = x_1^3 + x_2^3$.

Lời giải. Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -4. \end{cases}$

a) $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 + 8$.

b) $B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (2m)^3 - 3 \cdot (-4) \cdot (2m) = 8m^3 + 24m$.

Ví dụ 34. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1).

- có hai nghiệm trái dấu.
- có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

- Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ 2(m - 1) > 0 \\ (m - 1)(m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 56. Tìm m để phương trình $x^2 - 9x + m = 0$ có một nghiệm là -3 . Khi đó tìm nghiệm còn lại.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} -3 + x_2 = 9 \\ (-3) \cdot x_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 12 \\ m = -36. \end{cases}$

Bài 57. Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1).

- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.
- Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Lời giải.

- Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -m + 6 < 0 \Leftrightarrow m > 6$.
- Ta có $x = -2$ là nghiệm của phương trình (1) nên

$$(-2)^2 - (m + 5) \cdot (-2) - m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -20.$$

Với $m = -20$ thay vào phương trình (1) ta được

$$x^2 + 15x + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -13. \end{cases}$$

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 1 > 0 \quad (*).$$

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = -m + 6. \end{cases}$ Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 + 12m + 13$.

Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 13 = 13 \Leftrightarrow m^2 + 12m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & \text{(thỏa mãn (*))} \\ m = -12 & \text{(không thỏa mãn (*))}. \end{cases}$$

Vậy $m = 0$.

Bài 58. Cho phương trình $mx^2 - 6(m - 1)x + 9(m - 3) = 0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

Lời giải. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1. \end{cases}$

Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6(m - 1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{9(m - 3)}{m}. \end{cases}$ Khi đó

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{6(m - 1)}{m} = \frac{9(m - 3)}{m} \Leftrightarrow m = 7.$$

Bài 59. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m + 3 = 0$ (1).

- a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
 b) Với các giá trị m trong câu a). Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

Lời giải.

a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-1)(m+3) > 0 \end{cases} \begin{cases} m \neq 1 \\ m < \frac{7}{6} \end{cases}$$

b) Theo định lí Viète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-2}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} & (*) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m+3}{m-1} = 1 + \frac{4}{m-1} & (**). \end{cases}$$

Từ (*) suy ra $\frac{1}{m-1} = x_1 + x_2 - 1$. Do đó

$$x_1 \cdot x_2 = 1 + 4(x_1 + x_2 - 1) \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - 4(x_1 + x_2) + 3 = 0.$$

Bài 60. Cho phương trình $mx^2 + 2(m-4)x + m + 7 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$.

Lời giải. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{16}{15} \end{cases}$ (*).

Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(m-4)}{m} & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m+7}{m} & (2). \end{cases}$

Kết hợp (1) với điều kiện $x_1 - 2x_2 = 0$ suy ra $x_1 = \frac{-4m+16}{3m}, x_2 = \frac{-2m+8}{3m}$.

Thay vào (2) ta được

$$m^2 + 127m - 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{thỏa mãn } (*)) \\ m = -128 & (\text{thỏa mãn } (*)). \end{cases}$$

Bài 61. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + m$ có đồ thị (P) . Tìm m để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA = 5OB$.

Lời giải. Ta có (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt
 \Leftrightarrow phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ (*) có hai nghiệm phân biệt.
 $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*) và tọa độ các điểm là $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$.

Theo định lí Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m & (2). \end{cases}$

Ta có $OA = 5OB \Leftrightarrow |x_1| = 5|x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_1 = -5x_2. \end{cases}$

- Với $x_1 = 5x_2$. Kết hợp với (1) suy ra $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$. Thay vào (2) ta được $m = \frac{5}{9}$.

- Với $x_1 = -5x_2$. Kết hợp với (1) suy ra $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Thay vào (2) ta được $m = -\frac{5}{4}$.

Vậy các giá trị thỏa mãn bài toán là $m = \frac{5}{9}$, $m = -\frac{5}{4}$.

Bài 62. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 24. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải. Gọi chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là x và y ($x > 0$, $y > 0$) và diện tích của hình chữ nhật là S ($S > 0$). Khi đó

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = S. \end{cases}$$

Do đó, x và y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 12X + S = 0$. Vì phương trình phải có nghiệm nên ta có

$$\Delta' = 36 - S \geq 0 \Leftrightarrow S \leq 36.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow x = y = 6$.

Vậy $\max S = 36$ (đvdt), khi đó hình chữ nhật là hình vuông có cạnh bằng 6.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 63. Giải và biện luận phương trình $(x - 1)(x - mx + 2) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = 1 \\ (1 - m)x = -2 \quad (*) \end{cases}$$

- Với $m = 1$, phương trình (*) trở thành $0 \cdot x = -2$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m = 3$, phương trình (*) trở thành $-2x = -2$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m \neq 1$ và $m \neq 3$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{1 - m} \neq 1$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{2}{1 - m}$.

Bài 64. Giải và biện luận phương trình $(x^2 - 4)(mx - 3) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ mx = 3 \quad (*) \end{cases}$$

- Với $m = 0$, phương trình (*) trở thành $0 \cdot x = 3$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = -\frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $-\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m \neq \pm 2$ và $m \neq 0$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{m} \neq \pm 2$. Do đó, phương trình (1) có ba nghiệm $x = \pm 2$ và $x = \frac{3}{m}$.

Bài 65. Giải phương trình $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2-x+1} = b$ ta có $2(a^2 + b^2) = 5ab \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = \frac{1}{2}b \end{cases}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

Bài 66. Giải phương trình $\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 2$

Lời giải. $\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow (x+2) + \sqrt{x+2} - (x^2-x) = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x+2}$ ta có $t^2 + t - (x^2-x) = 0$, coi đây là phương trình ẩn t và có tham số x , sử dụng $\Delta = (2x-1)^2$ thì ta có:

$$\begin{cases} t = -x \\ t = x-1 \end{cases} \text{ hay ta có}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} = -x \\ \sqrt{x+2} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Bài 67. Giải phương trình $\sqrt{2+x} = \frac{-x^2-x+2}{x}$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -2, x \neq 0$

$$\sqrt{2+x} = \frac{-x^2-x+2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{2+x} - (x+1) = \frac{-x^2-x+2}{x} - (x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-x+1}{\sqrt{2+x}+(x+1)} = 2 \frac{-x^2-x+1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-x+1=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2+x}+(x+1)} = \frac{2}{x} \\ 2\sqrt{2+x} = -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 68. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2x+5} + \sqrt{2x^2-2x+25} = \sqrt{8x^2+8}$.

Lời giải. $\sqrt{2x^2+2x+5} + \sqrt{2x^2-2x+25} = \sqrt{8x^2+8}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(x+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2+(x-4)^2} = \sqrt{(2x+2)^2+(2x-2)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức khoảng cách $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$ ta có

VT \geq VP; vậy phương trình xảy ra khi dấu bằng xảy ra hay tức là:

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{x+2}{x-4} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{5}$$

Bài 69. Giải phương trình $|3|x-2|-9|-2|6-|3x-6|| = 5$.

Lời giải. Đặt $t = |x-2|$ với $t \geq 0$ khi đó phương trình trở thành $|3t-9|-2|6-3t| = 5$. Ta lập bảng xét dấu của phương trình này. Có $3t-9=0 \Rightarrow t=3$ và $6-3t=0 \Rightarrow t=2$.

Bảng xét dấu

t	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$3t-9$	-	-	0	+
$6-3t$	+	0	-	-

TH1: Với $t < 2$ phương trình trở thành

$$-3t + 9 - 2(6 - 3t) = 5 \Leftrightarrow -3t + 9 - 12 + 6t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{8}{3} > 2 \text{ (loại)}.$$

TH2: Với $2 \leq t < 3$ phương trình trở thành

$$-3t + 9 + 12 - 6t = 5 \Leftrightarrow -9t = -16 \Rightarrow t = \frac{16}{9} < 2 \text{ (loại)}.$$

TH3: Với $t \geq 3$ phương trình trở thành

$$3t - 9 + 12 - 6t = 5 \Leftrightarrow -3t = 2 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} < 3 \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 70. Tìm các số nguyên a để phương trình $ax^2 - (a+3)x + a + 2 = 0$ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

○ Với $a = 0$ phương trình trở thành: $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

○ Với $a \neq 0$ khi đó để phương trình có nghiệm nguyên điều kiện cần là:

$\Delta = (a+3)^2 - 4a(a+2) = -3a^2 - 2a + 9$ là một số chính phương, tức là: $-3a^2 - 2a + 9 = k^2, k \in \mathbb{Z}$. Khi

$$\text{đó điều kiện của } a \text{ là: } \begin{cases} \frac{-1-2\sqrt{7}}{3} < a < \frac{-1+2\sqrt{7}}{3} \\ a \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Thay lần lượt các giá trị của a vào Δ và phương trình ban đầu ta tìm được: $a = -2; a = 1$ thỏa mãn.

Kết luận: Có 2 giá trị $a = -2$ và $a = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 71. Giải và biện luận phương trình: $\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} ax-1 \neq 0 \\ bx-1 \neq 0 \\ (a+b)x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 \\ bx \neq 1 \\ (a+b)x \neq 1 \end{cases} \quad (I).$

Phương trình được viết lại thành: $abx[(a+b)x-2] = 0$ (*).

○ Nếu $a = b = 0$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

○ Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{b}$.

○ Nếu $\begin{cases} b=0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$.

Khi đó phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{a}$.

○ Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a+b=0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$ và $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

○ Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}; x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a+b}$.

Khi đó phương trình có nghiệm $x = 0$ và nghiệm $x = \frac{2}{a+b}$ nếu $a \neq b$.

Bài 72. Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

Lời giải.

○ Với $x = 0$ phương trình trở thành $2 = 0$. Vậy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

○ Với $x \neq 0$. Chia cả hai vế cho x^2 ta được phương trình:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2$.

Khi đó phương trình trở thành: $2(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} (L)$.

Với $t = 2$ ta có phương trình: $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 73. Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3^2(x+4)(x+5)) = 360$.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360$.

Đặt $t = x^2 + 6x$, $t \geq -9$. Ta được phương trình:

$(t+5)(t+8)(t+9) - 360 = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 22t + 157) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Với $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0; -6\}$.

Bài 74. Giải phương trình: $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.

Lời giải.

○ Đặt $y = \sqrt[3]{3x-2}$. Khi đó phương trình chuyển thành hệ: $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 = 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = -3(x-y)$.

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào hệ ta được phương trình: $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; -2\}$.

Bài 75. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 3x$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $(2x^2+x+1) - (x^2-x+1) = x^2+2x > 0 \forall x > 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}} = 3x \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}} = 3$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 3x \\ \sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \frac{x+2}{3} \end{cases}$.

Trừ vế với vế ta được: $3\sqrt{2x^2+x+1} = 5x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -8 \end{cases} (L)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 76. Giải phương trình: $2\sqrt[9]{(1+x)^2} + 3\sqrt[9]{1-x^2} + \sqrt[9]{(1-x)^2} = 0$.

Lời giải.

Để thấy $x = \pm 1$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[9]{(1-x)^2}$, $t \neq -1$ ta được phương trình:

$2\sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[9]{\frac{1-x}{1+x}} + 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}}$ ta được phương trình:

$2t + \frac{1}{t} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \end{cases} (L)$
 $\begin{cases} t = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+2^9}{1-2^9}$.

Bài 77. Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 + 1}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $3(x-1) + 2(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Để thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{x^2+x+1} \end{cases}, u, v > 0.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } 3u^2 + 2v^2 = 7uv \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u = \frac{1}{3}v \end{cases}.$$

○ Với $u = 2v$ ta có: $4x^2 + 3x + 5 = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

○ Với $u = \frac{1}{3}v$ ta có: $x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}\}$.

Bài 78. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(3-m)x + m - 4 = 0$ có đúng một nghiệm âm.

Lời giải.

○ Với $m = 0$ phương trình có nghiệm $x = -\frac{2}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

○ Với $m \neq 0$ phương trình có đúng một nghiệm âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 < 0 \leq x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 = x_2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ S < 0 \\ P < 0 \\ \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ 0 < m < 4 \\ m = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in [0; 4] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$ thì phương trình có đúng một nghiệm âm.

Bài 79. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - (x_1^3 + x_2^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b}{a} \left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a} \right) = 0$$

$$b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc.$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại là $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$.

Bài 80. Giải phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$.

Lời giải.

$$\text{Viết lại phương trình thành: } \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{x-1})^2} = 1.$$

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } |\sqrt{x-1}-1| + |2-\sqrt{x-1}| = (\sqrt{x-1}-1) + (2-\sqrt{x-1}).$$

Áp dụng tính chất: $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

Bài 81. Tìm m để phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m+3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$.

Lời giải.

○ Phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{2} \\ m > \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{○ Ta có: } \begin{cases} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \frac{4m^2+4m-2}{(2m+3)^2} \\ \frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{4m^2+12m+9} \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình bậc hai thỏa mãn là: } X^2 - \frac{4m^2+4m-2}{4m^2+12m+9}X + \frac{1}{4m^2+12m+9} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (4m^2+12m+9)X^2 - (4m^2+4m-2)X + 1 = 0 \text{ với } m \neq -\frac{3}{2}.$$

Bài 82. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x + 1| = m$.

Lời giải.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ (P)

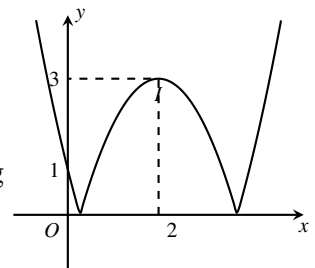
Đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 1|$ (C) gồm hai phần:

○ Phần phía trên trục hoành của (P).

○ Phần đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (P) qua trục hoành.

Khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$ ta được:

- + Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.
- + Với $m = 0$ hoặc $m > 3$ phương trình có 2 nghiệm.
- + Với $0 < m < 3$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
- + Với $m = 3$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.



Bài 83. Tìm m để phương trình $4x^4 + 4x^2 + 2mx + m^2 + 2m + 1 = 0$.

a) Có nghiệm lớn nhất.

b) Có nghiệm nhỏ nhất.

Lời giải.

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình đã cho, khi đó phương trình:

$$m^2 + 2(x_0+1)m + 4x_0^4 + 4x_0^2 + 1 = 0 \text{ luôn có nghiệm } m.$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (x_0+1)^2 - (2x_0^2+1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2x_0^2)(2x_0^2 + x_0 + 2) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{○ } x_0 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{○ } x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 + 3m + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Bài 84. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+4} + 2\sqrt{2-x^2} = 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\sqrt{2x^2+4} + 2\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2+2} + 2\sqrt{2-x^2} \leq \sqrt{(2+4)(x^2+2+2-x^2)} = 2\sqrt{6}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{2} \Leftrightarrow 3x^2+2=0$.

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 85. Cho phương trình: $\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2m \cdot \frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0$.

- Giải phương trình với $m = -1$.
- Tìm m để phương trình có nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$, $t \geq 2$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2mt + 1 = 0$ (*).

- Với $m = -1$ ta có: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.
- Để phương trình ban đầu có nghiệm thì (*) phải có nghiệm $t \geq 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq t_1 \leq t_2 \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \begin{cases} f(2) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \geq 2 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Giải hệ tìm được $m \leq -\frac{5}{4}$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Khái niệm. Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by = c \quad (1),$$

trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

△ a) Nếu $a = b = c = 0$ thì (1) có vô số nghiệm (mọi cặp số $(x_0; y_0)$ đều là nghiệm).

b) Nếu $a = b = 0, c \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.

c) Nếu $b \neq 0$ thì (1) có dạng $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (d). Khi đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (d).

Tổng quát, phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c, (a^2 + b^2 \neq 0)$ luôn có vô số nghiệm. Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình là một đường thẳng trong mặt tọa độ Oxy.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Khái niệm. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2),$$

trong đó x, y là hai ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (2). Giải hệ phương trình (2) là tìm tập nghiệm của nó.

3. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Khái niệm. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (3),$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ thì $(x_0; y_0; z_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (3).

II. Các dạng toán

Dạng 1. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau:

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (và giữ nguyên phương trình thứ nhất).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- Bước 1: Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
- Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.
Chú ý: Nếu thấy xuất hiện phương trình có các hệ số của hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

2. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số gồm hai bước:

- Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Nhân các vế của hai phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- Bước 2: Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- Bước 3: Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2x - 3(3x - 1) = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ -7x + 3 = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = -\frac{4}{7}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{19}{7}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(-\frac{4}{7}; -\frac{19}{7}\right)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+5} + \sqrt{y-8} = 11 \\ 5\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-8} = 8. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ y-8 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq 8. \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+5} \\ v = \sqrt{y-8}. \end{cases}, u, v \geq 0$. Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 2u + v = 11 \\ 5u - 4v = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 11 - 2u \\ 5u - 4(11 - 2u) = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 11 - 2 \cdot 4 = 3 \\ u = 4. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x+5} = 4 \\ \sqrt{y-8} = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 16 \\ y-8 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 17. \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (11; 17)$.

Ví dụ 3. Ngày sinh nhật của cô giáo A gồm hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số đó là 8. Nếu viết ngày sinh nhật theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng 4 lần số ban đầu cộng thêm 3. Vậy ngày sinh nhật của cô giáo A là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi ngày sinh nhật là \overline{ab} với $a, b \in \mathbb{N}, 10 \leq \overline{ab} \leq 31$.
Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ \overline{ba} = 4\overline{ab} + 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ 10b + a = 4(10a + b) + 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ 39a - 6(8 - a) = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 7. \end{cases}$$

Vậy ngày sinh nhật của cô giáo A là 17.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất trừ với phương trình thứ hai ta được $8y = 8$. Do đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 8y = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

Ví dụ 5. Nếu đem $\frac{1}{5}$ số trâu và $\frac{1}{3}$ số bò gộp lại thì được 25 con. Nếu đem $\frac{2}{5}$ số trâu và $\frac{1}{4}$ số bò gộp lại thì được 30 con. Tính số trâu và số bò.

Lời giải. Gọi x và y lần lượt là số trâu và số bò (x, y là các số nguyên dương). Ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 25 & (1) \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = 30 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 25 \\ \frac{5}{12}y = 20. \end{cases} \quad (\text{Lấy (1) nhân với 2 rồi trừ cho (2)})$$

Từ đó suy ra $x = 45, y = 48$. Vậy có 45 con trâu và 48 con bò.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + y = \sqrt{3} - 1 \\ 2x - (\sqrt{3} - 1)y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y = -(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - 1 \\ 2x + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)x - (\sqrt{3} - 1)^2 = 2\sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - 1 \\ 2x + 2x = 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{4} + \sqrt{3} - 1 \\ x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -2)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = 10. \end{cases}$$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất nhân với 3, phương trình thứ hai nhân với 2 ta được

$$\begin{cases} 6x + 9y = 3 & (a) \\ 6x - 8y = 20 & (b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ 17y = -17. & (\text{Lấy } (a) \text{ trừ cho } (b)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; -1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{10}{4x - y} + \frac{1}{x + y} = 1 \\ \frac{25}{4x - y} + \frac{3}{x + y} = 2. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 4x - y \neq 0 \\ x + y \neq 0. \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{4x - y} \\ v = \frac{1}{x + y}. \end{cases}$ Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 10u + v = 1 \\ 25u + 3v = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 10u \\ 25u + 3(1 - 10u) = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ u = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{4x - y} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x + y} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 5 \\ x + y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 5 \\ x + 4x - 5 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = -\frac{1}{5}. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{6}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 0,4x - 0,3y = 0,6 \\ 0,3x - 0,2y = 1,3. \end{cases}$$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất nhân với 3, phương trình thứ hai nhân với 4 ta được

$$\begin{cases} 1,2x - 0,9y = 1,8 \\ 1,2x - 0,8y = 5,2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,2x - 0,9y = 1,8 \\ -0,1y = -3,4. \end{cases} \quad (\text{Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ y = 34. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = (27;34)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{3}{7}y = \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}x + \frac{2}{7}y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất nhân với $\frac{2}{5}$, phương trình thứ hai nhân với $\frac{3}{4}$ ta được

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{6}{35}y = \frac{6}{25} \\ \frac{3}{10}x + \frac{3}{14}y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{6}{35}y = \frac{6}{25} \\ -\frac{3}{70}y = -\frac{1}{100}. \end{cases} \quad (\text{Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{30}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{30}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{3}{5y} = 4 \\ \frac{3}{2x} + \frac{1}{5y} = 2. \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$. Ta xem đây là hệ phương trình bậc nhất theo $X = \frac{1}{x}$ và $Y = \frac{1}{y}$.

Nhân phương trình thứ nhất với $\frac{3}{2}$, phương trình thứ hai với $\frac{1}{3}$ ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{2}X + \frac{9}{10}Y = 6 \\ \frac{1}{2}X + \frac{1}{15}Y = \frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}X + \frac{9}{10}Y = 6 \\ \frac{5}{6}Y = \frac{16}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{12}{25} \\ Y = \frac{32}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{12} \\ y = \frac{5}{32}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y) = \left(\frac{25}{12}; \frac{5}{32}\right)$.

Bài 7. Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$). Viết phương trình của d biết nó đi qua hai điểm $A(3;2), B(1;-2)$.

Lời giải. Vì d đi qua A và B nên tọa độ của A và B thỏa mãn phương trình của d . Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ a + b = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4. \end{cases}$$

Vậy $d: y = 2x - 4$.

Bài 8. Một bài kiểm tra có 15 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 5 điểm. Mỗi câu trả lời sai hoặc bỏ trống bị trừ 5 điểm. Một học sinh làm bài kiểm tra và đạt 25 điểm. Hỏi bạn đó đã trả lời đúng bao nhiêu câu?

Lời giải. Gọi số câu trả lời đúng là x , số câu trả lời sai hoặc không trả lời là y (x, y là các số nguyên không âm). Ta có

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 5x - 5y = 25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ 10x = 100. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy học sinh đó trả lời đúng 10 câu.

Bài 9. Có 2 loại xe khách (loại I và loại II). Nếu chọn phương án vận chuyển hành khách bằng 2 chuyến xe loại I và 5 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 190 hành khách (không tính tài xế). Nếu chọn phương án vận chuyển bằng 3 chuyến xe loại I và 3 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 195 hành khách (không tính tài xế). Hỏi mỗi loại xe có thể chứa tối đa bao nhiêu hành khách (không tính tài xế)?

Lời giải. Gọi x và y lần lượt là số hành khách tối đa có thể chở được của xe loại I và xe loại II (x, y là các số nguyên dương). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 5y = 190 \\ 3x + 3y = 195. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 20. \end{cases}$$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2|x + y| + |x - y| = 7 \\ -|x + y| + 4|x - y| = 10. \end{cases}$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = |x + y| \\ v = |x - y| \end{cases}$, $u, v \geq 0$. Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 2u + v = 7 \\ -u + 4v = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - 2u \\ -u + 4(7 - 2u) = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ u = 2. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} |x + y| = 2 \\ |x - y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2 \end{cases} \\ |x - y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} \end{cases}$

Xét hệ $\begin{cases} y = 2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ |x - (2 - x)| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ \begin{cases} 2x - 2 = 3 \\ 2x - 2 = -3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2}. \end{cases} \end{cases}$

Xét hệ $\begin{cases} y = -2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ |x - (-2 - x)| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ \begin{cases} 2x + 2 = 3 \\ 2x + 2 = -3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{5}{2}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right); \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Dạng 2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

- Bước 1: Dùng phương pháp cộng đại số đưa hệ đã cho về dạng tam giác.
- Bước 2: Giải hệ và kết luận

⚠ Chú ý

- Cách giải hệ dạng tam giác: từ phương trình cuối ta tìm z , thay vào phương trình thứ hai ta tìm được y và cuối cùng thay y, z vào phương trình thứ nhất ta tìm được x .
- Nếu trong quá trình biến đổi ta thấy xuất hiện phương trình chỉ có một ẩn thì ta giải tìm ẩn đó rồi thay vào hai phương trình còn lại để giải hệ hai phương trình hai ẩn.
- Ta có thể thay đổi thứ tự các phương trình trong hệ để việc biến đổi dễ hơn.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ y - z = 5 \\ 2z = 4. \end{cases}$$

Lời giải. Từ phương trình (3) suy ra $z = 2$.

Thay $z = 2$ vào phương trình (2) ta được $y - 2 = 5 \Leftrightarrow y = 7$.

Thay $y = 7, z = 2$ vào phương trình (3) ta được $x + 2 \cdot 7 + 2 = 10 \Leftrightarrow x = -6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-6; 7; 2)$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ 3x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - 4z = 3. \end{cases}$$

Lời giải. Nhân hai vế của phương trình (1) với -3 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, nhân hai vế của phương trình (1) với -2 rồi cộng vào phương trình (3) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -5y = -15 \\ y - 6z = 9. \end{cases}$$

Giải phương trình (2) ta được $y = 3$.

Thay $y = 3$ vào phương trình (3) ta được $3 - 6z = 9 \Leftrightarrow z = -1$

Thay $y = 3, z = -1$ vào phương trình (1) ta được $x - 3 + (-1) = -3 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(1; 3; -1)$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Nhân hai vế của phương trình (1) với -2 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, Nhân hai vế của phương trình (1) với -1 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -9 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Tiếp tục nhân hai vế của phương trình (2) với $-\frac{2}{3}$ rồi cộng vào phương trình (3) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -9 \\ \frac{7}{3}z = 7 \end{cases}$$

Từ phương trình (3) suy ra $z = 3$.

Thay $z = 3$ vào phương trình (2) ta được $3y - 5 \cdot 3 = -9 \Leftrightarrow y = 2$.

Thay $y = 2, z = 3$ vào phương trình (3) ta được $x - 2 + 2 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(0; 2; 3)$.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 16 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = -9 \end{cases}$$

Lời giải. Ta đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, t = \frac{1}{z}$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v + t = 10 \\ 2u - v + 3t = 16 \\ u - 2v - t = -9 \end{cases}$$

Dùng phép cộng đại số ta đưa hệ trên về dạng tam giác, ta được hệ

$$\begin{cases} u + v + t = 10 \\ -3v + t = -4 \\ -3t = -15 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $u = 2, v = 3, t = 5$.

Suy ra $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{5}$.

Ví dụ 10. Ba bạn Vân, Anh, Khoa đi chợ mua trái cây. Bạn Anh mua 2 kí cam và 3 kí quýt hết 105 nghìn đồng, bạn Khoa mua 4 kí nho và 1 kí cam hết 215 nghìn đồng, bạn Vân mua 2 kí nho, 3 kí cam và 1 kí quýt hết 170 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi loại cam, quýt, nho là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x, y, z (nghìn đồng) lần lượt là giá một kí cam, quýt, nho. Điều kiện x, y, z là số dương.

Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} 2x + 3y = 105 \\ x + 4z = 215 \\ 3x + y + 2z = 170 \end{cases}$$

Dùng phép cộng đại số ta đưa hệ trên về dạng tam giác, ta được hệ

$$\begin{cases} x + 4y = 125 \\ y - 10z = -475 \\ 22z = 1100 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 15, y = 25, z = 50$.

Vậy giá mỗi kí cam, quýt, nho lần lượt là 15, 25, 50 (nghìn đồng).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y + 5z = -8 \\ 2y + z = -2 \\ -3z = 6 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(1; 0; -2)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3y = 9 \\ 2x - z = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(2; 3; -1)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = -5 \\ 2x + 3y - 5z = -14 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 1; 3)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ 3x + y - 3z = -9 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(4; 6; 9)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 20 \\ 2x + 2y - z = 23 \\ x + y - z = 11 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(5; 7; 1)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Lời giải. Ta đặt $u = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{y}, t = \frac{1}{z}$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + 3v + 6t = 1 \\ u - v + 3t = \frac{2}{3} \\ -u + v + 2t = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $u = \frac{1}{10}, v = -\frac{1}{15}, t = \frac{1}{6}$.

Suy ra $x = 10, y = -15, z = 6$.

Bài 17. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -11 \\ \frac{2}{x} - \frac{2y+4}{y} + \frac{1}{z} = -7 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{-2-z}{z} = -6 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, $\frac{2y+4}{y} = 2 + \frac{4}{y}$, $\frac{-2-z}{z} = -\frac{2}{z} - 1$ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -12 \\ \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{z} = -5 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = -5 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $t = \frac{1}{z}$ thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + 2v - 3t = -12 \\ 2u - 4v + t = -5 \\ -3u + v - 2t = -5 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u = -1$, $v = 2$, $t = 5$.

Suy ra $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{5}$.

Bài 18. Một cửa hàng bán quần, áo và nón. Ngày thứ nhất bán được 3 cái quần, 7 cái áo và 10 cái nón, doanh thu là 1930000 đồng. Ngày thứ hai bán được 5 cái quần, 6 cái áo và 8 cái nón, doanh thu là 2310000 đồng. Ngày thứ ba bán được 11 cái quần, 9 cái áo và 3 cái nón, doanh thu là 3390000 đồng. Hỏi giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x, y, z (đồng) lần lượt là giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón. Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 7y + 10z = 1930000 \\ 5x + 6y + 8z = 2310000 \\ 11x + 9y + 3z = 3390000 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 210000$, $y = 100000$, $z = 60$.

Vậy giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón lần lượt là 210000 đồng, 100000 đồng, 60000 đồng.

Dạng 3. Giải và biện luận hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có chứa tham số (PP Crame)

a) **Dạng:**
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1^2 + b_1^2 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2^2 + b_2^2 \neq 0). \end{cases}$$

Cách giải đã biết: Phép thế, phép cộng...

b) Giải và biện luận hệ phương trình:

Bước 1: Tính các định thức:

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (Gọi là định thức của hệ);

- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ (Gọi là định thức của x);

- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ (Gọi là định thức của y).

Bước 2: Biện luận

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D}. \end{cases}$
- Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $a_1x + b_1y = c_1$).

Ví dụ 11. Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$

Lời giải. $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1; D_x = \begin{vmatrix} m + 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2; D_y = \begin{vmatrix} m & m + 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$

a) Nếu $m = 1 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0$. Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$ thỏa $x + y = 2$.

b) Nếu $m = -1 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = -2 \\ D_y = -2 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

c) Nếu $m \neq 1, m \neq -1$. Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 + m - 2}{m^2 - 1} = \frac{m + 2}{m + 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m - 1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m + 1}. \end{cases}$

Ví dụ 12. Với giá trị nguyên nào của tham số m , hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m. \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên.

Lời giải. $D = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2), D_x = m^2 + 2m - 4m = m^2 - 2m = m(m - 2), D_y = m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2).$

$$D = m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2, \text{ hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m}{m+2} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m+1}{m+2} \end{cases}$$

Ta có:

$$x = \frac{m}{m+2} = 1 - \frac{2}{m+2} \text{ nên để } x \text{ nguyên thì } m+2 \text{ phải là ước của } 2 \text{ (1);}$$

$$y = \frac{m+1}{m+2} = 1 - \frac{1}{m+2} \text{ nên để } y \text{ nguyên thì } m+2 \text{ phải là ước của } 1 \text{ (2).}$$

$$\text{Từ (1),(2), suy ra } m+2 \text{ là ước của } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = 1 \\ m+2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3. \end{cases}$$

Ví dụ 13. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

b) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < 1, y < 1$.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc vào m .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= -1 - m^2 < 0, \quad \forall m \\ D_x &= -1 + m^2 \\ D_y &= -m - m = -2m \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } D \neq 0, \quad \forall m \text{ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 - 1}{-m^2 - 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2m}{-m^2 - 1} \end{cases}$$

$$\text{b) } x < 1 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{-m^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 > -m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$$y < 1 \Leftrightarrow \frac{-2m}{-m^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow -2m > -m^2 - 1 \Leftrightarrow (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Vậy với $m \neq 0 \wedge m \neq 1$ thì hệ có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{c) } x^2 + y^2 = \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2 + 1} \right)^2 = \frac{m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2}{m^4 + 2m^2 + 1} = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{m^4 + 2m^2 + 1} = 1.$$

Vậy $x^2 + y^2 = 1$ không phụ thuộc vào m .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} (m - 1)x + 2y = 3m - 1 \\ (m + 2)x - y = 1 - m. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ by + ax = 2ab. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m + 1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

$$\text{Bài 20. Tìm } m \text{ để hệ sau vô nghiệm: } \begin{cases} 2m^2x + 3(m - 1)y = 3 \\ m(x + y) - 2y = 2. \end{cases}$$

Bài 21. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa $x > 1, y > 1$.

Bài 22. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + m^2y = m + 1 \\ m^2x + y = 3 - m \end{cases}$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $S = x + y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. $D = 1 - m^4$

$$D_x = m + 1 - m^2(3 - m) = m^3 - 3m^2 + m + 1$$

$$D_y = 3 - m - m^2(m + 1) = -m^3 - m^2 - m + 3$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - m^4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} = \frac{m^3 - 3m^2 + m + 1}{1 - m^4} + \frac{-m^3 - m^2 - m + 3}{1 - m^4} \\ &= \frac{-4m^2 + 4}{1 - m^4} = \frac{4(1 - m^2)}{(1 - m^2)(1 + m^2)} = \frac{4}{1 + m^2} \leq \frac{4}{1 + 0} = 4 \end{aligned}$$

Dấu "=" đạt khi $m = 0$ (thỏa điều kiện)

Bài 23. Cho $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Lời giải. $\begin{cases} ax + by = c \quad (1) \\ bx + cy = a \quad (2) \\ cx + ay = b \quad (3) \end{cases}$

$$\Rightarrow (a + b + c)x + (a + b + c)y = a + b + c$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

• $a + b + c = 0$

$$\text{Ta có: } (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

• $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - y$ thế vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} a(1 - y) + by = c \\ b(1 - y) + cy = a \\ c(1 - y) + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b - a)y = c - a \\ (c - b)y = a - b \\ (a - c)y = b - c \end{cases}$$

Nếu $a = b$, để hệ có nghiệm ta suy ra $a = b = c \Rightarrow \text{đpcm}$.

Nếu a, b, c khác nhau từng đôi một, từ hệ ta có:

$$(b - a)(c - b)(a - c)y^3 = (c - a)(a - b)(b - c) \Rightarrow (b - a)(c - b)(a - c)(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0$$

Thế $x = 0, y = 1$ vào hệ ban đầu ta được $a = b = c \Rightarrow \text{đpcm}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 24. Tìm tất cả các số nguyên m để hai đường thẳng $y = -\frac{2}{3}mx + \frac{1}{3}m$ và $y = -x + m + 1$ cắt nhau tại một điểm có các thành phần tọa độ là các số nguyên.

Lời giải. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}mx + \frac{1}{3}m \\ y = -x + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm có các thành phần tọa độ là các số nguyên khi và chỉ khi hệ (1) có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất đó nguyên.

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - 3, D_x = \begin{vmatrix} m & 3 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -2m - 3, D_y = \begin{vmatrix} 2m & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 2m^2 + m.$$

Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ (1) là

$$\begin{cases} x = -\frac{2m+3}{2m-3} \\ y = \frac{2m^2+m}{2m-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{6}{2m-3} \\ y = m+2 + \frac{6}{2m-3} \end{cases}.$$

Nghiệm này nguyên $\Rightarrow 2m - 3$ là ước của 6

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 = -1 \\ 2m-3 = 1 \\ 2m-3 = -2 \\ 2m-3 = 2 \\ 2m-3 = -3 \\ 2m-3 = 3 \\ 2m-3 = -6 \\ 2m-3 = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{5}{2} \\ m = \frac{3}{2} \\ m = 0 \\ m = 3 \\ m = -\frac{3}{2} \\ m = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Bài 25. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{4}{x-2y} = -2 \\ \frac{5}{2x-y} + \frac{2}{x-2y} = 14. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 2x-y \neq 0 \\ x-2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{2} \\ x \neq 2y \end{cases} (*)$.

Với điều kiện (*), đặt $u = \frac{1}{2x-y}, v = \frac{1}{x-2y}$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3u - 4v = -2 \\ 5u + 2v = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 4v = -2 \\ 10u + 4v = 28. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 4v = -2 \\ 13u = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} 2x-y = \frac{1}{2} \\ x-2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{1}{2} \\ x-2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$ (Thỏa mãn (*)).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$.

Bài 26. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} (m+n)x + (m-n)y = 2m(m^2 - n^2) \\ x - y = -4mn \end{cases}$ theo hai tham số m, n .

Lời giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} m+n & m-n \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(m+n) - (m-n) = -2m,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m(m^2-n^2) & m-n \\ -4mn & -1 \end{vmatrix} = -2m(m^2-n^2) + 4mn(m-n) = -2m(m-n)^2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} (m+n) & 2m(m^2-n^2) \\ 1 & -4mn \end{vmatrix} = -4mn(m+n) - 2m(m^2-n^2) = -2m(m+n)^2.$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{-2m(m-n)^2}{-2m} = (m-n)^2 \\ y = \frac{-2m(m+n)^2}{-2m} = (m+n)^2. \end{cases}$
- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x. \end{cases}$

Bài 27. Tìm tất cả các giá trị của a, b, c để ít nhất một trong các hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x+cy = b \\ cx+y = a \end{cases} (1); \quad \begin{cases} cx+y = a \\ bx+ay = 1 \end{cases} (2); \quad \begin{cases} bx+ay = 1 \\ x+cy = b \end{cases} (3).$$

Lời giải. Ta giải bài toán gián tiếp: Tìm tất cả các giá trị của a, b, c để cả ba hệ đã cho đều vô nghiệm.

Xét hệ $\begin{cases} x+cy = b \\ cx+y = a \end{cases} (1).$

Ta có $D_{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1 - c^2; D_x = \begin{vmatrix} b & c \\ a & 1 \end{vmatrix} = b - ac; D_y = \begin{vmatrix} 1 & b \\ c & a \end{vmatrix} = a - bc.$

Hệ (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} D_{(1)} = 0 \\ D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - c^2 = 0 \\ b - ac \neq 0 \\ a - bc \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b - a \neq 0 \\ c = -1 \\ b + a \neq 0 \end{cases}.$

- Xét trường hợp $\begin{cases} c = 1 \\ b - a \neq 0 \end{cases}$. Thay $c = 1$ vào hệ (2), ta có: $\begin{cases} x+y = a \\ bx+ay = 1 \end{cases}$

Ta có $D_{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a - b \neq 0$. Do đó (2) có nghiệm duy nhất.

- Xét trường hợp $\begin{cases} c = -1 \\ b + a \neq 0 \end{cases}$. Thay $c = -1$ vào (3) ta có $\begin{cases} bx+ay = 1 \\ x-y = b \end{cases}$

Ta có $D_{(3)} = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -b - a = -(b+a) \neq 0$. Do đó (3) có nghiệm duy nhất.

Suy ra nếu (1) vô nghiệm thì các hệ (2),(3) đều có nghiệm. Do đó không tồn tại giá trị nào của a, b, c để cả ba hệ phương trình đã cho cùng vô nghiệm.

Vậy, với mọi giá trị của a, b, c thì ít nhất một trong các hệ đã cho có nghiệm.

Bài 28. Tập thể giáo viên (Toán và $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$) gồm 128 người được chia thành ba nhóm ra đề kiểm tra: Nhóm 1, Nhóm 2 và Nhóm 3. Sau một ngày làm việc, cả ba nhóm hoàn thành được 476 câu trắc nghiệm và 375 câu tự luận; trong đó, mỗi thành viên Nhóm 1 hoàn thành được 3 câu trắc nghiệm và 4 câu tự luận, mỗi thành viên Nhóm 2 hoàn thành được 2 câu trắc nghiệm và 5 câu tự luận, mỗi thành viên Nhóm 3 hoàn thành được 6 câu trắc nghiệm. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu giáo viên?

Lời giải. Gọi số giáo viên của Nhóm 1, Nhóm 2, Nhóm 3 lần lượt là x, y, z (ĐK: x, y, z nguyên dương). Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 128 & (1) \\ 3x + 2y + 6z = 476 & (2) \\ 4x + 5y = 375 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với -6 rồi cộng vào (2), ta được hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 128 & (1) \\ 3x + 4y = 292 & (4) \\ 4x + 5y = 375 & (5) \end{cases}$$

Từ (4) và (5) ta có $\begin{cases} x = 40 \\ y = 43. \end{cases}$ Thế vào (1) ta được $z = 45$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy số giáo viên của các nhóm 1, 2, 3 lần lượt là 40, 43, 45.

Bài 29. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 \quad (*) \\ x + y + mz = 4. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y + z = 1 & (1) \\ (m-1)x + (1-m)y = -1 & (2) \\ (m^2-1)x + (m-1)y = m-4 & (3) \end{cases}$

Xét hệ phương trình (2), (3), ta có:

$$\bullet D = \begin{vmatrix} m-1 & 1-m \\ m^2-1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 - (1-m)(m^2-1) = (m-1)^2(m+2),$$

$$\bullet D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1-m \\ m-4 & m-1 \end{vmatrix} = -(m-1) - (1-m)(m-4) = (m-1)(m-5),$$

$$\bullet D_y = \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ m^2-1 & m-4 \end{vmatrix} = (m-1)(m-4) + (m^2-1) = (m-1)(2m-3).$$

Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất \Leftrightarrow Hệ (2), (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$

Khi đó nghiệm duy nhất của hệ $(*)$ là $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m-5}{(m-1)(m+2)} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m-3}{(m-1)(m+2)} \\ z = \frac{4m+1}{(m-1)(m+2)}. \end{cases}$

Cách khác: Lấy ba phương trình của hệ cộng lại, ta được

$$(m+2)x + (m+2)y + (m+2)z = 7$$

Hệ có nghiệm khi $m \neq -2$. Khi đó

$$x + y + z = \frac{7}{m+2} \quad (1)$$

Lấy các phương trình của hệ trừ cho (1) ta được

$$\begin{cases} (m-1)x = 1 - \frac{7}{m+2} \\ (m-1)y = 2 - \frac{7}{m+2} \\ (m-1)z = 4 - \frac{7}{m+2}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1. \end{cases}$ và nghiệm duy nhất của hệ là $\begin{cases} x = \frac{m-5}{(m-1)(m+2)} \\ y = \frac{2m-3}{(m-1)(m+2)} \\ z = \frac{4m+1}{(m-1)(m+2)}. \end{cases}$

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ x+by+b^2z+b^3=2017 \\ x+cy+c^2z+c^3=2017. \end{cases}$ (1), với a, b, c là các tham số đôi một khác nhau.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ (b-a)y+(b^2-a^2)z+b^3-a^3=0 \\ (c-a)y+(c^2-a^2)z+c^3-a^3=0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ y+(b+a)z+b^2+ab+a^2=0 \\ y+(c+a)z+c^2+ac+a^2=0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ y+(b+a)z+b^2+ab+a^2=0 \\ (b-c)z+b^2-c^2+a(b-c)=0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ y+(b+a)z+b^2+ab+a^2=0 \\ z=-(a+b+c). \end{cases} \\ & &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-ay-a^2z-a^3+2017 \\ y=ab+bc+ca \\ z=-(a+b+c). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ (1) có nghiệm là $\begin{cases} x=-abc+2017 \\ y=ab+bc+ca \\ z=-(a+b+c). \end{cases}$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

I. Hệ phương trình gồm các phương trình bậc nhất và bậc hai

Để giải các hệ phương trình dạng này, ta chủ đạo sử dụng phương pháp thế và phương pháp cộng đại số thông thường, đôi khi kết hợp thêm giải pháp đặt ẩn phụ để làm gọn bài toán.

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - y^2 = 2x - 1 - y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2x - y^2 = 1 \\ y^2 + 4x = 8 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ x^2 - y^2 = 2x - 1 - y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 1 - 2y.$$

$$(2) \Leftrightarrow (1 - 2y)^2 - y^2 = 2(1 - 2y) - 1 - y \Leftrightarrow 3y^2 + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có hai nghiệm là } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2x - y^2 = 1 & (1) \\ y^2 + 4x = 8 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1) + (2) ta được } 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Với } x = -3, (2) \Leftrightarrow y^2 = 8 - 4x = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{5} \end{cases}.$$

$$\text{Với } x = 1, (2) \Leftrightarrow y^2 = 8 - 4x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy hệ có bốn nghiệm là } \begin{cases} x = -3 \\ y = \pm 2\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 + x^2y = 9 - 2xy \\ x^2 + y = 6 - 4x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 + x^2y = 9 - 2xy & (1) \\ x^2 + y = 6 - 4x & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = -x^2 - 4x + 6$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + x^2(-x^2 - 4x + 6) = 9 - 2x(-x^2 - 4x + 6)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = 9 \end{cases}$.

$$\text{b) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } x = y, (2) \Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } xy = -1, (2) \Leftrightarrow 2x^2 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Ví dụ 3. Xác định các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = m \\ x^2 + 2xy - y^2 = 2m \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải. Ta có $(1) \Leftrightarrow x = 2y + m$.

Thế vào (2) ta được $(2) \Leftrightarrow (2y + m)^2 + 2y(2y + m) - y^2 = 2m \Leftrightarrow 7y^2 + 6my + m^2 - 2m = 0(*)$.

Để hệ có hai nghiệm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 14m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ m > 0 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^2 + 14y^2 = 1 + 4xy \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (3x + y - 1)(x - 2y - 1) = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải. Đáp số:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = \frac{5}{11} \end{cases}, \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ x^2 + 3xy + 4y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Lời giải.

$$a) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$b) \text{ Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 & (1) \\ xy = \frac{-x^2 + 6x + 6}{2} & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Thế (2) và (1) ta được } (1) \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{-x^2 + 6x + 6}{2}\right)^2 = 2x + 9 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 = 8x + 36$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Với $x = 0$, hệ vô lý.

$$\text{Với } x = -4, (2) \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 + 6x + 6}{2x} = \frac{17}{4}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm là } \begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{17}{4} \end{cases}.$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y^2 + xy + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{2x + 5y - 1} - \sqrt{x - 2y} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn:

$$a) \text{ Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy)^2 + x^3y = 1 \\ x^2 - xy = x^3y + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Sử dụng phương pháp thế ta có nghiệm là } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$b) \text{ Đặt } a = \sqrt{2x + 5y - 1}, b = \sqrt{x - 2y}.$$

$$\text{Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x + 5y - 1} - \sqrt{x - 2y} = 1 \\ 2x + 5y - 1 + x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Giải hệ tìm } a, b \text{ rồi suy ra nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}.$$

$$\text{Bài 4. Giải hệ phương trình } \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Lời giải. Xét $y = 0$, khi đó hệ vô lý.

$$\text{Xét } y \neq 0, \text{ hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 & (1) \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 13 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 7 - \frac{x}{y} & (1) \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thế (1) và (2) ta được } \left(7 - \frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 12y \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $x = 3y$, (1) $\Leftrightarrow 3y^2 + 3y + 1 = 7y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $x = 12y$, (1) $\Leftrightarrow 12y^2 + 12y + 1 = 7y$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Bài 5. Xác định các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ 2x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Đáp số: $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

II. Hệ phương trình đối xứng loại 1

Định nghĩa 1. Hệ phương trình đối xứng loại 1 của hai ẩn x, y là hệ mà khi ta thay thế x bởi y và y bởi x thì ta được hệ mới không thay đổi (thứ tự các phương trình trong hệ giữ nguyên).


Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt điều kiện nếu cần;

Bước 2: Đặt $x + y = S; xy = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P ;

Bước 3: Giải hệ ta tìm được S, P ;

Bước 4: x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

 **Chú ý:**

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P; x^3 + y^3 = S^3 - 3SP.$$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 - 3xy = -1. \end{cases}$

Lời giải. Hệ đã cho có thể viết lại là:

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 5P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 5S - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -8 \\ S = 3 \end{cases}.$$


TH1:

$$\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

TH2:

$$\begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + \sqrt{3} \\ y = -4 - \sqrt{3} \\ x = -4 - \sqrt{3} \\ y = -4 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $(1; 2), (2; 1), (-4 + \sqrt{3}; -4 - \sqrt{3}), (-4 - \sqrt{3}; -4 + \sqrt{3})$

 **Chú ý:** 1. Đối với hệ đối xứng của hai ẩn x, y thì nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

2. Có một số hệ phương trình không phải là hệ đối xứng loại 1, tuy nhiên ta có thể chọn biến phù hợp để đổi biến đưa về hệ đối xứng loại 1.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y, \\ x^3 = 5y^2. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y & (1), \\ x^3 = 5y^2 & (2). \end{cases}$$

• Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0; 0)$ là nghiệm của hệ.

• Nếu $y \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (1) cho y ta có: $\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} = \frac{14}{3}$.

Chia 2 vế của phương trình (2) cho y^2 ta được $\frac{x^2 x}{y y} = 5$.

Vậy ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} = \frac{14}{3}, \\ \frac{x^2 x}{y y} = 5 \end{cases}.$$

Đặt $\frac{x^2}{y} = u; \frac{x}{y} = v$ ta được hệ mới là:

$$\begin{cases} u + v = \frac{14}{3} \\ uv = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = \frac{5}{3} \\ v = \frac{5}{3} \\ v = 3 \end{cases}.$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} u = 3 \\ v = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{27}{25} \end{cases}.$$

TH2: Giải tương tự ta có

$$\begin{cases} x = \frac{27}{25} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $\left(\frac{9}{5}; \frac{27}{25}\right), \left(\frac{27}{25}; \frac{9}{5}\right)$.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} = 4, \\ x + y = 2m + 1. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{x-2}; v = \sqrt{y+1}$ ($u, v \geq 0$). Khi đó hệ phương trình được viết lại là:
$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 8 - m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u, v$ là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x + 8 - m = 0$. Để hệ phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình trên phải có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 \geq 0 \\ 8 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 8.$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là: $4 \leq m \leq 8$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 6m. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0$. Đặt $\sqrt{x} + \sqrt{y} = S; \sqrt{x}\sqrt{y} = P$ ($S, P \geq 0; S^2 \geq 4P$). Khi đó hệ phương trình được viết lại là:

$$\begin{cases} S = 1 \\ S^3 - 3PS = 1 - 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 2m \end{cases}$$

Khi đó $S; P$ là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - x + 2m = 0$.

Để hệ phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình trên phải có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 1 - 4m \geq 0 \\ P = 2m \geq 0 \\ S = 1 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}. \text{ Vậy tất cả các giá trị } m \text{ cần tìm là: } 0 \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + 2y + 2xy = 5, \\ x^2 + 4y^2 = 5. \end{cases}$

Lời giải. Giải: Đặt $u = 2y$ ta được hệ $\begin{cases} x + u + xu = 5, \\ (x + u)^2 - 2xu = 5. \end{cases}$

Đặt $x + u = S; xu = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P là:

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -5, P = 10 \\ S = 3, P = 2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $(1; 1), \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 6xy^2 = 9, \\ x^2 + 4y^4 = 5. \end{cases}$

Lời giải. Giải: Đặt $u = 2y^2$ ta được hệ $\begin{cases} x + u + 3xu = 9, \\ (x + u)^2 - 2xu = 5. \end{cases}$

Đặt $x + u = S; xu = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P là:

$$\begin{cases} S + 3P = 9 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 9 - 3P \\ 3S^2 + 2S - 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -\frac{11}{3} \\ S = 3 \end{cases}$$

Giải tiếp ta được các nghiệm $(1; 1), (1; -1), \left(2; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(2; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y} = 2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

Lời giải. Giải: Đặt $u = \sqrt{x+y}; v = \sqrt{y}$ ta được hệ $\begin{cases} u + v = 2, \\ u^2 + v^2 = 2. \end{cases}$

Giải tiếp ta được nghiệm $(0; 1)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 2, \\ 2x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 3. \end{cases}$

Lời giải. Giải tương tự bài 3 ta được $S = \{(1; 0)\}$.

Bài 10. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4y - 1, \\ x^3 + x^2y + x - 3y = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho có thể viết lại là:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y & (1), \\ (x^2 + 1)(x + y) = 4y & (2). \end{cases}$$

Để thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Chia cả hai vế phương trình (1), (2) cho y ta được hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + (x + y) = 4, \\ \frac{x^2 + 1}{y}(x + y) = 4. \end{cases}$$

Đặt $\frac{x^2 + 1}{y} = u; x + y = v$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Giải hệ ta suy ra tập nghiệm của hệ là: $S = \{(1; 1); (-3; 5)\}$.

Bài 11. Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2, \\ xy(x + 2)(y + 2) = m. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $u = x^2 + 2x \geq -1; v = y^2 + 2y \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = m \end{cases} (*)$.

Hệ trên có nghiệm \Leftrightarrow hệ (*) có hai nghiệm $\geq -1 \Leftrightarrow$ phương trình $t^2 - 2t + m = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn

$$-1 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m + 3 \geq 0 \\ 4 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

III. Hệ phương trình đối xứng loại 2

Định nghĩa 2. Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0. \end{cases}$$

\triangle Nếu hệ phương trình có nghiệm là (a, b) thì nó cũng có nghiệm (b, a) .

Dạng 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại 2.

Phương pháp giải hệ phương trình đối xứng loại 2:

$$f(x, y) - f(y, x) = 0 \Leftrightarrow (x - y)h(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ h(x, y) = 0. \end{cases}$$

\triangle Thường thì $h(x, y)$ là những phương trình dễ dàng tìm ra mối liên hệ giữa x và y ; hoặc $h(x, y)$ là phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y \\ y^2 - 2018y = 2017x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y & (1) \\ y^2 - 2018y = 2017x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2) - 2018(x - y) = 2017(y - x) \\ \Leftrightarrow & (x - y)(x + y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ y = -x + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2018x = 2017y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x + 1 \\ x^2 - 2018x = 2017y \end{cases}$$

• Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 4035. \end{cases}$

• Giải (II): $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{8069}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{8069}}{2}. \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{8069}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{8069}}{2}. \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình có bốn nghiệm: $(0; 0)$, $(4035; 4035)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{8069}}{2}; \frac{1 + \sqrt{8069}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{8069}}{2}; \frac{1 - \sqrt{8069}}{2}\right)$.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y & (1) \\ y^3 + 2 = 3x. & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 3(y - x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + xy + y^2 + 3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^3 + 2 = 3y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \\ x^3 + 2 = 3y \end{cases}$$

• Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -2. \end{cases}$

• Giải (II): Ta có $x^2 + xy + y^2 + 3 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Nên hệ phương trình (II) vô nghiệm.

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $(1; 1)$, $(-2; -2)$.

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{5-y} = 16 \\ \sqrt{y+3} + \sqrt{5-x} = 16. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{5-y} = 16 & (1) \\ \sqrt{y+3} + \sqrt{5-x} = 16. & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 5. \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(\sqrt{x+3} - \sqrt{y+3}) + (\sqrt{5-y} - \sqrt{5-x}) = 0$. (3)

- Với $x = y = -3$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{8} = 16 \\ \sqrt{8} = 16. \end{cases}$ (vô lí)
- Với $x = y = 5$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{8} = 16 \\ \sqrt{8} = 16. \end{cases}$ (vô lí)
- Với $\begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \neq -3 \\ y \neq 5 \end{cases}$
(3) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}} + \frac{x-y}{\sqrt{5-y}+\sqrt{5-x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}} + \frac{1}{\sqrt{5-y}+\sqrt{5-x}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = x. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = x \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 8 + 2\sqrt{(x+3)(5-x)} = 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ \sqrt{(x+3)(5-x)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1. \end{aligned}$$

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm: (1; 1).

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số thỏa điều kiện cho trước.

Dựa vào tính chất nghiệm của hệ phương trình đối xứng để tìm tham số.

Ví dụ 11. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x - 2y = m \frac{y}{x} \\ y - 2x = m \frac{x}{y} \end{cases}$$

Lời giải. Vì hệ phương trình đối xứng nên giả sử nghiệm của hệ là $(x; y)$ thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ, vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y$. Suy ra (1) trở thành

$$x - 2x = m \Leftrightarrow -x = m \Leftrightarrow x = -m.$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $x = y = -m \neq 0$, suy ra $m \neq 0$.

Thử lại, với $m \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$ thì hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2 - 2xy = my & (1) \\ y^2 - 2xy = mx & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được $x^2 - y^2 = m(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + m) = 0$

$$\Leftrightarrow (I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2xy = my \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x - m \\ x^2 - 2xy = my \end{cases}$$

- Giải (I): (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \text{ (loại)} \\ x = y = -m. \end{cases}$

- Giải (II): Từ hệ (II) ta được phương trình $3x^2 + 3mx + m^2 = 0$. Có $\Delta = -3m^2 < 0, \forall m \neq 0$. Nên hệ phương trình (II) vô nghiệm.

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq 0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y & (1) \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(x - y)\frac{13}{3} = 0 \Leftrightarrow y = x$. Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = x \\ 4x - x^2 = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x = \frac{11}{3} \\ y = x = 0. \end{cases}$$

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $(\frac{11}{3}; \frac{11}{3}), (0; 0)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + x = 2y \\ y^2 + y = 2x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^2 + x = 2y & (1) \\ y^2 + y = 2x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x - 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x - 3 \\ x^2 + 3x + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $(1; 1), (0; 0)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + x^2y = y \\ y^3 + y^2x = x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^3 + x^2y = y & (1) \\ y^3 + y^2x = x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + 2xy + y^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (x + y)^2 + 1 = 0. \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} y = x \\ 2x^3 = x. \end{cases}$$

Kết luận, hệ phương trình có ba nghiệm: $(0; 0), (\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Bài 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 2018 \frac{y}{x} \\ y^2 - 2xy = 2018 \frac{x}{y} \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện:
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương với hệ
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2y = 2018y & (1) \\ y^3 - 2xy^2 = 2018x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2 - xy + y^2 + 2018) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2018 = 0. \end{cases} & \text{(vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} y = x \\ -x^2 = 2018. \end{cases} \text{(vô lí)}$$

Kết luận, hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2y - 2 \\ y^2 = 2x + \frac{2}{x} \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với hệ
$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2y \\ y^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0$.

Đặt $u = x + \frac{1}{x}$, hệ trên trở thành
$$\begin{cases} u^2 = 2y & (1) \\ y^2 = 2u & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (u-y)(u+y+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (I) \begin{cases} y = u \\ u^2 = 2u \end{cases} \text{ hoặc } (II) \begin{cases} y = -u - 2 \\ u^2 + 2u + 4 = 0 \end{cases} & \text{(vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Giải (I): (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} u = y = 0 \\ u = y = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm: (1; 2).

Bài 17. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{7-y} = m \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{7-x} = m. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình trên với $m = 3$.

b) Tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Điều kiện:
$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 7 \\ -2 \leq y \leq 7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{7-y} = m & (1) \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{7-x} = m & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(\sqrt{x+2} - \sqrt{y+2}) + (\sqrt{7-y} - \sqrt{7-x}) = 0.$ (3)

- Với $x = y = -2$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{9} = m \\ \sqrt{9} = m. \end{cases}$
- Với $x = y = 7$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{9} = m \\ \sqrt{9} = m. \end{cases}$
- Với $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \neq -2 \\ y \neq 7 \end{cases}$
(3) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2}} + \frac{x-y}{\sqrt{7-y} + \sqrt{7-x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2}} + \frac{1}{\sqrt{7-y} + \sqrt{7-x}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = x. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = x \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 9 + 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \sqrt{(x+2)(7-x)} = \frac{m-9}{2}. \end{cases} (4)$$

- a) Với $m = 3$, hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ bằng $(-2; -2)$, $(7; 7)$.
- b) Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1. $m = 3$, hệ phương trình có hai nghiệm, loại.
- Trường hợp 2. $\begin{cases} \frac{m-9}{2} < 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m \neq 3 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm, loại.
- Trường hợp 3. $\frac{m-9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$ thì (4) trở thành

$$-x^2 + 5x + 14 - \frac{m^2 - 18m + 81}{4} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x + \frac{-m^2 + 18m - 25}{4} = 0.$$

Ta được $\Delta = 25 + (-m^2 + 18m - 25) = -m^2 + 18m$.

Để (4) có nghiệm duy nhất thì $m = 0$ (loại) hoặc $m = 18$. Với $m = 18$ phương trình (4) có nghiệm $x = \frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 18$.

IV. Hệ phương trình đẳng cấp

Định nghĩa 3. Biểu thức $f(x, y)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc 2 nếu $f(mx, my) = m^2 f(x, y)$.

Định nghĩa 4. Biểu thức $f(x, y)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc 3 nếu $f(mx, my) = m^3 f(x, y)$.

Định nghĩa 5. Hệ phương trình đẳng cấp bậc 2 theo x, y có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

(Mỗi phương trình trong hệ (3.2) là các biểu thức đẳng cấp bậc 2)

Phương pháp giải:

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào (3.2) để tìm y . Nếu không tìm được y thì hệ vô nghiệm trong trường hợp này.
- Xét $x \neq 0$.
 - Nếu $d_1 = 0$ hoặc $d_2 = 0$, chẳng hạn, $d_1 = 0$ thì ta chia cả hai vế phương trình thứ nhất cho x^2 ta được phương trình có dạng: $c_1\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_1 = 0$. Giải phương trình này ta tìm được tỉ số $\frac{y}{x}$, sau đó thế vào phương trình còn lại để tìm nghiệm x, y .
 - Nếu $d_1 \neq 0$ và $d_2 \neq 0$ thì ta có thể tạo ra một phương trình đẳng cấp bậc 2 thuần nhất (phương trình có hệ số tự do bằng 0) bằng cách:
 $d_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 - d_1) - d_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 - d_2) = 0$. Sau đó giải giống (i).

Định nghĩa 6. Hệ phương trình đẳng cấp bậc 3 theo x, y có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} F(x, y) = A \\ G(x, y) = B. \end{cases} \quad (3.3)$$

Trong đó, $F(x, y), G(x, y)$ là các biểu thức đẳng cấp bậc 3.

Phương pháp giải: Giải tương tự hệ phương trình (3.2).

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 0. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ:
$$\begin{cases} 2y^2 = 0 \\ -10y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$$
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:
$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y. \end{cases}$$
 - Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow -7x^2 = 0$ (vô nghiệm do $x \neq 0$).
 - Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 0y^2 = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$. Mà $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(2a, a), a \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + 4y^2 = 19. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + xy + 4y^2 = 19 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ:
$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ 4y^2 = 19 \end{cases}$$
, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2x. \end{cases}$$

a) Với $y = x$, (2) $\Leftrightarrow 6x^2 = 19 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{114}}{6}$ hoặc $x = -\frac{\sqrt{114}}{6}$.

b) Với $y = 2x$, (2) $\Leftrightarrow 19x^2 = 19 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(\frac{\sqrt{114}}{6}, \frac{\sqrt{114}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{114}}{6}, -\frac{\sqrt{114}}{6}\right), (1, 2), (-1, -2)$.

Ví dụ 14. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy - y^2 = -5. \end{cases}$$

Lời giải.

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} -y^2 = 1 \\ -y^2 = -5 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế (1) cho 5 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$6x^2 - 9xy - 6y^2 = 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -2x. \end{cases}$$

a) Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 5y^2 = -5$ (Vô nghiệm).

b) Với $y = -2x$, (2) $\Leftrightarrow -5x^2 = -5 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(1, -2), (-1, 2)$.

Ví dụ 15. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \\ x^3 + x^2y - y^3 = 5. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 & (1) \\ x^3 + x^2y - y^3 = 5 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} 2y^3 = 0 \\ -y^3 = 5 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^3 ta được phương trình:

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y. \end{cases}$$

a) Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow y^3 = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{5}$.

b) Với $x = -2y$, (2) $\Leftrightarrow -5y^3 = 5 \Leftrightarrow y = -1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}), (2, -1)$.

Ví dụ 16. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ 3x^3 - xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 & (1) \\ 3x^3 - xy^2 - y^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} y^3 = 2 \\ -y^3 = 1 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế (2) cho 2 rồi trừ (1) ta được phương trình:

$$5x^3 - 2xy^2 - 3y^3 = 0 \Leftrightarrow -3\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y.$$
 - Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(1, 1)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy = 14. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + 3xy = 14 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$-4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -2y. \end{cases}$$

- a) Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 14y^2 = 14 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -1$.
- b) Với $x = -2y$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \sqrt{7}$ hoặc $y = -\sqrt{7}$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(2, 1), (-2, -1), (-2\sqrt{7}, \sqrt{7}), (2\sqrt{7}, -\sqrt{7})$.

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 3xy = -9 \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 9. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^2 + 3xy = -9 & (1) \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 9 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (1) cộng (2) ta được phương trình:

$$2x^2 + 9xy + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = -\frac{1}{3} \\ \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y = -\frac{2}{3}x. \end{cases}$$

- a) Với $x = -3y$, (2) $\Leftrightarrow 0y^2 = 9$ (Vô nghiệm).
- b) Với $y = -\frac{2}{3}x$, (2) $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 3$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(-3, 2), (3, -2)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3 & (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (2) nhân 3 rồi trừ (1) ta được phương trình:

$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ x = y. \end{cases}$$

a) Với $x = 5y$, (2) $\Leftrightarrow 21y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{21}}{21}$ hoặc $y = \frac{\sqrt{21}}{21}$.

b) Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(-\frac{5\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}\right), \left(\frac{5\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right), (-1, -1), (1, 1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = -1 \\ x^3 - xy^2 - 3y^3 = 3. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = -1(1) \\ x^3 - xy^2 - 3y^3 = 3(2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (1) nhân 3 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$4x^3 + 3x^2y - xy^2 = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 4 \\ \frac{y}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ y = -x. \end{cases}$$

a) Với $y = 4x$, (2) $\Leftrightarrow -207x^3 = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{69}}$.

b) Với $y = -x$, (2) $\Leftrightarrow 3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{69}}, \frac{-4}{\sqrt[3]{69}}\right), (1, -1)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 \\ (x+y)(x^2 - y^2) = 3. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 \\ (x+y)(x^2 - y^2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 & (1) \\ x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 3 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (1) nhân 3 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$22x^3 + x^2y - xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) + 22 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -2 \Leftrightarrow y = -2x.$$
 - Với $y = -2x$, (1) $\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(1, -2)$.

Bài 23. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx^2 - (m+1)xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} mx^2 - (m+1)xy + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - (m+1)\left(\frac{y}{x}\right) + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = m \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ y = x. \end{cases}$$

a) Với $y = x$, (2) $\Leftrightarrow 3x^2 = 1$ (phương trình này có hai nghiệm).

b) Với $y = mx$, (2) $\Leftrightarrow (1+m+m^2)x^2 = 1$. Vì $1+m+m^2 > 0, \forall m$ nên hệ có 4 nghiệm thì $1+m+m^2 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -2$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq -2$.

V. Hệ phương trình hai ẩn khác

Khi gặp hệ phương trình hai ẩn chưa ở dạng cơ bản hay chưa có dạng đã biết phương pháp giải thì ta cần sử dụng linh hoạt các phương pháp: Thế, Cộng đại số, Phân tích nhân tử, Đặt ẩn phụ, Nhân liên hợp.

Ví dụ 17. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5, \\ 8x^3 + y^3 = 5y + 4x^2y. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5 & (1), \\ 8x^3 + y^3 = 5y + 4x^2y & (2). \end{cases}$$

• **Cách Thế biểu thức:** Để ý thấy (1) $\Leftrightarrow 4x^2 = 5 - y^2$, (2) $\Leftrightarrow 8x^3 - 4x^2y = y(5 - y^2)$, nên ta có thể giải bằng phương pháp thế biểu thức $5 - y^2 = 4x^2$ vào (2) và nhận được phương trình:

$$8x^3 - 4x^2y = y \cdot 4x^2 \Leftrightarrow 8x^3 - 8x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

+/ Với $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$.

+/ Với $x = y \Rightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(0; \sqrt{5}), (0; -\sqrt{5}), (1; 1), (-1; -1)\}$.

• **Cách Thế hằng số:** Để ý thấy có hệ số 5 ở cả hai phương trình. Ở phương trình (2), hệ số 5 nằm ở số hạng có bậc 1, trong khi tất cả các số hạng khác có bậc 3. Ở phương trình (1), hệ số tự do 5 bằng một biểu thức đẳng cấp bậc 2. Vì vậy ta có thể nghĩ đến phương pháp thế hằng số $5 = 4x^2 + y^2$ vào (2) và nhận được phương trình:

$$8x^3 + y^3 = (4x^2 + y^2)y + 4x^2y \Leftrightarrow 8x^3 - 8x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Đến đây, ta giải tiếp như trên và thu được tập nghiệm $S = \{(0; \sqrt{5}), (0; -\sqrt{5}), (1; 1), (-1; -1)\}$.

Ví dụ 18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9y^2 = (10x+4)(4-2x), \\ 9y^2 - 20x^2 - 24xy + 32x - 24y + 16 = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} 9y^2 = (10x+4)(4-2x) & (1), \\ 9y^2 - 20x^2 - 24xy + 32x - 24y + 16 = 0 & (2). \end{cases}$$

• **Cách 1:** Để ý thấy $(10x+4)(4-2x) = -20x^2 + 32x + 16$ là biểu thức không chứa y trong (2). Vì vậy ta giải bằng phương pháp thế như sau:

Ta có (1) $\Leftrightarrow 9y^2 = -20x^2 + 32x + 16$ thế vào (2) ta có

$$9y^2 - 24xy - 24y + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 18y^2 - 24xy - 24y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4x+4}{3} \end{cases}$$

+/ Với $y = 0$ thay vào (1) ta có $(10x+4)(4-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$.

+/ Với $y = \frac{4x+4}{3}$ thay vào (1), rút gọn được phương trình $36x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; 0\right), \left(0; \frac{4}{3}\right), (2; 0) \right\}$.

• **Cách 2:** Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn y , tham số x :

$$9y^2 - 24(x+1)y - 20x^2 + 32x + 16 = 0.$$

Ta có $\Delta_y = (18x)^2$. Suy ra (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12(x+1) + 18x}{9} = \frac{10x+4}{3} \\ y = \frac{12(x+1) - 18x}{9} = \frac{-2x+4}{3} \end{cases}$.

+/ Với $y = \frac{10x+4}{3}$ thế vào (1) được phương trình

$$(10x+4)^2 = (10x+4)(4-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

+/ Với $y = \frac{-2x+4}{3}$ thế vào (1) được phương trình

$$(-2x+4)^2 = (10x+4)(4-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; 0\right), \left(0; \frac{4}{3}\right), (2; 0) \right\}$.

Ví dụ 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 11x = y^3 + 11y, \\ x^2 + y^2 = 2x + y - 1. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 + 11x = y^3 + 11y & (1), \\ x^2 + y^2 = 2x + y - 1 & (2). \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 11x - 11y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 11(x-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + 11 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x-y=0 \Leftrightarrow y=x$ thế vào (2) ta có

$$2x^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}$.

Ví dụ 20. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2(xy+2x) = 12, \\ xy+x = 2. \end{cases}$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} (x+1)^2(xy+2x) = 12 \\ xy+x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(xy+2x) = 12, \\ (xy+2x) - (x+1) = 1. \end{cases}$$

Đặt $u = x+1$, $v = xy+2x$ ta được hệ
$$\begin{cases} u^2v = 12 & (*) \\ v - u = 1. \end{cases}$$

Thế $v = u+1$ vào (*) ta được phương trình $u^3 + u^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \Rightarrow v = 3$. Suy ra $x = 1, y = 1$.
Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(1; 1)\}$.

Ví dụ 21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x+3y-1} - \sqrt{x+6y-2} + x - 3y + 1 = 0, \\ x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 9y = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3y-1} - \sqrt{x+6y-2} + x - 3y + 1 = 0 & (1), \\ x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 9y = 0 & (2). \end{cases}$$

Để ý thấy $(2x+3y-1) - (x+6y-2) = x-3y+1$, nên ta sẽ sử dụng phương pháp nhân liên hợp:

• Điều kiện
$$\begin{cases} 2x+3y \geq 1 \\ x+6y \geq 2 \end{cases}$$

• Trường hợp $\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-1 = 0 \\ x+6y-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ (loại).

• Trường hợp $\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2} \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{x-3y+1}{\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2}} + (x-3y+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3y+1) \left(\frac{1}{\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 3y - 1. \end{aligned}$$

Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow (3y-1)^2 + 9y^2 - 6(3y-1)y + 4(3y-1) - 9y = 0 \Leftrightarrow 3y-3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(2; 1)\}$.

Ví dụ 22. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 27x^3 + 8y^3 = 35, \\ 3x^2y + 2xy^2 = 5. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} 27x^3 + 8y^3 = 35 & (1), \\ 3x^2y + 2xy^2 = 5 & (2). \end{cases}$$

Để ý thấy hệ là đẳng cấp bậc 3, nhưng ở đây ta sẽ giải hệ bằng phương pháp cộng đại số để minh họa cho phương pháp này. Ta quan sát: (1) có $27x^3 = (3x)^3$, $8y^3 = (2y)^3$. Mà $(3x+2y)^3 = 27x^3 + 8y^3 + 18(3x^2y + 2xy^2)$. Vì vậy ta giải hệ như sau:

Lấy (1) + 18 × (2) ta được

$$\begin{aligned} 27x^3 + 8y^3 + 18(3x^2y + 2xy^2) &= 35 + 18 \times 5 \\ \Leftrightarrow (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 &= 125 \\ \Leftrightarrow (3x+2y)^3 = 5^3 \Leftrightarrow 3x+2y = 5 \Leftrightarrow y &= \frac{5-3x}{2}. \end{aligned}$$

Thế $y = \frac{5-3x}{2}$ vào (1) ta có

$$27x^3 + 8\left(\frac{5-3x}{2}\right)^3 = 35 \Leftrightarrow 27x^3 + (5-3x)^3 = 35$$

$$\Leftrightarrow 27x^2 - 45x + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ (1; 1), \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right) \right\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10x = 0, \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 4y - 20 = 0. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10x = 0 & (1), \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 4y - 20 = 0 & (2). \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 10x = x^2 + 4y^2$ thế vào (2) ta được $y = \frac{3x-10}{2}$. Thế trở lại vào (1) và giải ra tập nghiệm $S = \left\{ (2; -2); \left(5; \frac{5}{2}\right) \right\}$.

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + x + 2y = x^2 - 8y^2, \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 2xy + x + 2y = x^2 - 8y^2 & (1), \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y & (2). \end{cases}$

+/ Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

+/ Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 - (2y+1)x - 8y^2 - 2y = 0$ có $\Delta_x = (6y+1)^2$. Suy ra $\begin{cases} x = 4y + 1 \\ x = -2y \end{cases}$ (loại).

Thế vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \{(5; 1)\}$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + x - 2 = 0, \\ 2x^3 - 2x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y = 0. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 2xy + x - 2 = 0 & (1), \\ 2x^3 - 2x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y = 0 & (2). \end{cases}$

• Cách 1: Phân tích

$$(2) \Leftrightarrow x^2(2x - 2y + 1) - 2y(2x - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2y)(2x - 2y + 1) = 0.$$

• Cách 2: Sử dụng phương pháp Δ chính phương:

$$(2) \Leftrightarrow 4y^2 - 2(x^2 + 2x + 1)y + (2x^3 + x^2) = 0 \text{ có } \Delta_y = (-x^2 + 2x + 1)^2.$$

Hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \right\}$.

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy + 4y + 1 = 0, \\ -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(4x^2 + 1). \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy + 4y + 1 = 0 & (1), \\ -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(4x^2 + 1) & (2). \end{cases}$

Để ý thấy vế trái của (2) có nhân tử chung là y và vế phải của (2) xuất hiện trong (1): (1) $\Leftrightarrow 4x^2 + 1 = -y^2 + 2xy - 4y$ (*). Nên ta sẽ thế (*) vào (2) được phương trình

$$\begin{aligned}
 -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y &= 2(-y^2 + 2xy - 4y) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y^2 + (4x+2)y - 4x^2 - 4x + 15 = 0 \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

(3) có $\Delta'_y = 16$, suy ra (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$.

Thay lại vào (1) giải ra tập nghiệm $S = \left\{(-1; -5), \left(\frac{1}{2}; -2\right)\right\}$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y, \\ x^2 + 3y^2 = 4. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y & (1), \\ x^2 + 3y^2 = 4 & (2). \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 4x + \frac{1}{2} \cdot 4y$. Thế $4 = x^2 + 3y^2$ ta được phương trình

$$x^3 - y^3 = (x^2 + 3y^2)x + \frac{1}{2}(x^2 + 3y^2)y \Leftrightarrow 5y^3 + 6y^2x + x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5y^2 + 6yx + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -y \\ x = -5y \end{cases}.$$

Thay vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \left\{(\pm 2; 0), (-1; 1), (1; -1), \left(-\frac{5}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(\frac{5}{\sqrt{7}}; -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$.

Bài 29. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} = x + 2y + 4xy, \\ \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} = 3x - 8y + 4. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} = x + 2y + 4xy & (1), \\ \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} = 3x - 8y + 4 & (2). \end{cases}$

Để ý (1) có:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4y^2 - 4xy &= (x - 2y)^2, \\
 (2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2})^2 - (x + 2y)^2 &= 7x^2 - 28xy + 28y^2 = 7(x - 2y)^2, \\
 (1) \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} - (x + 2y)) &= 0.
 \end{aligned}$$

Vậy nên ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp cho biểu thức $2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} - (x + 2y)$. Hệ có tập nghiệm $S = \{(2; 1)\}$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy = 4y - 1, \\ 2x + y = \frac{y}{4x^2 + 1} + 2. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy = 4y - 1 & (1), \\ 2x + y = \frac{y}{4x^2 + 1} + 2 & (2). \end{cases}$

+/ Trường hợp $y = 0$ không thỏa mãn.

+/ Trường hợp $y \neq 0$, chia hai vế của (1) cho y ta được (1) $\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 1}{y} + 2x + y = 4$.

Đặt $u = \frac{4x^2 + 1}{y}$, $v = 2x + y$ đưa về giải hệ $\begin{cases} u + v = 4, \\ v = \frac{1}{u} + 2. \end{cases}$

Tập nghiệm của hệ ban đầu $S = \left\{(-1; 5), \left(\frac{1}{2}; 2\right)\right\}$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 108, \\ xy^2 + y^3 = 4. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 108 & (1), \\ xy^2 + y^3 = 4 & (2). \end{cases}$

Lấy (1) + 27 × (2) ta được phương trình:

$$x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 216 \Leftrightarrow (x + 3y)^3 = 6^3 \Leftrightarrow x + 3y = 6 \Leftrightarrow x = 6 - 3y.$$

Thế vào (2) và giải ra tập nghiệm $S = \{(3 - 3\sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}), (3 + 3\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}), (3; 1)\}$.

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - x - 4y = 0. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0 & (1), \\ x^2 + 2y^2 - x - 4y = 0 & (2). \end{cases}$

Lấy (1) - 3 × (2), nhóm các số hạng để có hằng đẳng thức bậc 3, ta được phương trình:

$$(x - 1)^3 + (y - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = -(y - 2)^3 \Leftrightarrow x - 1 = 2 - y \Leftrightarrow x = 3 - y.$$

Thế vào (2) và giải ra tập nghiệm $S = \{(1; 2), (2; 1)\}$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + \frac{16xy}{x+2y} = 16, \\ \sqrt{x+2y} = x^2 - 2y. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + \frac{16xy}{x+2y} = 16 & (1), \\ \sqrt{x+2y} = x^2 - 2y & (2). \end{cases}$

Đặt $u = x + 2y > 0$, $v = 2xy$, biến đổi (1) trở thành

$$u^3 - 2uv + 8v - 16u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 16) + 2v(4 - u) = 0 \Leftrightarrow (u - 4)(u^2 + 4u - 2v) = 0.$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow (x + 2y - 4)(x^2 + 4y^2 + 4(x + 2y)) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$.

Thế vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \left\{ \left(-3; \frac{7}{2} \right), (2; 1) \right\}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 34. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(y - 3) - 9y = 1, \\ (x - 1)^2y^2 + 2y = -1. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x(y - 3) - 9y = 1 & (1), \\ (x - 1)^2y^2 + 2y = -1 & (2). \end{cases}$

Để thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Chia hai vế của phương trình (1) cho y , hai vế của phương trình (2) cho y^2 và đặt $t = -\frac{1}{y}$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x + t + 3xt = 9, \\ x^2 + t^2 - 2(x + t) = -1. \end{cases}$

Đặt $x + t = S$; $xt = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P :

$$\begin{cases} S + 3P = 9 \\ S^2 - 2S - 2P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3, P = 2 \\ S = -\frac{5}{3}, P = \frac{32}{9} \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Giải tiếp ta được tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \left\{ \left(1; -\frac{1}{2} \right); (2; -1) \right\}$.

Bài 35. Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m, \\ x+y = 3m. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq -1; y \geq -1$.

Đặt $\sqrt{x+1} = u; \sqrt{y+1} = v$. Khi đó hệ phương trình được viết lại là:

$$\begin{cases} u+v = m \\ u^2 + v^2 - 2 = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = m \\ m^2 - 2uv - 2 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = m \\ uv = \frac{m^2 - 3m - 2}{2} \end{cases} \quad (*).$$

Để hệ ban đầu có nghiệm thì hệ (*) phải có nghiệm thỏa mãn $u \geq 0; v \geq 0$. Tức là phương trình: $2v^2 - 2mv + m^2 - 3m - 2 = 0$ có 2 nghiệm không âm. Giải ra ta được $\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \leq m \leq 3 + \sqrt{13}$.

Bài 36. Giải phương trình: $x^2 + 3x - 1 = 4\sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2}$.

Lời giải. $x^2 + 3x - 1 = 4\sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2}$ (*).

- Nhận xét: $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2 + 2)$, điều kiện: $x \geq 1$.
 - Phân tích: $x^2 + 3x - 1 = a(x-1) + b(x^2 + 2) \Rightarrow a = 3$ và $b = 1$.
 - Đặt $u = \sqrt{x-1}$ và $v = \sqrt{x^2 + 2}$.
- $$(*) \Leftrightarrow 3u^2 + v^2 = 4uv \Leftrightarrow \begin{cases} v = u \\ v = 3u. \end{cases}$$

a) Với $v = u \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ (vô nghiệm).

b) Với $v = 3u \Leftrightarrow x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa điều kiện).

- Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Bài 37. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx^3 - mx^2y + 7xy^2 - 3y^3 = 4 \\ 2xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm.

Lời giải.
$$\begin{cases} mx^3 - mx^2y + 7xy^2 - 3y^3 = 4 & (1) \\ 2xy^2 - y^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (2) nhân (-4) rồi cộng (1) ta được phương trình:
$$mx^3 - mx^2y - xy^2 + y^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - m\left(\frac{y}{x}\right) + m = 0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 = m \end{cases} (*), \text{ với } t = \left(\frac{y}{x}\right).$$

a) Với $t = 1 \Rightarrow y = x$, (2) $\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Hệ có một nghiệm $(1; 1)$.

b) Với $t^2 = m$.

(a) $m < 0$. Hệ có đúng 1 nghiệm.

(b) $m = 0$. Hệ có đúng 1 nghiệm.

(c) $m > 0$. (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{m} \\ t = -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - m\sqrt{m})x^3 = 1 \\ (2m + m\sqrt{m})x^3 = 1. \end{cases} \quad (I)$

Hệ đã cho có đúng 2 nghiệm khi (I) có đúng 1 nghiệm khác 1 hoặc có 2 nghiệm, trong đó

có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + m\sqrt{m} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2m + m\sqrt{m} = 1 \\ 2m - m\sqrt{m} = 0 \\ 2m - m\sqrt{m} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ m = 4 \\ m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

• Vậy $m \in \left\{ 1; 4; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8, \\ x(y^3 - 2) = 6. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 & (1), \\ x(y^3 - 2) = 6 & (2). \end{cases}$

+/ Trường hợp $x = 0$ không thỏa mãn.

+/ Trường hợp $x \neq 0$, hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} 2 + 3y = \left(\frac{2}{x}\right)^3, \\ y^3 - 2 = \frac{6}{x}. \end{cases}$

Đặt $u = \frac{2}{x}$, ta được hệ: $\begin{cases} 2 + 3y = u^3 & (3), \\ y^3 - 2 = 3u & (4). \end{cases}$

Lấy (3) + (4) ta được phương trình $y^3 + 3y = u^3 + 3u \Leftrightarrow (y - u)(y^2 + yu + u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow y = u$.

Giải ra tập nghiệm $S = \{(-2; -1), (1; 2)\}$.

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 2(x + 2y) = 0, \\ 2xy(x^2 + 4y^2) + 2 = (x + 2y)^2. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 2(x + 2y) = 0 & (1), \\ 2xy(x^2 + 4y^2) + 2 = (x + 2y)^2 & (2). \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2x^3y + 8xy^3 + 2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow 2xy(x^2 + 4y^2 - 2) - (x^2 + 4y^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2xy - 1)(x^2 + 4y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

+/ Với $2xy = 1$ (*) $\Leftrightarrow 2 = 4xy$ thế vào (1) được phương trình

$$10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 4xy(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 & \text{(loại)} \\ x = 2y \end{cases}.$$

Thế $x = 2y$ vào (*) tìm được nghiệm $\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

+/ Với $x^2 + 4y^2$ (**) = 2 thế vào (1) được phương trình

$$10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - (x^2 + 4y^2)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2(x - 4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 4y \end{cases}.$$

Thế vào (**) tìm được nghiệm $\left(\frac{4}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \right\}$.

Bài 40. Giải phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$.

Lời giải. • Bài này có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn để đưa về hệ phương trình.

Cách xây dựng ẩn phụ như sau: Quan sát về trái có bậc hai nên ta sẽ đặt $\alpha t + \beta = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (*), sao cho sau khi bình phương, rút gọn thu được phương trình dạng:

$$7t^2 + 7t = \alpha x + \beta \quad (**).$$

Từ (*), (**) ta được hệ

$$\begin{cases} x = 7\alpha^2 t^2 + 14\alpha\beta t + 7\beta^2 - \frac{9}{4} \\ x = \frac{7}{\alpha} t^2 + \frac{7}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}.$$

Suy ra

$$7\alpha^2 t^2 + 14\alpha\beta t + 7\beta^2 - \frac{9}{4} = \frac{7}{\alpha} t^2 + \frac{7}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta có $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$.

• Cách giải: Xét phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (1).

Đặt $t + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (2), $t \geq -\frac{1}{2}$. Suy ra $7t^2 + 7t = x + \frac{1}{2}$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có hệ đối xứng loại 2 với điều kiện $t \geq -\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 7x^2 + 7x = t + \frac{1}{2}, \\ 7t^2 + 7t = x + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm $\begin{cases} x = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \\ t = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{-8-\sqrt{46}}{14} \\ t = \frac{-8+\sqrt{46}}{14} \end{cases}$. Vậy phương trình ban đầu có tập

ng nghiệm $S = \left\{ \frac{-8-\sqrt{46}}{14}; \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \right\}$.

§5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

I. Đề số 1a

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 2 - x$.

Lời giải.

$$PT \iff \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 3 = (2 - x)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\iff x = 1 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 2. (2 điểm) Tìm m sao cho phương trình $(x - 1)((m + 1)x^2 - 2x + 1) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

$$\text{Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} (m + 1) - 2 + 1 \neq 0 \\ m + 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = |x + 1| + 1$.

Lời giải.

TH1: $x \geq -1$.

$$PT \iff \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = (x + 2)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 0 \end{cases} \iff x = 0 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

TH2: $x < -1$.

$$PT \iff x^2 - 5x + 4 = x^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\iff x = \frac{4}{5} \text{ (loại)} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ mx - y + 2z = 2 \\ x + (1 - m)y + z = -2 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ mx - y + 2z = 2 \\ x + (1 - m)y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x + 2y - 1 \\ (m + 2)x + 3y = 4 \\ 2x + (3 - m)y = -1 \end{cases} \text{ . Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi}$$

$$\text{hệ } \begin{cases} (m + 2)x + 3y = 4 \\ 2x + (3 - m)y = -1 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất. } \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{vmatrix} m + 2 & 3 \\ 2 & 3 - m \end{vmatrix} \neq 0 \iff -m^2 + m \neq 0 \iff m \neq 0 \text{ và } m \neq 1. \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 5. (2 điểm) Giải phương trình $x^3 - x^2 + 1 = \sqrt{2x - 1}$.

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$

$$x^3 - x^2 + 1 = \sqrt{2x-1} \iff x^3 - x^2 - x + 1 + x - \sqrt{2x-1} = 0 \iff (x-1)^2(x+1) + \frac{(x-1)^2}{x + \sqrt{2x-1}} = 0$$

$$\iff (x-1)^2 \left(x+1 + \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} \right) = 0 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Vì $x \geq \frac{1}{2}$ nên $x+1 + \frac{1}{x + \sqrt{2x-1}} > 0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$

II. Đề số 1b

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} = 5 - x$.

Lời giải.

$$PT \iff \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 = (5-x)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = 3 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 2. (2 điểm) Tìm m sao cho phương trình $(x-2)(mx^2 - x + 2) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

$$\text{Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} 4m \neq 0 \\ m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{8} \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} xy - x - y = 1 \\ (x+y)^2 - 2xy = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = x+y+1 \\ (x+y)^2 - 2(x+y) - 15 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy = -2 \\ x+y = -3 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\begin{cases} xy = -2 \\ x+y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + my = 2 \\ (m+1)x + 2y = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = -m^2 - m + 2, D_x = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - m,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2m \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Hệ có nghiệm khi $D \neq 0$ hoặc $D_x = D_y = D = 0$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

$$D \neq 0 \iff -m^2 - m + 2 \neq 0 \iff m \neq 1 \text{ hoặc } m \neq -2. \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$D_x = D_y = D = 0 \text{ (không tồn tại } m\text{)}. \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Câu 5. (2 điểm) Giải phương trình $x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0$.

Lời giải.

$$x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \iff 2x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \iff 2x^3 = (x+2)^3. \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff (\sqrt[3]{2x-x-2}) \underbrace{(\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{x(x+2)} + (x+2)^2)}_{>0 \forall x \in \mathbb{R}} = 0 \iff x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

III. Đề số 2a

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình:

$$|2x - 5| = x - 1. \dots\dots\dots (3.4)$$

Lời giải.

$$(3.4) \Rightarrow (2x - 5)^2 = (x - 1)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.4) ta thấy $x = 2$ và $x = 4$ đều thỏa. $\dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{2; 4\}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$x - \sqrt{2x+7} = 4. \dots\dots\dots (3.5)$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x \geq -\frac{7}{2}. \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$(3.5) \Rightarrow \sqrt{2x+7} = x - 4 \Rightarrow 2x + 7 = (x - 4)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 9. \end{cases} \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.5) ta thấy chỉ có $x = 9$ thỏa mãn. $\dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{9\}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z & = -2 \\ -2x + 5y + z & = 5 \\ 3x - 7y + 4z & = 8. \end{cases} \dots\dots\dots (3.6)$$

Lời giải.

$$(3.6) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z & = -2 \\ -y + 5z & = 1 \\ 2y - 2z & = 14 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ -y + 5z = 1 \\ 8z = 16 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 9 \\ z = 2. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = (21; 9; 2)$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 4. (2 điểm) Tìm giá trị của tham số m để phương trình:

$$mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0 \tag{3.7}$$

có hai nghiệm phân biệt. Tìm hai nghiệm đó.

Lời giải.

(3.7) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m - 2)^2 - m(m - 3) > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 0. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Khi đó (3.7) có hai nghiệm là $x = \frac{m - 2 - \sqrt{4 - m}}{m}$ và $x = \frac{m - 2 + \sqrt{4 - m}}{m}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 5. (2 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3. \end{cases} \tag{3.8}$$

Lời giải.

Ta có $D = -m^2 - 3m, D_x = -2m^2 - 6m, D_y = m + 3$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$$\text{TH1: } D \neq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{-2m^2 - 6m}{-m^2 - 3m}; \frac{m + 3}{-m^2 - 3m} \right)$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$$\text{TH2: } D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3. \end{cases}$$

- $m = 0 \Rightarrow D_x = 0, D_y = 3 \neq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$
- $m = -3 \Rightarrow D_x = D_y = 0$. Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $x + my = 1$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

IV. Đề số 2b

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình:

$$|2 - x| = 2x + 1. \tag{3.9}$$

Lời giải.

$$(3.9) \Rightarrow (2-x)^2 = (2x+1)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.9) ta thấy chỉ có $x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn. (0,25 điểm).

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ (0,5 điểm).

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$x + \sqrt{x-1} = 13. \tag{3.10}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$ (0,25 điểm).

$$(3.10) \Rightarrow \sqrt{x-1} = 13 - x \Rightarrow x - 1 = (13 - x)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow x^2 - 27x + 170 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 17. \end{cases} \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.10) ta thấy chỉ có $x = 10$ thỏa mãn. (0,25 điểm).

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{10\}$ (0,5 điểm).

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x + 5y + z = 2 \\ 2x - 9y + 2z = 8 \\ 3x - 4y + z = 5. \end{cases} \tag{3.11}$$

Lời giải.

$$(3.11) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y + z = 2 \\ y + 4z = 12 \\ 11y + 4z = 11 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y + z = 2 \\ y + 4z = 12 \\ 10y = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{40} \\ y = -\frac{1}{10} \\ z = \frac{121}{40}. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = \left(\frac{21}{40}; -\frac{1}{10}; \frac{121}{40} \right)$ (0,5 điểm).

Câu 4. (2 điểm) Tìm giá trị của tham số m để phương trình:

$$(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m + 3 = 0 \tag{3.12}$$

có hai nghiệm phân biệt. Tìm hai nghiệm đó.

Lời giải.

(3.12) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ (0,5 điểm).

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 - (m-1)(m+3) > 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases}$ (0,5 điểm).

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m \neq 1. \end{cases}$ (0,5 điểm).

Khi đó (3.12) có hai nghiệm là $x = \frac{3-m-\sqrt{12-8m}}{m-1}$ và $x = \frac{3-m+\sqrt{12-8m}}{m-1}$ (0,5 điểm).

Câu 5. (2 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y = 4m \\ 2x + (m-1)y = m. \end{cases} \quad (3.13)$$

Lời giải.

Ta có $D = m^2 - m - 2, D_x = 4m^2 - 5m, D_y = m^2 - 8m$ (0,5 điểm).

TH1: $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{4m^2 - 5m}{m^2 - m - 2}; \frac{m^2 - 8m}{m^2 - m - 2} \right)$ (0,5 điểm).

TH2: $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2. \end{cases}$

• $m = -1 \Rightarrow D_x = 9 = D_y \neq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm. (0,5 điểm).

• $m = 2 \Rightarrow D_x = 6 \neq 0, D_y = -12 \neq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm (0,5 điểm).

V. Đề số 3a

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình $\frac{1-3x}{2x+1} = -2$.

Lời giải. ĐK: $x \neq -\frac{1}{2}$ (0,5 điểm)

Ta có: $PT \Leftrightarrow 1 - 3x = -4x - 2 \Leftrightarrow x = -3$ (0,5 x 2 điểm)

Đối chiếu ĐK, ta có tập nghiệm của pt đã cho là $S = \{-3\}$ (0,5 điểm)

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình $|3x - 5| = 2x + 3$.

Lời giải. $PT \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ \begin{cases} 3x - 5 = 2x + 3 \\ 3x - 5 = -2x - 3 \end{cases} \end{cases}$ (0,5 điểm)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \end{cases}$ (0,5 x 2 điểm)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2y^3 = 10 \\ 2x^2 + 3y^3 = 5 \end{cases}$.

Lời giải. HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^3 = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \times 2 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Giải phương trình $(x - 1)^2 + 2 = \sqrt{x^3 + 3x}$.

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$ $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

PT $\Leftrightarrow (x^2 + 3) - \sqrt{x(x^2 + 3)} - 2x = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x}) = 0 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 2\sqrt{x} \text{ (vì } \sqrt{x^2 + 3} + x\sqrt{x} > 0, \forall x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, PT đã cho có tập nghiệm là $S = \{1; 3\}$. $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Câu 5. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y+3} + 5\sqrt{x} = 4\sqrt{y+3} + 30 \\ x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + 3y^2 + 4y + 12 \end{cases}$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0, y \geq -3$. Ta có:

$$x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + 3y^2 + 4y + 12 \Leftrightarrow (x - 2)^3 + (x - 2) = (y + 1)^3 + (y + 1) \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$\Leftrightarrow x - 2 = y + 1 \Leftrightarrow x = y + 3$ $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

(do hàm số $f(t) = t^3 + t$ là đồng biến trên \mathbb{R} , vì $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > b$, ta có $\begin{cases} a^3 > b^3 \\ a > b \end{cases} \Rightarrow a^3 + a > b^3 + b \Rightarrow f(a) > f(b)$). $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Thay vào PT còn lại trong hệ, ta có:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x} = 30 \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) = f(3) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9. \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, HPT đã cho có nghiệm là $\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

VI. Đề số 3b

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+1} = 2$.

Lời giải. ĐK: $x \neq 2, x \neq -1$ $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

PT $\Leftrightarrow x(x+1) - 2(x-2) = 2(x+1)(x-2) \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, PT đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} \right\}$. $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình $|2x - 1| = |x + 1|$.

Lời giải. PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = x + 1 \\ 2x - 1 = -x - 1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \times 2 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \times 2 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x$.

Lời giải.

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ 3x^2 - 3x + 3 = (1 - 2x)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y - 12xy = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 - 18xy = 5 \end{cases}$.

Lời giải. HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} S + 2P = 4 \\ S^2 + P = 5 \end{cases}$, (trong đó $\begin{cases} S = 2x - 3y \\ P = 2x(-3x) = -6xy \end{cases}$, và $S^2 \geq 4P$) $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2S^2 - S - 6 = 0 \\ S + 2P = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = -\frac{3}{2} \\ P = \frac{11}{4} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

suy ra $2x$ và $-3y$ là các nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0$, suy ra $2x = -3y = 1 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Câu 5. (2 điểm) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{3(x^2 - 2x - 2)}$.

Lời giải. ĐK: $x \geq 1 + \sqrt{3}$.

$$PT \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = \sqrt{x(x+1)(x-2)} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) - \sqrt{(x+1)(x^2 - 2x)} - 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x+1}) (\sqrt{x^2 - 2x} - 2\sqrt{x+1}) = 0 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} - 2\sqrt{x+1} = 0 \text{ (vì } \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x+1} > 0, \forall x \geq 1 + \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{13} \\ x = 3 - \sqrt{13} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, PT đã cho có tập nghiệm là $S = \{3 + \sqrt{13}\}$. $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Chương 4

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Các khái niệm

Khái niệm (Bất đẳng thức). Cho hai số thực a, b . Các mệnh đề “ $a > b$ ”, “ $a < b$ ”, “ $a \geq b$ ”, “ $a \leq b$ ” được gọi là các bất đẳng thức.

Khái niệm (Bất đẳng thức cùng chiều, trái chiều). Cho bốn số thực a, b, c, d .

Các bất đẳng thức “ $a > b$ ”, “ $c > d$ ” được gọi là bất đẳng thức cùng chiều.

Các bất đẳng thức “ $a > b$ ”, “ $c < d$ ” được gọi là bất đẳng thức trái chiều.

Khái niệm (Bất đẳng thức hệ quả). Nếu mệnh đề “ $a > b \Rightarrow c > d$ ” đúng thì ta nói bất đẳng thức “ $c > d$ ” là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức “ $a > b$ ” và viết $a > b \Rightarrow c > d$.

Khái niệm (Bất đẳng thức tương đương). Nếu bất đẳng thức “ $a > b$ ” là hệ quả của bất đẳng thức “ $c > d$ ” và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết $a > b \Leftrightarrow c > d$.

2. Tính chất

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều.
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều.
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa.
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương

Để chứng minh một bất đẳng thức ta có thể sử dụng các cách sau:

- + Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đã biết.
- + Sử dụng một bất đẳng thức đã biết, biến đổi để dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Một số bất đẳng thức thông dụng:

- + $a^2 \geq 0$;
- + $a^2 + b^2 \geq 0$;
- + $a \cdot b \geq 0$, với $a, b \geq 0$;
- + $a^2 + b^2 \geq \pm 2ab$.

Ví dụ 1. Chứng minh $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{6}$, $\forall x \in [-2; 1]$.

Lời giải. Với $x \in [-2; 1]$, ta có

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{(1-x)(x+2)} \leq 6 \Leftrightarrow 4(1-x)(x+2) \leq 9 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy, bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$, với mọi số thực a, b .

Lời giải. Với mọi số thực a, b ta luôn có

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b).$$

Bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 3. Cho các số thực x, y, z . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;
- b) $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Lời giải.

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Phép chứng minh hoàn tất.

b) Ta có $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$.
Đẳng thức có được khi và chỉ khi $x = y = 1$. Bài toán đã được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$, với $a, b \geq 0$;

b) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Ta có $a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b) \Leftrightarrow (a + b)(a - b)^2 \geq 0$.
Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi a, b không âm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

b) Biến đổi bất đẳng thức đã cho tương đương với $(a - b)^2(a^2 - ab + b^2) \geq 0$ (hiển nhiên đúng).
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 5. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $ab \geq 1$. Chứng minh $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} &\geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ab - a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab - b^2}{(1+ab)(1+b^2)} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{a(b-a)(1+b^2) - b(b-a)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(b-a)(a+ab^2 - b - a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a, b thỏa mãn $ab \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab = 1$ hoặc $a = b$.

Ví dụ 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$. Chứng minh:

$$\frac{x+y}{2x-y} + \frac{y+z}{2z-y} \geq 4.$$

Lời giải. Từ giả thiết $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2xz}{x+z}$. Do đó

$$\frac{x+y}{2x-y} + \frac{y+z}{2z-y} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\frac{x(x+3z)}{x+z}}{\frac{2x^2}{x+z}} + \frac{\frac{z(z+3x)}{x+z}}{\frac{2z^2}{x+z}} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x+3z}{x} + \frac{z+3x}{z} \geq 8 \Leftrightarrow (x-z)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy, bài toán được chứng minh. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $x = y = z$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.

Lời giải. HD: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

Thực hiện biến đổi tương đương quy về bất đẳng thức

$$(a-b)^2(a^2 + ab + b^2) + (b-c)^2(b^2 + bc + c^2) + (a-c)^2(a^2 + ac + c^2) \geq 0.$$

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1.$$

Lời giải. Đặt $x = a^3, y = b^3, z = c^3$, với a, b, c dương và $abc = 1$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} \leq 1.$$

Ta có $(a-b)^2(a+b) \geq 0 \Leftrightarrow a^3+b^3 \geq ab(a+b)$.

Tương tự, ta cũng có $b^3+c^3 \geq bc(b+c), a^3+c^3 \geq ac(a+c)$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3+b^3+1} + \frac{1}{b^3+c^3+1} + \frac{1}{c^3+a^3+1} &\leq \frac{1}{ab(a+b)+1} + \frac{1}{bc(b+c)+1} + \frac{1}{ac(a+c)+1} \\ &= \frac{1}{ab(a+b)+abc} + \frac{1}{bc(b+c)+abc} + \frac{1}{ac(a+c)+abc} \\ &= \frac{1}{abc} = 1. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 3. Cho a, b, c, d, e là các số thực tùy ý. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e).$$

Lời giải. HD: Biến đổi bất đẳng thức thành $\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0$.

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = 2$. Chứng minh rằng

$$(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab) \leq 1.$$

Lời giải. Không giảm tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, ta có

$$4(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab) \leq 4(a^2+ac)(b^2+ac)(bc+ab) = 4ab(b^2+ac)(a+c)^2.$$

Mặt khác, ta có $(b^2+ca-ab)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4ab(b^2+ca) \leq (ab+b^2+ca)^2$. Do đó

$$4(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab) \leq (ab+b^2+ca)^2(a+c)^2 \leq (a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2 = 4.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ (với giả sử $a \geq b \geq c$).

Bài 5. Cho $a, b \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh $\left|\frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}\right| < 1$.

Lời giải. Với $a, b \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ thì $\tan^2 a, \tan^2 b \in (0; 1)$. Do đó

$$\begin{aligned} \left|\frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}\right| < 1 &\Leftrightarrow |\tan a - \tan b| < |1 - \tan a \tan b| \\ &\Leftrightarrow \tan^2 a + \tan^2 b - 2 \tan a \tan b < 1 - 2 \tan a \tan b + \tan^2 a \tan^2 b \\ &\Leftrightarrow (1 - \tan^2 a)(\tan^2 b - 1) < 0 \text{ (luôn đúng với giả thiết đã cho)}. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Dạng 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

Khi gặp các bất đẳng thức, trong đó có chứa *tổng, tích của các số không âm*, ta có thể áp dụng những bất đẳng thức sau đây để chứng minh:

a) Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.

Cho $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

$$+ a + b \geq 2\sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$+ ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, (\forall a, b);$$

$$+ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, (\forall a, b);$$

$$+ a^2 + b^2 \geq 2ab, (\forall a, b).$$

b) Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm.

Cho $a \geq 0, b \geq 0$ và $c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

$$+ a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, (\forall a, b, c \geq 0).$$

c) Tổng quát, nếu $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$.

Chú ý:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ với mọi a, b .

b) Dựa vào bất đẳng thức cần chứng minh, giả thuyết về số dương, số không âm,... và chiều của bất đẳng thức, dấu bằng xảy ra... để định hướng biến đổi thích hợp.

c) Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng có thể áp dụng được bất đẳng thức Cô-si với các kỹ thuật tách số hoặc ghép số, ghép cặp hai, ghép cặp ba, tăng hoặc giảm số hạng, tăng hoặc giảm bậc của lũy thừa,...

Chẳng hạn với $a > 0, b > 0$ thì có nhiều hướng đánh giá và khai thác:

$$\bullet a + b \geq 2\sqrt{ab}; a + b = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}};$$

$$\bullet a + 2b = a + b + b; a + 1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 1 = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2};$$

- $1 + a + b \geq 3\sqrt[3]{ab}$; $2 + a = 1 + 1 + a \geq 3\sqrt[3]{a}$;
- $a^2 + \frac{1}{a} = a^2 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$; $ab = a \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$; $ab^2 = a \cdot b \cdot b$;...

d) Cô-si ngược dấu, với a, b, c dương thì:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}; \frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}; \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}, \dots$$

Ví dụ 1. Cho a, b là hai số dương. Chứng minh:

a) $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$;

b) $a^2 + b^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai cặp số dương a, b và $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ta được:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0;$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} > 0.$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} = 4$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai cặp số dương $a^2, \frac{1}{a}$ và $b^2, \frac{1}{b}$ ta được:

$$a^2 + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{a};$$

$$b^2 + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{b}.$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên, ta được $a^2 + b^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu a, b cùng dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ và a, b trái dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Lời giải. Nếu a, b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

Nếu a, b là hai số trái dấu thì tương tự $\left(-\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{b}{a}\right) \geq 2$ và vì vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có, với mọi a, b thì $a^2 + b^2 \leq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2|ab| \geq 2ab$ hay $2ab \leq a^2 + b^2$ nên

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2.$$

Vậy, nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

Ví dụ 4. Chứng minh với ba số $a, b, c \geq 0$ thì $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$. Dấu bằng của đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta được:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab};$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc};$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \Rightarrow a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geq 0$.

Ví dụ 5. Cho a, b dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a + b)(1 + ab) \geq 4ab.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0;$$

$$1 + ab \geq 2\sqrt{ab} > 0$$

Khi đó, $(a + b)(1 + ab) \leq 4(\sqrt{ab})^2 = 4ab$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ và $1 = ab \Leftrightarrow a = b = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

Vậy nên

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = 8abc.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$.

Bài 2. Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a + 1)(b + 1)(a + c)(b + c) \geq 16abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a + 1 \geq 2\sqrt{a}$$

$$b + 1 \geq 2\sqrt{b}$$

$$a + c \geq 2\sqrt{ac}$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc}$$

Vậy nên

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{ac} \sqrt{bc} = 16abc.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi a thì:

$$\frac{a^2 + 6}{\sqrt{a^2 + 2}} \geq 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Ta có:

$$\frac{a^2 + 6}{\sqrt{a^2 + 2}} = \frac{(a^2 + 2) + 4}{\sqrt{a^2 + 2}} = \sqrt{a^2 + 2} + \frac{4}{\sqrt{a^2 + 2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$\sqrt{a^2 + 2} + \frac{4}{\sqrt{a^2 + 2}} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Do đó, $\frac{a^2 + 6}{\sqrt{a^2 + 2}} \geq 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\sqrt{a^2 + 2} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + 2}} \Leftrightarrow a^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

Bài 4. Chứng minh với mọi a, b, c khác 0 thì có bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geq 2\frac{a}{c}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2\frac{b}{a} \text{ và } \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{c}{b}.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức, ta được:

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Bài 5. Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 6. Cho 4 số a, b, c, d dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\begin{aligned} a+b &\geq 2\sqrt{ab}, c+d \geq 2\sqrt{cd} \\ \Rightarrow a+b+c+d &\geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \\ \Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2 &\geq (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 = ab+cd+2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd} \\ \Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 &\geq \sqrt{abcd} \\ \Rightarrow \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 &\geq abcd. \end{aligned}$$

Bài 7. Cho 4 số a, b, c, d dương. Chứng minh:

$$(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số dương, ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &\geq 16abcd > 0; \\ \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 &\geq \frac{16}{abcd} > 0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2 &\geq 16abcd \cdot \frac{16}{abcd} = 16^2 \\ \Rightarrow (a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) &\geq 16. \end{aligned}$$

Bài 8. Cho hai số $a \geq 1$ và $b \geq 1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm, ta có:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} = a\sqrt{(b-1) \cdot 1} + b\sqrt{(a-1) \cdot 1} \leq a\left(\frac{b-1+1}{2}\right) + b\left(\frac{a-1+1}{2}\right) = ab.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a-1 = b-1 = 1 \Leftrightarrow a = b = 2$.

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $B = b^2 + \frac{1}{b}$, với $b > 0$.

Lời giải. Với $b > 0$, ta có:

$$B = b^2 + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \geq 3\sqrt[3]{b^2 \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2b}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $b^2 = \frac{1}{2b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Bài 10. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh

$$\text{a) } (p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4};$$

$$\text{b) } (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}.$$

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số x, y : $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta có:

$$(p-a)(p-b) \leq \left(\frac{(p-a)+(p-b)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2p-a-b}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}.$$

b) Áp dụng kết quả câu a), ta có:

$$0 < (p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4};$$

$$0 < (p-b)(p-c) \leq \frac{a^2}{4};$$

$$0 < (p-c)(p-a) \leq \frac{b^2}{4}.$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \leq \frac{a^2b^2c^2}{64} \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}.$$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq a^2b^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b > 0$.

Do đó,

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} \geq ab^2c.$$

Do đó,

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Vì vậy

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Chia hai vế đẳng thức này cho abc ta được điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$.

Bài 12. Cho a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ỹ mẫu, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{(b+c) \cdot a}} \geq \frac{a}{a+b+c} = \frac{2a}{b+c+a}.$$

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}} = \frac{b}{\sqrt{(a+c) \cdot b}} \geq \frac{b}{a+b+c} = \frac{2b}{b+c+a}.$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{c}{\sqrt{(b+a) \cdot c}} \geq \frac{c}{a+b+c} = \frac{2c}{b+c+a}.$$

Cộng lại 3 bất đẳng thức về theo về, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

Bài 13. Cho x, y, z dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a, b :

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4.$$

Nên $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$, do đó:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right).$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right).$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{x+y} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \right) \right).$$

Cộng lại các bất đẳng thức trên về theo về, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \\ & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \right) \right) \\ & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1. \end{aligned}$$

Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Định lí 1. Cho a, b, c, d là các số thực tùy ý, ta có bất đẳng thức sau

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2 \text{ (Bunhiacopxki)}$$

Dấu " = " xảy ra khi $ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Hệ quả 1. Bất đẳng thức Bunhiacopxki mở rộng.

Cho $2n$ số $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; \dots; b_n$ ta có bất đẳng thức sau

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Dấu " = " xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Hệ quả 2. Bất đẳng thức cộng mẫu.

Cho n số $a_1; a_2; \dots; a_n$ và n số dương $x_1; x_2; \dots; x_n$ ta có bất đẳng thức sau.

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Dấu " = " xảy ra khi $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$.

Ví dụ 1. Cho $x^2 + y^2 = 5$ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = x + 2y$.

Lời giải. Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} 2 &= (x + 2y)^2 \leq (x^2 + y^2)(1^2 + 2^2) = 25 \\ &\Rightarrow -5 \leq A \leq 5. \end{aligned}$$

Vậy $\max y = 5$ xảy ra khi $x = 1; y = 2$.

Vậy $\min y = -5$ xảy ra khi $x = -1; y = -2$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+1}$.

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq 1$.

Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+1})^2 \leq (1^2 + 2^2)((\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{x+1})^2) = 10 \\ &\Rightarrow A \leq \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Vậy $\max y = \sqrt{10}$ xảy ra khi $\sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{x+1}}{2} \Leftrightarrow 1-x = \frac{1+x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biết x, y là 2 số thực dương thỏa mãn $x + 2\sqrt{2}y = 5$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4$.

Lời giải. Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} 5A &= (x^4 + y^4)(1^2 + 2^2) \geq (x^2 + 2y^2)^2 \\ (x^2 + 2y^2)(1 + 4) &\geq (x + 2\sqrt{2}y)^2 = 25 \\ &\Rightarrow A \geq 5 \end{aligned}$$

Vậy $\min y = 5$. Dấu " = " xảy ra khi $x = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 1; y = \sqrt{2}$.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $A = \sqrt{1-2x} + 3\sqrt{1+x}$

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Ta có

$$A = \sqrt{1-2x} + 3\sqrt{1+x} = \sqrt{1-2x} + \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2+2x}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \left(1 + \frac{9}{2}\right) \left((\sqrt{1-2x})^2 + (\sqrt{2+2x})^2\right) = \frac{33}{2}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{\sqrt{66}}{2}. \text{ Vậy } \max A = \frac{\sqrt{66}}{2}. \text{ Dấu " = " xảy ra khi } \sqrt{2+2x} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2x} \Leftrightarrow x = \frac{5}{22}.$$

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$.

Lời giải. Ta có

$$(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-4 + 6-x) = 4 \Rightarrow \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq 2$$

$$x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2.$$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow x = 4$.

Dạng 4. Sử dụng các bất đẳng thức hệ quả

Ta có thể sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho nhiều số, hoặc trong những bài toán có mẫu, ta có thể sử dụng Bất đẳng thức cộng mẫu.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-2x} + 4\sqrt{1+x}$

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2; \forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Thật vậy bất } \Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0.$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi } \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên ta có

$$A = \sqrt{1-2x} + 4\sqrt{1+x}$$

$$= \sqrt{1-2x} + 2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x} \leq (1^2 + 2^2 + 2^2) \left((\sqrt{1-2x})^2 + (\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1+x})^2 \right) = 27 \Rightarrow A \leq 3\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \max y = 3\sqrt{3} \text{ xảy ra khi } \frac{\sqrt{x+1}}{2} = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 2. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn $x + y + z = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x+y-z} + \frac{4}{y+z-x} + \frac{9}{z+x-y}$.

Lời giải. Ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}; \forall x, y, z \text{ là các số thực dương.}$$

Ta có $x+y-z; y+z-x; z+x-y$ là các số dương vì x, y, z là độ dài ba cạnh của tam giác nên ta có

$$A = \frac{1}{x+y-z} + \frac{4}{y+z-x} + \frac{9}{z+x-y} \geq \frac{(1+2+3)^2}{x+y-z+y+z-x+z+x-y} = \frac{36}{3} = 12.$$

$$\text{Vậy } \min y = 12. \text{ Dấu " = " xảy ra khi } \frac{x+y-z}{1} = \frac{y+z-x}{2} = \frac{z+x-y}{3} \Leftrightarrow x = 1; y = \frac{3}{4}; z = \frac{5}{4}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{2+3x}$

Lời giải. ĐK: $\frac{-3}{x} \leq x \leq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} 3A &= 3\sqrt{1-x} + 3\sqrt{2+3x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{2+3x} \\ \Rightarrow 9A^2 &\leq (1+1+1+9)(1-x+1-x+1-x+2+3x) = 60 \\ \Rightarrow A &\leq \frac{\sqrt{60}}{3}. \text{ Vậy } \max y = \frac{\sqrt{60}}{3}. \text{ Dấu " = " xảy ra khi } x = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2zx} + \frac{4}{z^2 + 2zx}.$$

Lời giải. Ta có

$$A = \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2zx} + \frac{4}{z^2 + 2zx} \geq \frac{(1+1+2)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx} = \frac{16}{(x+y+z)^2} = \frac{16}{9}.$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{16}{9}$$

Bài 3. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2}, \forall x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta có $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + (c+z)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq ax + by + cz.$$

Điều này luôn đúng vì ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2.$$

Dấu " = " xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Tổng quát: Ta luôn có bất đẳng thức sau: (**Bất đẳng thức khoảng cách**)

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2 + \dots + (a_n + x_n)^2}.$$

Dạng 5. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tọa độ véc-tơ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Đặt $\vec{u} = (a+c, b)$ và $\vec{v} = (a-c, b)$.

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(a+c)^2 + b^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$ và $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Áp dụng $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$, ta có bất cần cm.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + 4b^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10} \geq 5$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có VT = $\sqrt{(a+3)^2 + (2b)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (2b-3)^2}$.

Đặt $\vec{u} = (a+3, 2b)$ và $\vec{v} = (a-1, 2b-3)$ thì $\vec{u} - \vec{v} = (4, 3)$

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(a+3)^2 + (2b)^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(a-1)^2 + (2b-3)^2}$ và $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Áp dụng $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} - \vec{v}|$, ta có bất cần cm.

Ví dụ 3. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Lời giải. Ta có $P = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$.

Đặt $\vec{u} = (x - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ và $\vec{v} = (x + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ thì $\vec{u} - \vec{v} = (1, \sqrt{3})$

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ và $|\vec{u} - \vec{v}| = 2$.

Áp dụng $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} - \vec{v}|$, ta được $P \geq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi \vec{u} và $-\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min P = 2$ tại $x = 0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{c^2 + cb + b^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải. HD: VT = $\sqrt{(a + \frac{1}{2}b)^2 + (\frac{3}{2}b)^2} + \sqrt{(-a - \frac{1}{2}c)^2 + (\frac{3}{2}c)^2}$

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sqrt{(a-b)^2 + c^2} + \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \geq 2\sqrt{c^2 + a^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải. HD: $\sqrt{(a-b)^2 + c^2} + \sqrt{(a+b)^2 + (-c)^2} \geq 2\sqrt{c^2 + a^2}$

Bài 3. Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a > c > 0, b > c$.

Lời giải. HD: Sử dụng $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$.

trong đó $\vec{u} = (\sqrt{c}, \sqrt{a-c}), \vec{v} = (\sqrt{b-c}, \sqrt{c})$.

Bài 4. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Lời giải. HD: $\vec{u} = (x-3, 2), \vec{v} = (-x-1, 1)$.

Bài 5. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 + 10x + 26} + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

Lời giải. HD: $\vec{u} = (x+5, 1), \vec{v} = (-x-2, 1)$

Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1. Chứng minh $\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

Lời giải. Quy đồng, nhân chéo ta được bất đẳng thức tương đương

$$|a-b|(1+|a|+|b|+|ab|) \leq (1+|a-b|)(|a|+|b|+2|ab|)$$

$$\Leftrightarrow |a-b| \leq |a|+|b|+|ab(a-b)|+2|ab| \text{ (đúng).}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$.

Ví dụ 2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $|ax^2 + bx + c| \leq 1, \forall |x| \leq 1$.

Chứng minh rằng $|a| + 2|b| + 3|c| \leq 7$.

Lời giải. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó:

$$f(1) = a + b + c, f(-1) = a - b + c, f(0) = c.$$

$$\text{Do đó, } a = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1) - 2f(0)), b = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)), c = f(0).$$

Suy ra,

$$|a| + 2|b| + 3|c| = \frac{1}{2}|f(1) + f(-1) - 2f(0)| + |f(1) - f(-1)| + 3|f(0)| \quad (4.1)$$

$$\leq \frac{3}{2}|f(1)| + \frac{3}{2}|f(-1)| + 4|f(0)| \quad (4.2)$$

$$\leq 7. \quad (4.3)$$

Ví dụ 3. Tìm GTNN của biểu thức $A = |x + 2017| + |x - y - 6| + |2x - y + 44|$.

Lời giải. Ta có $A \geq |x + 2017 + x - y - 6 - 2x + y - 44|$ hay $A \geq 1967$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x + 2017 \geq 0 \\ x - y - 6 \geq 0 \\ 2x - y + 44 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + 2017 \leq 0 \\ x - y - 6 \leq 0 \\ 2x - y + 44 \leq 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm GTNN của $A = |x + 5| + |2x - 7| + |3x + 12|$.

Lời giải. HD: $A \geq |x + 5 + 2x - 7 - 3x - 12|$ hay $A \geq 14$.

Bài 2. Tìm GTNN của $A = |x - 1| + |y - 2| + |z - 3|$ với $|x| + |y| + |z| = 2017$

Lời giải. HD: $A = |x - 1| + |y - 2| + |z - 3| \geq |x| - 1 + |y| - 2 + |z| - 3$ hay $A \geq 2011$

Bài 3. Cho các số thực thỏa mãn $|a + b + c| \leq 1$, $|a - b + c| \leq 1$, $|4a + 2b + c| \leq 8$, $|4a - 2b + c| \leq 8$.

Chứng minh rằng: $|a| + 3|b| + |c| \leq 7$.

Lời giải. HD: Chứng minh $|a + c| + |b| \leq 1$ (1), $|4a + c| + 2|b| \leq 8$ (2).

Cộng từng vế (1) và (2) được $|a| + |b| \leq 3$.

Nhân từng vế (1) với 4 rồi cộng từng vế với (2) được $2|b| + |c| \leq 4$.

Bài 4. Chứng minh $\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|}$.

Lời giải. HD: Nhân chéo

Bài 5. Chứng minh rằng: Nếu $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ thì $|ab - c| < 20$.

Lời giải. HD: $|ab - c| \leq |ab - a| + |a - c| = |a||b - 1| + |a - c|$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I. Tóm tắt lí thuyết

Định nghĩa 1. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình (bpt) sau khi thu gọn có dạng $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ trong đó a, b là các số thực với $a \neq 0$ và x là ẩn số.

1. Giải và biện luận bất phương trình $ax + b > 0$

- Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$;
- $a = 0$, bpt thành $0x + b > 0$. Ta xét hai trường hợp:
 $b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$;
 $b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$.

2. Giải và biện luận bất phương trình $ax + b \leq 0$

- Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$;
- Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- $a = 0$, bpt thành $0x + b \leq 0$. Ta xét hai trường hợp:
 $b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$;
 $b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng: $ax + b > 0$ (*)

- Nếu $a > 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x < -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ có cách giải tương tự.

Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$).

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x - 1 \geq 0$.

b) $2x + 3 < 4x - 5$.

c) $(x - 3)(2x + 5) \leq 2x^2 + 4x - 7$.

Lời giải.

a) $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

b) $2x + 3 < 4x - 5 \Leftrightarrow 2x - 4x < -5 - 3 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (4; +\infty)$.

c) $(x - 3)(2x + 5) \leq 2x^2 + 4x - 7 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 15 \leq 2x^2 + 4x - 7 \Leftrightarrow -5x \leq 8 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{5}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[-\frac{8}{5}; +\infty\right)$.

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1} \geq 0$.

b) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} < \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Lời giải.

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1} \geq 0$.

Ta có $x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

b) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} < \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Ta có: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$x^2 + 3x - 2 < x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-\infty; 0)$.

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x - 1}(3x - 8) \leq 0$.

c) $\frac{6 - 5x}{\sqrt{2x + 1}} > \sqrt{2x + 1}$.

b) $\frac{4x + 3}{\sqrt{2 - x}} \geq 0$.

d) $\frac{x - 1}{2 - x} < 1$.

Lời giải.

a) $\sqrt{x - 1}(3x - 8) \leq 0$.

Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

- Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Với $x > 1$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$3x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}.$$
 Kết hợp điều kiện $x > 1$ ta được: $1 < x \leq \frac{8}{3}.$
- Vậy bất phương trình đã cho có các nghiệm $1 \leq x \leq \frac{8}{3}.$

b) $\frac{4x+3}{\sqrt{2-x}} \geq 0.$ Điều kiện: $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$

Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}.$$

Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được: $-\frac{3}{4} \leq x < 2.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[-\frac{3}{4}; 2\right).$

c) $\frac{6-5x}{\sqrt{2x+1}} > \sqrt{2x+1}.$

Điều kiện: $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$

Với $x > -\frac{1}{2}$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$6-5x > 2x+1 \Leftrightarrow -7x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{7}.$$

Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right).$

d) $\frac{x-1}{2-x} < 1.$

Điều kiện: $2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2.$

- Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$x-1 < 2-x \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$
 Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được $x < \frac{3}{2}.$

- Với $x > 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$x-1 > 2-x \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$
 Kết hợp điều kiện $x > 2$ ta được $x > 2.$

- Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty).$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $-4x+1 > 0.$

c) $10x+9 < 0.$

b) $5x-6 \leq 0.$

d) $-2x+8 \leq 0.$

Lời giải.

$$\text{a) } -4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

$$\text{b) } 5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.

$$\text{c) } 10x + 9 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{9}{10}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\frac{9}{10}\right)$.

$$\text{d) } -2x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [4; +\infty)$.

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } 3(x - 1) + 2 > 2x + 3.$$

$$\text{c) } x^2 - 3x + 4 \leq x^2 - 2.$$

$$\text{b) } 4x + 3 < 2x - 1.$$

$$\text{d) } 3x^2 - 10x + 8 \geq 3x(x + 1).$$

Lời giải.

$$\text{a) } \text{Tập nghiệm của bất phương trình là } S = (4; +\infty).$$

$$\text{b) } \text{Tập nghiệm của bất phương trình là } S = (-\infty; -2).$$

$$\text{c) } \text{Tập nghiệm của bất phương trình là } S = [2; +\infty).$$

$$\text{d) } \text{Tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left(-\infty; \frac{8}{13}\right].$$

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

$$\text{a) } 3 - \frac{2x + 1}{5} > x + \frac{3}{4}.$$

$$\text{c) } 2 + \frac{3(x + 1)}{8} < 3 - \frac{x - 1}{4}.$$

$$\text{b) } -2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x - 7)}{3}.$$

$$\text{d) } \frac{x + 1}{2} - \frac{x + 2}{3} < 2 + \frac{x}{6}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } 3 - \frac{2x + 1}{5} > x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 60 - 4(2x + 1) > 20x + 15 \Leftrightarrow -28x > -41 \Leftrightarrow x < \frac{41}{28}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{41}{28}\right)$.

$$\text{b) } -2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x - 7)}{3} \Leftrightarrow -2x + \frac{3}{5} > 2x - 7 \Leftrightarrow -4x > -\frac{38}{5} \Leftrightarrow x < \frac{19}{10}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{19}{10}\right)$.

$$\text{c) } 2 + \frac{3(x + 1)}{8} < 3 - \frac{x - 1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x + 3}{8} + \frac{x - 1}{4} < 1 \Leftrightarrow 5x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{5}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$.

- d) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6} \Leftrightarrow 3(x+1) - 2(x+2) < 12+x \Leftrightarrow 3x+3-2x-4 < 12+x \Leftrightarrow 0 \cdot x < 13$
(luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).
Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\frac{x+2}{x^2+2} \geq 0$.
c) $\frac{2x-3}{x^2+x+1} \leq \frac{4x+3}{x^2+x+1}$.
b) $\frac{3(x-1)-2}{x^2+4x+5} < 0$.
d) $\frac{x^2+x+2}{4x^2+4x+2} > \frac{(x+1)(x-2)}{4x^2+4x+2}$.

Lời giải.

- a) Ta có $x^2+2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; +\infty)$.
- b) Ta có $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $3(x-1)-2 < 0 \Leftrightarrow 3x-5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.
- c) Ta có $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $2x-3 \leq 4x+3 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; +\infty)$.
- d) Ta có $4x^2+4x+2 = (2x+1)^2+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:
 $x^2+x+2 > (x+1)(x-2) \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$.

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

- a) $(3x-6)\sqrt{3-x} \leq 0$.
d) $(2x-1)^2(x+3) \geq 0$.
b) $\frac{\sqrt{6x+3}}{2-x} > 0$.
e) $\frac{3x-2}{5x+1} \leq 0$.
c) $\frac{1-4x}{\sqrt{x+5}} < \sqrt{x+5}$.
f) $\frac{8x+1}{2x-3} > 2$.

Lời giải.

- a) Điều kiện: $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.
Rõ ràng $x=3$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
Với $x < 3$ bất phương trình đã cho trở thành:
 $3x-6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 2] \cup \{3\}$.
- b) Điều kiện: $6x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.
Với $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
Với $x > -\frac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:
 $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được $-\frac{1}{2} < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

c) Điều kiện: $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Với $x > -5$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$1 - 4x < x + 5 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}.$$

Kết hợp điều kiện $x > -5$ ta được $x > -\frac{4}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

d) Trường hợp $2x - 1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$ rõ ràng là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Trường hợp $2x - 1 \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; +\infty)$.

e) Điều kiện: $x \neq -\frac{1}{5}$.

Trường hợp $x < -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Kết hợp điều kiện: $x < -\frac{1}{5}$ ta được bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp $x > -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$$

Kết hợp điều kiện: $x > -\frac{1}{5}$ ta được $-\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right]$.

f) Điều kiện: $x \neq \frac{3}{2}$.

Trường hợp $x < \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$8x + 1 < 4x - 6 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{4}.$$

Kết hợp điều kiện: $x < \frac{3}{2}$ ta được $x < -\frac{7}{4}$.

Trường hợp $x > \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$8x + 1 > 4x - 6 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}.$$

Kết hợp điều kiện: $x > \frac{3}{2}$ ta được $x > \frac{3}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩnXét bất phương trình một ẩn dạng: $ax + b > 0$

(*).

① Trường hợp $a \neq 0$:

- Nếu $a > 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x < -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

② Trường hợp $a = 0$:

- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay bất phương trình có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.
- Nếu $b \leq 0$ thì bất phương trình (*) vô nghiệm hay bất phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$.

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ có cách giải và biện luận tương tự.Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$).**Ví dụ 1.** Giải và biện luận bất phương trình $mx + 6 > 2x + 3$.**Lời giải.** $mx + 6 > 2x + 3 \Leftrightarrow (m - 2)x > -3$.

- Trường hợp $m - 2 = 0$ hay $m = 2$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Trường hợp $m - 2 > 0$ hay $m > 2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x > \frac{-3}{m-2}$.
- Trường hợp $m - 2 < 0$ hay $m < 2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x < \frac{-3}{m-2}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4m + 3)x + 2m - 4 < 0$ vô nghiệm.**Lời giải.** Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.**Ví dụ 3.** Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0$.**Lời giải.** Điều kiện $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

- Trường hợp $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x > 1$ ta được bất phương trình:
 $x - m + 2 > 0 \Leftrightarrow x > m - 2$.

- Nếu $m - 2 \geq 1$ hay $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (m - 2; +\infty)$.
- Nếu $m - 2 < 1$ hay $m < 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (1; +\infty)$.

- Vậy: với $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (m - 2; +\infty)$;
với $m < 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (1; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận bất phương trình $(1 - m)x - 2m > -2x - 6$.

Lời giải. $(1 - m)x - 2m > -2x - 6 \Leftrightarrow (3 - m)x > 2m - 6$.

- Trường hợp $3 - m = 0$ hay $m = 3$ thì bất phương trình đã cho vô nghiệm.
- Trường hợp $3 - m > 0$ hay $m < 3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x > \frac{2m - 6}{3 - m}$ hay $x > -2$.
- Trường hợp $3 - m < 0$ hay $m > 3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x < \frac{2m - 6}{3 - m}$ hay $x < -2$.

Bài 2. Cho bất phương trình $(m^2 + 3m)x + 4 \geq -2(x + m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. $(m^2 + 3m)x + 4 \geq -2(x + m) \Leftrightarrow (m^2 + 3m + 2)x + 2m + 4 \geq 0$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi:

$$\begin{cases} m^2 + 3m + 2 = 0 \\ 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy $m = -1, m = -2$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 3. Giải và biện luận bất phương trình $(2x - 3m + 2)\sqrt{2 - x} < 0$.

Lời giải. Điều kiện $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

- Trường hợp $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x < 2$ ta được bất phương trình:
 $2x - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3m - 2}{2}$.
- Nếu $\frac{3m - 2}{2} < 2$ hay $m < 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \left(\frac{3m - 2}{2}; 2\right)$.
- Nếu $\frac{3m - 2}{2} \geq 2$ hay $m \geq 2$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Vậy: với $m \geq 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$;
với $m < 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \left(\frac{3m - 2}{2}; 2\right)$.

Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

- Biến đổi bất phương trình về một trong bốn dạng sau

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0.$$

- Nêu điều kiện mà bất phương trình phải thỏa, từ đó tìm được giá trị của tham số.

Ví dụ 4. Cho bất phương trình $(4m^2 - 6m)x + 7m \geq (3m^2 - 5)x + 4 + 5m$. Định m để bất phương trình thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m^2 - 6m + 5)x + 2m - 4 \geq 0.$$

Bpt thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = 5 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy bpt thỏa với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 5$.

Ví dụ 5. Định m để bất phương trình $mx + 3m^3 \geq -3(x + 4m^2 - m - 12)$ có tập nghiệm là $[-24; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m + 3)x + 3m^3 + 12m^2 - 3m - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (m + 3)[x + 3(m^2 + m - 4)] \geq 0.$$

- $m = -3$, bpt có tập nghiệm là \mathbb{R} (loại).
- $m < -3$, bpt $\Leftrightarrow x + 3(m^2 + m - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3(m^2 + m - 4)$ (loại).
- $m > -3$, bpt $\Leftrightarrow x + 3(m^2 + m - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3(m^2 + m - 4)$. Bpt có tập nghiệm là $[-3(m^2 + m - 4); +\infty)$.

Do đó, bpt có tập nghiệm $[-24; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ -3(m^2 + m - 4) = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m^2 + m - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m = -4 \text{ hay } m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình vô nghiệm

$$(6m^2 + m - 2)x - 7m \geq (6m^2 + 5)x - 5m - 6.$$

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m - 7)x - 2m + 6 \geq 0.$$

$$\text{Bpt vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 = 0 \\ -2m + 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 7.$$

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) $m^2(x - 1) \geq 25x + 5m - 6$;

b) $\sqrt{(m^2 - 9)x + m + 7} > 3$;

Lời giải.

a) Bpt $\Leftrightarrow (m^2 - 25)x - m^2 - 5m + 6 \geq 0$.

$$\text{Bpt thỏa với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ -m^2 - 5m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -5.$$

b) Bpt $\Leftrightarrow (m^2 - 9)x + m + 7 > 9 \Leftrightarrow (m^2 - 9)x + m - 2 > 0$.

$$\text{Bpt thỏa với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Bài 6. Định m để hàm số $y = \sqrt{(m+3)x+m-5}$ xác định với mọi $x \in [0;5]$.

Lời giải.

Hàm số y xác định với mọi $x \in [0;5] \Leftrightarrow (m+3)x+m-5 \geq 0$ (*), với mọi $x \in [0;5]$.

Bpt (*) thỏa với mọi $x \in [0;5] \Rightarrow$ bpt (*) thỏa tại $x=0 \Rightarrow m-5 \geq 0 \Rightarrow m \geq 5$.

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow x \geq \frac{-m+5}{m+3}$.

Vậy YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ \frac{-m+5}{m+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5$.

Bài 7. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{5-x}[(m^2+3)x-4m] \geq 0$ có tập nghiệm là $[1;5]$.

Lời giải.

Bpt $\Leftrightarrow x=5$ hoặc $\begin{cases} x < 5 \\ (m^2+3)x-4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$ hoặc $\begin{cases} x < 5 \\ x \geq \frac{4m}{m^2+3} \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow \frac{4m}{m^2+3} = 1 \Leftrightarrow m^2-4m+3=0 \Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=3$.

Bài 8. Định m để hai bất phương trình sau tương đương

a) $x-9 < 0$ và $5mx-3m-42 < 0$;

b) $3mx+2-2m > 0$ và $(3m-1)x+3-2m > 0$.

Lời giải.

a) Bpt $x-9 < 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; 9)$.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 5m > 0 \\ \frac{3m+42}{5m} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

b) YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m(3m-1) > 0 \\ \frac{2m-2}{3m} = \frac{2m-3}{3m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{1}{3} \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Khi cho một hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn thì tập hợp nghiệm của hệ là giao của các tập hợp nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

• **Các bước thực hành giải toán:**

1. Tìm điều kiện của hệ (nếu có).

2. Biến đổi để đưa hệ bất phương trình về dạng đặc trưng $\begin{cases} a_1x+b_1 \leq 0 \text{ (1)} \\ a_2x+b_2 \leq 0 \text{ (2)} \end{cases}$.

3. Giải từng bất phương trình trong hệ. Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của phương trình (1), (2) trong hệ.

4. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = S_1 \cap S_2$.

Ví dụ 6. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.

Ví dụ 7. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x - \frac{3}{5} < \frac{7-2x}{3} \\ 2x-1 < 5(3x-1) \end{cases}.$

Lời giải. $\begin{cases} 2x - \frac{3}{5} < \frac{7-2x}{3} \\ x-1 < 5(3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x-9 < 35-10x \\ 2x-1 < 15x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{13} < x < \frac{11}{10}.$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(\frac{4}{13}; \frac{11}{10}\right).$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 2x^2 - x - (x+3)(x-1) \\ x-1 < 0 \end{cases}.$

Lời giải. $\begin{cases} (x-1)(x+2) \leq 2x^2 - x - (x+3)(x-1) \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-5 \leq 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; 1).$

Bài 10. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x-1 \leq x+5 \\ 2x-1 < x^2 - (x-1)(x+1) \end{cases}.$

Lời giải. $\begin{cases} 3x-1 \leq x+5 \\ 2x-1 < x^2 - (x-1)(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; 1).$

Bài 11. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases}.$

Lời giải. $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \frac{44}{7} \\ 4x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{22}{7} \\ x < \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}.$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(-\infty; \frac{7}{4}\right).$

Bài 12. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x-4}} > 0 \\ x < 2(x+1) \end{cases}.$

Lời giải. $\begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x-4}} > 0 \\ x < 2(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 3 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (4; +\infty).$

Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Giải và biện luận hệ bất phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2 \leq 0 \end{cases} (I).$

- Xét các trường hợp tồn tại dấu của a_1 và a_2 .
- Với mỗi trường hợp riêng biệt nhận được ở trên, thông thường ta có các trường hợp sau:

– **TH1:** Nếu $a_1, a_2 > 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \leq \min \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}$.

– **TH2:** Nếu $a_1, a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \geq \max \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}$.

– **TH3:** Nếu $a_1 > 0; a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b_1}{a_1} \\ x \geq -\frac{b_2}{a_2} \end{cases}$.

Hệ có nghiệm điều kiện là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq -\frac{b_1}{a_1}$.

Khi đó nghiệm của hệ là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq x \leq -\frac{b_1}{a_1}$.

- **TH4:** Nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$. Khi đó thay trực tiếp giá trị tham số vào hệ (I) .

Ví dụ 8. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + m \leq 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} x + m \leq 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -m \\ x > 3 \end{cases}$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $-m > 3 \Leftrightarrow m < -3$.

Ví dụ 9. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 & (1) \\ 3x + 2 > 2x - 1 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow x > -3$.

$(1) \Leftrightarrow (1 - 2m)x \leq 1 - 4m^2$. Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \mathbb{R}$.
Khi đó hệ có tập nghiệm $S = (-3; +\infty)$.

- TH2: Nếu $1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.
Suy ra (1) có nghiệm: $x \geq \frac{1 - 4m^2}{1 - 2m} \Leftrightarrow x \geq 1 + 2m$.
Khi đó hệ có tập nghiệm $S = [1 + 2m; +\infty)$ (do $1 + 2m > 2 > -3$).

- TH3: Nếu $1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ thì (1) có nghiệm $x \leq 1 + 2m$.
Hệ bất phương trình có nghiệm khi: $1 + 2m > -3 \Leftrightarrow m > -2$.
Với $-2 < m < \frac{1}{2}$ thì hệ bất phương trình có tập nghiệm $S = (-3; 1 + 2m)$.

Vậy với $m > -2$ hệ bất phương trình có nghiệm.

Ví dụ 10. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 \\ 4x + 1 < -x + 6 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 & (1) \\ 4x + 1 < -x + 6 & (2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow x < 1.$$

$$(1) \Leftrightarrow (m - 3)x < m^2 - 9. \text{ Xét các trường hợp:}$$

- TH1: Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.
Với $m = 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.
- TH2: Nếu $m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.
Suy ra (1) có nghiệm: $x > m + 3$.
Khi đó hệ vô nghiệm khi $m + 3 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -2$.
Với $-2 \leq m < 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.
- TH3: Nếu $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$ thì (1) có nghiệm $x < m + 3$.
Với $m > 3$ hệ bất phương trình luôn có nghiệm.

Vậy hệ bất phương trình vô nghiệm khi $-2 \leq m \leq 3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 13. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ m + x > 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ m + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 1 - m \end{cases}$

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $1 - m < 2 \Leftrightarrow m > -1$.

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 > 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x < \frac{m + 5}{2} \end{cases}$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $\frac{m + 5}{2} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{3}$.

Bài 15. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 \\ mx + m - 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải. $\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 & (1) \\ mx + m - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow x \leq \frac{2m - 2}{3}.$$

$$(2) \Leftrightarrow mx \leq 1 - m \quad (3). \text{ Xét các trường hợp:}$$

- TH1: Nếu $m = 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow 0x \leq 1$ luôn đúng.
Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x \leq -\frac{2}{3}$ và nghiệm là không duy nhất.
- TH2: Nếu $m > 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow x \leq \frac{1 - m}{m}$.
Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq \min \left\{ \frac{2m - 2}{3}, \frac{1 - m}{m} \right\}$ và nghiệm là không duy nhất.

- TH3: Nếu $m < 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow x \geq \frac{1-m}{m}$.

$$\text{Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất thì } \frac{2m-2}{3} = \frac{1-m}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy với $m = -\frac{3}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 16. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} mx + 6 > 2x + 3m \\ m(x - m) < x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng $\begin{cases} (m-2)x > 3m-6 & (1) \\ (m-1)x < m^2-1 & (2) \end{cases}$ (I).

Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m < 1$, khi đó hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > m+1 \end{cases} \Rightarrow m+1 < x < 3$.
Khi đó tập nghiệm của hệ là $S = (m+1; 3)$.
- TH2: Nếu $m = 1$, khi đó hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 0x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- TH3: Nếu $1 < m < 2$, khi đó hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < m+1 \end{cases} \Rightarrow x < \min\{3, m+1\} = m+1$.
Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (-\infty; m+1)$.
- TH4: Nếu $m = 2$, khi đó hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 0x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- TH5: Nếu $m > 2$, khi đó hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < m+1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < m+1$.
Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (3; m+1)$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq 2$.

Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

Ví dụ 11. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

- Nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$.
- Có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3)$.
- Có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m - 1 \\ x \leq m + 2 \end{cases}$. Suy ra hệ có tập nghiệm $S = (m - 1; m + 2]$.

- Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$ khi và chỉ khi

$$[-2; -1) \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < -2 \\ m+2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1.$$

b) Hệ có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3) \Leftrightarrow m+2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

c) Hệ không có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq m-1 \\ m+2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m < -3. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -3 \leq m < \frac{3}{2}$.

Ví dụ 12. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m > 1 \\ mx+m^2-2m \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

- a) Nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; +\infty)$.
- b) Có nghiệm thuộc $[0; 3)$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x+m > 1 \\ mx+m^2-2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1-m & (1) \\ mx \geq m(2-m). & (2) \end{cases}$ Gọi S_1, S_2, S lần lượt là tập nghiệm của (1), (2) và của hệ. Khi đó $S_1 = (1-m; +\infty)$ và

- Với $m = 0$ ta có $S_2 = \mathbb{R} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1-m; +\infty)$.
- Với $m > 0$ ta có $S_2 = [2-m; +\infty) \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = [2-m; +\infty)$.
- Với $m < 0$ ta có $S_2 = (-\infty; 2-m] \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1-m; 2-m]$.

- a) Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; +\infty) \Leftrightarrow [-1; +\infty) \subset S$.
 - Với $m = 0$ ta có $S = (1; +\infty) \not\subset [-1; +\infty) \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn.
 - Với $m > 0$ ta có $[-1; +\infty) \subset S \Leftrightarrow 2-m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 3$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m \geq 3$ thỏa mãn.
 - Với $m < 0$ ta có $S = (1-m; 2-m] \not\subset [-1; +\infty) \Rightarrow m < 0$ không thỏa mãn.
 Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[3; +\infty)$.
- b) Hệ có nghiệm thuộc $[0; 3) \Leftrightarrow [3; 0) \cap S \neq \emptyset$.
 - Với $m = 0$ ta có $[0; 3) \cap S = (1; 3) \neq \emptyset \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
 - Với $m > 0$ ta có $[0; 3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow 2-m < 3 \Leftrightarrow m > -1$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m > 0$ thỏa mãn.
 - Với $m < 0$ ta có $[0; 3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 3 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta có $-2 < m < 0$ thỏa mãn.
 Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $(-2; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 17. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+2m-1 > 0 \\ 6m-2-x \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 3]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x+2m-1 > 0 \\ 6m-2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1-2m \\ x \leq 6m-2. \end{cases}$ Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m < -2 \\ 3 \leq 6m-2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$.

Bài 18. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m > 2 \\ (m-1)x - m^2 + 4m - 3 > 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ

- Có nghiệm thuộc $(-\infty; 2)$.
- Có nghiệm thuộc $[-1; 3]$.
- Nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x+m > 2 \\ (m-1)x - m^2 + 4m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2-m \\ (m-1)x > (m-1)(m-3). \end{cases}$ Giải và biện luận hệ ta có

- Với $m \leq 1$ ta có hệ vô nghiệm.
- Với $m > 1$, hệ có tập nghiệm $S = (\max\{m-3; 2-m\}; +\infty)$.

- Hệ có nghiệm thuộc $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \max\{m-3; 2-m\} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 2 \\ 2-m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Kết hợp điều kiện $m > 1$ ta có $1 < m < 5$ thỏa mãn.

- Hệ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m-3; 2-m\} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 3 \\ 2-m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 6.$$

Kết hợp điều kiện $m > 1$ ta có $1 < m < 5$ thỏa mãn.

- Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m-3; 2-m\} < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < -1 \\ 2-m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 3 \end{cases} \text{ vô nghiệm } m.$$

Bài 19. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx-1 < 0 \\ (3m-2)x - m < 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ nghiệm đúng với mọi x dương.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} mx-1 < 0 \\ (3m-2)x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx < 1 \\ (3m-2)x < m. \end{cases}$ Ta có

- Với $m = 0$, hệ có tập nghiệm $S = (0; +\infty) \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
- Với $m = \frac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \not\subset (0; +\infty) \Rightarrow m = \frac{2}{3}$ không thỏa mãn.
- Với $m < 0$, hệ có tập nghiệm $S = \left(\frac{m}{3m-2}; +\infty\right)$. Hệ có nghiệm đúng với mọi x dương $\Leftrightarrow \frac{m}{3m-2} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện $m < 0$.

- Với $0 < m < \frac{2}{3}$, hệ vô nghiệm.
 - Với $m > \frac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $\left(-\infty; \min\left\{\frac{1}{m}; \frac{m}{3m-2}\right\}\right) \not\subset (0; +\infty) \Rightarrow m > \frac{2}{3}$ không thỏa mãn.
- Vậy có duy nhất giá trị $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

Bài 20. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} m(x-1) + 2 \geq 0 \\ x - m \leq 2. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} m(x-1) + 2 \geq 0 \\ x - m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx \geq m-2 \\ x \leq m+2. \end{cases}$

- Với $m = 0$, hệ có tập nghiệm $S = (-\infty; 2) \supset [0; 1] \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
- Với $m < 0$, hệ có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \min\left\{\frac{m-2}{m}; m+2\right\}\right)$. Hệ nhận mọi $x \in [0; 1]$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \geq 1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$. Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta có $-1 \leq m < 0$ thỏa mãn.

- Với $m > 0$, hệ nhận mọi $x \in [0; 1]$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có

$0 < m \leq 2$ thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[-1; 2]$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 21. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2m - 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nhận tập xác định là tập nghiệm.

Lời giải. TXĐ $D = (-2; 2)$. Ta có $\begin{cases} x + 2m - 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 - 2m \\ x \leq \frac{m+1}{2}. \end{cases}$

Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-2; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \leq -2 \\ m + 1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$.

Bài 22. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m - 1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm.

Lời giải. TXĐ $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Ta có $\begin{cases} x + m - 1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 - m \\ x \geq \frac{m+1}{2}. \end{cases} \quad (*)$

Hệ ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có tập nghiệm S thỏa mãn $\begin{cases} S \neq \emptyset \\ S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset. \end{cases}$

• $S \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 1 - m \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$.

• $S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} > \frac{1}{2} \\ 1 - m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết hợp điều kiện $m \leq \frac{1}{3}$ ta có $m \leq 0$ thỏa mãn.

§3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Nhị thức bậc nhất

Định nghĩa 1. Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

Ví dụ 1. a) $-2x + 3$ là nhị thức bậc nhất đối với x .

b) $7y - 9$ là nhị thức bậc nhất đối với y .

c) $5u$ là nhị thức bậc nhất đối với u .

2. Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất

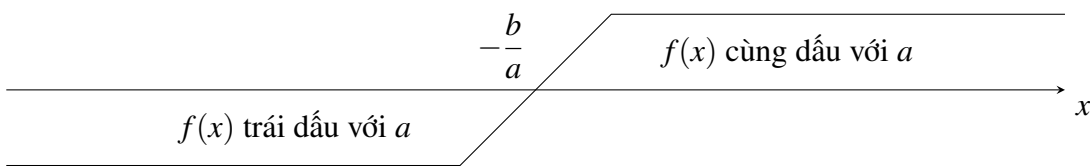
Định lý 1. Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $(-\frac{b}{a}; +\infty)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $(-\infty; -\frac{b}{a})$.

- Các kết quả của định lý trên được thể hiện qua bảng sau

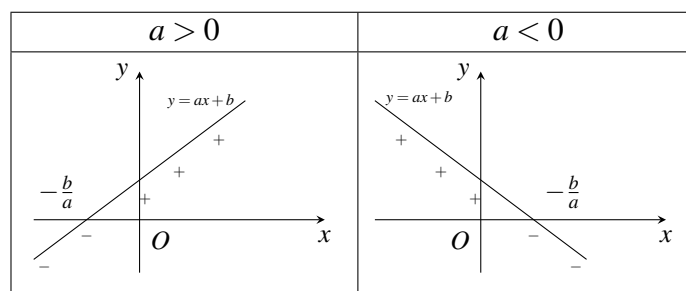
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a		cùng dấu với a

Ta gọi bảng này là *bảng xét dấu* nhị thức $f(x) = ax + b$.

- Biểu diễn trên trục số



- Minh họa bằng đồ thị



⚠ Định lý trên có thể rút gọn bằng một trong hai quy tắc sau: **phải cùng trái trái hoặc trước trái sau cùng.**

3. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 2. Xét dấu của nhị thức bậc nhất: $f(x) = 2x + 1$

Lời giải. $f(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-$	0	$+$

Ví dụ 3. Xét dấu biểu thức: $f(x) = 4mx - 3$

Lời giải. Xét $m = 0$ thì $f(x) = -3 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Xét $m \neq 0$ ta có hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $m > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4m}$	$+\infty$
y	$-$	0	$+$

- Trường hợp 2: $m < 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4m}$	$+\infty$
y	$+$	0	$-$

Kết luận:

$m = 0$ thì $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$;

$m > 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x < \frac{-3}{4m}$, $f(x) > 0$ khi $x > \frac{-3}{4m}$;

$m < 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x > \frac{-3}{4m}$, $f(x) > 0$ khi $x < \frac{-3}{4m}$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xét dấu tích - thương các nhị thức bậc nhất

Giả sử $f(x)$ là một tích (hoặc thương) của các nhị thức bậc nhất. Ta xét dấu $f(x)$ theo các bước như sau:

Bước 1: Tìm nghiệm của các nhị thức bậc nhất và sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Bước 2: Lập bảng xét dấu: Xét dấu các nhị thức bậc nhất và suy ra dấu của $f(x)$.

Bước 3: Kết luận về dấu của $f(x)$.

Ví dụ 4. Xét dấu biểu thức $f(x) = (3x - 1)(2 - x)$.

Lời giải. Ta có

- $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
- $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		2	$+\infty$	
$3x - 1$		-	0	+		+
$2 - x$		+		+	0	-
$f(x)$		-	0	+	0	-

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0$ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$.
- $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $f(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 2$.

Ví dụ 5. Xét dấu biểu thức $g(x) = \frac{(x+1)(3x-5)}{-2x+4}$.

Lời giải. Ta có

- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
- $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.
- $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$	-1		$\frac{5}{3}$		2	$+\infty$	
$x + 1$		-	0	+		+		+
$3x - 5$		-		-	0	+		+
$-2x + 4$		+		+		+	0	-
$g(x)$		+	0	-	0	+		-

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $g(x) > 0$ khi $x \in \left(-\infty; -1\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right)$.

- $g(x) < 0$ khi $x \in \left(-1; \frac{5}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $g(x) = 0$ khi $x = \frac{5}{3}$ hoặc $x = -1$.
- $g(x)$ không xác định khi $x = 2$ (trong bảng xét dấu kí hiệu bởi \parallel).

Ví dụ 6. Xét dấu biểu thức $h(x) = \frac{2x+1}{(6-2x)(5-x)}$.

Lời giải. Ta có

- $2x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
- $6-2x=0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $5-x=0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng xét dấu của $h(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	5	$+\infty$			
$2x+1$		-	0	+		+		+
$6-2x$		+		+	0	-		-
$5-x$		+		+		+	0	-
$h(x)$		-	0	+		-		+

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $h(x) > 0$ khi $x \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (5; +\infty)$.
- $h(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; 5)$.
- $h(x) = 0$ khi $x = -\frac{1}{2}$.
- $h(x)$ không xác định khi $x = 3$ và $x = 5$.

Ví dụ 7. Xét dấu biểu thức $h(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{4-2x}$.

Lời giải. Ta có $h(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{4-2x} = \frac{11-x}{(x+1)(4-2x)}$

- $11-x=0 \Leftrightarrow x = 11$.
- $x+1=0 \Leftrightarrow x = -1$.
- $4-2x=0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu của $h(x)$:

x	$-\infty$	-1	2	11	$+\infty$
$11 - x$	+		+	0	-
$x + 1$	-	0		+	+
$4 - 2x$	+		+	0	-
$h(x)$	-	+	-	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $h(x) > 0$ khi $x \in (-1; 2) \cup (11; +\infty)$.
- $h(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 11)$.
- $h(x) = 0$ khi $x = 11$.
- $h(x)$ không xác định khi $x = -1$ và $x = 2$.

Ví dụ 8. Xét dấu biểu thức $f(x) = 3x^2 - x - 2$.

Lời giải. Ta có $f(x) = 3x^2 - x - 2 = 3(x - 1) \left(x + \frac{2}{3}\right)$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $x + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$x - 1$	-		-	0
$x + \frac{2}{3}$	-	0		+
$f(x)$	+	0	-	0

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0$ khi $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.
- $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$.
- $f(x) = 0$ khi $x = -\frac{2}{3}$ hoặc $x = 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét dấu biểu thức $f(x) = (3 - x)(5x - 2)(x - 1)$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	1	3	$+\infty$
$3-x$	+		+		+
$5x-2$	-	0	+		+
$x-1$	-		-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+

Bài 2. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{1-x}{2x+3}$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$1-x$	+		+	0
$2x+3$	-	0	+	
$f(x)$	-		+	0

Bài 3. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x-3}{(2x-1)(-x+2)}$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$x-3$	-		-		-
$2x+1$	-	0	+		+
$-x+2$	+		+	0	-
$f(x)$	+	0	-	0	+

Bài 4. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{(x-3)(4-x)}{x}$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	0	3	4	$+\infty$
$x-3$	-		-	0	+
$4-x$	+		+		+
x	-	0	+		+
$f(x)$	+		-	0	+

Bài 5. Xét dấu biểu thức $f(x) = x^2 - 4$.

Lời giải. Ta có $f(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$ $	$-$	0
$f(x)$	$+$	0	$-$	0

Bài 6. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x-2}$.

Lời giải. Ta có $f(x) = \frac{5x-7}{(2x-1)(x-2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{5}$	2	$+\infty$
$5x-7$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x-2$	$-$	$ $	$-$	$ $	0
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Bài 7. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x^2-4} - 1$.

Lời giải. Ta có $f(x) = \frac{-2x+9}{x^2-4} = \frac{-2x+9}{(x-2)(x+2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$	-2	2	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$-2x+9$	$+$	$ $	$+$	$ $	0
$x-2$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Bài 8. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x-2}$.

Lời giải. Ta có $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2x+2}{x(x-1)(x-2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $
$x-1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0
$x-2$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$	$-$	$+$

Dạng 2. Xét dấu nhị thức có chứa tham số

Khi xét dấu của nhị thức có chứa tham số cần lưu ý, nếu hệ số a có chứa tham số cần xét các trường hợp:

TH1: $a = 0$.

TH2: $a > 0$.

TH3: $a < 0$.

Mỗi trường hợp ta có bảng xét dấu tương ứng.

Ví dụ 9. Xét dấu biểu thức: $f(x) = -mx + 2$.

Lời giải. Nếu $m = 0$ thì $f(x) = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $m \neq 0$. Khi đó $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất, có nghiệm $x_0 = \frac{2}{m}$. Mặt khác, $a > 0 \Leftrightarrow m < 0$ và $a < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Vậy ta có bảng xét dấu trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m < 0$

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	$+\infty$
$f(x)$		-	+

- Trường hợp 2: $m > 0$

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	$+\infty$
$f(x)$		+	-

Kết luận:

$m = 0$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

$m < 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x < \frac{2}{m}$, $f(x) > 0$ khi $x > \frac{2}{m}$;

$m > 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x > \frac{2}{m}$, $f(x) > 0$ khi $x < \frac{2}{m}$.

Ví dụ 10. Xét dấu của biểu thức $f(x) = -\frac{m}{2}x + 5$.

Lời giải. Xét $m = 0$ thì $f(x) = 5 > 0$.

Xét $m \neq 0$, ta có hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $\frac{-m}{2} < 0 \Leftrightarrow m > 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{10}{m}$	$+\infty$
$f(x)$		+	-

- Trường hợp 2: $\frac{-m}{2} > 0 \Leftrightarrow m < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{10}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Ví dụ 11. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m-2)x - 3 + 2m$

Lời giải. Xét $m = 2$, ta có $f(x) = 1 > 0$.

Xét $m \neq 2$, ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3-2m}{m-2}$.

Lập bảng xét dấu:

- Trường hợp 1: $m > 2$

x	$-\infty$	$\frac{3-2m}{m-2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Trường hợp 2: $m < 2$

x	$-\infty$	$\frac{3-2m}{m-2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Ví dụ 12. Xét dấu biểu thức $f(x) = (m-1)x - 1$ với m là một tham số đã cho.

Lời giải. Nếu $m = 1$ thì $f(x) = -1 < 0$ với mọi x .

Nếu $m \neq 1$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \frac{1}{m-1}$.

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m > 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{m-1}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Trường hợp 2: $m < 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{m-1}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 9. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m-1)x + m^2 - 1$.

Lời giải. Nếu $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $f(x) = 0$.

Nếu $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \frac{m^2-1}{m-1} = m+1$.

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$m+1$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Trường hợp 2: $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$m+1$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Bài 10. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m^2 - 3m + 2)x + m$.

Lời giải. Xét $m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

+ Với $m = 1$ thì $f(x) = 1 > 0$.

+ Với $m = 2$ thì $f(x) = 2 > 0$.

Xét $m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \frac{m}{m^2 - 3m + 2}$.

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{m}{m^2 - 3m + 2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Trường hợp 2: $m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{m}{m^2 - 3m + 2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Bài 11. Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = (2m - 3)x + 2018$$

Lời giải. Nếu $m = \frac{3}{2}$ thì $f(x) = 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $m \neq \frac{3}{2}$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất, có nghiệm $x_0 = -\frac{2018}{2m-3}$.

Mặt khác, $a > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$ và $a < 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$.

Vậy ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m > \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{2018}{2m-3}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Trường hợp 2: $m < \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{2018}{2m-3}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

Bài 12. Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = (m^2 + 1)x - 4$$

Lời giải. Ta có với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì $m^2 + 1 > 0$. Do đó $f(x)$ luôn là một nhị thức bậc nhất có hệ số $a > 0$ và có nghiệm $x_0 = \frac{4}{m^2+1}$. Vậy với mọi m , ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	$\frac{4}{m^2+1}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Bài 13. Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = (2x - m)(x + m)$

Lời giải. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2} \vee x = -m$. Lập bảng xét dấu:

- Trường hợp 1: $m \geq 0$

x	$-\infty$	$-m$	$\frac{m}{2}$	$+\infty$
$2x - m$	-	⋮	-	0
$x + m$	-	0	+	⋮
$f(x)$	+	0	-	0

- Trường hợp 2: $m < 0$

x	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	$-m$	$+\infty$	
$2x - m$	-	0	+	+	
$x + m$	-	-	0	+	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Bài 14. Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = \frac{2-x}{x-2m+1}$

Lời giải.

- Trường hợp 1: $2m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$, khi đó ta có:

$$\frac{2-x}{x-2} = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Trường hợp 2: $m > \frac{3}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	$2m - 1$	$+\infty$	
$2 - x$	+	-	+	0	-
$x - 2m + 1$	-	0	+	-	+
$\frac{2-x}{x-2m+1}$	-	0	+	-	-

- Trường hợp 3: $m < \frac{3}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$2m - 1$	2	$+\infty$	
$2 - x$	+	-	+	0	-
$x - 2m + 1$	-	0	+	-	+
$\frac{2-x}{x-2m+1}$	-	-	+	0	-

Dạng 3. Giải bất phương trình tích

Dạng. $P(x) > 0, P(x) \geq 0, P(x) < 0, P(x) \leq 0$ với $P(x)$ là tích của các nhị thức bậc nhất.

Phương pháp. Lập bảng xét dấu của biểu thức $P(x)$ từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 13. Giải bất phương trình $(x+1)(2-x) > 0$.

Lời giải. Ta có: $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1; 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$
$2-x$		$+$	$+$	0
VT		$-$	0	$+$

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 2)$.

Ví dụ 14. Giải bất phương trình $(2x+1)(x+5) \geq 0$.

Lời giải. Ta có: $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$, $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$
$x+5$		$-$	0	$+$
VT		$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5] \cup [-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Ví dụ 15. Giải bất phương trình $(x+1)(x-2)(10-2x) \leq 0$.

Lời giải. Ta có: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, $10-2x=0 \Leftrightarrow x=5$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$
$x-2$		$-$	$-$	0	$+$
$10-2x$		$+$	$+$	$+$	0
VT		$+$	0	$-$	0

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 2] \cup [5; +\infty)$.

Ví dụ 16. Giải bất phương trình $(x+2)^2(x-1)(x+3) < 0$.

Lời giải. Ta có: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	$+$	0	$+$
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0
$x+3$		$-$	0	$+$	$+$
VT		$+$	0	$-$	0

Ví dụ 17. Giải bất phương trình $x^3+x^2-5x+3 \leq 0$.

Lời giải. Ta có $x^3+x^2-5x+3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+3) \leq 0$.

Cho $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	$+$	0
$x+3$		$-$	0	$+$
VT		$-$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3]$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Giải bất phương trình $(x-3)(\sqrt{2}-x) > 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$x-3$		-	- 0	+
$\sqrt{2}-x$		+ 0	-	-
$(x-3)(\sqrt{2}-x)$		- 0	+ 0	-

Tập nghiệm $S = (\sqrt{2}; 3)$.

Bài 16. Giải bất phương trình $(3-2x)(x-4) \leq 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
$3-2x$		+ 0	-	-
$x-4$		-	- 0	+
$(3-2x)(x-4)$		- 0	+ 0	-

Tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [4; +\infty)$.

Bài 17. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \geq 0$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$2-x$		+	+ 0	-
$2+x$		- 0	+ +	
$(2-x)(2+x)$		- 0	+ 0	-

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

Bài 18. Giải bất phương trình $(x+1)(x-2)(3-x) < 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$x+1$		- 0	+ +	+	
$x-2$		-	- 0	+ +	
$3-x$		+	+ +	0 -	
$(x+1)(x-2)(3-x)$		+ 0	- 0	+ 0	-

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Dạng 4. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Dạng. $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, với $P(x), Q(x)$ là tích của các nhị thức bậc nhất.

Phương pháp. Lập bảng xét dấu của biểu thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ để từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 18. Giải bất phương trình $\frac{2-x}{3x+6} < 0$.

Lời giải. Ta có: $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$; $3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$2-x$		$+$	$+$ 0	$-$
$3x+6$		$-$ 0	$+$	$+$
$\frac{2-x}{3x+6}$		$-$ \parallel	$+$ 0	$-$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 19. Giải bất phương trình $\frac{x+7}{(x+2)(2x-1)} > 0$.

Lời giải. Ta có: $x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$; $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$; $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-7	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+7$		$-$ 0	$+$	$+$	$+$
$x+2$		$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$2x-1$		$-$	$-$	$-$ 0	$+$
VT		$-$ 0	$+$ \parallel	$-$ \parallel	$+$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-7; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.

Ví dụ 20. Giải bất phương trình $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} \geq 1$.

Lời giải. Ta có $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-5}{(x-1)(x+1)} \geq 0$.

Đặt $VT = \frac{-x-5}{(x-1)(x+1)}$.

Khi đó: $-x-5=0 \Leftrightarrow x=-5$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$
$-x-5$		$+$ 0	$-$	$-$	$-$
$x-1$		$-$	$-$	$-$ 0	$+$
$x+1$		$-$	$-$ 0	$+$	$+$
VT		$+$ 0	$-$ \parallel	$+$ \parallel	$-$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5] \cup (-1; 1)$.

Ví dụ 21. Giải bất phương trình $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x+1}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-2)(2x+1)} \leq 0$.

Đặt $VT = \frac{x+3}{(x-2)(2x+1)}$.

Cho $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$; $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$x+3$		$-$ 0 $+$		$+$	$+$
$x-2$		$-$	$-$	$-$ 0 $+$	
$2x+1$		$-$	$-$ 0 $+$		$+$
VT		$-$ 0 $+$	\parallel	$-$ \parallel	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3] \cup (-\frac{1}{2}; 2)$.

Ví dụ 22. Giải bất phương trình $\frac{x-1}{mx-2} > 0$ (1) (m là tham số).

Lời giải. Đặt $f(x) = \frac{x-1}{mx-2}$.

TH1: Nếu $m = 0$ thì $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

TH2: Nếu $m \neq 0$ thì $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1; mx-2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{m}$.

Để so sánh 1 và $\frac{2}{m}$ ta xét hiệu $1 - \frac{2}{m} = \frac{m-2}{m} = g(m)$.

Bảng xét dấu của $g(m)$ như sau:

m	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$m-2$		$-$	$-$ 0 $+$	
m		$-$ 0 $+$		$+$
$\frac{m-2}{m}$		$+$ \parallel	$-$ 0 $+$	

- Với $m < 0$ thì $g(m) > 0$ nên $1 > \frac{2}{m}$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	1	$+\infty$
$x-1$		$-$	$-$ 0 $+$	
$mx-2$		$+$ 0 $-$		$-$
$\frac{x-1}{mx-2}$		$-$ \parallel	$+$ 0 $-$	

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S = (\frac{2}{m}; 1)$.

- Với $0 < m \leq 2$ thì $g(m) \leq 0$ nên $1 \leq \frac{2}{m}$.

x	$-\infty$	1	$\frac{2}{m}$	$+\infty$
$x-1$		$-$ 0 $+$		$+$
$mx-2$		$-$	$-$ 0 $+$	
$\frac{x-1}{mx-2}$		$+$ 0 $-$	\parallel	$+$

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S = (-\infty; 1) \cup (\frac{2}{m}; +\infty)$.

- Với $m > 2$ thì $g(m) > 0$ nên $1 > \frac{2}{m}$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	1	$+\infty$
$x-1$		$-$	$-$ 0 $+$	
$mx-2$		$-$ 0 $+$		$+$
$\frac{x-1}{mx-2}$		$+$ \parallel	$-$ 0 $+$	

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \cup (1; +\infty)$.

Kết luận:

- $m = 0$: $S = (-\infty; 1)$.
- $m < 0$: $S = \left(\frac{2}{m}; 1\right)$.
- $0 < m \leq 2$: $S = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{2}{m}; +\infty\right)$.
- $m > 2$: $S = \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \cup (1; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Giải bất phương trình $\frac{3x-1}{(x-4)(3-2x)} < 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$		
$3x-1$	-	0	+	+	+		
$x-4$	-	-	-	0	+		
$3-2x$	+	+	0	-	-		
$\frac{3x-1}{(x-4)(3-2x)}$	+	0	-		+		-

Tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.

Bài 20. Giải bất phương trình $\frac{3}{2-x} \geq 1$.

Lời giải. Ta có: $\frac{3}{2-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} \geq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x+1$	-	0	+	+	
$2-x$	+	+	0	-	
$\frac{x+1}{2-x}$	-	0	+		-

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 2)$.

Bài 21. Giải bất phương trình $\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1}$.

Lời giải. Ta có: $\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{5}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{(x-1)(2x-1)} \leq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	3	$+\infty$		
$-x+3$	+	+	+	0	-		
$x-1$	-	-	0	+	+		
$2x-1$	-	0	+	+	+		
$\frac{-x+3}{(x-1)(2x-1)}$	+		-		+	0	-

Tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [3; +\infty)$

Bài 22. Giải bất phương trình $\frac{x^2-x+2}{x-2} \geq 2x-1$.

Lời giải. Ta có $\frac{x^2-x+2}{x-2} \geq 2x-1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+2}{x-2} - 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x-4)}{x-2} \geq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	$-$
$x-4$		$-$	$-$	$-$	0
$x-2$		$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-x(x-4)}{x-2}$		$+$	0	$-$	$+$
			$ $	$+$	0
				$+$	$-$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0] \cup (2; 4]$.

Dạng 5. Giải bất phương trình bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Cách giải: Xét dấu để phá dấu trị tuyệt đối.

Một số dạng thường gặp: Cho $a > 0$, ta có

- $|f(x)| < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}$.
- $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{cases}$.
- $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x) + g(x)] \cdot [f(x) - g(x)] < 0$.

Ví dụ 23. Giải bất phương trình $|3 - 2x| < x + 1$.

Lời giải.

Với $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x < x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \leq \frac{3}{2}.$$

Với $3 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 2x - 3 < x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 4.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta có $\frac{2}{3} < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(\frac{2}{3}; 4\right)$.

Ví dụ 24. Giải bất phương trình $|2x - 2| + |3 - x| > 3$.

Lời giải. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở về trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$ 2x - 2 $	$2 - 2x$	0	$2x - 2$	$2x - 2$
$ 3 - x $	$3 - x$		$3 - x$	0
VT	$5 - 3x$		$1 + x$	$3x - 5$

Bất phương trình $|2x - 2| + |3 - x| > 3$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 5 - 3x > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ 1 + x > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 3 \\ 3x - 5 > 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ x > 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{8}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x < \frac{2}{3} \text{ hoặc } 2 < x \leq 3 \text{ hoặc } x > 3. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x > 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 25. Giải bất phương trình $|5 - 8x| < 11$.

Lời giải. Vì $11 > 0$ nên $|5 - 8x| < 11 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 8x < 11 \\ 5 - 8x > -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{4} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-\frac{3}{4}; 2\right)$.

Ví dụ 26. Giải bất phương trình $|2x - 4| \geq 2$.

Lời giải. Vì $2 > 0$ nên $|2x - 4| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 2 \\ 2x - 4 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 6 \\ 2x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Ví dụ 27. Giải bất phương trình $\left|\frac{x+3}{2}\right| < \left|\frac{6-2x}{5}\right|$.

Lời giải. Bất phương trình

$$\begin{aligned} \left|\frac{x+3}{2}\right| < \left|\frac{6-2x}{5}\right| &\Leftrightarrow 5|x+3| < 2|6-2x| \\ &\Leftrightarrow (5x+15)^2 < (12-4x)^2 \\ &\Leftrightarrow (5x+15+12-4x)(5x+15-12+4x) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x+27)(9x+3) < 0. \end{aligned}$$

Lập bảng xét dấu của biểu thức $f(x) = (x+27)(9x+3)$, ta được:

x	$-\infty$	-27	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+27$		-	0	+
$9x+3$		-	-	0
$f(x)$		+	-	+

Do đó $f(x) = (x+27)(9x+3) < 0 \Leftrightarrow -27 < x < -\frac{1}{3}$.
 Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-27; -\frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 28. Giải bất phương trình $\frac{|x-1|}{x^2+3x-4} \geq 2$.

Lời giải. Điều kiện: $x^2+3x-4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$.

Nếu $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ thì $|x-1| = x-1$ và bất phương trình trở thành:

$$\frac{x-1}{(x-1)(x+4)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -\frac{7}{2}.$$

Kết hợp $x \geq 1$, ta có $x \in \emptyset$.

Nếu $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ thì $|x-1| = 1-x$ và bất phương trình trở thành:

$$\frac{1-x}{(x-1)(x+4)} \geq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \text{ hoặc } x \leq -\frac{7}{2}.$$

Kết hợp $x < 1$, ta có $x \leq -4$ hoặc $-\frac{7}{2} \leq x < 1$.

Kết hợp với điều kiện, ta được $x < -4$ hoặc $-\frac{7}{2} \leq x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-\infty; -4) \cup \left[-\frac{7}{2}; 1\right)$.

Ví dụ 29. Giải bất phương trình $\frac{|x+3|-x}{x} \geq 1$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0$.

Nếu $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{(x+3)-x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 3.$$

Kết hợp với $x \geq -3$ và điều kiện $x \neq 0$, ta có $0 < x \leq 3$.

Nếu $x+3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{-(x+3)-x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x-3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3x-3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Kết hợp với $x < -3$ và điều kiện $x \neq 0$, ta có $x \in \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 3]$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 23. Giải các bất phương trình sau.

a) $|3x-5| \leq 2$.

b) $|6-2x| > 6$.

c) $|7x+10|-3 \geq 0$.

d) $\left|\frac{8}{x+1}\right| < 2$.

Lời giải.

$$\text{a) } |3x - 5| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 \leq 2 \\ 3x - 5 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$$

$$\text{b) } |6 - 2x| > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2x > 6 \\ 6 - 2x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 6 \end{cases}.$$

$$\text{c) } |7x + 10| - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |7x + 10| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 10 \geq 3 \\ 7x + 10 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -\frac{13}{7} \end{cases}.$$

$$\text{d) } \left| \frac{8}{x+1} \right| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 8 < 2|x+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ |x+1| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \begin{cases} x+1 > 4 \\ x+1 < -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -5 \end{cases}.$$

Bài 24. Giải bất phương trình $|2x - 4| < x + 1$.

Lời giải.

$$|2x - 4| < x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 4 < x + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ 4 - 2x < x + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < 5 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5.$$

Bài 25. Giải bất phương trình $|x + 5| + 9 \geq 3x$.

Lời giải.

$$|x + 5| + 9 \geq 3x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -5 \\ x + 5 + 9 \geq 3x \end{cases} \\ \begin{cases} x < -5 \\ -x - 5 + 9 \geq 3x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -5 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 7 \\ x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 7.$$

Bài 26. Giải bất phương trình $|2x - 9| > |7 - 8x|$.

Lời giải.

$$|2x - 9| > |7 - 8x| \Leftrightarrow (2x - 9)^2 > (7 - 8x)^2 \Leftrightarrow (-6x - 2)(10x - 16) > 0.$$

Lập bảng xét dấu cho biểu thức $f(x) = (-6x - 2)(10x - 16)$, ta được $f(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{8}{5}$.

Bài 27. Giải bất phương trình $|2x + 6| + |5 - 5x| < 2x + 1$.

Lời giải. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$ 2x + 6 $	$-2x - 6$	0	$2x + 6$	$2x + 6$
$ 5 - 5x $	$5 - 5x$	$5 - 5x$	0	$5x - 5$
VT	$-1 - 7x$	$11 - 3x$	$7x + 1$	

Bất phương trình $|2x + 6| + |5 - 5x| < 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ -1 - 7x < 2x + 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ 11 - 3x < 2x + 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 1 \\ 7x + 1 < 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < x \leq 1.$$

Bài 28. Giải bất phương trình $2|x - 4| + 3|1 + x| - |x| \leq 3$.

Lời giải. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$ x - 4 $	$4 - x$	$4 - x$	$4 - x$	0	$x - 4$
$ 1 + x $	$-1 - x$	0	$1 + x$	$1 + x$	$1 + x$
$ x $	$-x$	$-x$	0	x	x
VT	$3 - 3x$	$5 - x$	$5 + x$	$3x - 3$	

Bất phương trình $2|x - 4| + 3|1 + x| - |x| \leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 3 - 3x \leq 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -1 < x \leq 0 \\ 5 - x \leq 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < x \leq 4 \\ 5 + x \leq 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 4 \\ 3x - 3 \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Bài 29. Giải bất phương trình $|x - |x - 1|| < 2$.

Lời giải.

$$|x - |x - 1|| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - |x - 1| < 2 \\ x - |x - 1| > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| > x - 2 \text{ (đúng với mọi } x \in \mathbb{R}) \\ |x - 1| < x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |x - 1| < x + 2$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 30. Giải bất phương trình $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$.

Lời giải. Ta có: $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	4	$+\infty$
x		-	0	+	+	+	+
$x - 4$		-	-	-	-	0	+
$x - 1$		-	-	0	+	+	+
$x + 2$		-	0	+	+	+	+
$x - 2$		-	-	-	0	+	+
$\frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$		-	+	0	-	+	-

Tập nghiệm của bất phương trình $S = (-2; 0) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Bài 31. Tìm nghiệm của bất phương trình $(x-1)(4x-5)(2x-4) > 0$ thỏa mãn $|x| < 1$.

Lời giải. Giải bất phương trình $(x-1)(4x-5)(2x-4) > 0$.

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{4}$	2	$+\infty$
$x-1$		- 0 +		+	+
$4x-5$		-	- 0 +		+
$2x-4$		-	-	- 0 +	
$(x-1)(4x-5)(2x-4)$		- 0 +	0 - 0 +		+

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Do đó ta được $S = \emptyset$.

Bài 32. Giải bất phương trình $\left| \frac{2-|x|}{1+x} \right| < 2$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq -1$.

Nếu $x \geq 0$ thì bất phương trình trở thành

$$\left| \frac{2-x}{1+x} \right| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} < 2 \\ \frac{2-x}{1+x} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Kết hợp với $x \geq 0$ và điều kiện $x \neq -1$, ta được $x > 0$.

Nếu $x < 0$ thì bất phương trình trở thành

$$\left| \frac{2+x}{1+x} \right| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+x}{1+x} < 2 \\ \frac{2+x}{1+x} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1 \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Kết hợp với $x < 0$ và điều kiện $x \neq -1$, ta được $x < -\frac{4}{3}$.

Vậy $x > 0$ hoặc $x < -\frac{4}{3}$.

Bài 33. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - |x-2|} \leq x$.

Lời giải. Nếu $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì bất phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 2} \leq x \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \leq x^2 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Kết hợp $x \geq 2$ ta được $x \geq 2$.

Nếu $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ thì bất phương trình trở thành:

$$\sqrt{x^2 + x - 2} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Kết hợp với $x < 2$, ta được $1 \leq x < 2$. Vậy $x \geq 1$.

Bài 34. Giải và biện luận bất phương trình sau: $2(m+1)x \leq (m+1)^2(x-1)$

Lời giải. Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$[(m+1)^2 - 2(m+1)]x \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)x \geq (m+1)^2$$

TH1. Với $m = -1$ bất phương trình trở thành $0 \geq 0$. Tập nghiệm của bất phương trình này là \mathbb{R} .

TH2. Với $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì $(m-1)(m+1) > 0$, do đó: $x \geq \frac{m+1}{m-1}$. Vậy $S = \left(\frac{m+1}{m-1}; +\infty\right)$.

TH3. Với $-1 < m < 1$ thì $(m-1)(m+1) < 0$, do đó: $x \leq \frac{m+1}{m-1}$. Vậy $S = \left(-\infty; \frac{m+1}{m-1}\right)$.

Bài 35. Giải và biện luận hệ bất phương trình sau $\begin{cases} (x - \sqrt{5})(1 - 2x) > 0 & (1) \\ x - m \leq 0 & (2) \end{cases}$

Lời giải. Tập nghiệm của bất phương trình (1) $S = \left(\frac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

TH1. Nếu $m \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq m \leq \frac{1}{2}$. Hệ bất phương trình này vô nghiệm

TH2. Nếu $\frac{1}{2} < m < \sqrt{5}$, khi đó $x \leq m$. Tập nghiệm của hệ là $S = \left(\frac{1}{2}; m\right]$ với $m < \sqrt{5}$

TH3. Nếu $m \geq \sqrt{5}$, bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x \leq m$.

Để hệ bất phương trình này có nghiệm thì $x \in \left(\frac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(\frac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

Bài 36. Giải và biện luận các bất phương trình sau

a) $(2x - 4)(x - m) > 0;$

b) $\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1} \leq 0;$

Lời giải.

a) TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Trường hợp 1. $m = 2$, bất phương trình đã cho tương đương $2(x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Trường hợp 2. $m < 2$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	m	2	$+\infty$
$2x - 4$		-	0	+
$x - m$	-	0	+	+
$(2x - 4)(x - m)$	+	0	-	+

Dựa vào bảng xét dấu $(2x - 4)(x - m) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; m) \cup (2; +\infty)$.

Trường hợp 3. $m > 2$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	m	$+\infty$
$2x - 4$	$-$	0	$+$	$+$
$x - m$	$-$	0	$-$	$+$
$(2x - 4)(x - m)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $(2x - 4)(x - m) \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (m; +\infty)$.

Vậy bất phương trình đã cho luôn có vô số nghiệm, tập nghiệm là

- $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ với $m = 2$;
- $S = (-\infty; m) \cup (2; +\infty)$ nếu $m < 2$
- $S = (-\infty; 2) \cup (m; +\infty)$ nếu $m > 2$.

b) TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2m - 1\}$.

Trường hợp 1. $2m - 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$, bất phương trình đã cho tương đương

$$-1 \leq 0, \text{ (luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R}\text{).}$$

Trường hợp 2. $2m - 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow m < \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$2m - 1$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\sqrt{2} - x$	$+$	$+$	0	$-$
$x - 2m + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1}$	$-$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu $\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1} \leq 0$ khi $x \in (-\infty; 2m - 1) \cup x \in [\sqrt{2}; +\infty)$.

Trường hợp 3. $2m - 1 > \sqrt{2} \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$2m - 1$	$+\infty$
$\sqrt{2} - x$	$+$	0	$-$	$-$
$x - 2m + 1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1}$	$-$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu $\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1} \leq 0$ khi $x \in (-\infty; \sqrt{2}] \cup x \in (2m - 1; +\infty)$.

Vậy bất phương trình đã cho luôn có vô số nghiệm, tập nghiệm

- $S = \mathbb{R}$ nếu $m = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$;
- $S = (-\infty; 2m-1) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ nếu $m < \frac{\sqrt{2}+1}{2}$;
- $S = (-\infty; \sqrt{2}] \cup (2m-1; +\infty)$ nếu $m > \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Bài 37. Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{-2}{3}x + \frac{7}{2} > \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \\ m^2x + 1 \geq m^4 - x. \end{cases}$$

Lời giải. TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{cases} \frac{-2}{3}x + \frac{7}{2} > \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \\ m^2x + 1 \geq m^4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (m^2 + 1)x \geq m^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq m^2 - 1. \end{cases}$$

Do đó hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$m^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 2) < 0.$$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$m - 2$	-	0	-	+
$m + 2$	+	0	-	-
$(m - 2)(m + 2)$	-	0	+	-

Dựa vào bảng xét dấu ta có $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ là các giá trị cần tìm.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (1)$$

$$(ax + by < c; ax + by \geq c; ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm bất phương trình (1) được gọi là **miền nghiệm** của nó.

\triangle Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, một trong hai nửa mặt phẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$, nửa mặt phẳng kia là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \geq c$.

2. Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

Định nghĩa 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể *biểu diễn hình học tập nghiệm* của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau:

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ **không** thuộc Δ (lấy tọa độ có nhiều số 0 nhất có thể)

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c .

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ **không** chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

\triangle Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của phương trình $ax + by < c$.

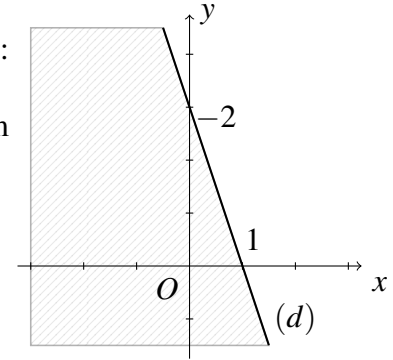
Ví dụ 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x + y \geq 3$.

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d : 3x + y = 3$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 3$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



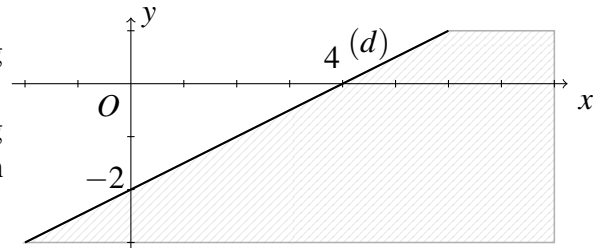
Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 4y < 8$.

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d : 2x - 4y = 8$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 8$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



Ví dụ 3. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2x + 3y > 0.$$

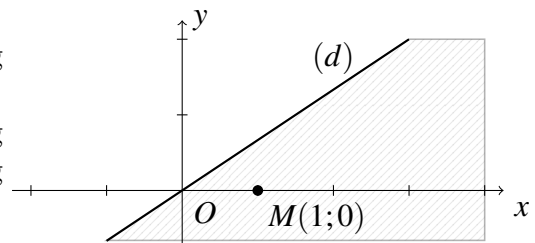
b) Cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(3;3)$, hỏi hai điểm này cùng phía hay khác phía đối với bờ (d) .

Lời giải.

a) Vẽ đường thẳng $d : -2x + 3y = 0$.

Thay tọa độ điểm $M(1;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $-2 < 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm M . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



b) Thế tọa độ điểm A vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) ta được $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 < 0$. (1)

Thế tọa độ điểm B vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) ta được $-2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3 > 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai điểm nằm ở hai phía đối với bờ (d) .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + \frac{3}{2}y \geq 1 - x + \frac{1}{2}y$.

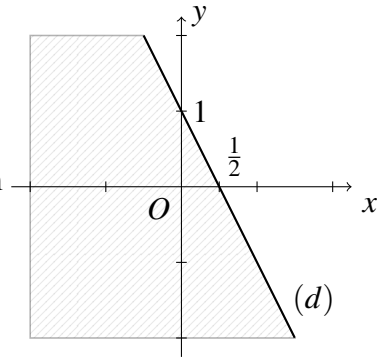
Lời giải.

$$x + \frac{3}{2}y \geq 1 - x + \frac{1}{2}y \Leftrightarrow 2x + y \geq 1$$

Vẽ đường thẳng $d: 2x + y = 1$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 1$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



Bài 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2017x - 2018y \leq 2016y.$$

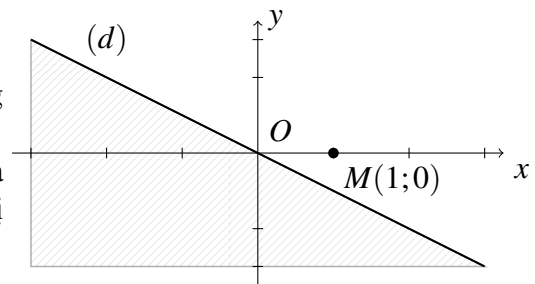
Lời giải.

$$-2017x - 2018y \leq 2016y \Leftrightarrow -x - 2y \leq 0$$

Vẽ đường thẳng $d: -x - 2y = 0$.

Thay tọa độ điểm $M(1;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $-1 < 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm M , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



Bài 3. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} < 1$.

b) Tìm điểm A thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm A là giao điểm của parabol (P) có dạng $y = x^2 - 5x + 4$ và trục hoành.

Lời giải.

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} < 1 \Leftrightarrow 2x + y < 6$

Vẽ đường thẳng $d: 2x + y = 6$.

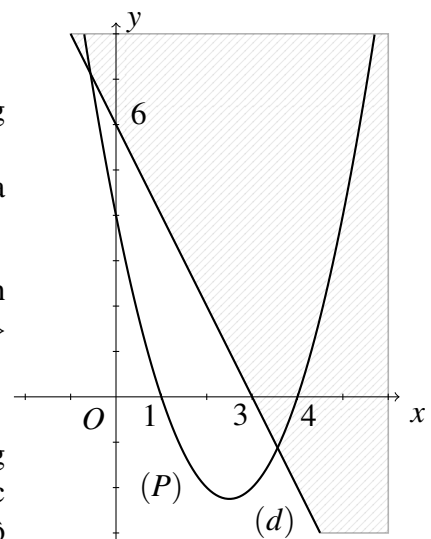
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 6$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

b) Điểm A nằm trên parabol (P) có dạng $y = x^2 - 5x + 4$ và trục hoành nên hoành độ của A là nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

Suy ra ta được hai điểm $(1;0)$ và $(4;0)$. Lần lượt thế tọa độ từng điểm vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) , do A thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho nên ta được A có tọa độ là $(1;0)$.



Dạng 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Viết các bất phương trình trong hệ dưới dạng phương trình đường thẳng (thay dấu lớn, bé bởi dấu bằng).
- Vẽ các đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Xác định một điểm M thỏa các bất phương trình trong hệ.
- Lần lượt tô đậm các nửa mặt phẳng không chứa M và có bờ là các đường thẳng đã vẽ. Ta được miền nghiệm của hệ.

Ví dụ 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2 \end{cases}$$

Lời giải.

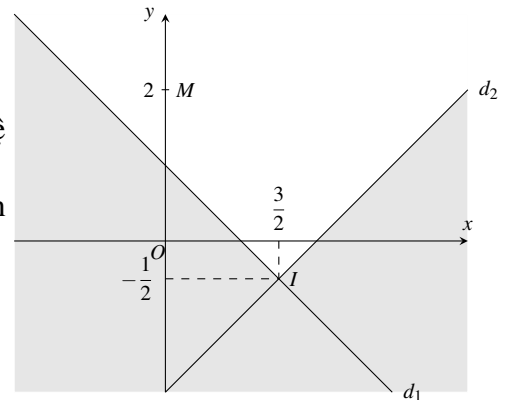
Vẽ các đường thẳng

$$d_1 : x + y = 1;$$

$$d_2 : x - y = 2.$$

Vì điểm $M(0, 2)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2 không chứa M .

Miền không bị tô đậm trong hình vẽ và không chứa các tia giới hạn miền là miền nghiệm của hệ đã cho.



Ví dụ 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y > 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

Lời giải.

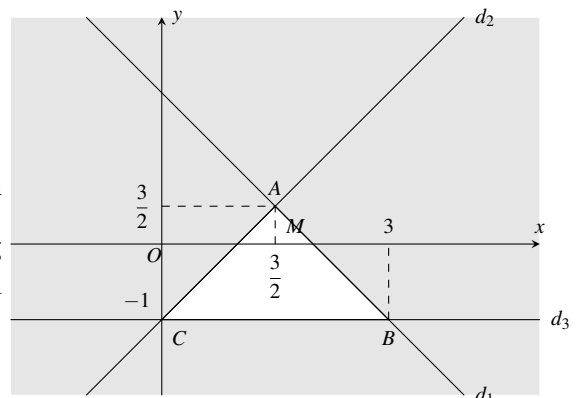
Vẽ các đường thẳng

$$d_1 : x + y = 2,$$

$$d_2 : x - y = 1,$$

$$d_3 : y = -1.$$

Vì điểm $M\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3 không chứa M . Miền không bị tô đậm trong hình vẽ, không bao gồm các đoạn giới hạn miền là miền nghiệm của hệ đã cho.



Ví dụ 6. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + 5y > 2 \\ x - 3y \geq 1 \\ x + y < 3 \end{cases}$$

Lời giải.

Vẽ các đường thẳng

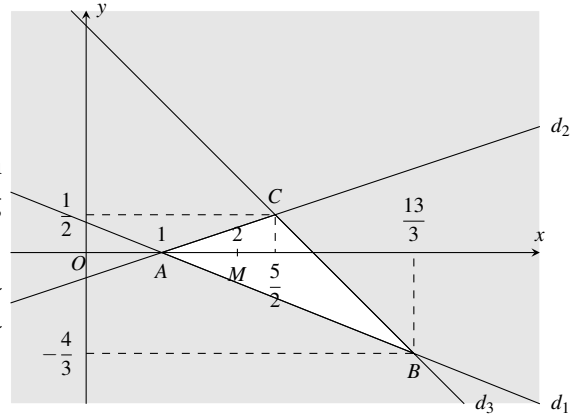
$$d_1 : 2x + 5y = 2,$$

$$d_2 : x - 3y = 1,$$

$$d_3 : x + y = 3.$$

Vì điểm $M(2,0)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3 không chứa M .

Miền không bị tô đậm trong hình vẽ có chứa đoạn AC và không chứa các điểm A, C , không chứa các đoạn AB, BC là miền nghiệm của hệ đã cho.



Ví dụ 7. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Lời giải.

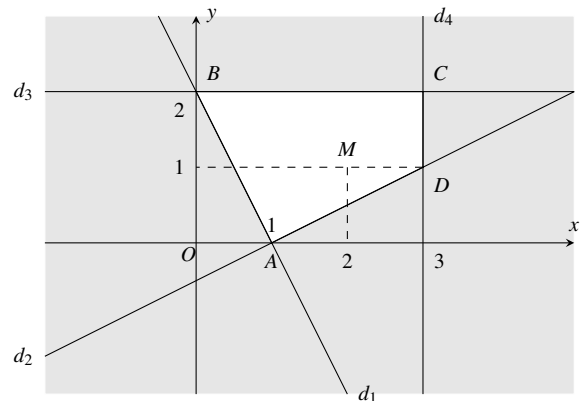
Vẽ các đường thẳng

$$d_1 : 2x + y = 2,$$

$$d_2 : x - 2y = 1,$$

$$d_3 : y = 2, d_4 : x = 3.$$

Vì điểm $M(2,1)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3, d_4 không chứa M . Miền không bị tô đậm trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho bao gồm các đoạn thẳng xác định miền.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases}$$

Bài 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x - 2y < 1 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 2 \end{cases}$$

Bài 6. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x + y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài 7. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x > y - 2 \\ 3y \geq 4 - x \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Bài 8. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0 \\ x - \frac{2y}{3} \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Bài 9. Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn: đa giác biểu diễn miền nghiệm là hình thang vuông.

Bài 10. Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + 4y \geq 9 \\ x + 4y \leq 17 \\ x - 4y \geq -7 \\ x - 4y \leq 1 \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn: Đa giác biểu diễn miền nghiệm là hình bình hành.

Dạng 3. Các bài toán thực tiễn

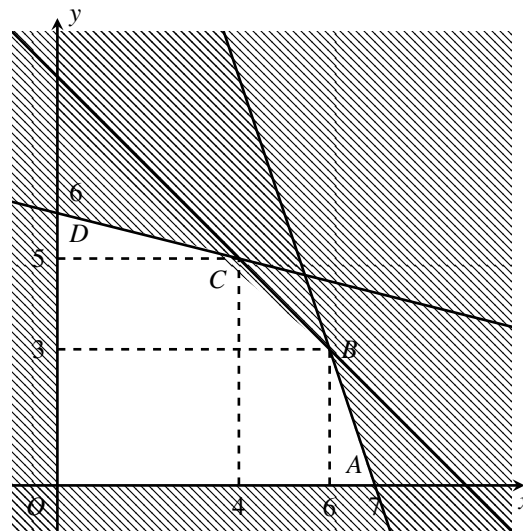
Ví dụ 8. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất.

Lời giải.

- Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và táo của một đội pha chế ($x, y \geq 0$).

- Số điểm thưởng của đội chơi này là $f(x; y) = 60x + 80y$.
- Số gam đường cần dùng là $30x + 10y$.
- Số lít nước cần dùng là $x + y$.
- Số gam hương liệu cần dùng là $x + 4y$.
- Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường nên ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$
- Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên). Hàm số $f(x; y) = 60x + 80y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0; 0), A(7; 0), B(6; 3), C(4; 5), D(0; 6)$.
- Ta có: $f(0; 0) = 0; f(7; 0) = 420; f(6; 3) = 600; f(4; 5) = 640; f(0; 6) = 480$.
Suy ra $f(4; 5)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).
Như vậy để được số điểm thưởng là lớn nhất cần pha chế 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.



Ví dụ 9. Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Lời giải. Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là: $800.000x + 4.000.000y$ (đồng).
Mức chi này không được phép vượt quá mức chi tối đa, tức $800.000x + 4.000.000y \leq 16.000.000$ hay $x + 5y - 20 \leq 0$.

Do các điều kiện dài phát thanh, truyền hình đưa ra, ta có $x \geq 5, y \leq 4$.

Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \geq 0, y \geq 0$.

Hiệu quả chung của quảng cáo là $x + 6y$.

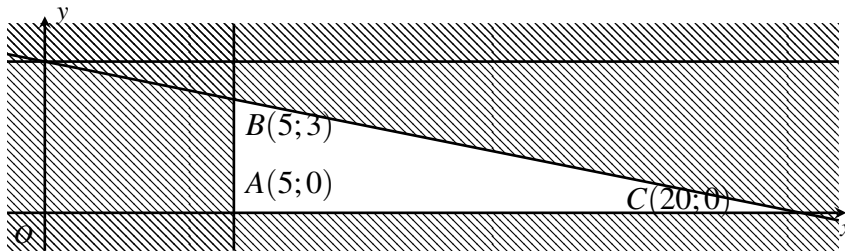
Bài toán trở thành: Tìm x, y sao cho $f(x; y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất với các điều kiện

$$\begin{cases} x + 5y - 20 \leq 0 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} (*)$$

Hàm số $f(x; y) = x + 6y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5; 0), B(5; 3), C(20; 0)$.

Ta có $f(5; 3) = 23, f(5; 0) = 5, f(20; 0) = 20$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $M(x; y)$ bằng 23 tại $(5; 3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất?



Ví dụ 10. Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ống cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15 kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất?

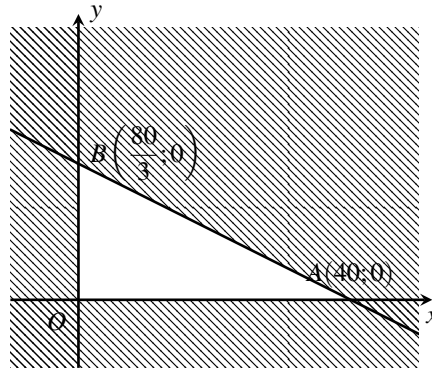
Lời giải.

- Gọi số bánh chưng gói được là x , số bánh ống gói được là y . Khi đó số điểm thưởng là $f(x; y) = 5x + 7y$.
- Số kg gạo nếp cần dùng là $0,4x + 0,6y$.
- Số kg thịt ba chỉ cần dùng là $0,05x + 0,075y$.
- Số kg đậu xanh cần dùng là $0,1x + 0,15y$.
- Vì trong cuộc thi này chỉ được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ và 5 kg đậu xanh nên ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \leq 20 \\ 0,05x + 0,075y \leq 2 \\ 0,1x + 0,15y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 100 \\ 2x + 3y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

- Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tam giác OAB (kể cả biên).

- Hàm số $f(x;y) = 5x + 5y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x;y)$ là tọa độ một trong các đỉnh $O(0;0), A(40;0), B\left(0; \frac{80}{3}\right)$.
- Ta có: $f(0;0) = 0, f(40;0) = 200, f\left(0; \frac{80}{3}\right) = \frac{560}{3}$.
- Suy ra $f(x;y)$ lớn nhất khi $(x;y) = (40;0)$. Do đó cần phải gói 40 cái bánh chưng để nhận được số điểm thưởng là lớn nhất.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

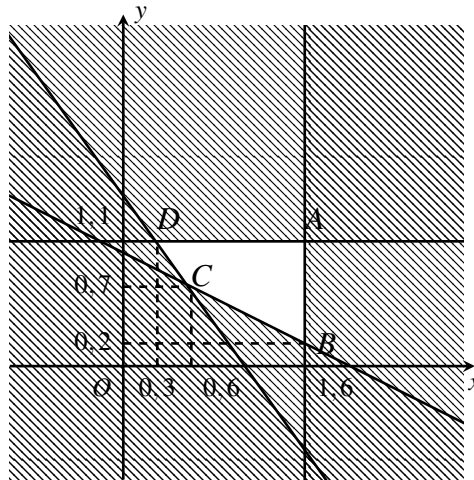
Bài 11. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất?

Lời giải.

- Gọi x và y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua mỗi ngày ($0 \leq x \leq 1,6; 0 \leq y \leq 1,1$).
- Khi đó chi phí để mua số thịt trên là $f(x;y) = 45x + 35y$ nghìn đồng.
- Trong x kg thịt bò chứa $800x$ đơn vị protein và $200x$ đơn vị lipit.
- Trong y kg thịt lợn chứa $600y$ đơn vị protein và $400y$ đơn vị lipit.
- Suy ra số đơn vị protein và số đơn vị lipit lần lượt là $800x + 600y$ đơn vị và $200x + 400y$ đơn vị.
- Do gia đình này cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên ta có hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} (*)$$
- Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên).
- Hàm số $f(x;y) = 45x + 35y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x;y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(1,6; 1,1), B(1,6; 0,2), C(0,6; 0,7), D(0,3; 1,1)$.
- Ta có: $f(1,6; 1,1) = 110,5; f(1,6; 0,2) = 79; f(0,6; 0,7) = 51,5; f(0,3; 1,1) = 52$.

- Suy ra $f(x;y)$ nhỏ nhất khi $(x;y) = (0,6;0,7)$. Do đó gia đình này cần phải mua 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn để số tiền bỏ ra là ít nhất.



Bài 12. Một gia đình định trồng cà phê và ca cao trên diện tích 10 ha. Nếu trồng cà phê thì cần 20 công và thu về 10.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng ca cao thì cần 30 công và thu 12.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất. Biết rằng cà phê do các thành viên trong gia đình tự chăm sóc và số công không vượt quá 80, còn ca cao gia đình thuê người làm với giá 100.000 đồng cho mỗi công?

Lời giải. Gọi x và y lần lượt là số ha cà phê và ca cao mà hộ nông dân này trồng ($x, y \geq 0$).

Số tiền cần bỏ ra để thuê người trồng ca cao là $30y \cdot 100000 = 3000000y$ (trồng).

Lợi nhuận thu được là $f(x;y) = 10000000x + 12000000 - 3000000y$

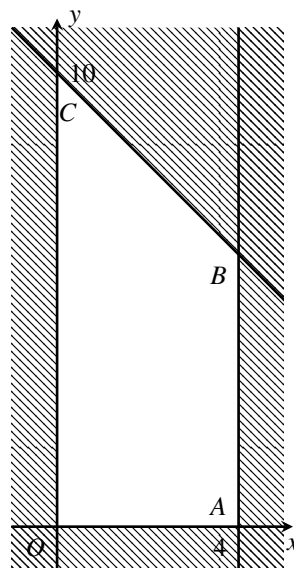
$\Rightarrow f(x;y) = 10000000x + 9000000y$ (đồng).

Vì số công để trồng cà phê không vượt quá 80 nên $20x \leq 80 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Ta có hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 4 \quad (*) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên). Hàm số $f(x;y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x;y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;6)$, $C(0;10)$. Suy ra $f(x;y)$ lớn nhất khi $(x;y) = (4;6)$. Như vậy cần phải trồng 4 ha cà phê và 6 ha ca cao để thu về lợi nhuận lớn nhất



Bài 13. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4000000 đồng trên diện tích mỗi

ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất biết rằng tổng số công không quá 180?

Lời giải. Gọi số ha đậu và cà mà hộ nông dân này trồng lần lượt là x và y ($x, y \geq 0$).

Lợi nhuận thu được là $f(x; y) = 3000000x + 4000000y$ (đồng).

Tổng số công dùng để trồng x ha đậu và y ha cà là $20x + 30y$.

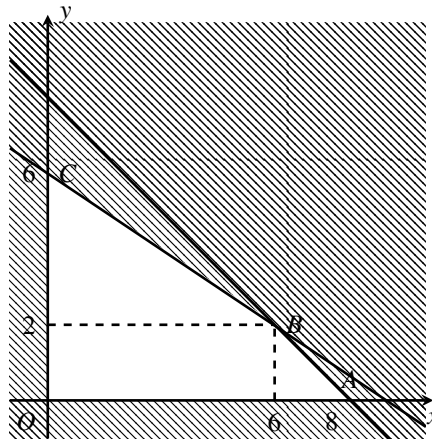
Ta có hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*). Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, $B(6; 2)$, $C(0; 6)$.

Ta có: $f(0; 0) = 0$, $f(8; 0) = 24000000$, $f(6; 2) = 26000000$, $f(0; 6) = 24000000$.

Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (6; 2)$ tức là hộ nông dân này cần phải trồng 6 ha đậu và 2 ha cà thì sẽ thu về lợi nhuận lớn nhất.



Bài 14. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là A và B. Một tấn sản phẩm loại A lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại B lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày, máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A, B mà phân xưởng này sản xuất trong một ngày ($x, y > 0$). Khi đó số tiền lãi một ngày của phân xưởng này là $f(x; y) = 2x + 1,6y$ (triệu đồng); số giờ làm việc trong ngày của máy M_1 là $3x + y$ và số giờ làm việc trong ngày của máy M_2 là $x + y$.

Vì mỗi ngày máy M_1 làm việc không quá 6 giờ và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ nên ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

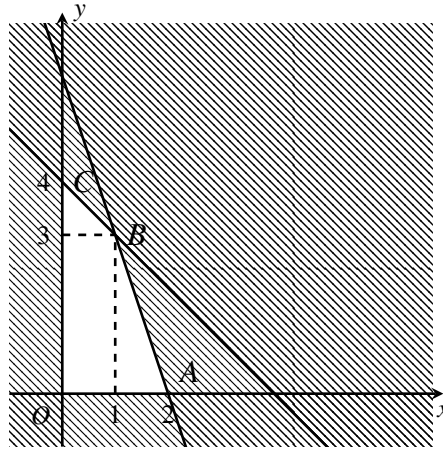
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(1; 3)$, $C(0; 4)$.

Ta có $f(0; 0) = 0$; $f(2; 0) = 4$; $f(1; 3) = 6,8$; $f(0; 4) = 6,4$.

Suy ra $\max f(x; y) = 6,8$ khi $(x; y) = (1; 3)$.



Bài 15. Một công ty cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?

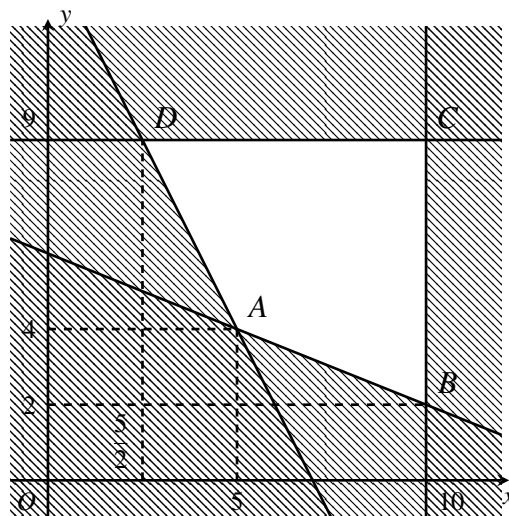
Lời giải. Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và B. Khi đó số tiền cần bỏ ra để thuê xe là $f(x; y) = 4x + 3y$. Ta có x xe loại A sẽ chở được $20x$ người và $0,6x$ tấn hàng; y xe loại B sẽ chở được $10y$ người và $1,5y$ tấn hàng. Suy ra x xe loại A và y xe loại B sẽ chở được $20x + 10y$ người và $0,6x + 1,5y$ tấn hàng.

Ta có hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} 20x + 10 \geq 40 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*). Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác ABCD (kể cả biên). Hàm số $f(x; y) = 4x + 3y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5; 4), B(10; 2), C(10; 9), D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$.

Ta có: $f(5; 4) = 32; f(10; 2) = 46; f(10; 9) = 67; f\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 37$.

Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (5; 4)$. Như vậy để chi phí vận chuyển thấp nhất cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B.



BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 16. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - y > 1 - 3x$.

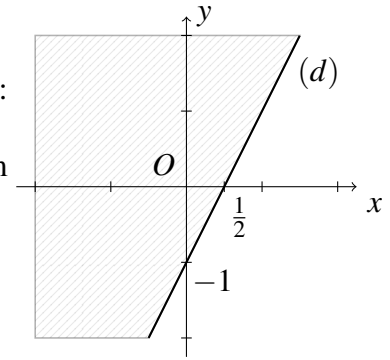
Lời giải.

$$x - y > 1 - 3x \Leftrightarrow 2x - y > 1$$

Vẽ đường thẳng $d : 2x - y = 1$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 1$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



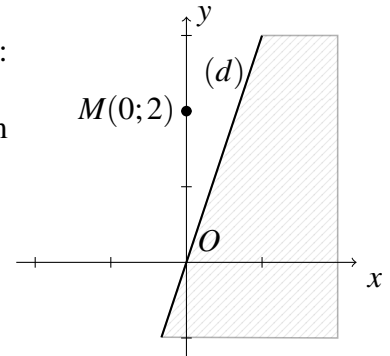
Bài 17. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x - y \leq 0$.

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d : 3x - y = 0$.

Thay tọa độ điểm $M(0;2)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $-2 < 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm M , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



Bài 18. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + y - 3 < 0$.

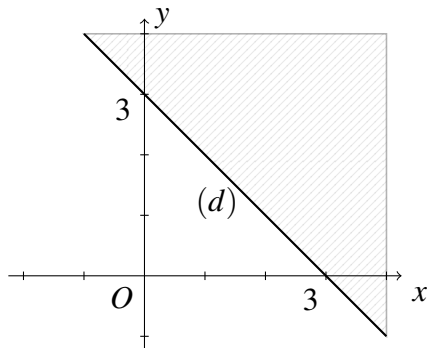
b) Tìm điều kiện của m và n để mọi điểm thuộc đường thẳng (d') : $(m^2 - 2)x - y + m + n = 0$ đều là nghiệm của bất phương trình trên.

Lời giải.

a) Vẽ đường thẳng $d : x + y = 3$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 3$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



b) Để mọi điểm thuộc đường thẳng (d') đều là nghiệm của bất phương trình thì điều kiện cần là (d') phải song song với (d) . Ta có $d : y = -x + 3$ và $d' : y = (m^2 - 2)x + m + n$. Để (d) song

$$\text{song } (d') \text{ thì } \begin{cases} m^2 - 2 = -1 \\ m + n \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n \neq 2 \\ m = -1 \\ n \neq 4 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} m = 1 \\ n \neq 2 \end{cases}$ thì ta được $d' : y = -x + n + 1$. Để thỏa yêu cầu

bài toán thì điều kiện đủ là đường thẳng (d') là đồ thị của đường thẳng (d) khi (d) tịnh tiến xuống dưới theo trục Oy . Tức $n + 1 < 3 \Leftrightarrow n < 2$.

Bài 19. Cho bất phương trình $2x + y - 1 \leq 0$.

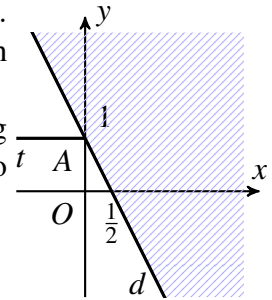
a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tất cả giá trị tham số m để điểm $M(m, 1)$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình đã và biểu diễn tập hợp M tìm được trong cùng hệ trục tọa độ Oxy ở câu a).

Lời giải.

a) Đường thẳng $(d): 2x + y - 1 = 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Ta có $2 \cdot 0 + 0 - 1 < 0$. Do đó, miền nghiệm là đường thẳng (d) và miền không gạch chéo như hình vẽ bên (Miền chứa gốc tọa độ).

b) Để M là một nghiệm thì $2m + 1 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Vì M nằm trên đường thẳng $(\Delta): y = 1$. Do đó, tập hợp tất cả điểm M là nghiệm của bất phương trình đã cho là tia At như hình vẽ.



Bài 20. Cho bất phương trình $x - 2y + 4m > 0$.

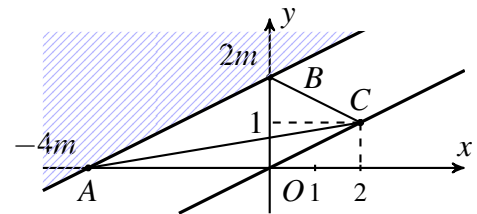
a) Tùy theo giá trị tham số m , hãy biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong hệ trục tọa độ Oxy .

b) Gọi A, B lần lượt là giao của đường thẳng $x - 2y + 4m = 0$ với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa điểm $C(2; 1)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4.

Lời giải.

a) Xét đường thẳng $(d_m): x - 2y + 4m = 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Ta có $0 - 2 \cdot 0 + 4m = 4m$. Do đó, với mọi $m \neq 0$ miền nghiệm luôn chứa gốc tọa độ. Nếu $m = 0$ thì miền nghiệm chứa điểm $(1; 0)$. Vậy với mọi m miền nghiệm là miền không gạch chéo như hình vẽ bên.

b) Để C là một nghiệm của bất phương trình đã cho thì $2 - 2 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Khi đó, $OC \parallel (d_m)$, suy ra $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO} = 4m^2$. Theo giả thiết, ta có $4m^2 = 4 \Leftrightarrow m = 1$.



Bài 21. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

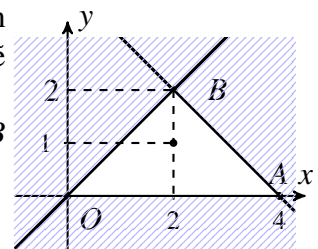
a) Biểu diễn tập nghiệm của hệ đã trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tính diện tích miền nghiệm đó.

Lời giải.

a) Vẽ các đường thẳng $x - y = 0$ và $x + y - 4 = 0$ trên cùng hệ trục tọa độ. Chọn điểm $(2, 1)$ để xác định miền nghiệm. Khi đó ta được miền nghiệm như hình vẽ bên.

b) Từ hình vẽ bên ta có $OA = 4$ và độ dài đường cao của tam giác OAB hạ từ B bằng 2. Vậy $S_{\Delta OAB} = 4$.

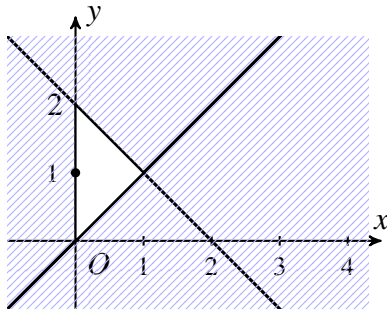
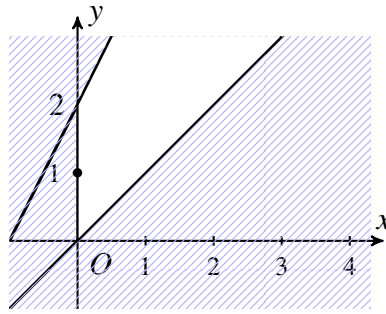
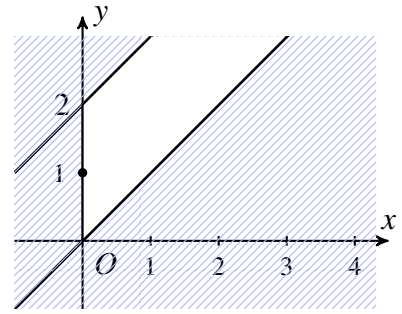


Bài 22. Tìm m để hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ y - mx - 2 \leq 0 \end{cases}$$

có tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là một hình tam giác.

Lời giải. Nhận xét: Họ đường thẳng $(d_m): y - mx - 2 = 0$ luôn đi qua điểm $A(0; 2)$, hay nói cách khác các đường thẳng (d_m) xoay quanh A . Mặt khác, ta có $1 - m \cdot 0 - 2 \leq 0$ đúng với mọi m , nên miền nghiệm của bất phương trình $y - mx - 2 \leq 0$ luôn chứa điểm $(0; 1)$. Do đó ta có 3 khả năng sau:

 $m < 0$  $m > 0$  $m = 0$

Vậy $m < 0$.

Bài 23. Một xưởng sản xuất gỗ cửa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

Ván thành phẩm cần 1 giờ để cửa và 3 giờ để bào 10m ván.

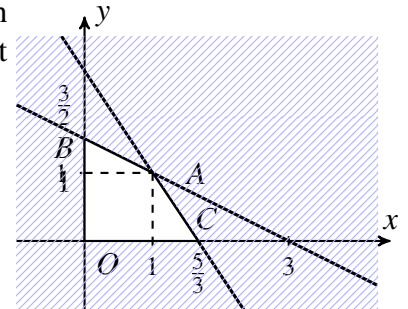
Ván xây dựng cần 2 giờ để cửa và 2 giờ để bào 10m ván.

Máy cửa làm việc tối đa 3 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 5 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 100 (ngàn đồng) và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 80 (ngàn đồng). Trong ngày, xưởng sản xuất phải cửa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều dài ván thành phẩm và ván xây dựng hoàn thành trong một ngày. Đơn vị 10m. Do đó bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $T = 10x + 8y$ (ngàn đồng), biết x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ 3x + 2y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ là tứ giác $OBAC$, trong đó $A(1; 1), B\left(0; \frac{3}{2}\right), C\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

Do đó, giá trị lớn nhất của T là 18 khi $x = y = 1$.

Bài 24. Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B . Cứ một trăm gram:

Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.

Thực phẩm B chứa 1 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 1 đơn vị protein.

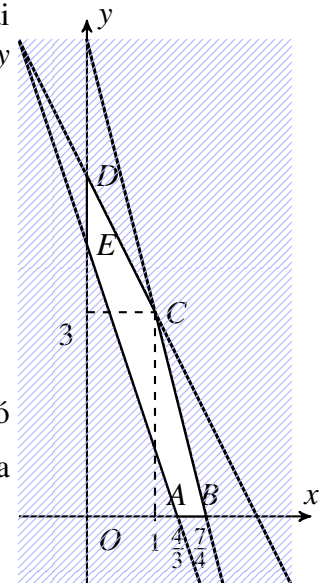
Nếu một trăm gram thực phẩm A giá 10 ngàn đồng và một trăm gram thực phẩm B giá 15 ngàn đồng. Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp nhiều nhất 5 đơn vị chất béo, 7 đơn vị protein và ít nhất 4 đơn vị carbohydrate. Cần bao nhiêu trăm gram thực phẩm mỗi loại để có giá thành nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là khối lượng thực phẩm A và B . Đơn vị trăm gam. Do đó bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $T = 10x + 15y$ (ngàn đồng), biết x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ 3x + y \geq 4 \\ 4x + y \leq 7 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là đa giác $ABCDE$, trong đó $A\left(\frac{4}{3}; 0\right), B\left(\frac{7}{4}; 0\right), C(1; 3), D(0; 5), E(0; 4)$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{4000}{3}$ gam khi $x = \frac{4}{3}$ và $y = 0$.



§5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I. Tóm tắt lý thuyết

1. Tam thức bậc hai

Định nghĩa 1. Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$. Nghiệm của tam thức bậc hai là giá trị của x làm cho tam thức có giá trị bằng 0.

2. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

Định lý 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2) \end{cases}$.

Với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0, x_1 < x_2$.

3. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

Định nghĩa 2. Bất phương trình bậc hai một ẩn số là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c > 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0$) với a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0, x$ là ẩn số.

4. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Định nghĩa 3. Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và
 - $a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
 - $a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

Ví dụ 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Lời giải. Ta có $\Delta' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

Lời giải. Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$.

Do $a = 1 > 0$ nên

- $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$.
- $f(x) < 0, \forall x \in (-1; 6)$.

Ví dụ 3. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

Lời giải. Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Do $a = -1 < 0$ nên

- $f(x) > 0, \forall x \in (-1; 4)$.
- $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.

Ví dụ 4. Xét dấu của biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 1}$

Lời giải. Ta có $g(x) = x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$.

$h(x) = x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-		-		0
$f(x)$	-	0	+	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -1) \cup (1; +\infty)$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1)$.

Ví dụ 5. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải. Ta có $f(x) = (x - m)(x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (m - 1; m)$.

Để $f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ thì $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \subset (m - 1; m) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Bài 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Lời giải. Ta có

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài 2. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x - 6$.

Lời giải. Ta có $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 3. Xét dấu của biểu thức $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Lời giải. Ta có $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty) \setminus \{1\}$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$.

Bài 4. Xét dấu của biểu thức $f(x) = 1 + \frac{x-6}{x^2-5x+6}$

Lời giải. Ta có $f(x) = \frac{x^2-4x}{x^2-5x+6}$.

$$g(x) = x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$h(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	2	3	4	$+\infty$			
$g(x)$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$h(x)$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$ $	$+$	$ $	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow (0; 2) \cup (3; 4)$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai luôn mang một dấu

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$). Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

Ví dụ 1. Cho $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)$ luôn dương với mọi x .

Lời giải. Ta có $a = m^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ và $\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$.

Để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$

Ví dụ 2. Cho $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

- Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m \neq -2$, để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m + 2 > 0 \\ \Delta' = (m + 2)^2 - (m + 2)(m + 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ -m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Vậy với $m \geq -2$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Cho $f(x) = mx^2 - x - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

- Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = -x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$
- Với $m \neq 0$, để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$$

Vậy với $m < -\frac{1}{4}$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Cho $f(x) = (m - 4)x^2 + (2m - 8)x + m - 5$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

- Với $m = 4 \Rightarrow f(x) = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m \neq 4$, để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m - 4 < 0 \\ \Delta' = (m - 4)^2 - (m - 4)(m - 5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Vậy với $m \leq 4$ thì $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 5. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow x^2 - x + m > 1, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(m - 1) < 0 \\ &\Leftrightarrow m < \frac{5}{4} \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $f(x) = (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m - 2)x - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

TH1. Xét $2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 2 \end{cases}$

- Nếu $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}$.

- Nếu $m = 2 \Rightarrow f(x) = -1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH2. Xét $2m^2 - 3m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$, khi đó, điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

$$\begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 < 0 \\ \Delta' = (m - 2)^2 + (2m^2 - 3m - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq m \leq 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m < 2.$$

Bài 2. Cho $f(x) = (m + 4)x^2 - 2mx + 2m - 3$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

• Với $m = -4 \Rightarrow f(x) = 8x - 14 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}$.

• Với $m \neq -4$, để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m + 4 < 0 \\ \Delta' = m^2 - (m + 4)(2m - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m \in (-\infty; -6) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -6)$$

Vậy với $m < -6$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. Cho $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m + 1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải. Ta có $-4x^2 + 5x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $g(x) = -x^2 + 4(m + 1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4(m + 1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$$

Dạng 3. Giải bất phương trình bậc hai.

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a < 0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a > 0$).

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $3x^2 + 2x + 5 > 0$.

Lời giải. Đặt $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, ta có $a = 3 > 0$ và phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm nên $f(x)$ luôn dương.

Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; +\infty)$.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 > 0$.

Lời giải. Đặt $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$, ta có $a = -2 < 0$ và $f(x) = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta có

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-1; \frac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 8. Giải bất phương trình $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5) \geq 0$.

Lời giải. Đặt $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$.

Ta có $f(x) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta có

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$	
$3x^2 - 10x + 3$		$+$	0	$-$	$+$	
$4x - 5$		$-$	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right] \cup [3; +\infty)$.

Ví dụ 9. Giải bất phương trình $\frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3} \leq 0$.

Lời giải. Đặt $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$. Ta có

$$+ 3x^2 - x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$+ 3 - x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}.$$

$$+ 4x^2 + x - 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta được

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$						
$3x^2 - x$		+		+		+	0	-	0	+		+		+
$3 - x^2$		-	0	+		+		+		+		+	0	-
$4x^2 + x - 3$		+		+	0	-		-		-	0	+		+
$f(x)$		-	0	+		-	0	+	0	-		+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup (-1; 0] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.

Ví dụ 10. Giải bất phương trình $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4} \iff \frac{x + 8}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)} < 0$.

Lập bảng xét dấu cho $f(x) = \frac{x + 8}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)}$ ta có

x	$-\infty$	-8	-2	$-\frac{4}{3}$	1	2	$+\infty$					
$x + 8$		-	0	+		+		+		+		
$x^2 - 4$		+		+	0	-		-		-	0	+
$3x^2 + x - 4$		+		+		+	0	-	0	+		+
$f(x)$		-	0	+		-		+		-		+

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -8) \cup \left(-2; -\frac{4}{3}\right) \cup (1; 2)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$		
$-2x^2 + 3x + 5$		-	0	+	0	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Bài 5. Giải bất phương trình $x^2 + 12x + 36 \leq 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$x^2 + 12x + 36$	$+$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{-6\}$.

Bài 6. Giải bất phương trình $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) > 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$			
$3x^2 - 4x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$2x^2 - x - 1$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
VT	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Bài 7. Giải bất phương trình $(4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9) < 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$4x^2 - 1$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$
$-8x^2 + x - 3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$
$2x + 9$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
VT	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bài 8. Giải bất phương trình $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} \geq 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	
$4x^2 + 3x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2 + 5x + 7$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
VT	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Bài 9. Giải bất phương trình $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} \leq 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{8}{5}$	1	6	$+\infty$
$5x^2 + 3x - 8$	+	0	-	0	+
$x^2 - 7x + 6$	+	+	0	-	0
VT	+	0	-	-	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{8}{5}; 1\right) \cup (1; 6)$.

Bài 10. Giải bất phương trình $\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)} > 0$.

Lời giải. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{12}$	$-\sqrt{5}$	0	$4 - \sqrt{11}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{12}$	$4 + \sqrt{11}$	$+\infty$
$x^4 - 17x^2 + 60$	+	0	-	0	+	+	0	-	0
x	-	+	-	+	0	+	+	+	+
$x^2 - 8x + 5$	+	+	+	+	+	0	-	+	+
VT	-	0	+	0	-	+	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\sqrt{12}; -\sqrt{5}) \cup (0; 4 - \sqrt{11}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{12}) \cup (4 + \sqrt{11}; +\infty)$.

Bài 11. Giải bất phương trình $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} > \frac{1}{x^2 - 17x + 72}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} > \frac{1}{x^2 - 17x + 72} \iff \frac{-22x + 66}{(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 17x + 72)} > 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	3	8	9	$+\infty$
$-22x + 66$	+	+	+	0	-	-	-
$x^2 + 5x + 6$	+	0	-	0	+	+	+
$x^2 - 17x + 72$	+	+	+	+	+	0	+
VT	+	-	+	0	-	+	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3) \cup (-2; 3) \cup (8; 9)$.

Bài 12. Giải bất phương trình $\frac{5x^2 - 7x - 3}{3x^2 - 2x - 5} > 1$.

Lời giải. Ta có $\frac{5x^2 - 7x - 3}{3x^2 - 2x - 5} > 1 \iff \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 2x - 5} > 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$						
$2x^2 - 5x + 2$		+		+	0	-		-	0	+		
$3x^2 - 2x - 5$		+	0	-		-	0	+		+		
VT		+	-			0	+	-			0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Bài 13. Giải bất phương trình $\frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x^2+4x+15}{x^2-1}$.

Lời giải. Ta có $\frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x^2+4x+15}{x^2-1} \iff \frac{-x^2-7x-10}{x^2-1} \geq 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-2	-1	1	$+\infty$				
$-x^2 - 7x - 10$		-	0	+	0	-		-		-
$x^2 - 1$		+		+		+	0	-	0	+
VT		-	0	+	0	-	+		-	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-5; -2) \cup (-1; 1)$.

Bài 14. Giải bất phương trình $(x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$.

Lời giải. Ta có $(x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \iff \frac{(x^2 + 3x)^2(2x + 3) - 16(2x + 3)}{x^2 + 3x} \geq 0$
 $\iff \frac{(2x + 3)((x^2 + 3x)^2 - 16)}{x^2 + 3x} \geq 0 \iff \frac{(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 4)}{x^2 + 3x} \geq 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-3	$-\frac{3}{2}$	0	1	$+\infty$							
$2x + 3$		-		-		-	0	+		+		+		
$x^2 + 3x - 4$		+	0	-		-		-		-	0	+		
$x^2 + 3x + 4$		+		+		+		+		+		+		
$x^2 + 3x$		+		+	0	-		-	0	+		+		
VT		-	0	+	-			0	+	-			0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; -3) \cup \left[-\frac{3}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

Dạng 4. Bài toán có chứa tham số

Để giải dạng toán này ta phải xác định dấu của hệ số của x^2 và dấu của biệt thức Δ từ đó áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ 11. Tìm giá trị của tham số m để các biểu thức sau đây luôn không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$

b) $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x - 4.$

Lời giải.

a) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do $a = -2 < 0$ nên $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta' = (m-2)^2 - (-2)(m-2) \leq 0$.

Ta có $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m(m-2) \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

b) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = (m-1)x^2 - 2(m-1)x - 4 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+) Trường hợp 1: $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó $f(x) = -4 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Trường hợp 2: $m-1 \neq 0$, khi đó $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 + 4(m-1) \leq 0 \end{cases}$

Từ đó suy ra $\begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' = (m-1)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ m+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1$.

Kết hợp hai trường hợp ta suy ra giá trị m cần tìm là $-3 \leq m \leq 1$.

Ví dụ 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$.

$$x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m \leq 0 \quad (1)$$

Lời giải. Xét phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m = 0$ (2), ta có $\Delta' = (m+2)^2 - m^2 - 4m = 4$.

Từ đó suy ra (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m < x_2 = m+4$.

Từ đó suy ra (1) có tập nghiệm $[m; m+4]$.

Vậy (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$ khi và chỉ khi $m \leq 1 < 3 \leq m+4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$.

Ví dụ 13. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - (2m+3)x + 6m}}{x^2 + 2x + 3}$ có tập xác định là \mathbb{R} .

Lời giải. Ta có $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra hàm số đã cho có tập xác định là \mathbb{R} khi và chỉ khi $x^2 - (2m+3)x + 6m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\Delta = (2m+3)^2 - 4.6m = (2m-3)^2 \geq 0 \forall m$ nên hàm số đã cho có tập xác định là \mathbb{R} khi và chỉ khi

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m-2)x - 8m + 1 \geq 0$ có nghiệm.

Lời giải. Do $a = 1 > 0$ nên bất phương trình trên luôn có nghiệm với mọi m .

Bài 16. Tìm giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m$ có giá trị không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Do $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta = (m-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 2$.

[Vũ Văn Trường]

Bài 17. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \sqrt{mx^2 + 2(m+1)x + m - 1}$ có tập xác định $D \neq \emptyset$.

Lời giải. Với $m = 0$ thì $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, khi đó hàm số có tập xác định $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \neq \emptyset$.

Với $m \neq 0$, hàm số có tập xác định $D \neq \emptyset \Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - m^2 + m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{3}$. Trong trường hợp

này ta có $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Từ đó suy ra giá trị m cần tìm là $m \geq -\frac{1}{3}$.

Bài 18. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$$

Lời giải. Ta có $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 \end{cases}$.

Ta có $3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}$.

$13x^2 - 26x + 14 - m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m < 1$.

Do đó $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

Bài 19. Chứng minh rằng hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (m+3)x + 2(m+1) \leq 0 \end{cases}$ luôn có nghiệm.

Lời giải. Ta có $x^2 + 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$, suy ra tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 5x + 4 \leq 0$ là $S = [1; 4]$.

Phương trình $x^2 - (m+3)x + 2(m+1) = 0$ có hai nghiệm $x = 2, x = m+1$. Từ đó suy ra bất phương trình $x^2 - (m+3)x + 2(m+1) \leq 0$ có tập nghiệm $S' = \{2\}, S' = [2; m+1], S' = [m+1; 2]$ tương ứng khi $m+1 = 2; m+1 > 2; m+1 < 2$.

Trong cả 3 trường hợp ta đều có $S \cap S' \neq \emptyset$, do đó hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 20. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (|2x - 3| - 1)(|x^2 - 2x + 4| - 2x^2 + 9x - 16)$.

Lời giải. Do $|2x - 3| + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $|2x - 3| - 1$ là dấu của

$$(|2x - 3| - 1)(|2x - 3| + 1) = (2x - 3)^2 - 1 = 4x^2 - 12x + 8 = 4(x^2 - 3x + 2).$$

Vì $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $|x^2 - 2x + 4| = x^2 - 2x + 4$.

Suy ra $|x^2 - 2x + 4| - 2x^2 + 9x - 16 = x^2 - 2x + 4 - 2x^2 + 9x - 16 = -x^2 + 7x - 12$.

Dấu của $f(x)$ là dấu của biểu thức $g(x) = (x^2 - 3x + 2)(-x^2 + 7x - 12)$.

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+	+
$-x^2 + 7x - 12$	-	-	-	0	+	0
$g(x)$	-	0	+	0	-	0

Vậy: $f(x) > 0, \forall x \in (1; 2) \cup (3; 4); f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Bài 21. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$;

b) $(x+2)^2(x-1)(x+5) + 8 \geq 0$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1} \geq \frac{-2}{x^2-2x} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2(x^2-2x) + 2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-2}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu của vế trái:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$4x-2$	-	-	-	0	+	+	+
x^2-1	+	0	-	-	-	0	+
x^2-2x	+	+	0	-	-	-	0
VT	-	+	-	0	+	-	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = (-1; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$.

b) $(x+2)^2(x-1)(x+5) + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2+4x-5) + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2[(x+2)^2-9] + 8 \geq 0$.

Đặt $t = (x+2)^2 \geq 0$, bất phương trình đã cho có dạng $t(t-9) + 8 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 8 \end{cases}$.

Thay $t = (x+2)^2$ ta có:

$$\begin{cases} (x+2)^2 \leq 1 \\ (x+2)^2 \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x+2 \leq 1 \\ -2\sqrt{2} \leq x+2 \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ -2-2\sqrt{2} \leq x \leq -2+2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = [-2-2\sqrt{2}; -2+2\sqrt{2}]$.

Bài 22. Xác định tham số m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2mx - m^2 + m - 1 > 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} > \frac{x-3}{x} \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2 - 2mx - m^2 + m - 1 > 0 & (1) \\ \frac{2x-1}{x+1} > \frac{x-3}{x} & (2) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{(2x-1)x - (x+1)(x-3)}{x(x+1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 3}{x(x+1)} > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \text{ vì } x^2 + x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra tập nghiệm của (2) là $T_2 = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Giải (1): Ta có $\Delta' = 2m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2mx - m^2 + m - 1$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và (1) luôn có tập nghiệm $T_1 = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Suy ra tập nghiệm của hệ $T = T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$.

Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .

Bài 23. Tìm giá trị của tham số m để $f(x) = (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

- Với $m = 2$ thì $f(x) = 2x + 4 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$. Suy ra $m = 2$ không phải giá trị cần tìm.
- Với $m \neq 2$ thì $f(x)$ là tam thức bậc hai. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ \Delta' = (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -m^2 + 4m - 3 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ \begin{cases} m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 3 \\ m \leq 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận: $m \geq 3$.

Bài 24. Chứng minh bất đẳng thức $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y + 3 > 0$.

Lời giải. Đặt $f(x) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 12x - 4y + 3 = x^2 - 2(y-1)x + (2y^2 - 4y + 3)$.

Suy ra $f(x)$ là tam thức bậc hai đối với x .

Ta có $\Delta_x = (y-1)^2 - (2y^2 - 4y + 3) = -y^2 + 2y - 2 < 0, \forall y \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (đpcm).

Bài 25. Cho $a^3 > 36$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

Lời giải. Do $a^3 > 36$ nên $a > 0$ và $abc = 1 \Rightarrow bc = \frac{1}{a}$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $(b+c)^2 - a(b+c) - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3} > 0$.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - ax - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3}$.

$$\Delta = a^2 - 4 \left(-\frac{3}{a} + \frac{a^2}{3} \right) = a^2 + \frac{12}{a} - \frac{4a^2}{3} = \frac{3a^3 - 4a^3 + 36}{3a} = \frac{36 - a^3}{3a} > 0.$$

Suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (b+c)^2 - a(b+c) - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3} > 0$ (đpcm).

§6. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

I. Đề số 1a

Bài 1. (2 điểm) Giải các bất phương trình sau:

a) $8x - 5 > \frac{15x - 8}{2}$.

b) $\frac{1 - 3x}{1 + 2x} \leq -2$.

Lời giải.

a) $8x - 5 > \frac{15x - 8}{2} \Leftrightarrow 16x - 10 > 15x - 8 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (2; +\infty)$

b) $\frac{1 - 3x}{1 + 2x} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{1 - 3x}{1 + 2x} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x + 3}{1 + 2x} \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x < -\frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = \left[-3; -\frac{1}{2}\right)$

Bài 2. (2 điểm) Giải bất phương trình $x^2 - x + |3x - 2| > 0$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương:

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < -1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } x > -1 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 + \sqrt{3} \\ x < 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - 4x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x < 2 - \sqrt{2} \text{ hoặc } x > 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{3}; +\infty)$

Bài 3. (4 điểm) Cho biểu thức $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(2m + 1)x + 1$ (m là tham số)

a) Tìm các giá trị m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Tìm các giá trị m để bất phương trình $f(x) > 0$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình: $(m + 1)x^2 - 2(2m + 1)x + 1 = 0$ (*).

Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 3m > 0 \\ \frac{1}{m + 1} > 0 \\ \frac{2(2m + 1)}{m + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-3}{4} \text{ hoặc } m > 0 \\ m > -1 \\ m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

b) Xét bất phương trình: $(m + 1)x^2 - 2(2m + 1)x + 1 > 0$ (**).

TH1: Nếu $m = -1$ thì (**) $\Leftrightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ không có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

TH2: Nếu $m \neq -1$ (**) có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ 4m^2 + 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ \frac{-3}{4} < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{4} < m < 0.$$

Bài 4. (2 điểm) Chứng minh rằng $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ nên $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1).

Tương tự ta có: $a^2 + c^2 \geq 2ac$ (2) với mọi $a, c \in \mathbb{R}$.

Cộng từng vế (1) và (2) ta được $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi với mọi $a = b = c$.

II. Đề số 1b

Bài 1. (2 điểm) Giải các bất phương trình sau

a) $\frac{4x-6}{7} < x+3$.

b) $\frac{2-x}{1-2x} \geq 3$.

Lời giải.

a) $\frac{4x-6}{7} < x+3 \Leftrightarrow 4x-6 < 7x+21 \Leftrightarrow 3x > -27 \Leftrightarrow x > -9$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (-9; +\infty)$.

b) $\frac{2-x}{1-2x} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2-x}{1-2x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-1}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 2. (2 điểm) Giải bất phương trình $|x^2 + 3x - 4| - x + 8 \geq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 - x + 8 \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 4 - x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ x \in \mathbb{R} \\ -4 < x < 1 \\ -6 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ -4 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = \mathbb{R}$.

Bài 3. (4 điểm) Cho biểu thức $f(x) = (m-1)x^2 - 2(2m+1)x - 1$ (m là tham số).

a) Tìm các giá trị m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

b) Tìm các giá trị m để bất phương trình $f(x) < 0$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình: $(m-1)x^2 - 2(2m+1)x - 1 = 0$ (*)

Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 5m > 0 \\ \frac{-1}{m-1} > 0 \\ \frac{2(2m+1)}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-5}{4} \text{ hoặc } m > 0 \\ m < 1 \\ m < \frac{-1}{2} \text{ hoặc } m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{-5}{4}.$$

b) Xét bất phương trình: $(m-1)x^2 - 2(2m+1)x - 1 < 0$ (**)

TH1: Nếu $m = 1$ thì (**) $\Leftrightarrow -6x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{-1}{6}$ không có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

TH2: Nếu $m \neq 1$ (**) có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ 4m^2 + 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -\frac{5}{4} < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m < 0.$$

Bài 4. (2 điểm) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq a + b + 1$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm:

$$\begin{aligned} ab + \frac{a}{b} &\geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{a}{b}} = 2a. \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2. \\ \frac{b}{a} + ab &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot ab} = 2b. \\ \Rightarrow 2(ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}) &\geq 2(a + b + 1) \Leftrightarrow ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq a + b + 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

III. Đề số 2a

Bài 1. Cho $x > 3$. Chứng minh rằng: $9x + \frac{4}{x-3} \geq 39$.

Lời giải. Ta có $9x + \frac{4}{x-3} \geq 39 \Leftrightarrow 9(x-3) + \frac{4}{x-3} \geq 12 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $9(x-3)$ và $\frac{4}{x-3}$ ta được

$$9(x-3) + \frac{4}{x-3} \geq 2\sqrt{9(x-3) \cdot \frac{4}{x-3}} = 12 \dots\dots\dots 1,0$$
 điểm

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow 9(x-3) = \frac{4}{x-3} \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \dots\dots\dots 0,5$$
 điểm

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 4x - 5 > x - 2 \\ 3x + 6m \leq 10 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} 4x - 5 > x - 2 \\ 3x + 6m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \leq 5 - 2m \end{cases} \dots\dots\dots 1,0$ điểm

Do đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 1 < 5 - 2m \dots\dots\dots 0,5$ điểm

$$\Leftrightarrow m < 2 \dots\dots\dots 0,5$$
 điểm

Bài 3. Giải bất phương trình $|2x + 4| \leq x + 8$.

Lời giải.

Trường hợp 1: Với $x \geq -2$ thì $|2x + 4| \leq x + 8 \Leftrightarrow 2x + 4 \leq x + 8 \Leftrightarrow x \leq 4 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Trường hợp này bất phương trình có nghiệm $-2 \leq x \leq 4 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Trường hợp 2: Với $x < -2$ thì $|2x + 4| \leq x + 8 \Leftrightarrow -2x - 4 \leq x + 8 \Leftrightarrow x \geq -4$

Trường hợp này bất phương trình có nghiệm $-4 \leq x < -2 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Vậy bất phương trình có nghiệm $-4 \leq x \leq 4 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Bài 4.

- a) Tìm m để biểu thức $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 8m + 1$ luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 b) Chứng minh rằng $3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x - 2y + 5 \geq 0$ với mọi x , mọi y .

Lời giải.

- a) Do $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - 4(8m + 1) < 0 \dots\dots\dots 1,0$ điểm
 $\Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \dots\dots\dots 0,5$ điểm
 $\Leftrightarrow 0 < m < 28 \dots\dots\dots 0,5$ điểm
- b) Đặt $f(x) = 3x^2 - 8xy + 9y^2 - 4x - 2y + 5$. Ta có
 $f(x) = 3x^2 - (8y + 4)x + 9y^2 - 2y + 5$ có
 $\Delta' = (4y + 2)^2 - 3(9y^2 - 2y + 5) = -11y^2 + 22y - 11 = -11(y - 1)^2 \leq 0, \forall y \dots\dots\dots 1,0$ điểm
 Do $a = 3 > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ với mọi $x, y. \dots\dots\dots 1,0$ điểm

IV. Đề số 2b

Bài 1. Cho $x > 1$. Chứng minh rằng: $16x + \frac{4}{x-1} \geq 32$.

Lời giải. Ta có $16x + \frac{4}{x-1} \geq 32 \Leftrightarrow 16(x-1) + \frac{4}{x-1} \geq 16 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $16(x-1)$ và $\frac{4}{x-1}$ ta được

$16(x-1) + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{16(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} = 16 \dots\dots\dots 1,0$ điểm

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow 16(x-1) = \frac{4}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 4(x+1) + 5 \leq 3(x+4) \\ x+m \geq 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} 4(x+1) + 5 \leq 3(x+4) \\ x+m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 1-m \end{cases} \dots\dots\dots 1,0$ điểm

Do đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 1-m \leq 3 \dots\dots\dots 0,5$ điểm
 $\Leftrightarrow m \geq -2 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Bài 3. Giải bất phương trình $|x-3| > 3x+15$.

Lời giải.

Trường hợp 1: Với $x \geq 3$ thì $|x-3| > 3x+15 \Leftrightarrow x-3 > 3x+15 \Leftrightarrow x < -9 \dots\dots\dots 0,5$ điểm
 Trường hợp này bất phương trình vô nghiệm $\dots\dots\dots 0,5$ điểm

Trường hợp 2: Với $x < 3$ thì $|x-3| > 3x+15 \Leftrightarrow -x+3 > 3x+15 \Leftrightarrow x < -3 \dots\dots\dots 0,5$ điểm
 Trường hợp này bất phương trình có nghiệm $x < -3 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Vậy bất phương trình có nghiệm $x < -3 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

Bài 4.

- a) Tìm m để biểu thức $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 b) Chứng minh rằng $2x^2 - 8xy + 13y^2 - 4x - 2y + 7 \geq 0$ với mọi x , mọi y .

Lời giải.

- a) Do $a = 1 < 0$ nên $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 2(m-2) < 0 \dots\dots\dots 1,0$ điểm
 $\Leftrightarrow m^2 - 2m < 0 \dots\dots\dots 0,5$ điểm
 $\Leftrightarrow 0 < m < 2 \dots\dots\dots 0,5$ điểm

- b) Đặt $f(x) = 2x^2 - 8xy + 13y^2 - 4x - 2y + 7$. Ta có
 $f(x) = 2x^2 - (8y+4)x + 13y^2 - 2y + 7$ có
 $\Delta' = (4y+2)^2 - 2(13y^2 - 2y + 7) = -10y^2 + 20y - 10 = -10(y-1)^2 \leq 0, \forall y \dots\dots\dots 1,0$ điểm
 Do $a = 2 > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ với mọi $x, y. \dots\dots\dots 1,0$ điểm

V. Đề số 3a

Câu 1. (4 điểm) Giải các bất phương trình sau:

- a) $\sqrt{x+10} + 1 > 2x$ b) $\frac{x^2 + 2x - 3}{1 - 2x} \leq 2$

Lời giải.

- a) Điều kiện $x \geq -10$.
 Bất phương trình tương đương $\sqrt{x+10} > 2x - 1$.

- Xét $\begin{cases} 2x - 1 < 0 \\ x + 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \leq x < \frac{1}{2}$.
- Xét $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x + 10 \geq (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -1 \leq x \leq \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{4}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[-10; \frac{9}{4}\right]$.

- b) Điều kiện $x \neq \frac{1}{2}$.

Bất phương trình tương đương $\frac{x^2 + 6x - 5}{1 - 2x} \leq 0$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-3 - \sqrt{14}$	$\frac{1}{2}$	$-3 + \sqrt{14}$	$+\infty$
$x^2 + 6x - 5$	+	0	-	+	0
$1 - 2x$	+		+	0	-
VT	+	0	-		+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-3 - \sqrt{14}; \frac{1}{2}\right) \cup \left[-3 + \sqrt{14}; +\infty\right)$.

Câu 2. (2 điểm) Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} \leq 7$ đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Điều kiện $2x^2 - 3x + 2 \neq 0$ (đúng với $\forall x$).

Bất phương trình tương đương $\frac{-13x^2 + 26x + m - 14}{2x^2 - 3x + 2} \leq 0 \Leftrightarrow -13x^2 + 26x + m - 14 \leq 0$ (*).

(vì $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x$).

Để (*) đúng với mọi x thì $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 < 0 \text{ (luôn đúng)} \\ 13(13 + m - 14) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$.

Câu 3. (2 điểm) Tìm các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x-2} > \frac{4}{x+1} \\ x-m-3 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện $x \neq -1, x \neq 2$.

Xét $\frac{1}{x-2} > \frac{4}{x+1} \Leftrightarrow \frac{3x-9}{(x-2)(x+1)} < 0$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$3x-9$	$-$	$ $	$-$	$ $	0
$(x-2)(x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Suy ra tập nghiệm $S_1 = (-\infty; -1) \cup (2; 3)$.

Xét $x-m-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m+3 \Rightarrow$ tập nghiệm $S_2 = [m+3; +\infty)$.

Để hệ phương trình có nghiệm thì $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m+3 < 3 \Leftrightarrow m < 0$.

VI. Đề số 3b

Câu 4. (2 điểm) Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt[3]{5a+3b} + \sqrt[3]{5b+3c} + \sqrt[3]{5c+3a}$$

Lời giải. Xét $\sqrt[3]{(5a+3b) \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3}} \leq \frac{5a+3b + \frac{16}{3}}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{5a+3b} \leq \frac{5a+3b + \frac{16}{3}}{4\sqrt[3]{3}}$.

Tương tự $\sqrt[3]{5b+3c} \leq \frac{5b+3c + \frac{16}{3}}{4\sqrt[3]{3}}$ và $\sqrt[3]{5c+3a} \leq \frac{5c+3a + \frac{16}{3}}{4\sqrt[3]{3}}$. Do đó

$$P \leq \frac{8(a+b+c) + 16}{4\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt[3]{9}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Kết luận $P_{\max} = 2\sqrt[3]{9}$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

VII. Đề số 4a

Câu 1. Giải các bất phương trình

a) $\frac{3x}{4} - 1 < 2x + \frac{1-x}{2}$.

b) $\frac{2x-1}{x+1} + 2 < \frac{1}{x+1}$

Lời giải.

a) $\frac{3x}{4} - 1 < 2x + \frac{1-x}{2} \Leftrightarrow 3x - 4 < 8x + 2(1-x) \Leftrightarrow -6 < 3x \Leftrightarrow -2 < x$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$ (1 điểm)

$$b) \frac{2x-1}{x+1} + 2 < \frac{1}{x+1} \iff \frac{4x+1}{x+1} < \frac{1}{x+1} \iff \frac{4x}{x+1} < 0 \iff -1 < x < 0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 0)$ (1 điểm)

Câu 2. Giải các bất phương trình

a) (1 điểm) $2x^2 - 3x + 1 < 0$

b) (2 điểm) $|2x - 4| \geq x + 1$

Lời giải.

a) $2x^2 - 3x + 1 < 0 \iff \frac{1}{2} < x < 1.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ (1 điểm)

b) Trường hợp 1: $x \leq -1$

Dễ thấy nghiệm của bất phương trình $x \leq -1$ (0,5 điểm)

Trường hợp 2: $x > -1$

$$|2x - 4| \geq x + 1 \iff (2x - 4)^2 \geq (x + 1)^2 \iff x^2 - 6x + 5 \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 5 \\ -1 < x \leq 1 \end{cases} \cdot (1 \text{ điểm})$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$ (0,5 điểm)

Câu 3.

a) (1 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - x + 1} < x + 2.$

b) (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $x^2 - 2mx + 4 > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}.$

Lời giải.

a) Dễ thấy $x + 2 > 0 \iff x > -2.$

$$\sqrt{x^2 - x + 1} < x + 2 \iff x^2 - x + 1 < x^2 + 4x + 4 \iff -3 < 5x \iff -\frac{3}{5} < x.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{3}{5}; +\infty\right)$ (1 điểm)

b) $x^2 - 2mx + 4 > 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} khi và chỉ khi $\Delta' < 0.$ (0,5 điểm)

$$\Delta' < 0 \iff m^2 - 4 < 0 \iff -2 < m < 2. \text{ (0,5 điểm)}$$

Câu 4. (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $2x^2 - 2mx + m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải. Phương trình $2x^2 - 4mx + m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ m > 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \iff m > 2 \text{ (1 điểm)}$$

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + \frac{3}{x}$ với $x > 0$.

Lời giải.

- Ta có $y = x^3 + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ (0,5 điểm)

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho bốn số thực dương $x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4\sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{x^3}} = 4$ (1 điểm)

- Vậy $y_{\min} = 4$, khi $x^3 = \frac{1}{x} \iff x = 1$ (0,5 điểm)

VIII. Đề số 4b

Câu 1. Giải các bất phương trình

a) $\frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2} - 3$.

b) $2 - \frac{x}{x-2} < \frac{1}{x-2}$

Lời giải.

a) $\frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2} - 3 \iff \frac{x-3}{3} < \frac{x-6}{2} \iff 12 < x$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (12; +\infty)$ (1 điểm)

b) $2 - \frac{x}{x-2} < \frac{1}{x-2} \iff \frac{x-4}{x-2} < \frac{1}{x-2} \iff \frac{x-5}{x-2} \iff 2 < x < 5$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; 5)$ (1 điểm)

Câu 2. Giải các bất phương trình

a) (1 điểm) $-x^2 + 6x - 8 > 0$

b) (1 điểm) $|x+2| < 2x+1$

Lời giải.

a) $-x^2 + 6x - 8 > 0 \iff 2 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; 4)$ (1 điểm)

b) Điều kiện: $x > -\frac{1}{2}$.

$$|x+2| < 2x+1 \iff (x+2)^2 < (2x+1)^2 \iff 0 < x^2 - 1 \iff \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \implies x > 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$ (1 điểm)

Câu 3.

a) (2 điểm) Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 + x - 2} > x - 1$.

b) (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho bất phương trình $-x^2 + (m+2)x - 1 < 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .

Lời giải.

a) Điều kiện $x > 1$ hoặc $x < -2$.

Trường hợp 1: $x < -2$

$x - 2 < 0, \sqrt{x^2 + x - 2} > 0$ cho nên $x < -2$ là nghiệm của bất phương trình (0,5 điểm)

Trường hợp 2: $x > 1$

$\sqrt{x^2 + x - 2} > x - 2 \iff x^2 + x - 2 > x^2 - 4x + 4 \iff x > \frac{6}{5}$ (0,5 điểm)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$

b) $-x^2 + (m + 2)x - 1 < 0$ có tập nghiệm là \mathbb{R} khi và chỉ khi $\Delta < 0$ (0,5 điểm)

$\Delta < 0 \iff m^2 + 4m < 0 \iff -4 < m < 0$ (0,5 điểm)

Câu 4. (1 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải. Phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} m^2 - m + 1 > 0 \\ -2(m + 1) < 0 \\ m > 0 \end{cases} \iff m > 0$ (1 điểm)

Câu 5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b+2} + \frac{b^2}{c+2} + \frac{c^2}{a+2}$$

Lời giải.

- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương, ta có $\frac{a^2}{b+2} + \frac{b+2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+2} \cdot \frac{b+2}{4}} = a$; tương tự $\frac{b^2}{c+2} + \frac{c+2}{4} \geq b$; $\frac{c^2}{a+2} + \frac{a+2}{4} \geq c$ (1 điểm)

- Cộng các vế tương ứng của các BĐT ta có $P + \frac{a+b+c+6}{4} \geq a+b+c \iff P \geq \frac{3(a+b+c)-6}{4} = 3$ (0,5 điểm)

- Vậy $P_{\min} = 3$, khi $a = b = c = 2$ (0,5 điểm)

Chương 5

THỐNG KÊ

§1. BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Bảng phân bố tần số và tần suất


Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho có k giá trị khác nhau ($k \leq n$). Gọi x_i là một giá trị bất kì trong k giá trị đó, ta có:

- Số lần xuất hiện giá trị x_i trong dãy số liệu đã cho được gọi là **tần số** của giá trị đó, kí hiệu là n_i .
- Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất** của giá trị x_i .

2. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho được phân vào k lớp ($k < n$). Xét lớp thứ i ($i = 1, 2, \dots, k$) trong k lớp đó, ta có:

- Số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp thứ i được gọi là **tần số của lớp** đó.
- Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất của lớp** thứ i .

 Trong các bảng phân bố tần suất, tần suất được tính ở dạng tỉ số phần trăm.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất

Bảng phân bố tần số gồm hai dòng (hoặc hai cột). Dòng (cột) đầu ghi các giá trị khác nhau của mẫu số liệu. Dòng (cột) thứ hai ghi tần số (số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong các số liệu thống kê) tương ứng. Nếu bổ sung dòng (cột) thứ ba ghi tần suất (tỉ số % giữa tần số và tổng số liệu thống kê) thì ta được bảng phân bố tần số và tần suất.

Để lập bảng phân bố tần số và tần suất từ bảng số liệu thống kê ban đầu, ta thực hiện các bước sau:

- Sắp thứ tự các giá trị trong các số liệu thống kê;
- Tính tần số n_i của các giá trị x_i bằng cách đếm số lần x_i xuất hiện;
- Tính tần suất f_i của x_i theo công thức $f_i = \frac{n_i}{n}$;
- Đặt các số liệu x_i, n_i, f_i vào bảng ta thu được bảng phân bố tần số và tần suất.

Ví dụ 1. Cho số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị: phút)

42	42	42	42	44	44	44	44	44	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	54
54	54	50	50	50	50	48	48	48	48
48	48	48	48	48	48	50	50	50	50

- Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
- Trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm bao nhiêu phần trăm.

Lời giải.

- Bảng phân bố tần số và tần suất

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân

Thời gian (phút)	42	44	45	48	50	54	Cộng
Tần số	4	5	20	10	8	3	50
Tần suất (%)	8	10	40	20	16	6	100%

- Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, suy ra trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm 76%.

Ví dụ 2. Khi điều tra về năng suất của một giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ / ha) của giống lúa đó trên 40 thửa ruộng có cùng diện tích 1 ha trong bảng sau:

30	32	32	34	38	36	38	36
40	30	40	40	34	38	36	36
38	40	30	40	32	30	30	30
40	38	38	34	34	32	32	36
34	40	34	30	38	38	32	32

- a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
b) Trong 40 thửa ruộng được khảo sát, hãy cho biết những thửa ruộng có năng suất cao nhất chiếm bao nhiêu phần trăm.

Lời giải.

- a) Bảng phân bố tần số và tần suất

Năng suất của giống lúa mới của 40 thửa ruộng

Năng suất (tạ / ha)	30	32	34	36	38	40	Cộng
Tần số	7	7	6	5	8	7	40
Tần suất (%)	17,5	17,5	15,0	12,5	20,0	17,5	100%

- b) Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, suy ra trong 40 thửa ruộng được khảo sát, những thửa ruộng có năng suất cao nhất chiếm 17,5%.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 150 công nhân của một nhà máy A. Người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.

Lời giải. Bảng phân bố tần số và tần suất

Tuổi nghề của 30 công nhân của một nhà máy A

Tuổi nghề (năm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14	Cộng
Tần số	1	3	2	6	5	1	5	3	2	1	1	30
Tần suất (%)	3,3	10	6,7	20	16,7	3,3	16,7	10	6,7	3,3	3,3	100%

Bài 2. Cho bảng số liệu thống kê năng suất lúa hè thu (tạ / ha) của 30 tỉnh như sau:

25	30	25	30	35	35	40	40	45	25
30	30	40	25	45	45	35	25	35	40
35	35	40	40	30	35	35	35	40	30

- a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
b) Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

Lời giải.

a) Bảng phân bố tần số và tần suất

Năng suất lúa hè thu của 30 tỉnh

Năng suất (tạ / ha)	Tần số	Tần suất (%)
25	5	16,6
30	6	20
35	9	30
40	7	23,4
45	3	10
Cộng	30	100%

b) Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, ta thấy năng suất 35 tạ / ha có tần suất cao nhất 30% nên ta nói số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào 35 tạ / ha.

Bài 3. Thống kê số con trong mỗi gia đình của 60 gia đình trong một quận được cho ở bảng sau:

2	1	4	2	3	0	2	3	4	2
2	5	1	2	2	3	3	5	7	2
3	4	4	2	1	2	3	2	2	4
6	5	3	4	4	7	2	1	1	5
6	3	5	2	2	3	4	3	5	4
3	3	5	7	2	1	3	4	6	2

a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.

b) Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

Lời giải.

a) Bảng phân bố tần số và tần suất

Số con trong 60 gia đình của một quận

Số con	Tần số	Tần suất (%)
0	1	1,6
1	6	10
2	17	28,3
3	13	21,7
4	10	16,7
5	7	11,7
6	3	5
7	3	5
Cộng	60	100%

b) Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, ta thấy số con là 2 hoặc 3 có tần suất cao nên ta nói số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào 2 hoặc 3 con.

Dạng 2. Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

- Tần số của giá trị x_i (hay một lớp nào đó) là số lần xuất hiện n_i của x_i .
- Tần suất của giá trị x_i (hay một lớp nào đó) là tỉ số $\frac{x_i}{\sum x_i}$.

Ví dụ 3. Nhiệt độ trung bình (đơn vị: °C) của tháng 10 ở địa phương D từ năm 1971 đến 2000 được cho ở bảng sau

27,1	26,9	28,5	27,4	29,1	27,0	27,1	27,4	28,0	28,6
28,1	27,4	27,4	26,5	27,8	28,2	27,6	28,7	27,3	26,8
26,8	26,7	29,0	28,4	28,3	27,4	27,0	27,0	28,3	25,9

Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của bảng số liệu đã cho?

Lời giải. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp được tính như trong bảng sau:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[25; 27)	6	20
[27; 29)	22	73.33
[29; 31]	2	6.67
Cộng	$n = 30$	100

Ví dụ 4. Kết quả điểm thi môn Toán của 2 lớp 10A1 và 10A2 được cho bởi bảng số liệu sau

Lớp 10A1

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	5	4	2	26	4	4	45

Lớp 10A2

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	7	5	6	15	4	1	47

Hãy lập bảng phân bố tần suất kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A1 và 10A2. Tìm lớp có điểm 7 chiếm tỉ lệ hơn 50%.

Lời giải. Tần suất kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A1 và 10A2 được tính theo như bảng dưới đây:

Lớp 10A1

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	5	4	2	26	4	4	45
Tần suất (%)	11,11	8,89	4,44	57,78	8,89	8,89	100

Lớp 10A2

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	7	5	6	15	4	1	47
Tần suất (%)	14,89	10,64	12,77	31,91	8,51	2,12	100

Dựa vào bảng phân bố tần suất đã lập ở trên, ta thấy không có lớp nào có điểm 7 chiếm tỉ lệ hơn 50% .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Trong một kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm là 20), kết quả được cho ở bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Lập bảng phân bố tần suất dựa vào số liệu ở bảng trên. Hỏi có bao nhiêu phần trăm thí sinh được chọn vào vòng trong biết rằng điều kiện để vào vòng trong là phải trên 16 điểm?

Lời giải.

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2
Tần suất (%)	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Điều kiện để vào vòng trong là phải trên 16 điểm, nên thí sinh có số điểm là 17, 18, 19 sẽ được vào vòng trong. Vậy số phần trăm thí sinh được vào vòng trong là $14 + 10 + 2 = 26\%$

Bài 5. Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Biết mỗi chiếc xe bán được cửa hàng có lãi 5 triệu đồng, mỗi ngày cửa hàng mất 2 triệu đồng chi phí thuê nhân viên và cơ sở vật chất. Hỏi trong khoảng thời gian đó cửa hàng lãi (hay lỗ) bao nhiêu?

Lời giải. Số tiền lãi thu được nhờ bán xe trong khoảng thời gian trên là:

$$5 \cdot (0 \cdot 2 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 3) = 610$$

Chi phí thuê nhân viên và cơ sở vật chất trong thời gian đó là:

$$2 \cdot (2 + 13 + 15 + 12 + 7 + 3) = 104$$

Vậy trong khoảng thời gian đó cửa hàng có lãi $610 - 104 = 506$ triệu đồng.

Bài 6. Điều tra về số tiền mua sách (đơn vị: nghìn đồng) trong một năm của 50 sinh viên, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau

203	37	141	43	55	303	252	758	321	123
425	27	72	87	215	358	521	863	284	279
608	302	703	68	149	327	127	125	489	234
498	968	350	57	75	503	712	440	185	404
98	552	101	612	333	451	901	875	789	202

Từ bảng số liệu thống kê trên, người ta lập bảng phân bố tần số ghép lớp như sau

Lớp	Tần số
[0; 99]	10
[100; 199]	7
[200; 299]	7
[300; 399]	7
[400; 499]	6
[500; 599]	3
[600; 699]	2
[700; 799]	4
[800; 899]	2
[900; 999]	2
Cộng	$n = 50$

Xét tốp 20% sinh viên dùng nhiều tiền để mua sách nhất. Người mua ít nhất trong nhóm này mua hết bao nhiêu tiền?

Lời giải. Xét tốp 20% số sinh viên mua nhiều tiền nhất. Nhóm này có $50 \cdot 20\% = 10$ sinh viên. Có 10 sinh viên tiêu từ 600 nghìn đồng trở lên. Do bài toán hỏi người mua ít nhất nên ta xét trong nhóm [600; 699]. Nhóm này có hai người mua hết 608 nghìn đồng và 612 nghìn đồng. Do đó, người mua ít nhất là 618 nghìn đồng.

Bài 7. Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp của một mẫu số liệu như sau

Lớp	[1; 9]	[10; 19]	[20; 29]	[30; 39]	[40; 49]	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	12,5	0,0	50,0	25,0	12,5	100

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu n . Biết rằng n là số có 3 chữ số và chữ số tận cùng là 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải. Hai lớp $[1;9]$ và $[40;49]$ có tần số là $n.12,5\% = \frac{n}{8}$.

$$\text{Lớp } [20;29] \text{ có tần số là } n.50\% = \frac{n}{2}.$$

$$\text{Lớp } [30;39] \text{ có tần số là } n.25\% = \frac{n}{4}.$$

Vì tần số là các số nguyên dương nên n phải chia hết cho $8;4;2$. Mà n là số có 3 chữ số, chữ số tận cùng là 8 và nhỏ nhất nên $n = 128$.

Bài 8. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 30 chiếc xe qua trạm như sau

53	47	59	66	36	69	83	77	42	57	51	60	78	63	46
63	42	55	63	48	75	60	58	80	44	59	60	75	49	63

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 6 lớp với độ dài mỗi đoạn của lớp là 7.

Lời giải.

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
$[36;43]$	10	10
$[44;51]$	7	20
$[52;59]$	7	20
$[60;67]$	7	26,7
$[68;75]$	6	10
$[76;83]$	3	13,3
Cộng	$n = 30$	100

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút).

10	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	11

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

Lời giải. Kích thước mẫu bằng 20

Bài 2. Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các học sinh lớp 10A cho ở bảng dưới đây.

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	2	5	8	6	10	7	2

Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

Lời giải. Lớp 10A có 41 học sinh

Bài 3. Dưới đây là bảng phân bố tần số - tần suất của đại lượng X . Trong bảng còn hai số chưa biết x và y . Tìm x và y .

Dấu hiệu	9	10	12	15	16
Tần số	1	2	3	x	4
Tần suất (%)	5	10	15	50	y

Lời giải. Ta có $x = \frac{3.50}{15} = 10$; $y = \frac{15.4}{3} = 20$.

Bài 4.

Cho bảng phân bố tần số ghép lớp của một mẫu số liệu mà các số liệu được sắp xếp từ nhỏ đến lớn như bên. Hãy tính tần suất (%) của lớp chứa số liệu thứ 5 của mẫu số liệu.

Lớp	Tần số
[0; 3]	3
[4; 7]	1
[7; 10]	2
[8; 11]	4

Lời giải. Số liệu thứ 5 thuộc lớp [7; 10]. Do đó, tần suất cần tìm là $\frac{2}{10} = 20\%$

Bài 5. Cho bảng số liệu về khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch từ một thửa ruộng như dưới đây.

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70; 80)	3
[80; 90)	6
[90; 100)	12
[100; 110)	6
[110; 120]	3
Cộng	30

Tần suất của lớp [100; 110) là bao nhiêu?

Lời giải. Tần suất ghép lớp [100; 110) là $\frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%$

Bài 6. Kết quả khảo sát ở 43 tỉnh (đơn vị: %) ghi lại số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam được cho ở bảng phân bố tần số ghép lớp bên dưới.

Lớp	[4, 5; 5, 4]	[5, 5; 6, 4]	[6, 5; 7, 4]	[7, 5; 8, 4]	[8, 5; 9, 4]	Cộng
Tần số	9	6	17	8	3	$n = 43$

Tính tỷ lệ phần trăm số tỉnh có số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam không vượt quá 7,4% (làm tròn một chữ số thập phân).

Lời giải. Tỷ lệ phần trăm số tỉnh có số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam không vượt quá 7,4% là $\frac{9+6+17}{43} \approx 74,41\%$

Bài 7.

Người ta thống kê số phần trăm trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2,5 kg của 43 tỉnh thành ở bảng phân bố tần suất ghép lớp sau. Có bao nhiêu tỉnh có tỉ lệ phần trăm trẻ có trọng lượng dưới 2,5 kg dưới 7,5% ?

Lớp	Tần suất (%)
[4, 5; 5, 5)	9
[5, 5; 6, 5)	6
[6, 5; 7, 5)	17
[7, 5; 8, 5)	8
[8, 5; 9, 5)	3

Lời giải. Chưa đủ giả thiết để kết luận

Bài 8. Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp của một mẫu số liệu như sau

Lớp	[1; 9]	[10; 19]	[20; 29]	[30; 39]	[40; 49]	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	12,5	0,0	50,0	25,0	12,5	100

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu n . Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải. Lớp [1; 9] có tần số là $n \cdot 12,5\% = \frac{n}{8}$.

Lớp [20; 29] có tần số là $n \cdot 50\% = \frac{n}{2}$.

Lớp [30; 39] có tần số là $n \cdot 25\% = \frac{n}{4}$.

Lớp $[40; 49]$ có tần số là $n \cdot 12,5\% = \frac{n}{8}$.

Vì tần số là các số nguyên dương nên n phải chia hết cho $8; 4; 2$. Do đó, số n nhỏ nhất thỏa có giá trị bằng 8 .

§2. BIỂU ĐỒ

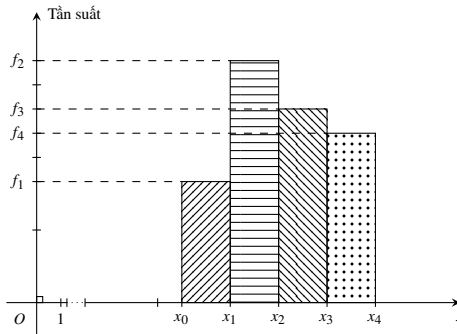
I. Tóm tắt lí thuyết

1. Biểu đồ tần suất hình cột

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	100%

Ta có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp qua biểu đồ tần suất hình cột như hình vẽ sau



⚠ Tương tự, ta cũng có thể vẽ biểu đồ hình cột mô tả cho bảng phân bố tần suất, tần số và tần số ghép lớp.

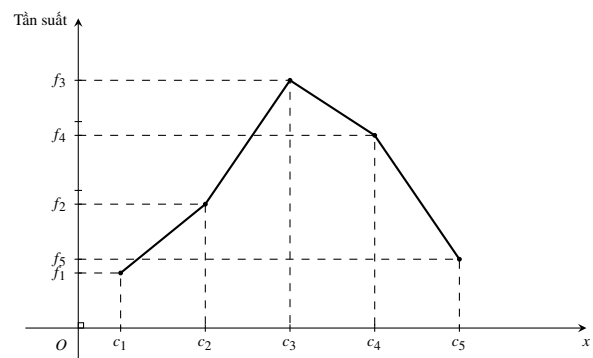
2. Đường gấp khúc tần suất

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	$[x_4; x_5]$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	100%

Ta cũng có thể mô tả bảng tần suất ghép lớp bằng một đường gấp khúc qua các bước sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ ta xác định các điểm $(c_i; f_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ trong đó c_i là trung bình cộng của hai đầu nút của lớp i (ta gọi c_i là giá trị đại diện của lớp i).
- Nối các điểm $(c_i; f_i)$ với $(c_{i+1}; f_{i+1})$, $i = 1, 2, 3, 4$, ta thu được đường gấp khúc, gọi là đường gấp khúc tần suất.



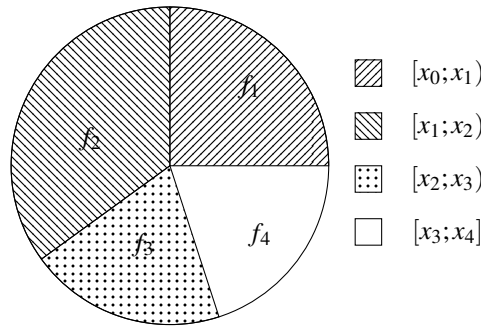
⚠ Ta cũng có thể mô tả bảng tần suất, tần số và tần số ghép lớp bằng cách vẽ biểu đồ hình cột hoặc đường gấp khúc. Ở đó ta chỉ cần thay cột tần suất bằng cột tần số.

3. Biểu đồ hình quạt

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	100%

Ta có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp thông qua biểu đồ hình quạt như sau



⚠ Chúng ta cũng có thể dùng biểu đồ hình quạt để mô tả bảng phân bố tần số, tần số ghép lớp.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Vẽ biểu đồ tần số và tần suất hình cột

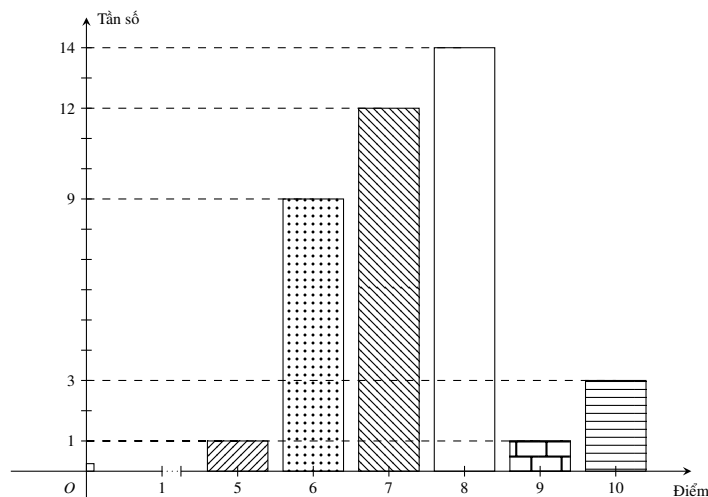
Từ các số liệu trong bảng phân bố tần số và tần suất, ta tọa độ hóa để vẽ biểu đồ trên hệ trục tọa độ.

Ví dụ 1. Kết quả điểm thi môn Toán của lớp 10A9 trường THPT Đông Thụy Anh được cho theo bảng dưới đây.

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	1	9	12	14	1	3	40

Hãy vẽ biểu đồ tần số và tần suất dạng cột để mô tả cho bảng số liệu trên.

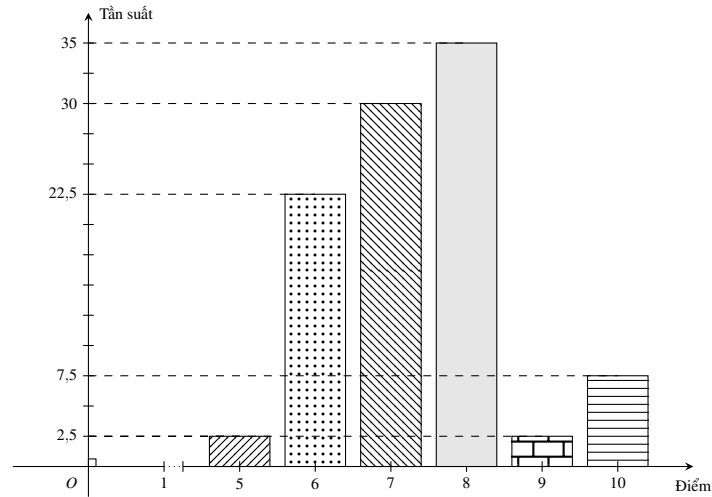
Lời giải. Biểu đồ tần số hình cột mô tả kết quả điểm thi của lớp 10A9



Bảng phân bố tần suất

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần suất	2,5	22,5	30	35	2,5	7,5	100%

Biểu đồ tần số hình cột mô tả kết quả điểm thi của lớp 10A9



Ví dụ 2. Số điện tiêu thụ của 30 hộ ở một khu dân cư trong một tháng được thống kê theo bảng sau:

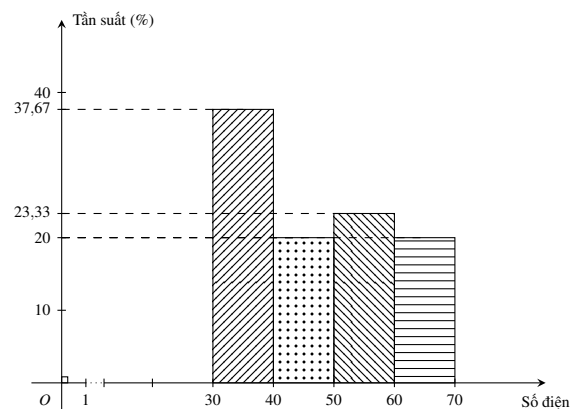
50	47	30	65	63	70	38	34	48	53
33	39	32	40	50	55	50	61	37	37
43	35	65	60	31	33	41	45	55	59

Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp và lập biểu đồ tần suất hình cột mô tả cho bảng phân bố tần suất ghép lớp đó.

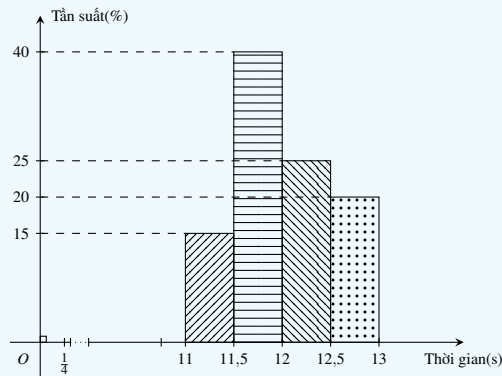
Lời giải. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:

Lớp số điện (kW)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70]	Cộng
Tần số	11	6	7	6	30
Tần suất (%)	37,67	20	23,33	20	100%

Biểu đồ tần suất ghép lớp hình cột mô tả cho bảng số liệu đã cho



Ví dụ 3. Cho biểu đồ tần suất ghép lớp hình cột mô tả thành tích bạn Bình tập chạy trong 20 lần như hình dưới đây. Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp mà biểu đồ đã mô tả.



Lời giải. Bảng phân bố tần suất thể hiện thành tích tập chạy của bạn Bình trong 20 lần:

Lớp thời gian chạy (s)	[11; 11,5)	[11,5; 12)	[12; 12,5)	[12,5; 13]	Cộng
Tần suất (%)	15	40	25	20	100%

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một công ty sản xuất bóng đèn kiểm tra định kì bằng cách thả thử nghiệm 30 bóng đèn để kiểm tra tuổi thọ (tính theo giờ). Kết quả của cuộc thử nghiệm được thống kê theo bảng sau:

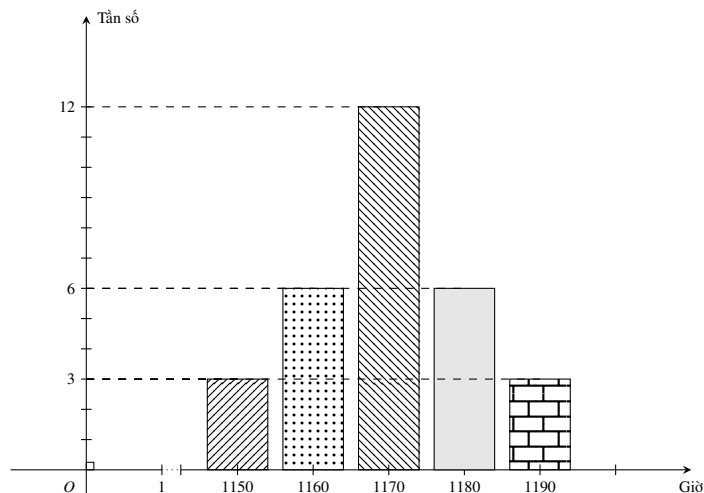
1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy lập bảng phân bố tần số và vẽ biểu đồ tần số hình cột.

Lời giải. Bảng phân bố tần số

Giờ	1150	1160	1170	1180	1190	Cộng
Tần số	3	6	12	6	3	30

Mô tả bảng phân bố tần số bằng biểu đồ tần số hình cột



Bài 2. Số cuộn phim mà 40 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư sử dụng trong một tháng được thống kê bằng bảng số liệu sau:

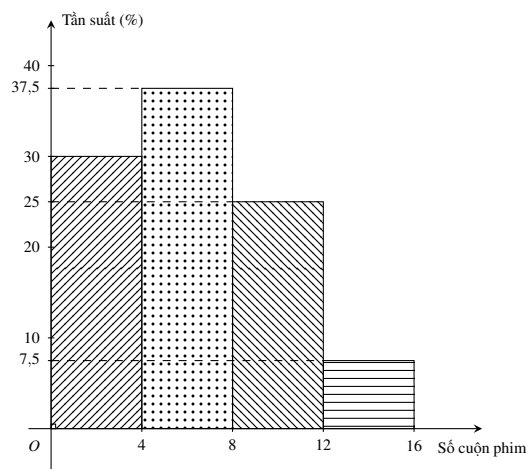
5	3	3	1	4	3	4	3	6	8
4	2	4	6	8	9	6	2	10	11
15	1	2	5	13	7	7	2	5	4
3	16	10	4	7	2	10	11	8	9

Hãy lập bảng tần số, tần suất ghép lớp và mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp bằng biểu đồ tần suất hình cột.

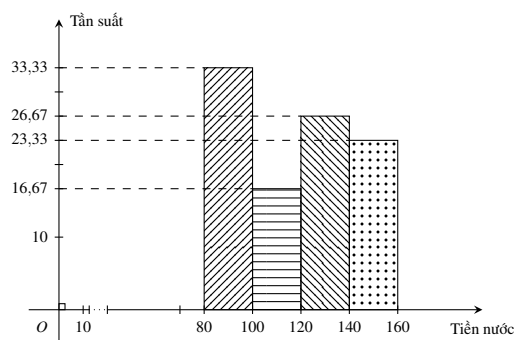
Lời giải. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của bảng thống kê số cuộn phim của 40 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư sử dụng trong một tháng là

Lớp số cuộn phim	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16]	Cộng
Tần số	12	15	10	3	40
Tần suất (%)	30	37,5	25	7,5	100%

Biểu đồ mô tả cho bảng tần suất ghép lớp



Bài 3. Cho biểu đồ tần suất ghép lớp hình cột mô tả thống kê tiền nước (nghìn đồng) phải trả hàng tháng của gia đình anh Huy trong năm 2017 như hình vẽ:



Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp về tiền điện hàng tháng phải trả trong năm 2017 của gia đình anh Huy.

Lời giải. Bảng phân bố tần suất ghép lớp tiền nước hàng tháng của gia đình anh Huy trong năm 2017 như sau:

Tiền nước(nghìn đồng)	[80; 100)	[100; 120)	[120; 140)	140; 160	Cộng
Tần suất(%)	33,33	16,67	26,67	23,33	100%

Dạng 2. Biểu đồ đường gấp khúc

Ví dụ 4. Cho bảng tần suất ghép lớp:

Điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A

Lớp điểm thi	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]	Cộng
Tần suất (%)	7,5	12,5	40	30	10	100%

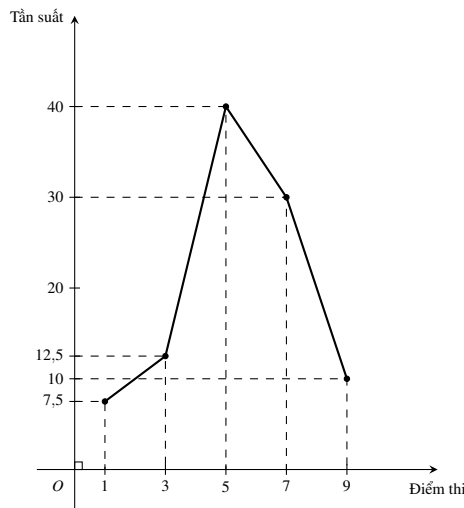
- Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A.
- Có bao nhiêu học sinh thuộc lớp điểm chiếm tỉ lệ cao nhất.
- Biết điểm giỏi là từ 8 đến 10. Hỏi lớp 10D3 có bao nhiêu học sinh đạt điểm giỏi.

Lời giải.

a) Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp điểm thi	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
GTĐĐ	1	3	5	7	9

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A:



b) Lớp điểm [4; 6) chiếm tỉ lệ cao nhất bằng 40%. Suy ra số học sinh thuộc lớp này bằng: $\frac{40 \times 40}{100} = 16$.

c) Lớp điểm [8; 10] chiếm tỉ lệ 10% nên số học sinh đạt điểm giỏi là: $\frac{10 \times 40}{100} = 4$.

Ví dụ 5. Cho các bảng tần số ghép lớp:

Chiều cao (cm) của 40 học sinh lớp 10A1 của trường THPT B

Lớp chiều cao	[1,5; 1,55)	[1,55; 1,6)	[1,6; 1,65)	[1,65; 1,7)	[1,7; 1,75]	Cộng
Tần số	0	2	15	18	5	40

Chiều cao (cm) của 40 học sinh lớp 10D1 của trường THPT B

Lớp chiều cao	[1,5; 1,55)	[1,55; 1,6)	[1,6; 1,65)	[1,65; 1,7)	[1,7; 1,75]	Cộng
Tần số	1	12	23	4	0	40

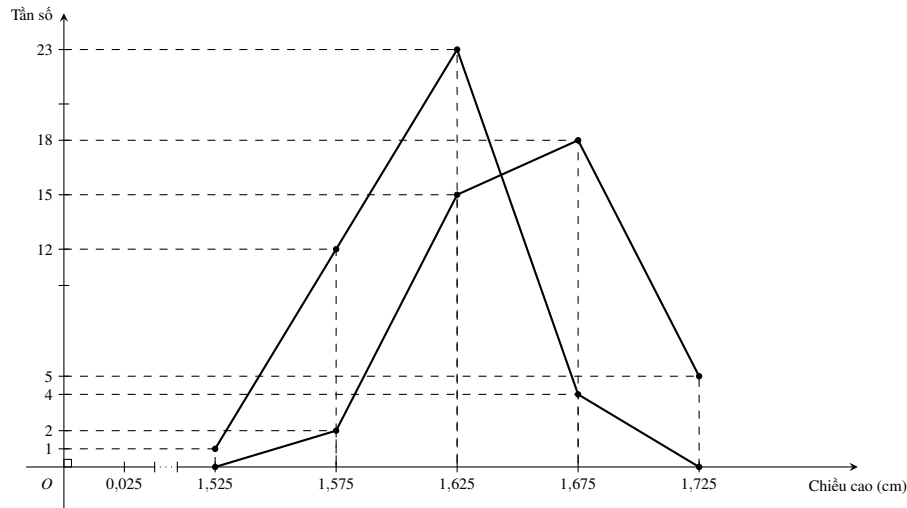
- Hãy vẽ đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10A1 và đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10D1 của trường THPT B trên cùng một biểu đồ.
- Nhận xét về chiều cao trung bình của học sinh lớp 10A1 so với lớp 10D1.

Lời giải.

a) Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp chiều cao	[1,5; 1,55)	[1,55; 1,6)	[1,6; 1,65)	[1,65; 1,7)	[1,7; 1,75]
GTĐĐ	1,525	1,575	1,625	1,675	1,725

Biểu đồ đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10A1 và đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10D1 của trường THPT B:



b) Nhận xét: Sĩ số hai lớp bằng nhau. Đường gấp khúc biểu diễn chiều cao từ 1,65 cm trở lên của lớp 10A1 nằm trên lớp 10D1, đường gấp khúc biểu diễn chiều cao dưới 1,65 cm của lớp 10A1 nằm dưới lớp 10D1. Vậy chiều cao trung bình lớp 10A1 lớn hơn lớp 10D1.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 4. Cho bảng tần suất ghép lớp:

Cân nặng (kg) của 50 học sinh lớp 10A3 của trường THPT C

Lớp cân nặng	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52]	Cộng
Tần suất (%)	2	10	24	38	20	6	100 %

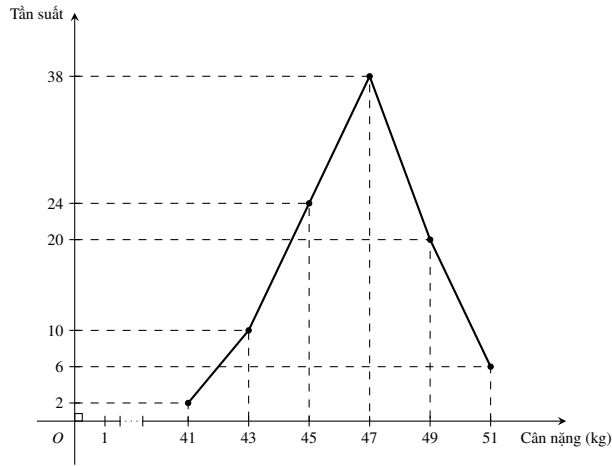
- a) Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về cân nặng của 50 học sinh lớp 10A3 của trường THPT C.
 b) Có bao nhiêu học sinh có cân nặng từ 48 kg đến 52 kg.

Lời giải.

1. Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp cân nặng	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52]
GTĐĐ	41	43	45	47	49	51

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về cân nặng của 50 học sinh lớp 10A3 của trường THPT C:



2. Học sinh có cân nặng từ 48 kg đến 52 kg chiếm tỉ lệ $20\% + 6\% = 26\%$. Suy ra số học sinh có cân nặng từ 48 kg đến 52 kg là $\frac{26 \times 50}{100} = 13$.

Bài 5. Cho các bảng tần số ghép lớp:

Điểm phẩy học kì 1 môn Toán của 40 học sinh lớp 10A1 của trường THPT A

Lớp điểm phẩy	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]	Cộng
Tần số	0	2	25	10	3	40

Điểm phẩy học kì 1 môn Văn của 40 học sinh lớp 10A1 của trường THPT A

Lớp điểm phẩy	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]	Cộng
Tần số	5	23	11	1	0	40

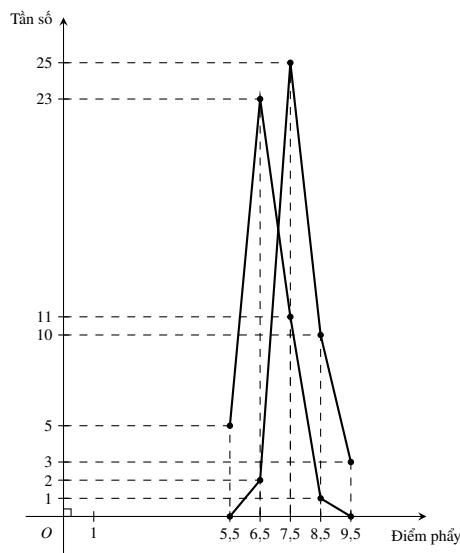
- a) Hãy vẽ đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Toán và đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Văn của 40 học sinh lớp 10A1 trên cùng một biểu đồ.
- b) Nhận xét về điểm phẩy trung bình môn Toán so với môn Văn của học sinh lớp 10A1.

Lời giải.

1. Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp điểm phẩy	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]
GTĐĐ	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5

Biểu đồ đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Toán và đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Văn của 40 học sinh lớp 10A1:



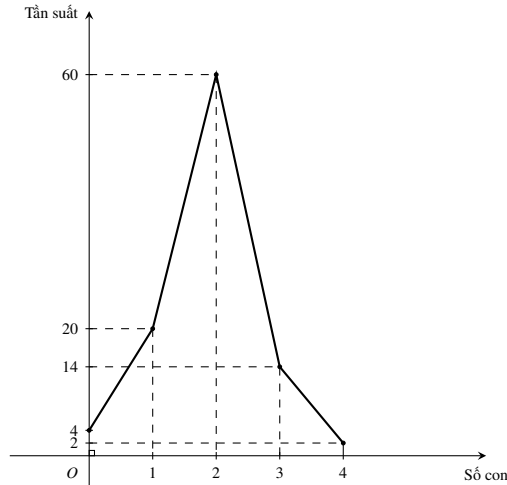
2. Nhận xét: Đường gấp khúc biểu diễn điểm phẩy từ 7,0 trở lên của môn Toán nằm trên môn Văn, đường gấp khúc biểu diễn điểm phẩy dưới 7,0 của môn Toán nằm dưới môn Văn. Vậy điểm phẩy trung bình môn Toán cao hơn môn Văn.

Bài 6. Cho bảng tần suất:

Số con của 50 hộ gia đình ở địa phương A						
Số con	0	1	2	3	4	Cộng
Tần suất (%)	4	20	60	14	2	100 %

Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về số con của 50 hộ gia đình ở địa phương A và nhận xét xem có bao nhiêu hộ gia đình chưa thực hiện tốt kế hoạch hóa gia đình (có nhiều hơn 2 con).

Lời giải. Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về số con của 50 hộ gia đình ở địa phương A:



Các gia đình có nhiều hơn 2 con chiếm $14\% + 2\% = 16\%$. Suy ra số gia đình có nhiều hơn 2 con là $\frac{16 \times 50}{100} = 8$.

Bài 7. Cho bảng tần suất ghép lớp:

Tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B

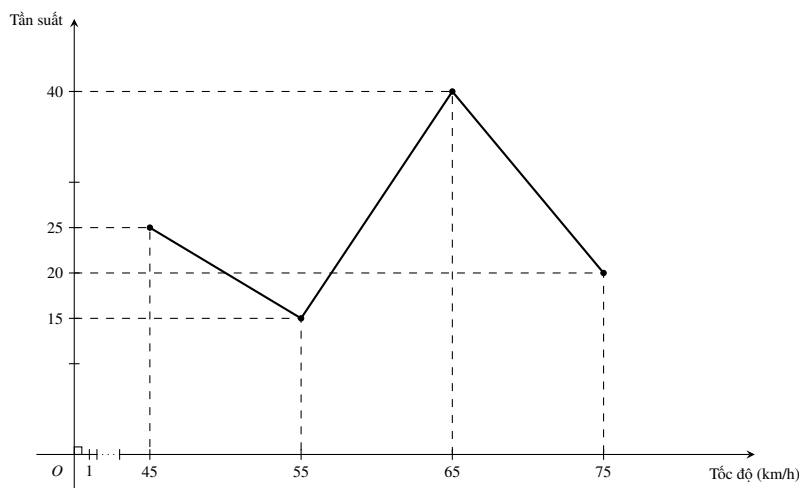
Lớp tốc độ	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80]	Cộng
Tần suất (%)	25	15	40	20	100 %

Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B và nhận xét xem có bao nhiêu chiếc xe đi với tốc độ không dưới 70 km/h.

Lời giải. Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp tốc độ	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80]
GTĐĐ	45	55	65	75

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B:



Các xe đi với vận tốc không dưới 70 km/h chiếm 20 %. Suy ra số xe đi với vận tốc không dưới 70 km/h là $\frac{20 \times 40}{100} = 8$.

Bài 8. Cho bảng tần suất:

Tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C

Tiền lương	700	800	900	1000	1100	1200	Cộng
Tần suất (%)	16	18	24	20	12	10	100 %

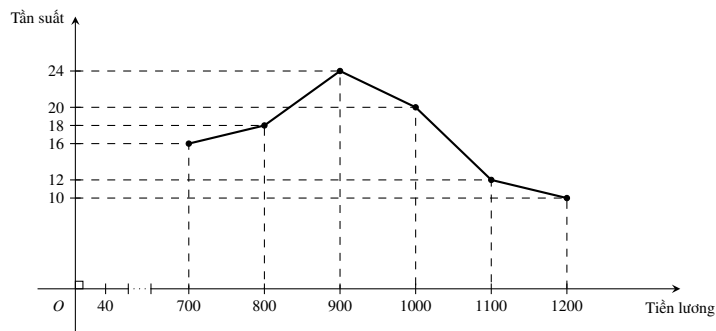
Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất và đường gấp khúc tần số về tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C.

Lời giải. Bảng phân bố tần số:

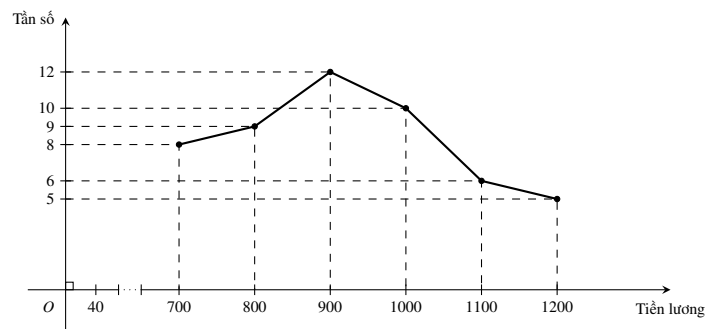
Tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C

Tiền lương	700	800	900	1000	1100	1200	Cộng
Tần số	8	9	12	10	6	5	50

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C:



Biểu đồ đường gấp khúc tần số về tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C:



Dạng 3. Biểu đồ hình quạt

Ví dụ 6. Chiều cao (cm) của 36 học sinh nam ở một lớp 12A1:

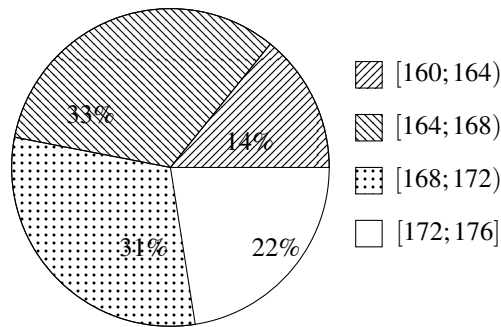
Lớp chiều cao (cm)	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176]	Cộng
Tần số	5	12	11	8	36

Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt cho bảng thống kê trên.

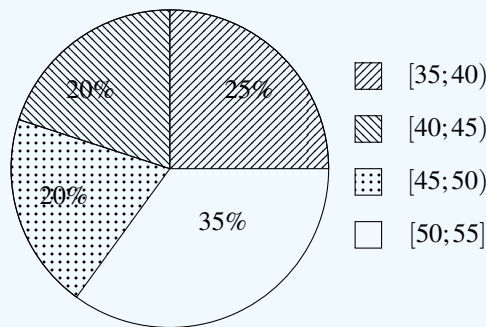
Lời giải. Ta có bảng phân bố tần suất sau

Lớp chiều cao (cm)	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176]	Cộng
Tần số	5	12	11	8	36
Tần suất (%)	14	33	31	22	100

Từ đó ta có biểu đồ tần suất hình quạt như sau:



Ví dụ 7. Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của một nhóm xã. Kết quả thu được biểu diễn qua biểu đồ tần suất hình quạt như sau:



Hỏi số người trong xã có cân nặng từ 40 kg đến dưới 50 kg là bao nhiêu người, biết rằng xã có 1000 người.

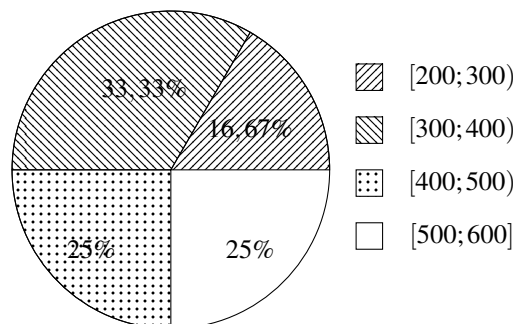
Lời giải. Dựa vào biểu đồ quạt ta có:

Tỉ lệ người có cân nặng từ 40 kg đến dưới 50 kg là $20 + 20 = 40\%$.

Số người có cân nặng từ 40 kg đến dưới 50 kg là $\frac{40 \times 1000}{100} = 400$ người.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 9. Số lượng khách đến tham quan tại Đà Nẵng trong 12 tháng được cho bởi biểu đồ như sau:

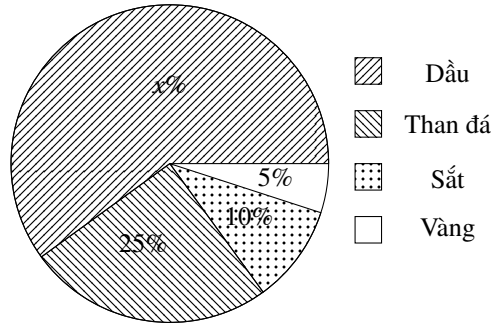


Tính số tháng mà số người tham quan không dưới 400 người.

Lời giải. Dựa vào biểu đồ, ta có số người tham quan không dưới 400 người chiếm tỉ lệ phần trăm là: $25 + 25 = 50\%$.

Vậy số tháng mà số người thăm quan trên 400 người là $\frac{50 \times 12}{100} = 6$ tháng.

Bài 10. Biểu đồ hình quạt sau mô tả tỉ lệ về giá trị đạt được của khoáng sản xuất khẩu nước ngoài của nước ta:



Biết rằng giá trị xuất khẩu của nước ta về dầu là 450 triệu USA. Hỏi giá trị xuất khẩu vàng là bao nhiêu triệu USA?

Lời giải. Tỉ lệ phần trăm của dầu là $100\% - 25\% - 10\% - 5\% = 60\%$.

Suy ra giá trị xuất khẩu của vàng là $\frac{450}{60} \cdot 5 = 37,5$ triệu USA.

Bài 11. Cho bảng phân bố tần số điểm thi môn Anh Văn của một trung tâm ở Hà Nội:

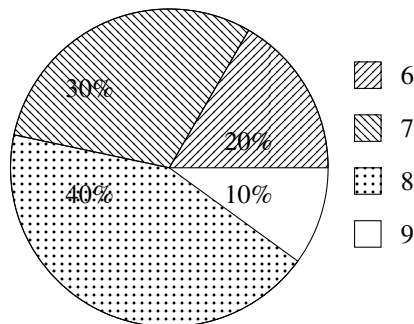
Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	40	60	80	20	200

Vẽ biểu đồ hình quạt mô tả bảng dữ liệu thống kê trên.

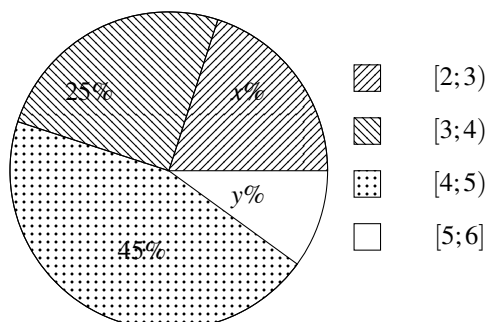
Lời giải. Ta có bảng phân bố tần suất sau

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	40	60	80	20	200
Tần suất (%)	20	30	40	10	100

Khi đó ta có biểu đồ tần suất hình quạt:



Bài 12. Tuổi thọ (tính theo tháng) của 100 bóng đèn thấp thử được thể hiện qua biểu đồ tần suất hình quạt:



Biết rằng x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 500$. Tìm số bóng đèn có tuổi thọ trong khoảng $[2; 5)$ biết rằng $x > 15$.

Lời giải. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x^2 + y^2 = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ x^2 + (30 - x)^2 = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ 2x^2 - 60x + 400 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ \begin{cases} x = 20 \\ x = 10 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}$$

Tỉ lệ của số bóng đèn có tuổi thọ trong khoảng $[2; 5)$ là $20\% + 25\% + 45\% = 90\%$. Khi đó, số bóng đèn có tuổi thọ trong khoảng $[2; 5)$ là $\frac{90 \times 100}{100} = 90$ bóng.

§3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MỘT

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Số trung bình cộng

Định nghĩa 1 (Số trung bình cộng). Số trung bình cộng (số trung bình) của một dãy gồm n số liệu x_1, x_2, \dots, x_n kí hiệu là \bar{x} và được tính theo công thức: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

- Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất

Giá trị	x_1	x_2	\dots	x_m	Cộng
Tần số	n_1	n_2	\dots	n_m	N
Tần suất	f_1	f_2	\dots	f_m	100%

Số trung bình cộng được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k \text{ trong đó } n_i, f_i \text{ lần lượt là tần số, tần suất của giá trị } x_i \text{ (} i = 1, 2, \dots, k \text{) và } n \text{ là số các số liệu thống kê (} n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \text{).}$$

- Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp


Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
\dots	\dots	\dots
$[a_{m-1}; a_m)$	x_m	n_m
		$N = \sum_{i=1}^m n_i$

Số trung bình cộng được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k}{n} = f_1c_1 + f_2c_2 + \dots + f_kc_k \text{ trong đó } n_i, c_i, f_i \text{ lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ } i \text{ (} i = 1, 2, \dots, k \text{) và } n \text{ là số các số liệu thống kê (} n = n_1 + n_2 + \dots + n_k \text{).}$$

2. Số trung vị


Định nghĩa 2 (Số trung vị). Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành dãy không giảm (hoặc không tăng). Số trung vị (của các số liệu thống kê đã cho) kí hiệu M_e là số đứng giữa dãy nếu số phần tử là lẻ và là trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy nếu số phần tử là chẵn.

 Số trung vị được xác định như sau:

- $M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$ nếu n là số lẻ.
- $M_e = \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}} \right)$ n là số chẵn.

3. Một

Định nghĩa 3 (Một). Một của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_0 .

 Chú ý:

- Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.

- Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng mode làm đại diện. Một bảng phân bố tần số có thể có hai hay nhiều mode.

II. Các dạng toán

Dạng 1. Số trung bình

Áp dụng công thức số trung bình cho bảng số tần số, tần suất và tần số, tần suất ghép lớp.

Ví dụ 1. Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

Khối lượng(gam)	250	300	350	400	450	500	Cộng
Tần số	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình \bar{x} (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Lời giải. Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ta có

$$\bar{x} = \frac{250.4 + 300.4 + 350.5 + 400.6 + 450.4 + 500.7}{30} \approx 388,33 \text{ (gam)}.$$

Ví dụ 2. Chiều cao của 20 cây giống được cho bởi bảng sau:

Lớp (cm)	Tần số
[40; 44]	2
[45; 49]	5
[50; 54]	3
[55; 59]	4
[60; 64]	3
[65; 69]	3
	$N = 20$

Tính số trung bình \bar{x} (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Lời giải. Bảng tần số ghép lớp của bảng nói trên là

Lớp (cm)	Giá trị đại diện	Tần số
[40; 44]	42	2
[45; 49]	47	5
[50; 54]	52	3
[55; 59]	57	4
[60; 64]	62	3
[65; 69]	67	3
		$N = 20$

Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ghép lớp ta có

$$\bar{x} \approx \frac{42.2 + 47.5 + 52.3 + 57.4 + 62.3 + 67.3}{20} = 54.5 \text{ (cm)}.$$

Dạng 2. Số trung vị

Áp dụng định nghĩa của số trung vị. Lưu ý có hai trường hợp khác nhau là mẫu số liệu có kích thước lẻ và mẫu số liệu có kích thước chẵn.

Ví dụ 3. Điều tra số học sinh của 30 lớp học, ta được bảng số liệu như sau:

35	39	39	40	40	41	41	41	41	44	44	45	45	45	46
48	48	48	48	49	49	49	49	49	49	50	50	50	50	51

Tính số trung vị của bảng nói trên.

Lời giải. Ta có $N = 30$ là số chẵn. Số liệu thứ 15 và 16 lần lượt là 46, 48. Vậy số trung vị là $M_e = \frac{46 + 48}{2} = 47$ (Học sinh).

Ví dụ 4. Điểm học kì một của một học sinh được cho bởi bảng số liệu sau (Đơn vị: điểm)

5	6	6	7	7	8	8	8,5	9
---	---	---	---	---	---	---	-----	---

Tính số trung vị của bảng nói trên.

Lời giải. Ta có $N = 9$ là số lẻ. Số liệu thứ $\frac{N+1}{2} = 5$ là số trung vị. Do đó số trung vị là $M_e = 7$ (Điểm).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian nảy mầm một loại hạt mới trong các điều kiện khác nhau

Thời gian(phút)	420	440	450	480	500	540
Tần số	8	17	18	16	11	10

Tính giá trị trung bình \bar{x} (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian nảy mầm loại hạt mới nói trên.

Lời giải. Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ta có

$$\bar{x} = \frac{420 \cdot 8 + 440 \cdot 17 + 450 \cdot 18 + 480 \cdot 16 + 500 \cdot 11 + 540 \cdot 10}{80} = 469 \text{ (Phút).}$$

Bài 2. Điều tra số học sinh giỏi khối 10 của 15 trường cấp ba trên địa bàn tỉnh A, ta được bảng số liệu như sau:

22	29	29	29	30	31	32	32	33	34	34	35	35	35	36
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tính số trung vị của bảng nói trên.

Lời giải. Ta có $N = 15$ là số lẻ. Số liệu thứ $\frac{15+1}{2} = 8$. Vậy số trung vị là $M_e = 8$ (Học sinh).

Bài 3. Tốc độ phát triển của một loại Vi-rút trong 10 ngày với các điều kiện khác nhau (đơn vị nghìn con) được thống kê như sau

20	100	30	980	440	20	20	150	60	270
----	-----	----	-----	-----	----	----	-----	----	-----

Trong trường hợp này ta chọn số nào dưới đây làm giá trị đại diện là tốt nhất? Tính giá trị đại diện đó.

Lời giải. Ta chọn số trung vị làm đại diện là tốt nhất vì có sự chênh lệch lớn giữa các số liệu trong mẫu.

Sắp xếp lại số liệu mẫu:

20	100	30	980	440	20	20	150	60	270
20	20	20	30	60	100	150	270	440	980

Kích thước mẫu là $N = 10$. Số liệu thứ 5 và 6 lần lượt là 60, 100. Vậy giá trị đại diện cho bảng số liệu là $M_e = \frac{60 + 100}{2} = 80$ (Nghìn con).

Bài 4. Một cửa hàng bán 3 loại hoa quả nhập khẩu: Bưởi, Dưa vàng và Lê với số liệu tính toán được cho bởi bảng (trong một quý) sau khi giảm giá mỗi loại lần lượt là x, y, z trên 1 kg

Loại quả	Lê	Dưa vàng	Bưởi
Giá bán (nghìn/1kg)	$200 - x$	$300 - y$	$400 - z$
Số lượng bán (kg)	$200 + x$	$300 + y$	$400 + z$

Biết rằng $x + y + z = 90$ (nghìn). Tính giá trị $x; y; z$ để lợi nhuận bình quân của một 1 kg hoa quả đạt được cao nhất.

Lời giải. Do khối lượng hoa quả bán được là $200 + x + 300 + y + 400 + z = 990$ là cố định, vì thế bình quân mỗi kg hoa quả có giá cao nhất khi tổng số tiền thu được là cao nhất.

Tổng số tiền thu được là $P = (200 - x)(200 + x) + (300 - y)(300 + y) + (400 - z) + (400 + z)$
 $= 290000 - (x^2 + y^2 + z^2)$

Ta có bất đẳng thức sau $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = 2700$ từ đó $P \leq 287300$. Vậy P lớn nhất khi dấu bằng xảy ra tức là $x = y = z = 30$ (nghìn)

Bài 5. Để đảm bảo bảng số liệu được phân bố đồng đều người ta điều chỉnh các giá trị x, y sao cho số trung bình cộng và số trung vị bằng nhau. Khi đó bảng số liệu được cho như sau:

Giá trị	40	50	$60 + x$	$90 + y$	
Tần số	20	30	$60 - x$	$90 - y$	200

Biết rằng $x \leq 0$. Tìm x ?

Lời giải. Số trung bình của bảng số liệu bằng: $\bar{x} = \frac{(60 + x)(60 - x) + (90 - y)(90 + y) + 2300}{200}$ và số trung

vị là $M_e = \frac{30 + 60 - x}{2}$.

Ta có $20 + 30 + 60 - x + 90 - x = 200 \Leftrightarrow x + y = 0$.

Ta giải phương trình 2 giá trị này bằng nhau rồi lấy số nguyên gần nhất với nghiệm.

$$\frac{(60 + x)(60 - x) + (90 - y)(90 + y) + 2300}{200} = \frac{40 + 50 - x}{2}$$

Do đó $x = 25 - 25\sqrt{5}$ hoặc $x = 25 + 5\sqrt{21}$, vì $x \leq 0$ nên ta lấy nghiệm thứ nhất, số nguyên gần với nó nhất là $25 - 25\sqrt{5}$.

Dạng 3. Một

Áp dụng định nghĩa về Một của bảng số liệu thống kê.

Ví dụ 5. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy tính một của bảng số liệu thống kê trên.

Lời giải. Từ bảng số liệu trên ta suy ra bảng phân bố tần số các giá trị tuổi thọ của 30 bóng đèn như sau

Tuổi thọ (giờ)	1150	1160	1170	1180	1190	Tổng
Tần số	3	6	12	6	3	30

Ta thấy giá trị 1170 có tần số bằng 12 là lớn nhất. Do đó mốt của bảng số liệu là: $M_O = 1170$.

Ví dụ 6. Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

Điểm	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25	Tổng
Tần số	3	7	4	4	6	7	3	3	2	2	41

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

Lời giải. Ta thấy điểm 11 và điểm 18 có tần số bằng 7 là lớn nhất. Do đó bảng số liệu có hai mốt là: $M_O^{(1)} = 11$ và $M_O^{(2)} = 18$.

Ví dụ 7. Một bác sĩ mắt ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20
15	12	18	17	25	17	21	15	12	18
16	23	14	18	19	13	16	19	18	17

Tính mốt M_O của bảng số liệu đã cho.

Lời giải. Từ bảng số liệu trên ta suy ra bảng phân bố tần số tuổi của 30 bệnh nhân đau mắt hột như sau

Tuổi	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	Tổng
Tần số	2	2	1	4	2	5	5	2	2	2	1	1	1	30

Ta thấy tuổi 17 và 18 có tần số bằng 5 là lớn nhất. Do đó bảng số liệu có hai mốt là: $M_O^{(1)} = 17$ và $M_O^{(2)} = 18$.

Ví dụ 8. Điểm bài kiểm tra một tiết môn toán của 40 học sinh lớp 11A1 được thống kê bằng bảng số liệu dưới đây

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	$3n - 8$	$2n + 4$	3	2	4	5	40

Trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Tính mốt của bảng số liệu thống kê đã cho.

Lời giải. Vì tổng các số liệu thống kê bằng 40 nên ta có: $5n + 15 = 40 \Leftrightarrow n = 5$.

Với $n = 5$ ta có bảng phân bố tần số

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	14	3	2	4	5	40

Vậy mốt của bảng số liệu là: $M_O = 6$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	12	5	n^2	16	$6n - 5$

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $M_O = x_3$ là một duy nhất của bảng phân bố tần số đã cho.

Lời giải. Từ giả thiết $M_O = x_3$ là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho nên ta có $\begin{cases} n^2 > 16 \\ n^2 > 6n - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} n < -4 \\ n > 4 \\ n < 1 \\ n > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < -4 \\ n > 5 \end{cases}.$$

Vì n là số tự nhiên nên các giá trị n thỏa mãn là: $n > 5$.

Bài 7. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	5	2	n	$20 - n$	8

Tìm các số tự nhiên n để $M_O = x_4$ là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho.

Lời giải. Từ giả thiết $M_O = x_4$ là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho nên ta có $\begin{cases} 20 - n > 8 \\ 20 - n > n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < 12 \\ n < 10 \end{cases} \Leftrightarrow n < 10.$

Vì n là số tự nhiên nên các giá trị n thỏa mãn là: $0 \leq n < 10$.

Bài 8. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Tần số	5	$n^2 + 3$	3	$7n - 9$	$n + 1$	7

Gọi S là tập hợp tất cả các số n nguyên dương sao cho $M_O = x_2$ và $M_O = x_4$ là hai một của bảng phân bố tần số đã cho. Tính số phần tử của tập hợp S .

Lời giải. Từ giả thiết x_2 và x_4 là các một của bảng số liệu thống kê đã cho, ta có

$$\begin{cases} n^2 + 3 = 7n - 9 \\ 7n - 9 > n + 1 \\ 7n - 9 > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 7n + 12 = 0 \\ n > \frac{5}{3} \\ n > \frac{16}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 4 \end{cases}.$$

Vì n là số nguyên dương nên $n = 3$ và $n = 4$ thỏa mãn. Vậy tập hợp S có 2 phần tử.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 9. Quan sát 9 con chuột chạy qua một mê hồn trận và ghi lại thời gian (tính bằng phút) của chúng trong bảng sau:

Con chuột	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Thời gian chạy	1	2,5	3	1,5	2	1,25	1	0,9	30

- Tính số trung bình, số trung vị và một của thời gian chuột ra khỏi mê hồn trận?
- Trong trường hợp này nên chọn đại lượng nào để thể hiện xu thế trung bình của mẫu?

Lời giải.

a) Số trung bình: $\bar{x} = \frac{1 + 2,5 + \dots + 30}{9} \approx 4,79.$

Sắp xếp dãy số liệu theo thứ tự không giảm ta được:

$$0,9; 1; 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 30$$

Số trung vị: $M_e = x_5 = 1,5.$

Mốt: $M_0 = 1.$

b) Trong trường hợp này ta nên chọn số trung vị để thể hiện xu thế trung bình của mẫu.

Bài 10. Trong kỳ thi Tiếng Anh cấp chứng chỉ B1 theo chuẩn Châu Âu của trường Đại học Cần Thơ, điểm thi của 32 thí sinh (thang điểm 100) như sau:

79	65	85	52	81	55	65	49
42	68	66	56	57	65	72	69
60	50	63	74	88	78	95	41
87	61	72	53	47	90	74	68

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp của mẫu số liệu trên với các lớp $[40; 50)$, $[50; 60)$, ..., $[90; 100)$.

b) Tính số trung bình của mẫu số liệu theo bảng phân bố tần số ghép lớp (chính xác đến hàng phần trăm).

c) Tính số trung vị.

Lời giải.

a) Bảng phân bố tần số ghép lớp của mẫu số liệu:

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
$[40; 50)$	45	4
$[50; 60)$	55	6
$[60; 70)$	65	10
$[70; 80)$	75	6
$[80; 90)$	85	4
$[90; 100)$	95	2

b) Số trung bình $\bar{x} = \frac{45 \times 4 + 55 \times 6 + \dots + 95 \times 2}{32} \approx 66,88$.

c) Vì có 32 số liệu nên số trung vị là $M_e = \frac{x_{16} + x_{17}}{2}$.

Nhìn vào bảng trên ta thấy x_{16}, x_{17} thuộc lớp $[60; 70)$, từ đó ta có $x_{16} = 65, x_{17} = 66$.

Vậy $M_e = \frac{x_{16} + x_{17}}{2} = \frac{65 + 66}{2} = 65,5$.

Bài 11. Điểm kiểm tra của Darell (thang điểm 100) trong giai đoạn đầu tiên được biểu diễn bởi dãy số liệu sau:

$$78, 83, 84, 86, 87, 90, 92, 92$$

Darell có thể miêu tả điểm của mình với bố mẹ như thế nào? Dùng số trung bình, số trung vị hay mô? Liệu số liệu này có cho phép đưa đến một sự miêu tả đúng hay không?

Lời giải. Số trung bình: $\bar{x} = \frac{78 + 83 + 84 + 86 + 87 + 90 + 92 + 92}{8} = 86,5$.

Số trung vị: $M_e = 86,5$.

Mô: $M_0 = 92$.

Do mô có giá trị lớn nhất nên Darell có thể dùng nó để mô tả cho điểm kiểm tra của anh ấy.

Tuy nhiên, trong trường hợp này mô không phải là giá trị đại diện tốt cho điểm kiểm tra của anh ấy vì tất cả các điểm còn lại đều nhỏ hơn 92.

Bài 12. Nói về tiền lương, Amara đang tham gia phỏng vấn tìm việc làm tại một công ty kỹ thuật. Cô ấy nói rằng mức lương trung bình của 37 công nhân tại đây là nhiều hơn 40000 USD. Sử dụng những thông tin có trong bảng cho biết liệu Amara có nên mong đợi mức lương hơn 40000 USD nếu cô làm việc cho công ty này. Hãy giải thích tại sao?

Người lao động	Mức lương (USD)
Giám đốc	375000
Phó giám đốc	325000
Nhân viên bán hàng (15)	35000
Thư ký (10)	16000
Nhân viên trực điện thoại (10)	12000

Lời giải. Công ty có 37 nhân viên, nhưng chỉ có hai nhân viên có mức lương trên 40000 USD là giám đốc và phó giám đốc. Do đó, Amara không nên mong đợi một mức lương cao hơn 40000 USD khi vào làm việc cho công ty này. Nói cách khác, con số trung bình về mức lương trên 40000 USD là một số không đại diện tốt cho các số liệu trên.

Bài 13. Cho bảng phân bố tần số

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	2	$x + y$	$2x - y$	5	6

với x, y là các số tự nhiên. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ để x_5 là một của bảng số liệu đã cho.

Lời giải. Điều kiện để x_5 là một của bảng số liệu đã cho là:
$$\begin{cases} 0 \leq x + y \leq 6 & (1) \\ 0 \leq 2x - y \leq 6 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $y \leq 6 - x$ và $x \leq 6 - y$.

Từ (2) suy ra $2x - 6 \leq y$ và $\frac{y}{2} \leq x$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} 2x - 6 \leq 6 - x \\ \frac{y}{2} \leq 6 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Từ đó tìm được 14 cặp số thỏa mãn là:

$(0; 0), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2), (3; 0), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 2), (2; 3), (2; 4)$.

Bài 14. Cho bảng phân bố tần số

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	6	$3x + y$	$3y - 3x$	$x + y$	4

với x, y là các số tự nhiên. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ để bảng số liệu thống kê đã cho có một là 3 giá trị khác nhau.

Lời giải. Trường hợp 1: các giá trị x_1, x_2, x_3 là một khi
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3y - 3x = 6 \\ x + y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ x + y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Trường hợp 2: các giá trị x_1, x_2, x_4 là một khi
$$\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 6 \\ 3y - 3x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ y - x < 2 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm vì $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$ không thỏa mãn bất phương trình $y - x < 2$.

Trường hợp 3: các giá trị x_1, x_3, x_4 là một khi
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3y - 3x = 6 \\ 3x + y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ 3x + y < 6 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm vì $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ không thỏa mãn bất phương trình $3x + y < 6$.

Trường hợp 4: các giá trị x_2, x_3, x_4 là một khi
$$\begin{cases} 3x + y = 3y - 3x \\ 3x + y = x + y \\ x + y > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y > 6 \end{cases}$$

Hệ vô nghiệm vì $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ không thỏa mãn bất phương trình $x + y > 6$.

Vậy chỉ có $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

§4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

I. Tóm tắt lí thuyết

Để đo độ phân tán (độ chênh lệch) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình, người ta đưa ra hai số đặc trưng là *phương sai* và *độ lệch chuẩn*.

Định nghĩa 1. Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước n là x_1, x_2, \dots, x_n .

Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s_x^2 , được tính bởi công thức sau

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

trong đó \bar{x} là số trung bình của mẫu số liệu.

Căn bậc hai của phương sai được gọi là *độ lệch chuẩn*, kí hiệu là s_x .

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

⚠ Chú ý

- Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng lớn.*
- Phương sai s_x^2 và độ lệch chuẩn s_x đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s_x vì s_x có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.*
- Phương sai còn được tính theo các công thức sau đây*

(a) Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i .

(b) Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i (c_i - \bar{x})^2$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của giá trị x_i .

(c) Người ta còn chứng minh được công thức sau:

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

II. Các dạng toán

Dạng 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu KHÔNG ghép lớp

a) Để tính phương sai s^2 của một mẫu số liệu $\{x_1; x_2; \dots; x_N\}$ ta thực hiện một trong các cách sau:

• **Cách 1:**

+ Tính số trung bình: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$;

+ Tính các độ lệch: $x_i - \bar{x}$, ($i = \overline{1, N}$);

+ Tính các phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$.

• **Cách 2:**

+ Tính $\sum_{i=1}^N x_i$ và $\sum_{i=1}^N x_i^2$;

+ Tính phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2$.

Chú ý: Nếu bảng số liệu được cho bởi bảng phân phối tần số như sau:

X	x_1	x_2	...	x_m	
Tần số	n_1	n_2	...	n_m	N

Thì phương sai được tính theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i (x_i - \bar{x})^2$.

b) Tính độ lệch chuẩn s : Độ lệch chuẩn s bằng căn bậc hai của phương sai:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Ví dụ 1. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	N = 40

a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. a) Số trung bình của sản lượng của 40 thửa ruộng là:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 20 + 8 \cdot 21 + 11 \cdot 22 + 10 \cdot 23 + 6 \cdot 24}{40} = 22,1 \text{ tạ.}$$

b) Tính phương sai:

Cách 1: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^5 n_i (x_i - \bar{x})^2$, thay số vào ta được:

$$s^2 = \frac{1}{40} \left[5(20 - 22,1)^2 + 8(21 - 22,1)^2 + 11(22 - 22,1)^2 + 10(23 - 22,1)^2 + 6(24 - 22,1)^2 \right] = \frac{6160}{4000}.$$

Hay $s^2 = 1,54$.

Cách 2: Ta có:

- $\sum_{i=1}^5 n_i x_i = 5 \cdot 20 + 8 \cdot 21 + 11 \cdot 22 + 10 \cdot 23 + 6 \cdot 24 = 884.$
- $\sum_{i=1}^5 n_i x_i^2 = 5 \cdot 20^2 + 8 \cdot 21^2 + 11 \cdot 22^2 + 10 \cdot 23^2 + 6 \cdot 24^2 = 19598.$

$$\text{Do đó } s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N n_i x_i \right)^2 = \frac{1}{40} \cdot 19598 - \frac{1}{40^2} \cdot 884^2 = 1,54.$$

Tính độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,54} \approx 1,24.$

Ví dụ 2. 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

- Tính sản lượng trung bình.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. a) Tính số trung bình:

$$\sum_{i=1}^{11} n_i x_i = 1 \cdot 9 + 1 \cdot 10 + \dots + 10 \cdot 18 + 2 \cdot 19 = 1523.$$

Nên số trung bình là $\bar{x} = \frac{1523}{100} = 15,23.$

b) Ta có: $\sum_{i=1}^{11} n_i x_i = 1523$ và $\sum_{i=1}^{11} n_i x_i^2 = 23591$ nên phương sai là:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N n_i x_i \right)^2 = \frac{1}{100} \cdot 23591 - \frac{1}{100^2} \cdot (1523)^2 \approx 3,96$$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2} \approx 1,99.$

Ví dụ 3. Số máy tính bán được trong 7 tháng liên tiếp của một cửa hàng được ghi lại trong bảng sau:

83	79	92	71	69	83	74
----	----	----	----	----	----	----

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. Số trung bình là $\bar{x} = \frac{83 + 79 + 92 + 71 + 69 + 83 + 74}{7} \approx 78,71.$

Ta có $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 = 6251,57, \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = 6195,94.$ Suy ra

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = 6251,57 - 6195,94 = 55,63.$$

Vậy $s = \sqrt{55,63} \approx 7,46.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Kết quả thi kết thúc học kì một của bạn Hoa được ghi lại trong bảng sau:

Văn	Địa	Lý	Hóa	Toán	Anh văn
6,0	8,0	7,5	8,5	7,0	7,5

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. $\bar{x} = 7,5; s^2 \approx 0,42; s \approx 0,65$.

Bài 2. Theo dõi số áo bán ra của 9 loại áo tại một cửa hàng, người ta có dãy số liệu sau (đơn vị: chiếc)

42	52	23	36	48	42	40	48	42
----	----	----	----	----	----	----	----	----

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. $\bar{x} = 41,1; s^2 \approx 63,4; s \approx 8,0$.

Bài 3. Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Tìm số xe trung bình bán được trong ngày. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. Trung bình cộng: 48,35; phương sai $s^2 \approx 194,64$; độ lệch chuẩn 13,95.

Bài 4. Bảng số liệu sau cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng A trong năm 2006 (đơn vị là triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	18	16	17	14	18	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. Trung bình cộng: 16,25; phương sai $s^2 \approx 5,02$; độ lệch chuẩn 2,24.

Bài 5. Theo dõi số bao xi măng bán ra trong 22 ngày tại một cửa hàng bán vật liệu xây dựng ta có bảng sau:

47	54	43	50	61	36	65	54	43	50	62
59	36	45	45	33	53	67	21	45	50	36

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. Trung bình cộng: 47,95; phương sai $s^2 \approx 123,13$; độ lệch chuẩn 11,09.

Bài 6. Bảng sau đây ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô.

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69
73	75	85	72	67	88	90	85	72	63
75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. Trung bình cộng: 70,70; phương sai $s^2 \approx 38,21$; độ lệch chuẩn 6,18.

Bài 7. Số liệu sau đây cho ta số lãi mỗi tháng của một cửa hàng năm 2004 (đơn vị: triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	19	15	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải. Trung bình cộng: 16; phương sai $s^2 \approx 5,9$; độ lệch chuẩn 2,43.

Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu ghép lớp

Để tính phương sai của bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp ta dùng công thức

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \left[n_1 (c_1 - \bar{x})^2 + n_2 (c_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_k (c_k - \bar{x})^2 \right]$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ; c_i được tính bằng trung bình cộng của 2 giá trị đầu mút của lớp i , n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$), \bar{x} là số trung bình cộng của các số trong số liệu thống kê đã cho.

⚠ Người ta còn chứng minh được công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

Độ lệch chuẩn s_x được tính bởi công thức $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

Ví dụ sau sử dụng công thức $s_x^2 = \frac{1}{n} [n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_k(x_k - \bar{x})^2]$ để tính phương sai.

Ví dụ 4. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của độ dài (cm)	Tần số
[10; 20)	8
[20; 30)	18
[30; 40)	24
[40; 50]	10
Cộng	60

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

Lời giải. Trước hết ta có $\bar{x} = \frac{15 \times 8 + 25 \times 18 + 35 \times 24 + 45 \times 10}{60} = 31$.

Khi đó phương sai $s_x^2 = \frac{8(15 - 31)^2 + 18(25 - 31)^2 + 24(35 - 31)^2 + 10(45 - 31)^2}{60} = 84$.

Độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{84} \approx 9,17$.

Ví dụ sau sử dụng công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ để tính phương sai.

Ví dụ 5. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Khối lượng của 30 củ khoai tây

Lớp của khối lượng (g)	Tần số
[70; 80)	3
[80; 90)	6
[90; 100)	12
[100; 110)	6
[110; 120)	3
Cộng	30

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

Lời giải. Ta tính các giá trị $n_i c_i$ và $n_i c_i^2$ và bổ sung vào bảng đã cho, ta được bảng sau

Lớp của khối lượng (g)	Tần số	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
[70; 80)	3	225	16875
[80; 90)	6	510	43350
[90; 100)	12	1140	108300
[100; 110)	6	630	66150
[110; 120)	3	345	39675
Cộng	30	2850	274350

Từ đó, ta tính được $\bar{x} = 95$ và $\overline{x^2} = 9145$. Áp dụng công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$, ta tính được $s_x^2 = 120$ và $s_x = \sqrt{s_x^2} \approx 10,95$.

Ví dụ sau cho bảng phân bố tần suất ghép lớp. Ta tính \bar{x} và s_x^2 dựa trên tần suất.

Ví dụ 6. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Chiều cao của 35 cây bạch đàn

Lớp của chiều cao (m)	Tần suất (%)
[6, 5; 7, 0)	5,7
[7, 0; 7, 5)	11,4
[7, 5; 8, 0)	25,7
[8, 0; 8, 5)	31,4
[8, 5; 9, 0)	17,2
[9, 0; 9, 5]	8,6
Cộng	100

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần suất ghép lớp đã cho.

Lời giải. Trước hết ta tính ra các giá trị $f_i c_i$, cuối bảng sẽ có được \bar{x} , từ đó tính $f_i(c_i - \bar{x})^2$, cuối bảng sẽ có s_x^2 .

Lớp của chiều cao (m)	Tần suất (%)	$f_i c_i$	$f_i(c_i - \bar{x})^2$
[6, 5; 7, 0)	5,7	0,38475	0,102961
[7, 0; 7, 5)	11,4	0,8265	0,081206
[7, 5; 8, 0)	25,7	1,99175	0,030412
[8, 0; 8, 5)	31,4	2,5905	0,007642
[8, 5; 9, 0)	17,2	1,505	0,074018
[9, 0; 9, 5]	8,6	0,7955	0,114925
Cộng	100	8,094	0,411164

Như vậy ta được phương sai $s_x^2 = 0,411164$, suy ra $s_x \approx 0,641221$.

Ví dụ sau sử dụng sự hỗ trợ của máy tính *fx-570ESPLUS* để tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Ví dụ 7. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Khối lượng của nhóm 20 cá mè

Lớp khối lượng (kg)	[0, 6; 0, 8)	[0, 8; 1, 0)	[1, 0; 1, 2)	[1, 2, 1, 4]	Cộng
Tần số	4	6	6	4	20

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng trên.

Lời giải. Trước hết, ta chọn **shift mode ▾ 4 1** để dùng chế độ thống kê với 1 đối tượng thống kê.

Sau đó ta vào **mode 3** để vào chế độ thống kê và chọn **1** để nhập dữ liệu.

Nhập các giá trị đại diện trong cột X trên màn hình. Sau khi nhập xong, chuyển qua cột FREQ bằng phím **▷** và nhập các tần số tương ứng với các giá trị đại diện.

Nhập xong bấm **AC**. Để tính độ lệch chuẩn, ta bấm **shift 1 4 3 =**, kết quả là $s_x = 0,2049390153$, ta tính phương sai bằng cách bình phương giá trị trên, bấm tiếp **x² =**, ta được $s_x^2 = 0,042$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Nhiệt độ trung bình của tháng 2 ở một thành phố đo trong 30 năm được cho trong bảng sau.

Lớp nhiệt độ (°C)	Tần số	Tần suất (%)
[12; 14)	1	3,33
[14; 16)	3	10,00
[16; 18)	12	40,00
[18; 20)	9	30,00
[20; 22]	5	16,67
Cộng	30	100

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố đã cho.

Lời giải. Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả: $s_x^2 \approx 3,93$; $s_x \approx 1,98$.

Bài 9. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố sau

Chiều cao của 36 học sinh

Lớp số đo chiều cao (cm)	Tần số
[150; 156)	6
[156; 162)	12
[162; 168)	13
[168; 174]	5
Cộng	36

Lời giải. Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả: $s_x^2 \approx 30,97$; $s_x = 5,57$.

Bài 10. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố sau

Tiền lãi của mỗi ngày bán báo được khảo sát trong 30 ngày

Lớp tiền lãi (nghìn đồng)	Tần số
[29,5; 40,5)	3
[40,5; 51,5)	4
[51,5; 62,5)	9
[62,5; 73,5)	5
[73,5; 84,5)	5
[84,5; 95,5]	4
Cộng	30

Lời giải. Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả: $s_x^2 = 271,71$; $s_x = 16,48$.

Bài 11. Trong một trường THPT, cho kiểm tra toán ở 2 lớp 10A và 10B và lập được bảng tần số ghép lớp như sau:

Điểm thi toán của lớp 10A

Lớp điểm kiểm tra	Tần số
[0; 2)	2
[2; 4)	4
[4; 6)	12
[6; 8)	28
[8; 10]	4
Cộng	50

Điểm thi toán của lớp 10B

Lớp điểm kiểm tra	Tần số
[0; 2)	4
[2; 4)	10
[4; 6)	18
[6; 8)	14
[8; 10]	5
Cộng	50

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai bảng phân bố tần số ghép lớp trên và cho kết luận.

Lời giải. Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả

- Lớp 10A: $s_x^2 = 3,23$; $s_x = 1,8$.
- Lớp 10B: $s_x^2 = 4,65$; $s_x = 2,16$.

Từ đó cho thấy độ phân tán của lớp 10B nhiều hơn độ phân tán của lớp 10A so với giá trị trung bình của dữ liệu.

Bài 12. Một nông dân nuôi cá có 2 ao nuôi cùng một loại cá. Ông ta bắt mỗi ao 24 con cá và cân. Sau đây là bảng phân bố khối lượng 2 nhóm cá.

Nhóm cá thứ nhất

Lớp khối lượng (g)	Tần số
[630; 635)	1
[635; 640)	2
[640; 645)	3
[645; 650)	6
[650; 655]	12
Cộng	

Nhóm cá thứ hai

Lớp khối lượng (g)	Tần số
[630; 635)	0
[635; 640)	0
[640; 645)	8
[645; 650)	7
[650; 655]	9
Cộng	

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai bảng phân bố tần số ghép lớp trên và cho kết luận.

Lời giải. Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả

- Nhóm cá thứ nhất: $s_x^2 = 33,16$; $s_x = 5,76$.
- Nhóm cá thứ hai: $s_x^2 = 17,66$; $s_x = 4,2$.

Từ đó cho thấy độ phân tán của nhóm cá thứ hai ít hơn độ phân tán của nhóm cá thứ nhất so với giá trị trung bình của dữ liệu.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Một trang trại trồng hai loại táo A và B. Chủ trang trại phải lựa chọn một loại táo có trọng lượng các quả táo ít bị phân tán để xuất khẩu. Sau vụ thu hoạch, ông đã cân trọng lượng của 100 quả táo. Các số liệu được tóm tắt trong bảng tần số sau:

Trọng lượng các quả táo loại A

Trọng lượng	Tần số
[80; 120)	9
[120; 160)	13
[160; 200)	5
[200; 240)	15
[240; 280)	8
Tổng	50

Trọng lượng các quả táo loại B

Trọng lượng	Tần số
[80; 120)	8
[120; 160)	11
[160; 200)	12
[200; 240)	11
[240; 280)	8
Tổng	50

Em hãy cho biết chủ trang trại sẽ chọn loại táo nào để xuất khẩu?

Lời giải. Ta có $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 180$.

Áp dụng công thức $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2$ ta được phương sai của mỗi bảng số liệu lần lượt là

$$s_A^2 = 3072$$

$$s_B^2 = 2752$$

Vì $s_B^2 < s_A^2$ nên trọng lượng các quả táo loại B sẽ đồng đều hơn loại A . Do đó chủ trang trại sẽ chọn loại táo B để xuất khẩu.

Bài 14. Trên hai con đường A và B , trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô trên mỗi con đường như sau:

Con đường A :

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69	73	75	85	72	67
88	90	85	72	63	75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Con đường B :

76	64	58	82	72	70	68	75	63	67	74	70	79	74	60
80	73	75	71	68	72	73	79	80	63	62	71	70	69	63

- Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ô tô trên mỗi con đường A , B .
- Theo em thì chạy xe trên con đường nào an toàn hơn?

Lời giải.

- Trên con đường A . Ta có: $\bar{x}_A \approx 73,63$ km/h, $s_A^2 \approx 74,77$, $s_A \approx 8,65$ km/h.
Trên con đường B . Ta có: $\bar{x}_B \approx 70,7$ km/h, $s_B^2 \approx 38,21$, $s_B \approx 6,18$ km/h.

- Nhận xét: Trên con đường B , tốc độ trung bình và độ lệch chuẩn đều nhỏ hơn trên con đường A . Do đó chạy xe trên con đường B sẽ an toàn hơn trên con đường A .

§5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG V

I. Đề số 1a

Bài 1. (3,5 điểm) Hai lớp 10A và 10B của một trường THPT cùng làm bài thi môn Toán, chung một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm	3	5	6	7	8	9	10	Cộng
Lớp 10A	7	9	3	3	7	12	4	45

Điểm	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Lớp 10B	6	6	7	8	9	5	4	45

- a) Hãy tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn từ các bảng phân bố tần số đã cho (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- b) Xét xem kết quả bài thi môn Toán của lớp nào đồng đều hơn?

Lời giải.

a) **Lớp 10A:**

$$\text{Số trung bình } \bar{x}_A = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + \dots + 10 \cdot 4}{45} \approx 6,87. \dots \dots \dots 0,5 \text{ điểm.}$$

$$\text{Phương sai } s_A^2 = \frac{(3 - \bar{x}_A)^2 \cdot 7 + \dots + (10 - \bar{x}_A)^2 \cdot 4}{45} \approx 5,38. \dots \dots \dots 0,5 \text{ điểm.}$$

$$\text{Độ lệch chuẩn } s_A = \sqrt{s_A^2} \approx 2,32. \dots \dots \dots 0,5 \text{ điểm.}$$

Lớp 10B:

$$\text{Số trung bình } \bar{x}_B \approx 6,87. \dots \dots \dots 0,5 \text{ điểm.}$$

$$\text{Phương sai } s_B^2 \approx 3,69. \dots \dots \dots 0,5 \text{ điểm.}$$

$$\text{Độ lệch chuẩn } s_B \approx 1,92. \dots \dots \dots 0,5 \text{ điểm.}$$

- b) Kết quả bài thi môn Toán của lớp 10B đồng đều hơn vì $s_B < s_A$. $\dots \dots \dots 0,5 \text{ điểm.}$

Bài 2. (5,0 điểm) Đo chiều cao của 40 học sinh trường THPT X, ta có bảng số liệu sau

150	151	151	151	152	152	153	153	154	155
155	156	156	156	157	159	159	160	160	161
161	162	164	165	166	166	167	167	167	168
168	169	170	170	171	171	172	173	174	175

- a) Hãy lập bảng phân bố tần số ghép lớp với các lớp là

$$[150; 154), [155; 160), [160; 165), [165; 170), [170; 175].$$

Từ đó, hãy tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã lập (tính chính xác đến chữ số thập phân thứ hai).

- b) Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột về chiều cao của 40 học sinh trường X.

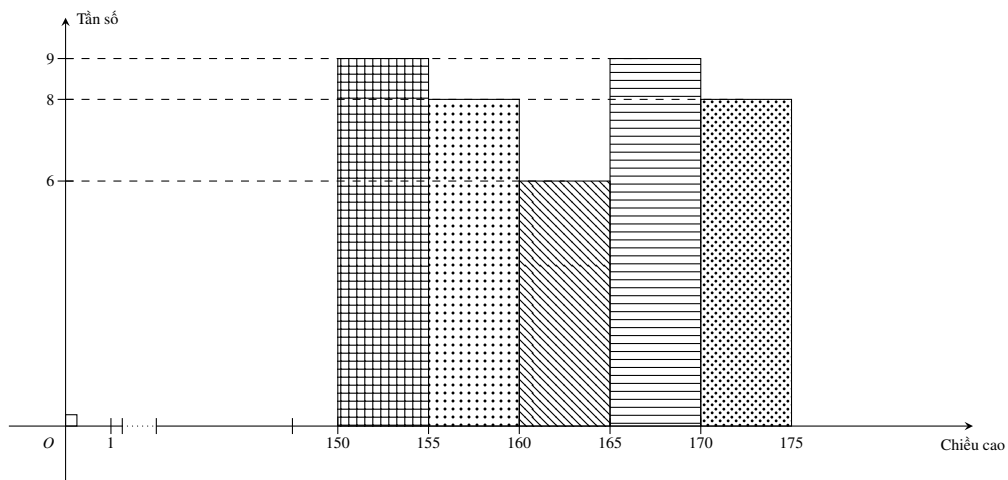
Lời giải.

- a) Bảng phân bố tần số ghép lớp

Lớp	Tần số	Giá trị đại diện
[150; 155)	9	152,5
[155; 160)	8	157,5
[160; 165)	6	162,5
[165; 170)	9	167,5
[170; 175]	8	172,5
	$n = 40$	

- Lập được cột tần số 0,5 điểm.
- Lập được cột giá trị đại diện 0,5 điểm.
- Tính được giá trị trung bình $\bar{x} = 162,37$ 0,75 điểm.
- Tính được phương sai $s_x^2 \approx 53,14$ 0,75 điểm.
- Tính được độ lệch chuẩn $s_x \approx 7,29$ 0,5 điểm.

b) Biểu đồ tần số hình cột về chiều cao của 40 học sinh trường X:



Bài 3. (1,5 điểm) Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp của một mẫu số liệu như sau

Lớp	[1; 9]	[10; 19]	[20; 29]	[30; 39]	[40; 49]	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	12,5	0,0	50,0	25,0	12,5	100

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu n . Biết rằng n là số có 2 chữ số và chữ số tận cùng là 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải. Hai lớp [1;9] và [40;49] có tần số là $n.12,5\% = \frac{n}{8}$ 0,25 điểm.

Lớp [20;29] có tần số là $n.50\% = \frac{n}{2}$ 0,25 điểm.

Lớp [30;39] có tần số là $n.25\% = \frac{n}{4}$ 0,25 điểm.

Vì tần số là các số nguyên dương nên n phải chia hết cho 8;4;2. 0,25 điểm.

Mà n là số có 2 chữ số, chữ số tận cùng là 2 và nhỏ nhất nên $n = 32$ 0,5 điểm.

II. Đề số 1b

Bài 1. (3,5 điểm) Hai lớp 10C và 10D của một trường THPT cùng làm bài thi môn Văn, chung một đề thi. Kết quả thi được trình bày ở hai bảng phân bố tần số sau đây

Điểm	10	9	8	7	6	3	3	Cộng
Lớp 10C	4	12	7	3	3	9	7	45

Điểm	10	9	8	7	6	5	4	Cộng
Lớp 10D	4	5	9	8	7	6	6	45

- a) Hãy tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn từ các bảng phân bố tần số đã cho (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).
- b) Xét xem kết quả bài thi môn Toán của lớp nào đồng đều hơn?

Lời giải.

a) **Lớp 10C:**

Số trung bình $\bar{x}_C = \frac{3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + \dots + 10 \cdot 4}{45} \approx 6,87$ 0,5 điểm.

Phương sai $s_C^2 = \frac{(3 - \bar{x}_C)^2 \cdot 7 + \dots + (10 - \bar{x}_C)^2 \cdot 4}{45} \approx 5,38$ 0,5 điểm.

Độ lệch chuẩn $s_C = \sqrt{s_C^2} \approx 2,32$ 0,5 điểm.

Lớp 10D:

Số trung bình $\bar{x}_D \approx 6,87$ 0,5 điểm.

Phương sai $s_D^2 \approx 3,69$ 0,5 điểm.

Độ lệch chuẩn $s_D \approx 1,92$ 0,5 điểm.

- b) Kết quả bài thi môn Toán của lớp 10B đồng đều hơn vì $s_D < s_C$ 0,5 điểm.

Bài 2. (5,0 điểm) Đo chiều cao của 40 học sinh trường THPT Y, ta có bảng số liệu sau

150	150	150	151	152	152	153	154	154	155
155	156	156	157	157	158	159	160	160	161
162	163	164	165	166	167	167	167	168	168
169	169	170	171	171	172	173	174	175	175

- a) Hãy lập bảng phân bố tần số ghép lớp với các lớp là

$$[150; 154), [155; 160), [160; 165), [165; 170), [170; 175].$$

Từ đó, hãy tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã lập (tính chính xác đến chữ số thập phân thứ hai).

- b) Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột về chiều cao của 40 học sinh trường Y.

Lời giải.

a) Bảng phân bố tần số ghép lớp

Lớp	Tần số	Giá trị đại diện
[150; 155)	9	152,5
[155; 160)	8	157,5
[160; 165)	6	162,5
[165; 170)	9	167,5
[170; 175]	8	172,5
	$n = 40$	

Lập được cột tần số 0,5 điểm.

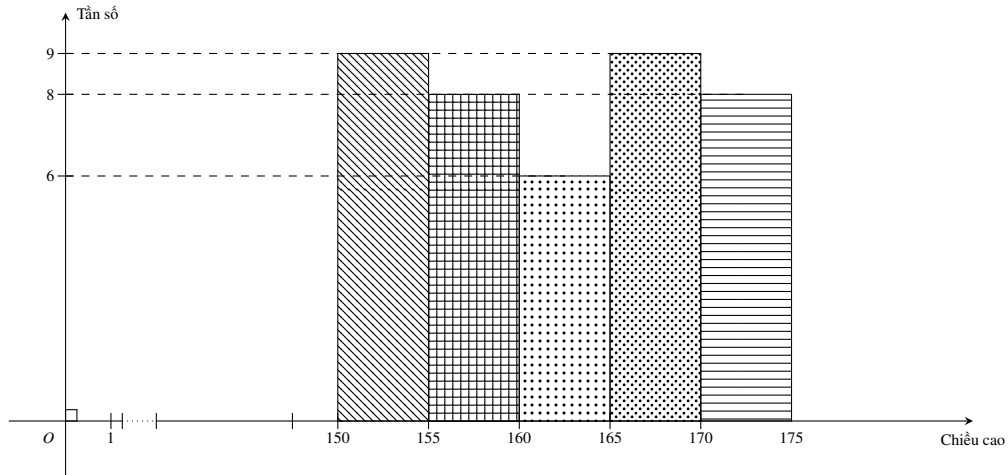
Lập được cột giá trị đại diện 0,5 điểm.

Tính được giá trị trung bình $\bar{x} = 162,37$ 0,75 điểm.

Tính được phương sai $s_x^2 \approx 53,14$ 0,75 điểm.

Tính được độ lệch chuẩn $s_x \approx 7,29$ 0,5 điểm.

b) Biểu đồ tần số hình cột về chiều cao của 40 học sinh trường Y:



Bài 3. (1,5 điểm) Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất của một mẫu số liệu như sau

Giá trị	0	1	2	3	4	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	6,25	50,0	25,0	6,25	12,5	100

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu n . Biết rằng n là số có 2 chữ số và chữ số tận cùng là 4. Tìm giá trị n .

Lời giải. Giá trị 0 và 3 có tần số là $n.6,25\% = \frac{n}{16}$ 0,25 điểm.

Giá trị 1 có tần số là $n.50\% = \frac{n}{2}$ 0,25 điểm.

Giá trị 2 có tần số là $n.25\% = \frac{n}{4}$ 0,25 điểm.

Giá trị 4 có tần số là $n.12,5\% = \frac{n}{8}$ 0,25 điểm.

Vì tần số là các số nguyên dương nên n phải chia hết cho 16; 8; 4; 2. 0,25 điểm.

Mà n là số có 2 chữ số, chữ số tận cùng là 4 nên $n = 64$ 0,25 điểm.

III. Đề số 2a

Bài 1. Điểm kiểm tra môn Toán cuối học kỳ 1 của một nhóm 16 học sinh là:

8, 9, 7, 0, 2, 7, 9, 10, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 7.

Tìm một và số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

Lời giải. Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm ta được:

0, 2, 4, 5, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10.

Suy ra,

• Phần tử có tần số lớn nhất là 7. Do đó một $M_0 = 7$ **1,0 điểm.**

• Trung vị $M_e = \frac{7+8}{2} = 7,5$ **1,0 điểm**

Bài 2. Tiền thưởng của 35 nhân viên trong một công ti được thống kê trong bảng tần số ghép lớp sau đây (đơn vị: triệu đồng)

Lớp	[20; 24]	[25; 29]	[30; 34]	[35; 39]	[40; 44]	Cộng
Tần số	2	7	15	8	3	$n = 35$

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

• Số trung bình $\bar{x} = \frac{2 \cdot 22 + 7 \cdot 27 + 15 \cdot 32 + 8 \cdot 37 + 3 \cdot 42}{35} = 32,43$ **1,0 điểm.**

• Phương sai

$$s_x^2 = \frac{2 \cdot 22^2 + 7 \cdot 27^2 + 15 \cdot 32^2 + 8 \cdot 37^2 + 3 \cdot 42^2}{35} - \left(\frac{2 \cdot 22 + 7 \cdot 27 + 15 \cdot 32 + 8 \cdot 37 + 3 \cdot 42}{35} \right)^2$$

Do vậy độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{s_x^2} = 4,98$ **1,0 điểm**

Bài 3. Điều tra về chiều cao của học sinh (đơn vị: cm) trong trường THPT, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau:

160	163	166	162	164	167	165	169	163	167	171	168
165	161	170	171	164	172	162	167	173	169	164	166
164	166	165	167	161	168	164	174	165	168	163	161

a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp, sử dụng các lớp sau:

$$[160; 163), [163; 166), [166; 169), [169; 172), [172; 175).$$

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

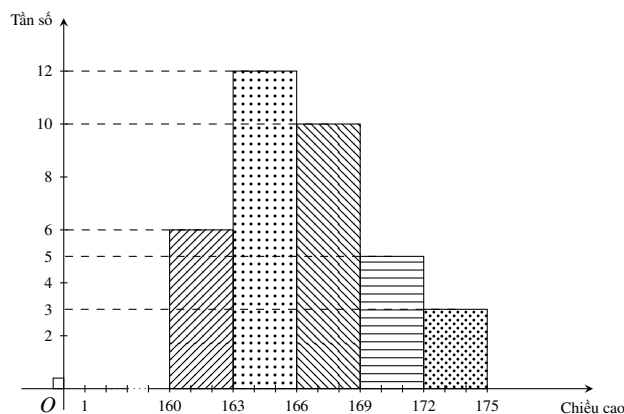
Lời giải.

a) Bảng phân bố tần số ghép lớp:

Lớp	[160; 163)	[163; 166)	[166; 169)	[169; 172)	[172; 175)	Cộng
Tần số	6	12	10	5	3	$n = 36$

..... **1,0 điểm**

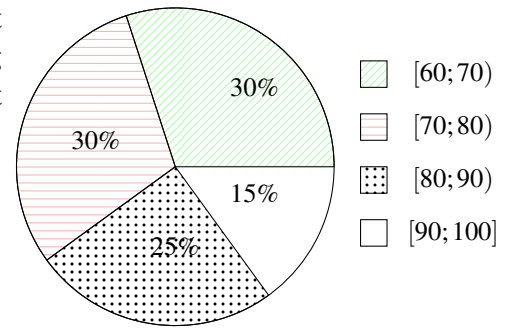
b) Biểu đồ tần số hình cột:



..... **2,0 điểm**

Bài 4.

Biểu đồ tần suất hình quạt hình bên mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp của dữ liệu điểm thi của 20 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100). Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của dữ liệu đó.



Lời giải. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:

Lớp	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]	Cộng
Tần số	6	6	5	3	$n = 20$
Tần suất (%)	30	30	25	15	100 (%)

..... **2,0 điểm**

Bài 5. Điểm kiểm tra môn Toán của 35 học sinh lớp 10A được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (thang điểm 10):

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	2	1	2	1	2	3	x	5	y	4	3	$n = 35$

Biết rằng mẫu số liệu trên có 2 môđ. Hãy tìm x và y .

Lời giải. Tổng số học sinh là 35 nên $x + y = 12$, suy ra có ít nhất một trong hai số x hoặc y không nhỏ hơn 6. Vì mẫu số liệu có 2 môđ nên $x = y = 6$ thỏa mãn. **1,0 điểm**

IV. Đề số 2b

Bài 1. Điểm kiểm tra môn Toán cuối học kỳ 1 của một nhóm 17 học sinh là:

8, 9, 7, 0, 2, 7, 9, 10, 4, 5, 7, 8, 8, 9, 10, 8, 3.

Tìm môđ và số trung vị của các số liệu thống kê đã cho.

Lời giải. Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm ta được:

0, 2, 3, 4, 5, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10.

Suy ra,

- Phần tử có tần số lớn nhất là 8. Do đó môđ $M_0 = 8$ **1,0 điểm.**
- Trung vị $M_e = 8$ **1,0 điểm**

Bài 2. Tiền thưởng của 35 nhân viên trong một công ti được thống kê trong bảng tần số ghép lớp sau đây (đơn vị: triệu đồng)

Lớp	[20; 24]	[25; 29]	[30; 34]	[35; 39]	[40; 44]	Cộng
Tần số	2	7	15	8	3	$n = 35$

Tính số trung bình và độ lệch chuẩn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải.

- Số trung bình $\bar{x} = \frac{2 \cdot 22 + 7 \cdot 27 + 15 \cdot 32 + 8 \cdot 37 + 3 \cdot 42}{35} = 32,43$ **1,0 điểm.**

- Phương sai

$$s_x^2 = \frac{2 \cdot 22^2 + 7 \cdot 27^2 + 15 \cdot 32^2 + 8 \cdot 37^2 + 3 \cdot 42^2}{35} - \left(\frac{2 \cdot 22 + 7 \cdot 27 + 15 \cdot 32 + 8 \cdot 37 + 3 \cdot 42}{35} \right)^2.$$

Do vậy độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{s^2} = 4,98$ **1,0 điểm**

Bài 3. Điều tra về cân nặng của cá (đơn vị: kg) trong ao nuôi, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau:

3,5	8,5	6,5	5,5	4,5	5,6	9,5	5,9	7,5	3,8
6,8	4,2	7,3	5,7	8,0	5,9	3,6	7,8	6,4	7,9
7,1	6,0	7,6	4,0	6,1	6,7	6,3	6,9	6,2	7,7
6,1	3,8	6,2	6,6	6,3	6,4	7,5	3,9	7,5	6,0
9,0	6,0	7,5	3,6	6,1	6,0	5,4	6,4	9,2	4,7

- Lập bảng phân bố tần số ghép lớp, sử dụng các lớp sau: $[3,5;5,0)$, $[5,0;6,5)$, $[6,5;8,0)$, $[8,0;10]$.
- Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

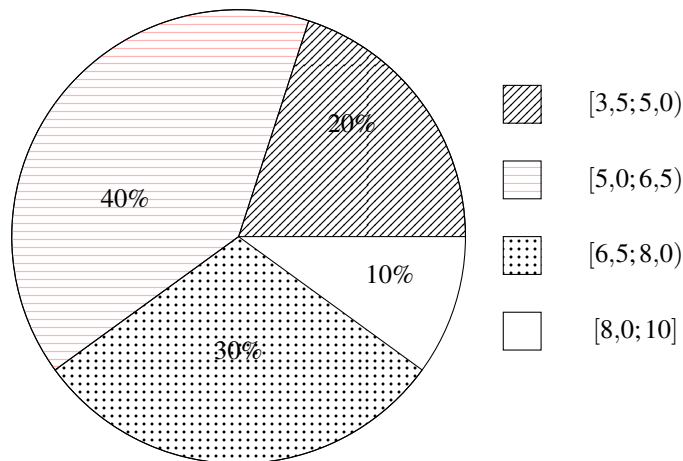
Lời giải.

- Bảng phân bố tần số ghép lớp:

Lớp	$[3,5;5,0)$	$[5,0;6,5)$	$[6,5;8,0)$	$[8,0;10]$	Cộng
Tần số	10	20	15	5	$n = 50$

..... **1,0 điểm**

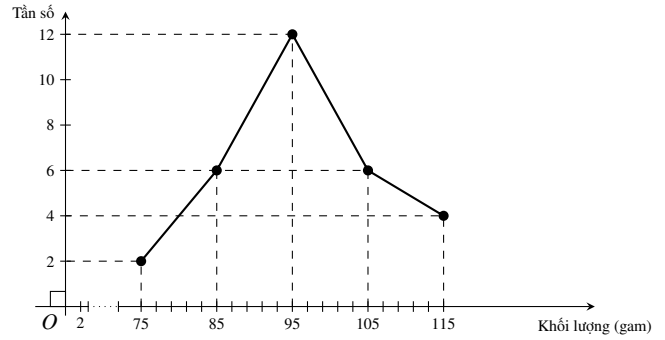
- Biểu đồ tần số hình quạt:



..... **2,0 điểm**

Bài 4.

Cho biểu đồ đường gấp khúc tần số hình bên mô tả khối lượng của 30 củ khoai tây sau khi thu hoạch (đơn vị: gam). Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của dữ liệu đó, sử dụng các lớp sau: [70; 80), [80; 90), [90; 100), [100; 110), [110; 120].



Lời giải. Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:

Lớp	[70; 80)	[80; 90)	[90; 100]	[100; 110)	[110; 120]	Cộng
Tần số	2	6	12	6	4	$n = 30$
Tần suất (%)	6,7	20,0	40,0	20,0	13,3	100 (%)

..... **2,0 điểm**

Bài 5. Điểm kiểm tra môn Toán của 40 học sinh lớp 10B được thống kê trong bảng phân bố tần số sau đây (thang điểm 10):

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	2	1	2	1	2	x	5	7	y	5	4	$n = 40$

Biết rằng mẫu số liệu trên có 2 môđ. Hãy tìm x và y .

Lời giải. Tổng số học sinh là 45 nên $x + y = 16$, suy ra có ít nhất một trong hai số x hoặc y không nhỏ hơn 8. Vì mẫu số liệu có 2 môđ nên $x = y = 8$ thỏa mãn. **1,0 điểm**

V. Đề số 3a

Bài 1. (2,0 điểm) Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Lớp các giá trị x	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14]	Cộng
Tần số n_i	15	30	55	100

Hãy tìm số trung bình của các giá trị trong bảng trên.

Lời giải. Giá trị đại diện của lớp [8; 10): $c_1 = \frac{8+10}{2} = 9$.

Giá trị đại diện của lớp [10; 12): $c_2 = \frac{10+12}{2} = 11$.

Giá trị đại diện của lớp [12; 14): $c_3 = \frac{12+14}{2} = 13$.

Số trung bình cộng: $\bar{x} = \frac{9.15 + 11.30 + 13.55}{15 + 30 + 55} = \frac{59}{5}$.

Bài 2. (2,0 điểm) Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành được cho bằng bảng phân bố tần số ghép lớp như sau.

Số TT	Lớp của độ dài (cm)	Tần số
1	[10; 20)	18
2	[20; 30)	8
3	[30; 40)	10
4	[40; 50)	24
	Cộng	60

Hãy tính phương sai của bảng số liệu thống kê trên.

Lời giải. Lập thêm cột giá trị đại diện của mỗi lớp:

Số TT	Lớp của độ dài (cm)	Giá trị đại diện	Tần số
1	[10; 20)	15	18
2	[20; 30)	25	8
3	[30; 40)	35	10
4	[40; 50)	45	24
	Cộng		60

Ta có độ dài trung bình là $\bar{x} = \frac{95}{3}$.

Vậy phương sai cần tìm là

$$s_x^2 = \frac{18 \left(15 - \frac{95}{3}\right)^2 + 8 \left(25 - \frac{95}{3}\right)^2 + 10 \left(35 - \frac{95}{3}\right)^2 + 24 \left(45 - \frac{95}{3}\right)^2}{60} = \frac{1460}{9}.$$

Bài 3. (2,0 điểm) Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	3	5	$n + 6$	$20 - n$	9

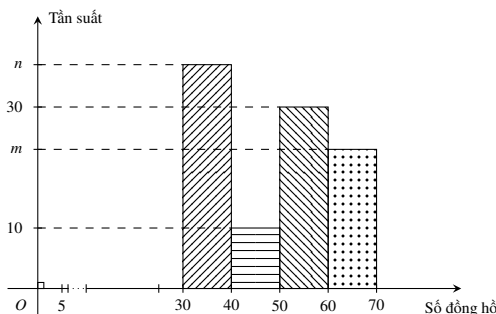
Trong đó n là số tự nhiên và giá trị x_4 là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho. Hãy tìm số n ?

Lời giải. Từ giả thiết x_4 là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho nên ta có

$$\begin{cases} 20 - n > 9 \\ 20 - n > n + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < 11 \\ n < 7 \end{cases} \Leftrightarrow n < 7.$$

Vì n là số tự nhiên nên các giá trị n thỏa mãn là: $0 \leq n < 7$.

Bài 4. (2,0 điểm) Cho biểu đồ tần suất hình cột về số đồng hồ bán được của một cửa hàng ở thị trấn X trong 30 ngày như hình vẽ



Tìm giá trị của m và n biết $m - n = 14$.

Lời giải. Dựa vào biểu đồ ta có: $10 + m + 30 + n = 100 \Rightarrow m + n = 60$.

Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} m + n = 60 \\ m - n = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 37 \\ n = 23 \end{cases}.$$

Bài 5. (2,0 điểm) Một đoàn gồm 80 học sinh của tỉnh A (gồm lớp 11 và lớp 12) tham dự kì thi giải toán của tỉnh (thang điểm 20) và điểm trung bình của họ là 10. Biết rằng số học sinh lớp 11 nhiều hơn 50% số học sinh lớp 12 và điểm trung bình của học sinh khối 12 cao hơn điểm trung bình của học sinh khối 11 là 50%. Hãy tính điểm trung bình của học sinh khối 12.

Lời giải. Gọi x là số học sinh khối 12.

Số học sinh của khối 11 là $1,5x$.

Theo đề: $x + 1,5x = 80 \Leftrightarrow x = 32$.

Suy ra số học sinh của khối 11 là $1,5.32 = 48$ (học sinh)

Gọi y là điểm trung bình của học sinh khối 11.

Suy ra điểm trung bình của học sinh khối 12 là $1,5y$.

Điểm trung bình của 80 học sinh bằng 10 nên ta có:
$$\frac{48.y + 1,5y.32}{80} = 10 \Leftrightarrow y = \frac{25}{3}.$$

Suy ra điểm trung bình của học sinh khối 11 là: $1,5y = 1,5 \cdot \frac{25}{3} = 12,5$.

VI. Đề số 3b

Bài 1. (2,0 điểm) Điểm thi học kì của một học sinh như sau: 5, 5, 2, 6, 3, 5, 9, 8, 7, 10, 9. Tìm số trung bình và số trung vị.

Lời giải. Ta có số trung bình là: $\bar{n} = \frac{5+5+2+6+3+5+9+8+7+10+9}{11} = \frac{69}{11}$.

Xếp lại theo thứ tự không giảm: 2, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10. Có 11 số liệu nên trung vị là số liệu thứ 6. Đó là số 6.

Bài 2. (2,0 điểm) Nhiệt độ trung bình ở tháng 12 của tỉnh X trong suốt 30 năm qua đã được ghi lại theo bảng phân bố tần suất ghép lớp như sau:

Lớp nhiệt độ	Tần suất (%)
[12; 16)	16,70
[16; 20)	43,25
[20; 24)	36,75
[24; 28]	3,30
Cộng	100%

Tìm độ lệch chuẩn của bảng số liệu trên (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)?

Lời giải. Ta có:

$$\overline{x^2} = \frac{16,70 \cdot 14^2 + 43,25 \cdot 18^2 + 36,75 \cdot 22^2 + 3,30 \cdot 26^2}{100} \approx 373,04.$$

$$\bar{x} = \frac{16,70 \cdot 14 + 43,25 \cdot 18 + 36,75 \cdot 22 + 3,30 \cdot 26}{100} \approx 19,07$$

$$(\bar{x})^2 = 19,07^2 \approx 363,66.$$

$$s_x^2 = 373,04 - 363,66 \approx 9,38 \Rightarrow s_x = \sqrt{9,38} \approx 3,06.$$

Bài 3. (2,0 điểm) Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	5	10	n^2	16	$6n - 5$

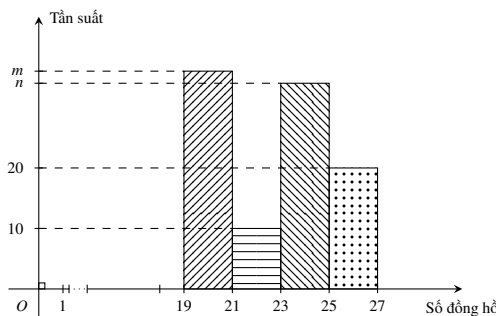
Tìm tất cả các giá trị n để x_3 là một duy nhất của bảng phân bố tần số đã cho.

Lời giải. Từ giả thiết x_3 là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho nên ta có

$$\begin{cases} n^2 > 16 \\ n^2 > 6n - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < -4 \\ n > 4 \\ n < 1 \\ n > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < -4 \\ n > 5 \end{cases}$$

Vì n là số tự nhiên nên các giá trị n thỏa mãn là: $n > 5$.

Bài 4. (2,0 điểm) Cho biểu đồ tần suất hình cột về số đồng hồ được bán ra của một cửa hàng ở tỉnh X trong 30 ngày như hình vẽ



Tìm giá trị của m và n biết $m^2 - 15m - 250 = 0$.

Lời giải. Ta có: $m^2 - 15m - 250 = 0 \Leftrightarrow m = 25$.

Dựa vào biểu đồ ta có: $10 + 20 + m + n = 100 \Rightarrow m + n = 70 \Rightarrow n = 45$.

Bài 5. (2,0 điểm) Sau một kì thi học sinh giỏi Toán, người ta thống kê kết quả (thang điểm 20) và thu được bảng tần số sau.

Lớp điểm	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	Cộng
Tần số	22	12	6	40

Nếu những học sinh chỉ cần đạt điểm trung bình của bảng điểm trên đều được nhận Giấy Khen của ban tổ chức, thì số học sinh được nhận Giấy Khen là bao nhiêu?

Lời giải. Ta lập lại bảng với thêm dòng giá trị đại diện:

Lớp điểm	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	Cộng
Giá trị đại diện	8	13	18	
Tần số	22	12	6	40

Điểm trung bình là: $\bar{x} = \frac{22 \cdot 8 + 12 \cdot 13 + 6 \cdot 18}{40} = 11.$

Số học sinh được nhận thưởng là: $12 + 6 = 18$ (học sinh).

Chương 6

CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

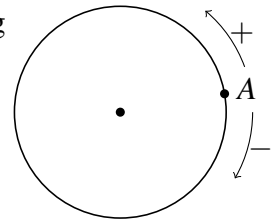
I. Tóm tắt lí thuyết

1. Khái niệm cung và góc lượng giác

Định nghĩa 1.

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm.

Quy ước: chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Định nghĩa 2. Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A và B . Một điểm M di chuyển trên đường tròn luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ A đến B tạo nên một *cung lượng giác* có điểm đầu là A , điểm cuối là B .

⚠ Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng, ta có vô số *cung lượng giác* điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi *cung* như vậy đều được kí hiệu là \widehat{AB} .

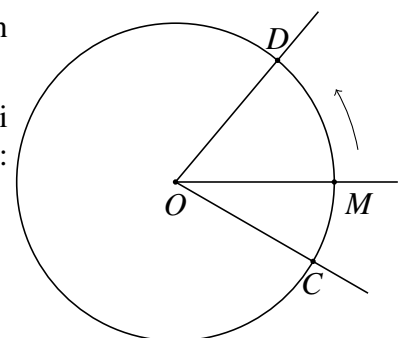
⚠ Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì

- Kí hiệu \widehat{AB} chỉ một *cung hình học* (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.
- Kí hiệu $\overset{\curvearrowright}{AB}$ chỉ một *cung lượng giác* điểm đầu A , điểm cuối B .

Định nghĩa 3.

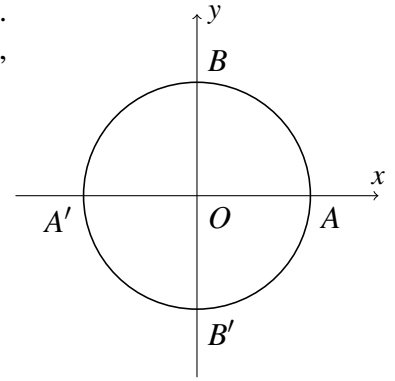
Trên đường tròn định hướng, cho *cung lượng giác* $\overset{\curvearrowright}{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên *cung lượng giác* $\overset{\curvearrowright}{CD}$ nói trên.

Khi đó, tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD . Ta nói tia OM tạo ra một *góc lượng giác* có tia đầu là OC , tia cuối là OD . Kí hiệu: (OC, OD) .



Định nghĩa 4.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$. Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$. Ta lấy A làm điểm gốc của đường tròn đó. Đường tròn xác định như trên gọi là *đường tròn lượng giác (gốc A)*.

**2. Số đo của cung và góc lượng giác**

Định nghĩa 5. Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là *cung co số đo 1 rad*.

Liên hệ giữa độ và rad: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

\triangleleft Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{2}$ rad.

Bảng chuyển đổi thông dụng:

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Định nghĩa 6. Số đo của một cung lượng giác \widehat{AM} ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung là \widehat{AM} là số \widehat{AM} .

Ghi nhớ:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Định nghĩa 7. Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác \widehat{AC} tương ứng.

Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác \widehat{AM} ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương. Kí hiệu số đo của cung là \widehat{AM} là số \widehat{AM} .

Ghi nhớ

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

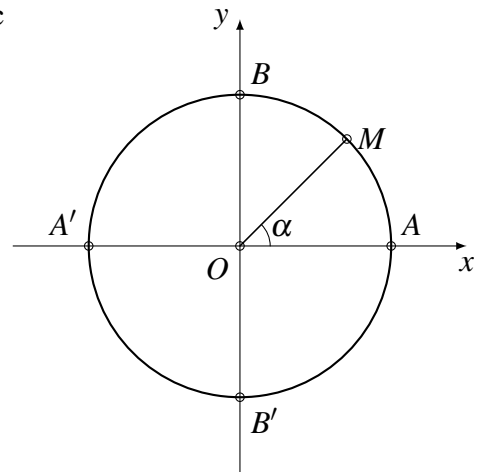
$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác \widehat{AC} tương ứng.

Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$ là điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo α .



II. Các dạng toán

Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian

Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ; 600^\circ; -37^\circ 45' 30''$.

Lời giải. Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad nên

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5};$$

$$600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3};$$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587.$$

Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}; \frac{3\pi}{5}; -4$.

Lời giải. Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên

$$\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ;$$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: $54^\circ; 30^\circ 45'; -60^\circ; -210^\circ$.

Lời giải. $54^\circ = 54 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{10};$

$$30^\circ 45' = 30^\circ + \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \left(\frac{123}{4}\right)^\circ = \frac{123}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{41\pi}{240} \approx 0,5367;$$

$$-60^\circ = -60 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{3};$$

$$-210^\circ = -210 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{6}.$$

Bài 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $3,56\pi$.

Lời giải. $\frac{\pi}{5} = \left(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 36^\circ$;

$-\frac{5\pi}{6} = -\left(\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -150^\circ$;

$\frac{4\pi}{3} = \left(\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 240^\circ$;

$3,56\pi = \left(3,56\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 640^\circ 48'$.

Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) và có độ dài là l thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

Đặc biệt: $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

Ví dụ 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 51° c) $\frac{1}{3}$

Lời giải. Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

a) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

b) Ta có $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04 \text{ m}$.

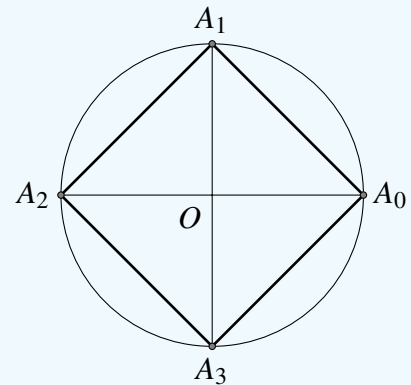
c) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12 \text{ m}$.

Ví dụ 4. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

Lời giải. Một hải lí dài $\frac{40000}{360} \cdot \frac{1}{60} \approx 1,852 \text{ km}$.

Ví dụ 5.

Cho hình vuông A_0, A_1, A_2, A_4 nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, i \neq j$).



Lời giải. Ta có $\widehat{A_0OA_0} = 0$ nên $sđ\widehat{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\widehat{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2}$ nên $sđ\widehat{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{A_0OA_2} = \pi \text{ nên } \widehat{sđA_0A_1} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\widehat{A_0OA_3} = \frac{\pi}{2} \text{ nên } \widehat{sđA_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Như vậy } \widehat{sđA_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Theo hệ thức salơ ta có } \widehat{sđA_iA_j} = \widehat{sđA_0A_j} - \widehat{sđA_0A_i} + k2\pi = (j - i) \cdot \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 3. Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau:

a) Bán kính $R = 5$, có số đo 72° .

b) Bán kính $R = 18$, có số đo 150° .

Lời giải. a) $l = \frac{\pi \cdot 72}{180} \cdot 5 = 2\pi$.

b) $l = \frac{\pi \cdot 150}{180} \cdot 18 = 15\pi$.

Bài 4. Cho đường tròn có đường kính $R = 20$ cm. Hãy tính độ dài cung tròn có số đo: $\frac{\pi}{15}; 1,5; 37^\circ$

Lời giải.

- $l = \frac{\pi}{15} \cdot 20 \approx 4,19$ cm.

- $l = 1,5 \cdot 20 \approx 30$ cm.

- $l = \frac{37 \cdot \pi}{180} \cdot 20 \approx 12,91$ cm.

Bài 5. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải. a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng, tức là quay được một góc $\frac{22\pi}{5}$ (rad) hay 792° .

b) Trong 1 phút, bánh xe lăn được $l = 340 \cdot \frac{22\pi}{5} \cdot 60 \approx 281,990$ (mm) ≈ 282 m.

Bài 6. Cho lục giác đều $A_0A_1A_2A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$).

Lời giải. $\widehat{sđA_0A_i} = \frac{i\pi}{3} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, k \in \mathbb{Z}$.

$\widehat{sđA_iA_j} = \widehat{sđA_0A_j} - \widehat{sđA_0A_i} + k2\pi = (j - i) \cdot \frac{\pi}{3} + k2\pi, i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 7. Trên đường tròn lượng giác gốc A . Cho điểm M, N sao cho $\widehat{sđAM} = \frac{\pi}{5}, \widehat{sđAN} = -\frac{\pi}{5}$. Các điểm

M', N' lần lượt là các điểm đối xứng của M, N qua tâm đường tròn. Tìm số đo của cung $\widehat{AM'}, \widehat{AN'}$ và $\widehat{M'N'}$.

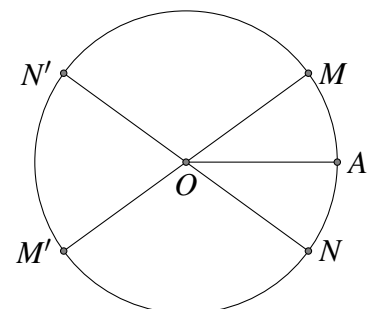
Lời giải.

$$\widehat{sđAM'} = \frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{6\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\widehat{sđAN'} = -\frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{4\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Theo hệ thức Saclơ ta có

$$\widehat{sđM'N'} = \widehat{sđAN'} - \widehat{sđAM'} + k2\pi = -\frac{2\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



Dạng 3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, ta thường sử dụng các kết quả sau:

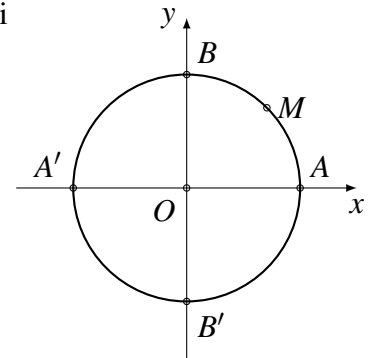
- Cung có số đo α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m điểm. Từ đó để biểu diễn các cung lượng giác đó, ta cho k chạy từ 0 đến $m - 1$ rồi biểu diễn các cung đó.

Ví dụ 6. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo $\frac{9\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{9\pi}{4}$ trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác $\frac{\pi}{4}$.

Vậy điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ \widehat{AB} .

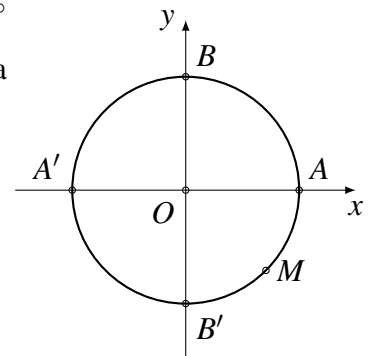


Ví dụ 7. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo -765° .

Lời giải.

Ta có $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng giác -765° trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -45° . Lại có $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn góc có số đo -765° .

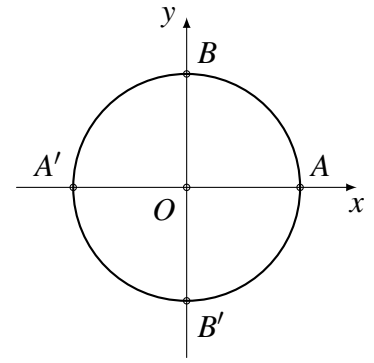


Ví dụ 8. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng góc có số đo $k\pi$.

- Với $k = 0, x = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .



Ví dụ 9. Cho cung lượng góc có số đo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2\pi; 5\pi]$?

Lời giải. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi > 2\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in [2\pi; 5\pi]$ thì $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$. Vì k là số nguyên nên có 3 giá trị của k , là 2, 3, 4, thỏa mãn ycbt.

Ví dụ 10. Cho cung lượng góc có số đo $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$?

Lời giải. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} > -\frac{3\pi}{5} \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} \leq 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{16}{15} \\ k \leq \frac{52}{3} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$ thì $-\frac{16}{15} < k \leq \frac{52}{3}$. Vì k là số nguyên nên có 19 giá trị của k ($-1, 0, \dots, 16, 17$) thỏa ycbt.

Ví dụ 11. Cho cung lượng góc có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ với số k tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(\frac{-\pi}{3}; 2\pi\right]$?

Lời giải. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} > -\frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{1}{2} \\ k \leq \frac{27}{2} \end{cases}.$$

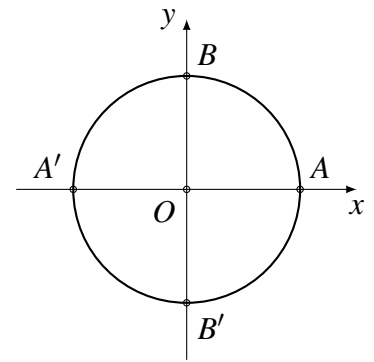
Từ đó, để $x \in \left(\frac{-\pi}{3}; 2\pi\right]$ thì $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{27}{2}$. Vì k là số nguyên nên có 14 giá trị của k ($0, 1, \dots, 12, 13$) thỏa ycbt.

Ví dụ 12. Biểu diễn các cung lượng góc có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{2} = \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $k\frac{\pi}{2}$.

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 2, x_3 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .
- Với $k = 3, x_4 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



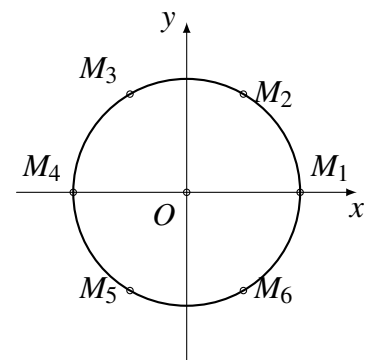
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 8. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{3} = \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $\frac{k\pi}{3}$.

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2, x_3 = \frac{2\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3, x_4 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 4, x_5 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_5 .
- Với $k = 5, x_6 = \frac{5\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_6 .



Bài 9. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -750^\circ$.

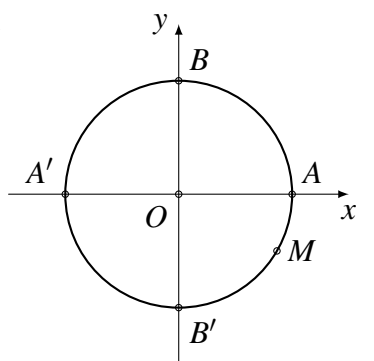
Lời giải.

Ta có $x = -750^\circ = -30^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm diễn góc -750° trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -30° .

Lại có $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$. Ta chia đường tròn thành 12 phần bằng nhau.

Chú ý góc -30° nằm dưới trục Ox .

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác -750° .

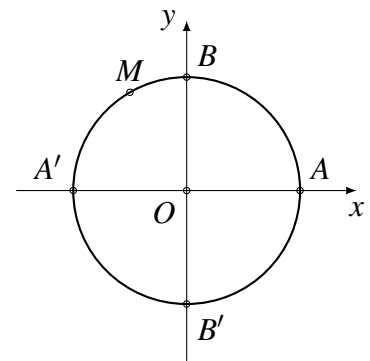


Bài 10. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành 3 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác $x = -\frac{2\pi}{3}$.

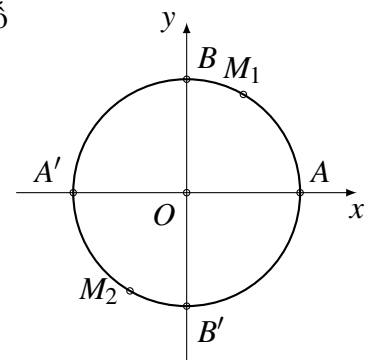


Bài 11. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

- Với $k = 0, x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .

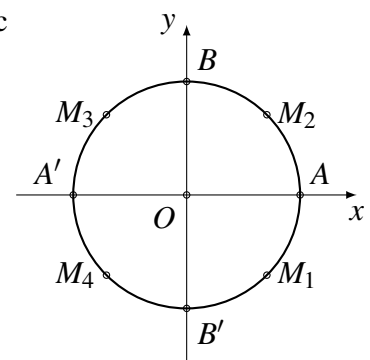


Bài 12. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = -\frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2, x_3 = \frac{3\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3, x_4 = \frac{5\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .

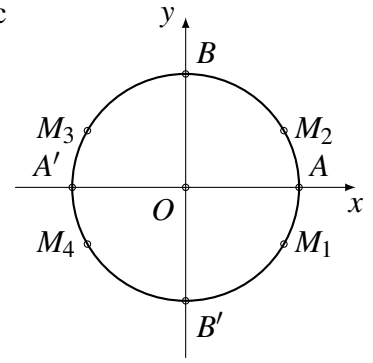


Bài 13. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = -\frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2, x_3 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 3, x_4 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 4, x_5 = \frac{7\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 5, x_6 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



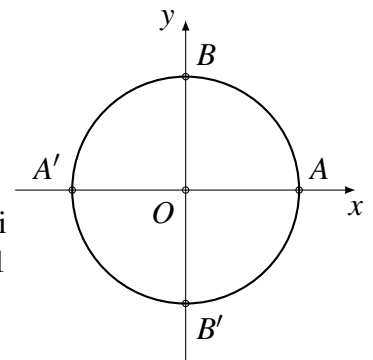
Bài 14. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = k\pi$ và $y = k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1, x_2 = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A' .

Ta có $y = k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0, y = 0$, được biểu diễn bởi điểm A . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.



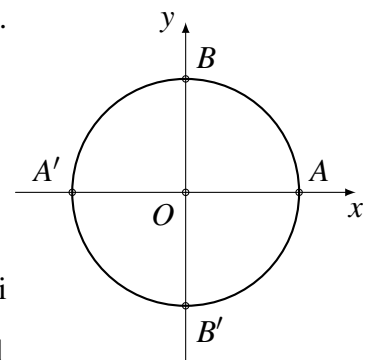
Bài 15. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B' .

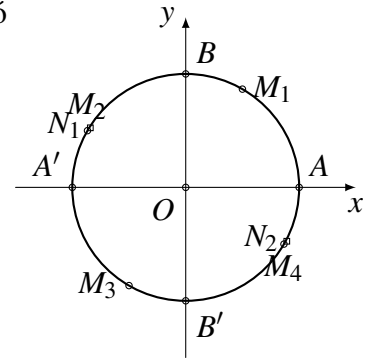
Ta có $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0, y = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.



Bài 16. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ và $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .



- Với $k = 0, x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .

- Với $k = 1, x_2 = \frac{5\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_2 .

- Với $k = 1, x_2 = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm M_3 .

- Với $k = 1, x_2 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_4 .

Ta có $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y .

Với $k = 0, y_1 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm N_1 .

Với $k = 1, y_2 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm N_2 .

Vậy số điểm chung nhận được là 2 điểm chung.

Bài 17. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{4}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = k\pi$.

Lời giải. Ta có $x = \frac{k\pi}{4} = \frac{k2\pi}{8}$. Vậy có 8 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \frac{8\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8}$.

Ta có $y = k\pi = \frac{2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{2}$.

Vậy có 6 điểm thỏa mãn ycbt.

Bài 18. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải. Ta có $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

Ta có $y = \frac{k2\pi}{3}$. Vậy có 3 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Vậy có 4 điểm thỏa mãn ycbt.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 19. Chứng minh:

a) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo lần lượt là $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối.

b) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo 645° và -435° thì có cùng tia cuối.

Lời giải.

a) Ta có : $\frac{22\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + 4\pi$.

Vậy hai góc đã cho có cùng tia cuối.

b) Ta có : $645^\circ = -75^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ và $-435^\circ = -75^\circ - 360^\circ$.

Vậy 645° và -435° có cùng tia cuối.

Bài 20. Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou , kim phút đồng hồ là tia Ov . Hãy tìm số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) khi đồng hồ chỉ 3 giờ, 4 giờ, 9 giờ, 11 giờ.

Lời giải.

- Khi đồng hồ chỉ 3 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

- Khi đồng hồ 4 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

- Khi đồng hồ 9 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

- Khi đồng hồ 11 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$

Bài 21. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α . Tìm số đo góc hình học \widehat{uOv} trong các trường hợp sau:

a) $\alpha = -1955^\circ$

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3}$

Lời giải. Trước hết ta cần nhớ $0^\circ \leq \widehat{uOv} \leq 180^\circ$ và $(Ou, Ov) = \widehat{uOv} + k360^\circ$.

a) Ta có $\alpha = -1955^\circ = 165^\circ - 6 \cdot 360^\circ$. Nên $\widehat{uOv} = 165^\circ$.

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 181 \cdot 2\pi$. Vậy $\widehat{uOv} = \frac{2\pi}{3}$.

Bài 22. Cho đường tròn đường kính 20 cm. Tìm số đo bằng độ và rad các cung có độ dài lần lượt là 9 cm, 37 cm.

Lời giải. Gọi R là bán kính đường tròn, khi đó suy ra $R = 10$ cm.

- Với cung có độ dài 9 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{9}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{9}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{162}{\pi}\right)^\circ$.

- Với cung có độ dài 37 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{37}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{37}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{296}{\pi}\right)^\circ$.

Bài 23. Trên đường tròn lượng giác cho các cung có số đo theo thứ tự là $-60^\circ, -315^\circ, -1130^\circ, -\frac{180\pi}{7}, \frac{11\pi}{3}$. Hỏi trong các cung trên những cung nào có cùng điểm cuối?

Lời giải. Trước hết ta thấy hai cung có số đo α và β gọi là có chung gốc và chung ngọn khi và chỉ khi $\alpha = \beta + k2\pi \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$. Tức là hai cung lượng giác có chung điểm gốc và điểm ngọn khi và chỉ khi chúng hơn kém nhau bội của 2π (bội của 360°).

Ta có:

$$\begin{aligned} -60^\circ - (-315^\circ) &= 255^\circ \neq k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ -60^\circ - (1130^\circ) &= -3 \cdot 360^\circ - 110^\circ \neq k360^\circ \\ -60^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -\frac{\pi}{3} + \frac{180\pi}{7} \neq k2\pi \\ -60^\circ - \left(\frac{11\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{3} = -4\pi = -2 \cdot 2\pi \\ -315^\circ - 1130^\circ &= -4 \cdot 360^\circ - 45^\circ \neq k360^\circ \\ -1130^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -3 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{18} + 13,2\pi - \frac{2\pi}{7} \neq k2\pi. \end{aligned}$$

Như vậy bằng cách tính hiệu số của từng cặp ta thấy chỉ có cung -60° và cung $\frac{11\pi}{3}$ là có chung điểm đầu và điểm cuối.

Bài 24. Cho góc lượng giác $(OC; OD) = 405^\circ + k360^\circ$. Tìm tất cả các góc có cùng tia đầu và tia cuối với góc đã cho và có số đo với giá trị tuyệt đối không quá 1200° .

Lời giải. Gọi α là góc cần tìm.

Theo bài ra $\alpha \leq |1200^\circ| \Leftrightarrow -1200^\circ \leq 405^\circ + k360^\circ \leq 1200^\circ \Rightarrow -\frac{107}{24} \leq k \leq \frac{53}{24} \Rightarrow k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy các góc cần tìm theo thứ tự là : $-1035; -675; -315; 45; 405; 765; 1125$.

Bài 25. Xác định điểm cuối của cung lượng giác \widehat{AM} nằm trong góc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ trong các trường hợp sau:

a) $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ$

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi$

Lời giải.

a) Ta có $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ = 175^\circ + 5 \cdot 360^\circ$ và $90^\circ < 175^\circ < 180^\circ$.

Vậy điểm M nằm trong cung phần tư thứ II

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi = \frac{30\pi}{19} + 52 \cdot 2\pi$ và $\frac{3\pi}{2} < \frac{30\pi}{19} < 2\pi$.

Vậy điểm M nằm tại góc phần tư thứ IV.

Bài 26. Hiện tại đồng hồ chỉ 8 giờ đúng. Nếu đồng hồ chạy bình thường thì sau bao nhiêu lần đầu tiên kim giờ OG và kim phút OP tạo thành góc lượng giác $(OG; OP) = 180^\circ$?

Lời giải. Một giờ kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$. Như vậy một giờ kim phút OP vạch một góc lớn hơn kim giờ 330° . Hiện tại 8 giờ đúng tức là $(OG; OP) = 120^\circ$.

Gọi t là thời gian (giờ) để hai kim tạo thành một góc 180° lần đầu tiên. khi đó

$$t = \frac{180 - 120}{330} = \frac{2}{11} \text{ giờ.}$$

Bài 27. Kim giờ và kim phút của một đồng hồ lớn có độ dài lần lượt là 165 cm và 225 cm. Hỏi trong 40 phút đầu kim giờ vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét, đầu kim phút vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét ?

Lời giải. Một giờ (60 phút) kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$.

Như vậy trong 40 phút đầu kim phút vạch một góc $\frac{40 \cdot 360}{60} = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ rad, kim giờ vạch nên một góc

$$\frac{40 \cdot 30}{60} = 20^\circ = \frac{\pi}{9} \text{ rad.}$$

Từ đó suy ra độ dài cung tròn mà kim phút và kim giờ đã vạch trong 40 phút đầu lần lượt là:

$$l_p = 225 \cdot \frac{4\pi}{3} = 300\pi \simeq 942,48 \text{ cm} = 9,4248 \text{ m} \text{ và } l_g = 165 \cdot \frac{\pi}{9} \simeq 57,6 \text{ cm} = 0,576 \text{ m}.$$

Bài 28. Một bánh xe có bán kính $R = 2,4$ m quay một góc bằng 30° . Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

Lời giải. Coi bánh xe là một đường tròn có bán kính $R = 2,4$ m. Độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe là độ dài của cung tròn có số đo $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Vậy độ dài cần tìm là $l = 2,4 \cdot \frac{\pi}{6} = 0,4\pi$ cm.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

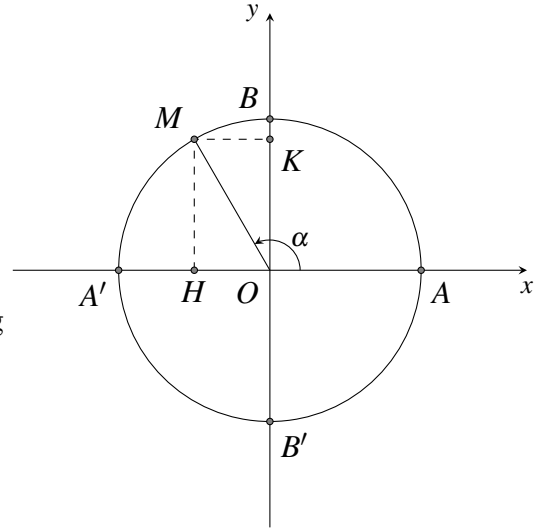
I. Tóm tắt lí thuyết

1. Định nghĩa

- $\sin \alpha = \overline{OK}$.
- $\cos \alpha = \overline{OH}$.
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nếu $\cos \alpha \neq 0$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ nếu $\sin \alpha \neq 0$.

Các giá trị $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**.



△ Chú ý

- Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.
- Nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì các giá trị lượng giác của góc α chính là các giá trị lượng giác của góc đó đã nêu trong SGK Hình học 10.

2. Hệ quả

a) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, hơn nữa

- $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.

b) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

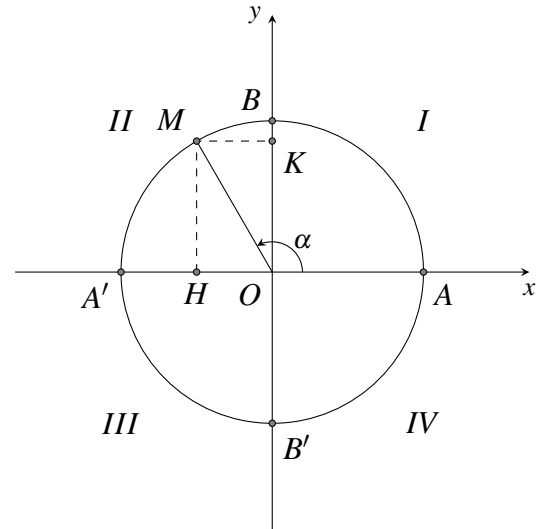
c) Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α, β sao cho $\sin \alpha = m$ và $\cos \beta = m$.

d) $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

e) $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) Dấu của các giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phân tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



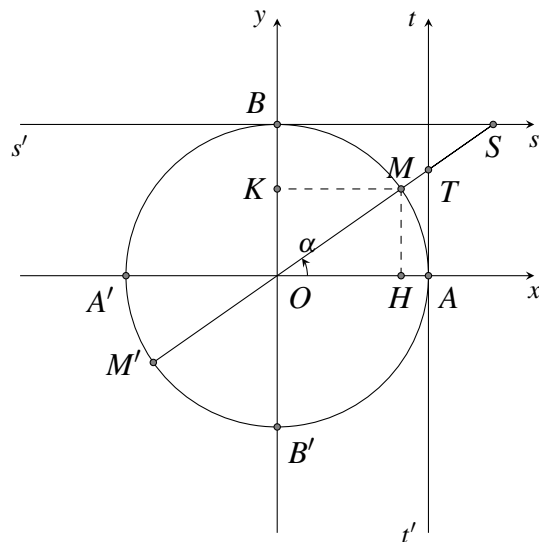
3. Ý nghĩa hình học của tang và cotang

- $\tan \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ \vec{AT} trên trục $t'At$. Trục $t'At$ được gọi là **trục tang**.

Do đó $\tan \alpha = \overline{AT}$.

- $\cot \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ \vec{BS} trên trục $s'Bs$. Trục $s'Bs$ được gọi là **trục cotang**.

Do đó $\cot \alpha = \overline{BS}$.



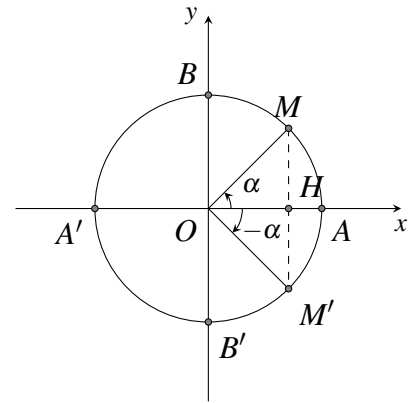
4. Công thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

5. Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt

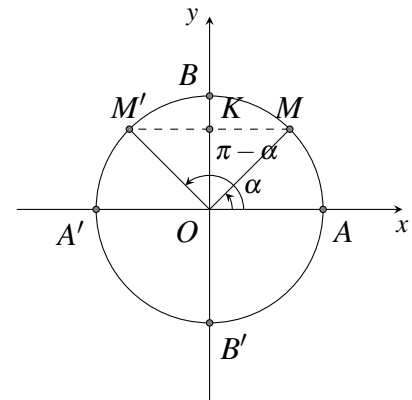
- a) Cung đối nhau.

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$



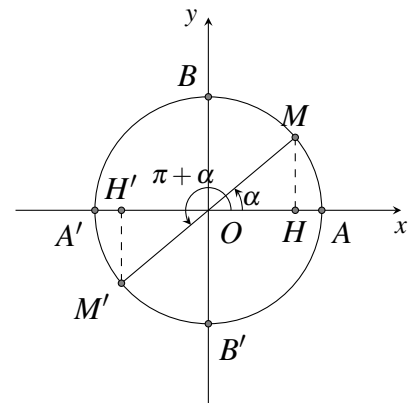
b) Cung bù nhau.

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha.$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha.$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$



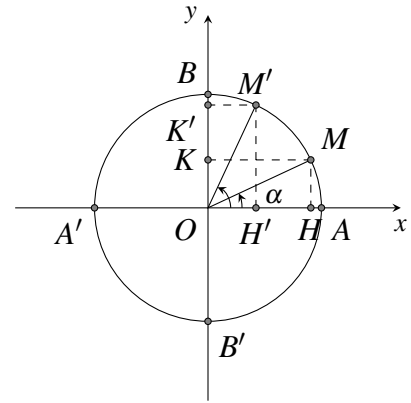
c) Cung hơn kém π .

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha.$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha.$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha.$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha.$



d) Cung phụ nhau.

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$

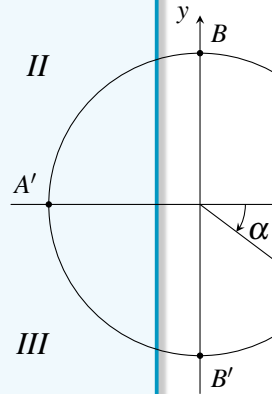


II. Các dạng toán

Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác

Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một góc α ta xác định vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác. Điểm M thuộc góc phần tư nào thì ta áp dụng bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



Ví dụ 1. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ).$

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}.$

Lời giải.

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ).$

Ta có: điểm cuối của cung 50° thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin 50^\circ > 0.$

Điểm cuối của cung -100° thuộc góc phần tư thứ III nên $\cos(-100^\circ) < 0.$

Do đó, $A < 0.$

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}.$

Ta có: điểm cuối của cung 195° thuộc góc phần tư thứ III nên $\sin 195^\circ < 0.$

Điểm cuối của cung $\frac{20\pi}{7} = \frac{6\pi}{7} + 2\pi$ thuộc góc phần tư thứ II nên $\tan \frac{20\pi}{7} < 0.$

Do đó, $B > 0.$

Ví dụ 2. Xác định dấu các biểu thức:

$$\text{a) } A = \cot \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right).$$

$$\text{b) } B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } A = \cot \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right).$$

Ta có: điểm cuối của cung $\frac{2\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ *I* nên $\cot \frac{2\pi}{5} > 0$.

Điểm cuối của cung $-\frac{2\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ *III* nên $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) < 0$.

Do đó, $A < 0$.

$$\text{b) } B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}.$$

Ta có: điểm cuối của cung $\frac{4\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ *II* nên $\cos \frac{4\pi}{5} < 0$.

Điểm cuối của cung $\frac{\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ *I* nên $\sin \frac{\pi}{3} > 0$.

Điểm cuối của cung $\frac{4\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ *III* nên $\tan \frac{4\pi}{3} > 0$.

Điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} + 2\pi$ thuộc góc phần tư thứ *IV* nên $\cot \frac{9\pi}{5} < 0$.

Do đó, $B > 0$.

Ví dụ 3. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\text{b) } B = \tan \left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha \right).$$

Lời giải.

$$\text{a) } A = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha < 0.$$

$$\text{b) } B = \tan \left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 1009\pi \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha > 0.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định dấu của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, biết:

$$\text{a) } \frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}.$$

$$\text{b) } 3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}.$$

$$\text{c) } \frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}.$$

Lời giải.

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$.

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *IV* nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha < 0$.

b) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$.

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *III* nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$.

c) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$.

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *II* nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$.**Bài 2.** Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ)$.

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ)$.

Lời giải.

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$.Do đó $A < 0$.

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ)$.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $80^\circ < \alpha + 80^\circ < 170^\circ$.Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + 80^\circ$ thuộc góc phần tư thứ *I* hoặc thứ *II* nên $B > 0$.**Bài 3.** Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \sin(270^\circ - \alpha)$.

b) $B = \cos(2\alpha + 90^\circ)$.

Lời giải.

a) $A = \sin(270^\circ - \alpha)$.

Vì $-180^\circ < -\alpha < -90^\circ$ nên $90^\circ < 270^\circ - \alpha < 180^\circ$.Do đó, điểm cuối của cung $270^\circ - \alpha$ thuộc góc phần tư thứ *II* nên $A > 0$.

b) $B = \cos(2\alpha + 90^\circ)$.

Ta có $B = \cos(2\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-2\alpha)) = \sin(-2\alpha) = -\sin(2\alpha)$.Vì $180^\circ < 2\alpha < 360^\circ$ nên $\sin(2\alpha) < 0$.Do đó, $B > 0$.**Bài 4.** Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right)$.

b) $B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$.

Lời giải.

$$a) A = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right).$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \frac{3\pi}{5} < \alpha + \frac{3\pi}{5} < \frac{11\pi}{10}.$$

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + \frac{3\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ II hoặc thứ III.

Vậy $A < 0$.

$$b) B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right).$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } -\frac{\pi}{8} < \alpha - \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8}.$$

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha - \frac{\pi}{8}$ thuộc góc phần tư thứ IV hoặc thứ I.

Vậy $B > 0$.

Bài 5. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

$$a) A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

$$b) B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right).$$

Lời giải.

$$a) A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha < 0.$$

$$b) B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + 280 \cdot 2\pi\right) \\ = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha > 0.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC . Xét dấu của biểu thức $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ trong các trường hợp:

a) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

Lời giải.

a) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

Vì tam giác ABC nhọn nên $A < 90^\circ, B < 90^\circ, C < 90^\circ$ hay $\cos A > 0, \cos B > 0, \cos C > 0$.

Vậy $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C > 0$.

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

Vì tam giác ABC là tam giác tù nên $\triangle ABC$ có duy nhất một góc tù. Giả sử góc tù góc $A \Rightarrow \cos A < 0$ và $\cos B > 0, \cos C > 0$.

Vậy $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0$.

Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một cung

Để tính giá trị lượng giác của 1 cung ta dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Ngoài ra, cần phải xác định dấu của các hàm số lượng giác của cung đó.

Ví dụ 1. Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải. Do $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0$. (1)

Mặt khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Từ đó suy ra $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Cho $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ở đó $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}$.

Từ đó suy ra $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

Ví dụ 3. Cho $\tan \alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Lời giải. Ta có $M = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$.

Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha$ ta được $M = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow M = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$.

Ví dụ 4. Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) - 3 \cot \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= \frac{-3 \cot^3 \alpha + 2 \cot^2 \alpha - 3 \cot \alpha + 2}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= -\frac{35}{16}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$. Biết $A = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ và $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $M = p - q$.

Lời giải. Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\pi < 2\alpha < 2\pi \Rightarrow \sin 2\alpha < 0$.

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

$$\text{Suy ra } A = -\frac{1}{9} - \frac{4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = 1, q = 4 \Rightarrow p - q = -3.$$

Vậy $M = -3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$ và $\sin \alpha > \cos \alpha$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

b) $B = \sin \alpha - \cos \alpha$.

Lời giải.

a) Ta có $\frac{25}{16} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Từ đó suy ra $2A = \frac{9}{16} \Rightarrow A = \frac{9}{32}$.

b) Theo giả thiết ta có $B > 0$ và $B^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Từ đó suy ra $B = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Bài 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải. Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Từ đó ta có $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

Bài 3. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha$.

Lời giải. $\cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha = (\cot \alpha + \tan \alpha)^3 - 3 \cot \alpha \cdot \tan \alpha \cdot (\cot \alpha + \tan \alpha) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$.

Bài 4. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos \left(\frac{9\pi}{2} - \alpha \right) + 2 \tan \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right).$$

Lời giải. Ta có $P = \sin \alpha - 2 \cot \alpha$.

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

Do đó $P = \frac{49}{15}$.

Bài 5. Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, tính giá trị của biểu thức $M = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

Lời giải. Để thấy $\cos \alpha \neq 0$, chia cả tử và mẫu của biểu thức M cho $\cos^2 \alpha$ ta được:

$$M = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{8}{19}.$$

Dạng 3. Sử dụng cung liên kết để tính giá trị lượng giác

Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt.

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{2017\pi}{3}$.

Lời giải. Ta có: $\frac{2017\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 672\pi$.

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 672\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \sin\frac{2017\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\frac{2017\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ và } \cot\frac{2017\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2. Cho $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Tính $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải. Ta có $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \cos(2\pi - x) = \cos x \\ \cos(3\pi + x) = -\cos x \end{cases} \Rightarrow A = -\sin x + \cos x - \cos x = -\sin x.$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

Lời giải. Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B + 2C = 180^\circ + C$.
 $\Rightarrow \sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$.

Ví dụ 5. Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

Lời giải. Ta có $\cos(180^\circ - x) = -\cos x \Rightarrow \cos x + \cos(180^\circ - x) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0 \\ \cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0 \\ \cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0 \\ \cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = -1.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\tan(\pi + x) = 1 - \sqrt{2}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Lời giải. Ta có $\tan(\pi + x) = \tan x \Rightarrow \tan x = 1 - \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x = \sqrt{2} - 1.$$

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin\frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot\frac{7\pi}{2}$.

Lời giải. Ta có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$
 $= -\sin\frac{\pi}{6} + \cos\pi - \tan\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$.

Bài 3. Rút gọn biểu thức $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

Lời giải. Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(4\pi + \pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$;

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x;$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x;$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x;$$

$$\Rightarrow D = -\cos x - \sin x.$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

Lời giải. Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$;

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x;$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x;$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x;$$

$$\text{Suy ra } A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0.$$

Bài 5. Với điều kiện có nghĩa, hãy rút gọn biểu thức sau

$$B = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \text{ với } \pi < x < 2\pi.$$

Lời giải. Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$.

Do đó

$$B = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|}\right).$$

$$\text{Vì } \pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0 \text{ nên } B = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\sqrt{2} \cot^2 x.$$

Dạng 4. Rút gọn biểu thức và chứng minh đẳng thức

Một số hệ thức hay dùng trong bài toán rút gọn biểu thức hoặc chứng minh đẳng thức:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x$.

Lời giải. Ta có: $A = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x = \sin^2 x (1 + \tan^2 x) = \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x$.

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $B = \frac{2 \sin^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x}$.

Lời giải. Ta có:

$$B = \frac{2 \sin^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2 \sin^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x (\sin x - \cos x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = 1 + \cot x.$$

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $A = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$.

Lời giải. Ta có $A = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

Lời giải. Ta có: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 2 + 2 \tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn biểu thức $M = \frac{4 \cos^2 x - 2}{\sin x + \cos x}$.

Lời giải. Ta có $B = \frac{4 \cos^2 x - 2 (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = 2 \sin x - 2 \cos x$.

Bài 2. Rút gọn biểu thức $N = \sqrt{\sin^2 x (4 + \cot x) + \cos^2 x (1 + 3 \tan x)}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{4 \sin^2 x + \sin^2 \cot x + \cos^2 x + 3 \cos^2 x \tan x} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 x + \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} + \cos^2 x + 3 \cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \sqrt{4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x} \\ &= \sqrt{(2 \sin x + \cos x)^2} \\ &= |2 \sin x + \cos x|. \end{aligned}$$

Bài 3. Rút gọn biểu thức $C = (\tan x - \cot x)^2 - (\tan x + \cot x)^2$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} C &= \tan^2 x - 2 \tan x \cot x + \cot^2 x - \tan^2 x - 2 \tan x \cot x - \cot^2 x \\ &= -4 \tan x \cot x = -4. \end{aligned}$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $B = 3 [(\sin^4 x)^2 - (\cos^4 x)^2] + 4 [(\cos^2 x)^3 - 2 (\sin^2 x)^3] + 6 \sin^4 x$.

Lời giải. Đặt $t = \sin^2 x$ thì ta có $\cos^2 x = 1 - t$.

$$\begin{aligned} B &= 3 (\sin^4 x + \cos^4 x) (\sin^4 x - \cos^4 x) + 4 [(\cos^2 x)^3 - 2 (\sin^2 x)^3] + 6 \sin^4 x \\ &= 3 [t^2 + (1-t)^2] [t^2 - (1-t)^2] + 4 [(1-t)^3 - 2t^3] + 6t^2 = 1. \end{aligned}$$

Bài 5. Chứng minh rằng $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha}$.

Lời giải. HƯỚNG DẪN.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} &\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{\cot^2 \alpha + 1}{\cot^2 \alpha \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^4 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha (1 + \tan^4 \alpha)} \\ &= \cot^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 0. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính các giá trị của $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

Lời giải. HƯỚNG DẪN.

$$\text{Có } \sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{4}{(m^2 - 1)^2} - 2.$$

Bài 2. Chứng minh rằng biểu thức sau độc lập với $x; y$.

$$B = \frac{\sin^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} + \cot^2 x \cot^2 y.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} + \frac{\cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x - (1 - \cos^2 x) \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 y)}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Như vậy, giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào giá trị của $x; y$.

Bài 3. Chứng minh biểu thức sau độc lập với đối với x .

$$P = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Lời giải. $P = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$
 $= \tan^2 x (1 + \cot^2 x) + \cot^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x - \cot^2 x = \tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1 - \tan^2 x - \cot^2 x = 2.$
 Vậy P không phụ thuộc vào x .

Bài 4. Cho $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\sin a$ và $\cos a$.

Lời giải. Ta có $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2 \sin a \cos a = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{18}\right) = \frac{4}{9}$.

Suy ra, $\sin a + \cos a = \frac{2}{3}$ hoặc $\sin a + \cos a = -\frac{2}{3}$.

Xét hai trường hợp:

a) $\sin a + \cos a = \frac{2}{3}$ và $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$.

$$\text{Giá trị } \sin a, \cos a \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2 + \sqrt{14}}{6} \\ X = \frac{2 - \sqrt{14}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < a < \pi \text{ nên } \sin a > 0 \text{ và } \cos a < 0. \text{ Vậy } \sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6} \text{ và } \cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}.$$

b) $\sin a + \cos a = -\frac{2}{3}$ và $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$.

Giá trị $\sin a$, $\cos a$ là nghiệm của phương trình $X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6} \\ X = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6} \end{cases}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\sin a > 0$ và $\cos a < 0$. Vậy $\sin a = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$.

Vậy $\sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}$ hoặc $\sin a = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$.

Bài 5. Cho $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = 2$. Tính $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$ với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Lời giải. Ta có $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = \tan\left(5\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x = 2 \Rightarrow \cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$.

$\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

Lại có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (do với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x < 0$).

$\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = -\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 6. Cho $\cot\left(\frac{2017\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x}.$$

Lời giải. Ta có $\cot\left(\frac{2017\pi}{2} + x\right) = \cot\left(1008\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

$\Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow P = \frac{2\tan^2 x + 3\tan x - 1}{1 - 3\tan^2 x} = -8$.

Bài 7. Cho $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0$. Biết $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = a + b\tan \alpha$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

Lời giải. Điều kiện $2\cos \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \neq \frac{1}{2}$.

Ta có $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Do $\cos \alpha \neq \frac{1}{2}$ nên $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

Mặt khác $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3}\tan \alpha$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{2}{3}$.

Bài 8. Cho $\tan \alpha = \sqrt[4]{2}$, biết $A = \frac{2\cos^2 \alpha - 1004}{\sin^2 \alpha} = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $\sin \frac{\pi(a-b)}{3}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{cases}$.

$$\text{Từ đó suy ra } A = -1004 - 1002\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1004 \\ b = -1002 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow \sin \frac{\pi(a-b)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 9. Cho $\sin \alpha + 3 \cos \alpha = 2$, ở đó $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

Lời giải. Do $0 < \alpha < \pi$ nên $\begin{cases} -1 < \cos \alpha < 1 \\ 0 < \sin \alpha < 1. \end{cases}$

Từ giả thiết ta có $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha$.

Mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $(2 - 3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\text{Từ đó suy ra } 10 \cos^2 \alpha - 12 \cos \alpha + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \\ \cos \alpha = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} \end{cases}.$$

Nếu $\cos \alpha = \frac{6 + \sqrt{6}}{10}$ thì $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha = \frac{2 - 3\sqrt{6}}{10} < 0$ (loại).

Nếu $\cos \alpha = \frac{6 - \sqrt{6}}{10}$ thì $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{10} \in (0; 1)$ (thỏa mãn).

$$\text{Từ đó suy ra } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3}.$$

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Công thức cộng

Dạng 1. Công thức cộng

Để giải các bài toán liên quan đến các công thức cộng, ta thường sử dụng các công thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a. & \text{c) } \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}. \\ \text{b) } \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cos 79^\circ$.

Lời giải. Ta có $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \sin 11^\circ \cos 21^\circ = \cos 10^\circ + \cos(11^\circ - 21^\circ) = 2 \cos 10^\circ$.

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}. \\ \text{b) } B &= (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b. \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a.$$

$$\text{b) Ta có } B = \tan(a - b) (1 + \tan a \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b = 1.$$

Ví dụ 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right). \\ \text{b) } \cos a - \sin a &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right). \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right). \\ \text{Mặt khác ta cũng có } \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right). \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
 \tan A + \tan B + \tan C &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin C}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \sin C \left(\frac{1}{\cos A \cos B} + \frac{1}{\cos C} \right) \\
 &= \sin C \cdot \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\cos A \cos B \cos C} \\
 &= \tan C \cdot \frac{\cos A \cos B - \cos(A+B)}{\cos A \cos B} \\
 &= \tan C \cdot \frac{\cos A \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B}{\cos A \cos B \cos C} \\
 &= \tan A \tan B \tan C.
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không sử dụng MTCT, hãy tính giá trị $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\sin 75^\circ$ và $\cos 75^\circ$.

Lời giải. $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Bài 2. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}$.

Lời giải. $P = \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos a - \cos\frac{\pi}{4}\sin a + \cos\frac{\pi}{4}\cos a + \sin\frac{\pi}{4}\sin a}{\sin\frac{\pi}{4}\cos a - \cos\frac{\pi}{4}\sin a - \cos\frac{\pi}{4}\cos a - \sin\frac{\pi}{4}\sin a} = \frac{\sqrt{2}\cos a}{-\sqrt{2}\sin a} = -\cot a$.

Bài 3. Tính $\alpha + \beta$ biết $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, $\tan \beta = \frac{3}{7}$ với $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Ta có $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$.

Do $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \alpha + \beta < \pi$. Vậy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Bài 4. Tính

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$, $90^\circ < b < 180^\circ$.

Lời giải.

a) Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{Ta có } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{6}.$$

b) Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 1}{-2\sqrt{2} + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

c) Có $0^\circ < a < 90^\circ$ nên $\cos a = \frac{3}{5}$, $90^\circ < b < 180^\circ$ nên $\cos b = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8 + 3\sqrt{5}}{15}.$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = \frac{4}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}.$$

Bài 5. Chứng minh rằng

a) $\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}.$

b) $\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}.$

Lời giải.

a)
$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\sin a \cos b - \sin b \cos a} = \frac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}.$$

b)
$$\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \sin b}} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}.$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(-b).$

b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a.$

c) $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b).$

Lời giải.

a) $A = \sin a \cos b + \sin b \cos a - \cos a \sin b = \sin a \cos b.$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a\right) \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a + \sin \frac{\pi}{4} \sin a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} (\cos a - \sin a) (\cos a + \sin a) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \sin^2 a = \frac{1}{2} \cos^2 a. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} C &= \left(\cos \frac{\pi}{2} \cos a + \sin \frac{\pi}{2} \sin a \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos b - \sin b \cos \frac{\pi}{2} \right) - (\sin a \cos b - \sin b \cos a) \\ &= \sin a \cos b - \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin b \cos a. \end{aligned}$$

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$

b) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$

Lời giải.

a) $\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\sin a \cos b - \sin b \cos a)$
 $= \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b.$
 Tương tự: $\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = (1 - \cos^2 a) \cos^2 b - (1 - \cos^2 b) \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a.$

b) $\cos(a+b)\cos(a-b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$
 $= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \cos^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a) \sin^2 b = \cos^2 a - \sin^2 b.$
 Tương tự: $\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = (1 - \sin^2 a) \cos^2 b - \sin^2 a (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \sin^2 a.$

Bài 8. Cho $a - b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $\frac{1 + \tan b}{1 - \tan b} = \tan a.$

Lời giải. Ta có $a - b = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + b.$

$$\text{Do đó } \tan a = \tan \left(\frac{\pi}{4} + b \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan b}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan b} = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b}.$$

Bài 9. Cho $a + b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2.$

Lời giải. Ta có $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = (1 + \tan a) \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - a \right) \right) = (1 + \tan a) \left(1 + \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} \right)$
 $= (1 + \tan a) \frac{2}{1 + \tan a} = 2.$

Bài 10. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1.$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \cot \frac{C}{2} \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1. \end{aligned}$$

II. Công thức nhân đôi

Định lý 1 (Công thức góc nhân đôi). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$

$$\bullet \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

$$\bullet \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Hệ quả 1 (Công thức hạ bậc). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

$$\bullet \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\bullet \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\bullet \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Hệ quả 2 (Công thức nhân ba). Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

$$\bullet \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

$$\bullet \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

(Chứng minh lại khi sử dụng trong bài tập tự luận)

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ &= \sin \alpha - 2\sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= 2\cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

III. Các dạng toán

Dạng 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc để tính giá trị lượng giác theo yêu cầu.

Ví dụ 5. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = 22^\circ 30'$.

Lời giải. Có $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\sin 45^\circ}{2 \cos \alpha} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}, \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \sqrt{2} - 1.$$

Ví dụ 6. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Lời giải. Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Do $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{-4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7}.$$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội chắn giữa các cung và các bậc.

Ví dụ 7. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$.

b) $B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \Rightarrow A \cdot \cos 10^\circ = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8} \sin 80^\circ = \frac{1}{8} \cos 10^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{8}.$$

$$\text{b) } B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội chắn giữa các cung và các bậc.

Ví dụ 8. Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

b) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$

c) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) VT} &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \text{VP.} \end{aligned}$$

$$\text{b) VT} = \frac{1 - \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha (2 \cos \alpha - 1)}{\sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha = \text{VP.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) VT} &= \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \text{VP.} \end{aligned}$$

Ví dụ 9. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x.$$

Lời giải. $P = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Cho biết $\tan \frac{a}{2} = 2$. Hãy tính giá trị biểu thức: $P = \frac{\tan a + \cot a}{2 \tan a - 4 \cot a}.$

Lời giải. Ta có $\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = -\frac{4}{3}, \cot a = \frac{1}{\tan a} = -\frac{3}{4}.$

$$P = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{25}{4}.$$

Bài 12. Cho $\tan x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}$. Chứng minh rằng $y = \sin 2x$.

Lời giải. $\tan x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}} = \frac{(\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y})^2}{1+y-1+y} = \frac{2+2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$

$$y = \sin 2x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow y(1 + \tan^2 x) = 2 \tan x$$

$$\Leftrightarrow y \left(1 + \frac{(1 + \sqrt{1-y^2})^2}{y^2}\right) = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1-y^2}}{y} \Leftrightarrow y^2 + 2 - y^2 + 2\sqrt{1-y^2} = 2 + 2\sqrt{1-y^2} \text{ (đúng).}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 13. Rút gọn $A = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

Lời giải. $A = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{16}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{32} = \cos \frac{\pi}{32}$

Bài 14. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$

b) $B = \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9}.$

Lời giải.

a) $A \cdot \cos 6^\circ = \sin 6^\circ \cos 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{2} \sin 12^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$
 $= \frac{1}{4} \sin 24^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{8} \sin 48^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \cos 6^\circ$
 $\Rightarrow A = \frac{1}{16}.$

b) $B \cdot \sin \frac{2\pi}{9} = \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{8} \sin \frac{16\pi}{9} =$
 $\frac{1}{8} \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{9}\right) = -\frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{9}$
 $\Rightarrow B = -\frac{1}{8}$

Bài 15. Tính giá trị của $\sin 18^\circ$ và $\cos 18^\circ$.

Lời giải. Đặt $x = 18^\circ$, có $5x = 90^\circ \Leftrightarrow 3x = 90^\circ - 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 3x$
 $\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \Leftrightarrow 4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & \text{(loại)} \\ \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} & \text{(nhận)} \\ \sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} & \text{(loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ và } \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Bài 16. Chứng minh các đẳng thức sau đây (trong điều kiện có nghĩa của biểu thức):

$$\text{a) } \tan x = \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x}.$$

$$\text{b) } \tan^2 x = \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{2 \sin 2x + \sin 4x}.$$

$$\text{c) } \sin^4 x + \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x.$$

Lời giải.

$$\text{a) } VP = \frac{\sin x + 2 \sin x \cos x}{1 + \cos x + 2 \cos^2 x - 1} = \frac{\sin x(1 + 2 \cos x)}{\cos x(1 + 2 \cos x)} = \tan x = VT$$

$$\text{b) } VP = \frac{2 \sin 2x - 2 \sin 2x \cos 2x}{2 \sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x} = \frac{2 \sin 2x(1 - \cos 2x)}{2 \sin 2x(1 + \cos 2x)} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \tan^2 x = VT$$

$$\text{c) } VT = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x \\ = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 2x = \cos 4x = VP$$

Bài 17. Cho góc α thỏa $\cos 4\alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha$.

$$\text{Lời giải. } P = \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha\right).$$

$$\text{Mà } \cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy nên } P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{288}.$$

Bài 18. Rút gọn biểu thức $A = \sin^5 \alpha \cos \alpha - \cos^5 \alpha \sin \alpha$.

$$\text{Lời giải. } A = \sin \alpha \cos \alpha (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (-\cos 2\alpha) = -\frac{1}{4} \sin 4\alpha$$

Bài 19. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số x .

$$\text{a) } A = 8 \sin^4 x + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3.$$

$$\text{b) } B = \frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{1}{\cos 2x}.$$

Lời giải.

$$\text{a) } A = 8(\sin^2 x)^2 + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3 = 8 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3 \\ = 2(1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3 = 2 \cos^2 2x - \cos 4x - 1 = \cos 4x - \cos 4x = 0. \\ \text{Vậy } A \text{ không phụ thuộc vào giá trị của } x.$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \sin x} - \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x \cos x - \sin x}{\sin x \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos^2 x - \sin x}{\sin x \cos 2x} \\ = \frac{\sin x(2 \cos^2 x - 1)}{\sin x \cos 2x} = \frac{\sin x \cos 2x}{\sin x \cos 2x} = 1. \\ \text{Vậy } B \text{ không phụ thuộc vào giá trị của } x.$$

IV. Công thức biến đổi

Dạng 5. Biến đổi một biểu thức thành một tổng hoặc thành một tích

Đây là dạng toán cơ bản chủ yếu để tập cho học sinh áp dụng được đối với các công thức biến đổi (tổng thành tích, tích thành tổng) đã học. Dưới đây là các công thức biến đổi đó.

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \bullet \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] & \bullet \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \bullet \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] & \bullet \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)] \end{aligned}$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned} \bullet \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \bullet \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \bullet \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} & \bullet \tan a + \tan b &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \bullet \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \bullet \tan a - \tan b &= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{aligned}$$

Ví dụ 10. Biến đổi mỗi biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b)$

c) $C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$

b) $B = \sin x \sin 2x \sin 3x$

d) $D = \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ)$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) - \cos(a+b+a-b)] = \cos 2b - \cos 2a. \\ \text{Vậy } A &= 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 3x (\sin 2x \sin x) = \frac{1}{2} \sin 3x [\cos x - \cos 3x] \\ &= \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x = \frac{1}{4} [\sin 2x + \sin 4x] - \frac{1}{4} \sin 6x. \\ \text{Vậy } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 8 \sin 3x \sin 2x \cos x = 4 [\cos x - \cos 5x] \cos x \\ &= 4 \cos^2 x - 4 \cos 5x \cos x = 2(1 + \cos 2x) - 2(\cos 4x + \cos 6x) \\ \text{Vậy } C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 2 + 2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = \cos x \cdot \frac{1}{2} [\cos 120^\circ + \cos 2x] \\ &= \frac{1}{2} \cos x \left[-\frac{1}{2} + \cos 2x \right] = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \cos x = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \\ \text{Vậy } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Ví dụ 11. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích:

a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a$

b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

Lời giải.

$$\text{a) } \sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 5a + \sin a + \sin 3a = 2 \sin 3a \cos 2a + \sin 3a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1).$$

$$\text{Vậy } A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1).$$

$$\text{b) } B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1)$$

$$= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 + 1 = 2 \cos x (\cos 2x + \cos x) = 2 \cos x \cdot 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{Vậy } B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 20. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$

e) $\sin(a-b) \cos(b-a)$

b) $\cos(a+b) \cos a$

f) $\cos a \cos b \cos c$

c) $2 \cos(a+b) \cos(a-b)$

g) $4 \sin 2a \sin 4a \sin 6a$

d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$

h) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x$

Lời giải.

a) Ta có $\cos 5a \sin 3a = \sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2} [\sin(3a - 5a) + \sin(3a + 5a)] = \frac{1}{2} [\sin(-2a) + \sin 8a]$
 Vậy $\cos 5a \sin 3a = \frac{1}{2} \sin 8a - \frac{1}{2} \sin 2a.$

b) Ta có $\cos(a+b) \cos a = \frac{1}{2} [\cos b + \cos(2a+b)] = \frac{1}{2} \cos b + \frac{1}{2} \cos(2a+b).$

c) $2 \cos(a+b) \cos(a-b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) + \cos(a+b+a-b)] = \cos 2b + \cos 2a.$

d) Ta có $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 4 (\cos 4x \cos 2x) \cos x = 4 \cdot \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 6x] \cos x$
 $= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 6x \cos x = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x.$

e) Ta có $\sin(a-b) \cos(b-a) = \frac{1}{2} [\sin(a-b-b+a) + \sin(a-b+b-a)] = \frac{1}{2} \sin(2a-2b).$

f) $\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \cos c$
 $= \frac{1}{2} \cos(a-b) \cos c + \frac{1}{2} \cos(a+b) \cos c$
 $= \frac{1}{4} \cos(a-b-c) + \frac{1}{4} \cos(a-b+c) + \frac{1}{4} \cos(a+b-c) + \frac{1}{4} \cos(a+b+c).$

g) Ta có $4 \sin 2a \sin 4a \sin 6a = \sin 4a + \sin 8a - \sin 12a.$

h) Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x\right] \cos 2x$
 $= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = -\frac{\cos 4x}{4}.$

Bài 21. Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$

c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$

b) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$

d) $\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$

- e) $\frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 7x - \sin 5x}$ k) $1 - \cos a + \sin a$
- f) $\sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x$ l) $1 - 2 \cos x + \cos 2x$
- g) $\sin a + \sin b + \sin(a + b)$ m) $1 + \sin x - \cos 2x$
- h) $\cos a + \cos b + \cos(a + b) + 1$ n) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$
- i) $\sin^2 a - \sin^2 b$ o) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$
- j) $1 + \sin a + \cos a$

Lời giải.

- a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x$
 $= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1).$
- b) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$
 $= 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x)$
 $= 4 \sin 4x \cos 2x \cos x.$
- c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = (\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x)$
 $= 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$
 $= 4 \cos \frac{5x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2} = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}.$
- d) $\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} = -\cot \frac{x+y}{2} \cot \frac{x-y}{2}.$
- e) $\frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \frac{2 \sin 6x \cos x}{2 \cos 6x \sin x} = \tan 6x \cot x.$
- f) $\sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x = \frac{1}{2} [\sin(-2x) + \sin 4x] + \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 6x]$
 $= \frac{1}{2} [\sin 6x + \sin 4x] = \sin 5x \cos x.$
- g) $\sin a + \sin b + \sin(a + b) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$
 $= 2 \sin \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot 2 \cos \frac{a}{2} \cos \left(-\frac{b}{2} \right)$
 $= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}.$
- h) $\cos a + \cos b + \cos(a + b) + 1 = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos^2 \frac{a+b}{2}$
 $= 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}.$
- i) $\sin^2 a - \sin^2 b = \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2} = \frac{1}{2} (\cos 2b - \cos 2a)$
 $= \frac{1}{2} \cdot (-2) \sin(b+a) \sin(b-a) = \sin(a+b) \sin(a-b).$
- j) $1 + \sin a + \cos a = 1 + \sin \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) + \cos \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) = 1 + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$
 $= 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + 2 \cos^2 \frac{a}{2} = 2 \cos \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right).$

$$\begin{aligned} \text{k) } 1 - \cos a + \sin a &= 1 - \cos\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) + \sin\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) \\ &= 2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{l) } 1 - 2 \cos x + \cos 2x = 1 - 2 \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\cos x - 1).$$

$$\text{m) } 1 + \sin x - \cos 2x = 1 + \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = \sin x (1 + 2 \sin x).$$

$$\begin{aligned} \text{n) } \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin^2 2x + \frac{1 - \cos 6x}{2} \\ &= 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) = \cos^2 2x - \cos 4x \cos 2x \\ &= \cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) = 2 \cos 2x \sin x \sin 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{o) } \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \frac{1 + \cos 6x}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) + \cos^2 2x = \cos 4x \cos 2x + \cos^2 2x \\ &= \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x) = 2 \cos 2x \cos 3x \cos x. \end{aligned}$$

Dạng 6. Chứng minh một đẳng thức lượng giác có sử dụng nhóm công thức biến đổi

- Với dạng toán này chúng ta thường xuất phát từ một vế của đẳng thức cần chứng minh, áp dụng các công thức, kết hợp rút gọn, nhóm số hạng,... một cách hợp lý biến đổi biểu thức đó đồng nhất được với biểu thức ở vế kia.
- Tùy vào bài toán cụ thể, đôi khi phương pháp biến đổi tương đương, hoặc chứng minh cả hai vế của đẳng thức cùng bằng với biểu thức trung gian,... cũng có thể được sử dụng.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải. Ta có $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4 \cos x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) + \cos \frac{2\pi}{3}\right]$

$$= 2 \cos x \cos 2x - \cos x = \cos 3x + \cos(-x) - \cos x = \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy $4 \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 13. Chứng minh rằng $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} \cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a &= (\cos 3a \cos a) \cos^2 a - (\sin 3a \sin a) \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2a + \cos 4a] \cos^2 a - \frac{1}{2} [\cos 2a - \cos 4a] \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a \cos^2 a + \frac{1}{2} \cos 4a \cos^2 a - \frac{1}{2} \cos 2a \sin^2 a + \frac{1}{2} \cos 4a \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \cos 4a (\cos^2 a + \sin^2 a) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a \cos 2a + \frac{1}{2} \cos 4a = \frac{1}{4} (\cos 4a + \cos 0) + \frac{1}{2} \cos 4a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 14. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức say đây không phụ thuộc vào biến số x :

$$S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$$

Lời giải. Ta có $S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2x \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right)}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2x \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{3}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 22. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$

b) $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$

c) $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$

d) $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$

e) $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$

f) $1 + \sin a + \cos a = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$

g) $\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \tan 2a$

h) $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$

i) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin 2\alpha$

j) $\frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \tan 2a \cos a$

k) $\frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} = \tan 3a$

l) $\frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = -2 \sin a$

m) $\frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} = \cot a$

n) $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$

o) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a+b}{2}$

p) $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{3}{4}$

q) $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x$

r) $\tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}$

s) $\sin(a-b) \sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

t) $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

Lời giải.

a) Chứng minh $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x &= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 8x) + \frac{1}{2} (\cos 6x - \cos 8x) \\ &= \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) = \cos 4x \cos 2x. \end{aligned}$$

b) Chứng minh $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) &= \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x - 2 \sin x \cos 4x \\ &= \sin 5x - [\sin(-x) + \sin 3x] - [\sin(-3x) + \sin 5x] = \sin x. \end{aligned}$$

c) Chứng minh $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x &= \frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 4x] \\ &= \frac{1}{2} [\cos 6x + \cos 2x] = \cos 2x \cos 4x. \end{aligned}$$

d) Chứng minh $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a &= 2 \sin a \cos 2a - 2 \sin 2a \cos 3a + \sin 5a \\ &= \sin(-a) + \sin 3a - [\sin(-a) + \sin 5a] + \sin 5a = \sin 3a. \end{aligned}$$

e) Chứng minh $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha &= \sin 6\alpha + \sin 2\alpha - \sin 2(2\alpha) \\ &= 2 \sin 4\alpha \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cos 2\alpha (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) \\ &= 2 \cos 2\alpha (2 \cos 3\alpha \sin \alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha. \end{aligned}$$

f) Chứng minh $1 + \sin a + \cos a = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \left(a - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \cos \left(a - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \\ &= \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) + 1 = \cos a + \sin a + 1. \end{aligned}$$

g) Chứng minh $\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \tan 2a$.

$$\text{Ta có } \frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \frac{\sin 3a + \sin a}{\cos 3a + \cos a} = \frac{2 \sin 2a \cos a}{2 \cos 2a \cos a} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a$$

h) Chứng minh $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} &= \frac{(\cos 3\alpha + \cos \alpha) + (\cos 2\alpha + 1)}{(2 \cos^2 \alpha - 1) + \cos \alpha} \\ &= \frac{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\cos 2\alpha + \cos \alpha)}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha \end{aligned}$$

i) Chứng minh $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} &= \frac{(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)}{\cos 2\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)} = 2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

j) Chứng minh $\frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \tan 2a \cos a$.

$$\text{Ta có } \frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \frac{2 \sin 2a + 2 \sin 2a \cos 2a}{4 \cos 2a \cos a}$$

k) Chứng minh $\frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} = \tan 3a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} &= \frac{\sin 4a + \sin 2a - \sin 3a}{\cos 4a + \cos 2a - \cos 3a} = \frac{2 \sin 3a \cos a - \sin 3a}{2 \cos 3a \cos a - \cos 3a} \\ &= \frac{\sin 3a (2 \cos a - 1)}{\cos 3a (2 \cos a - 1)} = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} = \tan 3a \end{aligned}$$

l) Chứng minh $\frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = -2 \sin a$.

$$\text{Ta có } \frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin 2a}{2 \sin 3a \cos a} = \frac{-\sin 2a}{\cos a} = \frac{-2 \sin a \cos a}{\cos a} = -2 \sin a.$$

m) Chứng minh $\frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} = \cot a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} &= \frac{1 + 2 \sin a \cos a + 2 \cos^2 a - 1}{1 + 2 \sin a \cos a - (1 - 2 \sin^2 a)} = \frac{2 \sin a \cos a + 2 \cos^2 a}{2 \sin a \cos a + 2 \sin^2 a} \\ &= \frac{2 \cos a (\sin a + \cos a)}{2 \sin a (\cos a + \sin a)} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a \end{aligned}$$

n) Chứng minh $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x &= (\cos 3x \sin x) \sin^2 x + (\sin 3x \cos x) \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} (\sin 4x - \sin 2x) \sin^2 x + \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 4x \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{3}{4} \sin 4x. \end{aligned}$$

o) Chứng minh $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a+b}{2}$.

$$\text{Ta có } \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} = \tan \frac{a+b}{2}.$$

p) Chứng minh $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2} + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3} \right] \\ &= 1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

q) Chứng minh $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x\right) &= 4 \sin x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) - \cos \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= 2 \sin x \cos 2x + \sin x = \sin 3x + \sin(-x) + \sin x = \sin 3x. \end{aligned}$$

r) Chứng minh $\tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin 3a}{\cos 3a} + \frac{\cos 3a}{\sin 3a} \\ &= \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a} + \frac{\sin^2 3a + \cos^2 3a}{\sin 3a \cos 3a} = \frac{1}{\sin a \cos a} + \frac{1}{\sin 3a \cos 3a} = \frac{2}{\sin 2a} + \frac{2}{\sin 6a} \\ &= \frac{2(\sin 6a + \sin 2a)}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{4 \sin 4a \cos 2a}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{4 \cdot 2 \sin 2a \cos 2a \cos 2a}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}. \end{aligned}$$

s) Chứng minh $\sin(a-b) \sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin(a-b) \sin(a+b) &= \frac{1}{2} [\cos(-2b) - \cos 2a] = \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a] \\ &= \frac{1}{2} [(1 - 2 \sin^2 b) - (1 - 2 \sin^2 a)] = \frac{1}{2} [2 \sin^2 a - 2 \sin^2 b] = \sin^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$$

t) Chứng minh $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos(a+b)\cos(a-b) &= \frac{1}{2}[\cos 2b + \cos 2a] = \frac{1}{2}[2\cos^2 b - 1 + 1 - 2\sin^2 a] \\ &= \frac{1}{2}[2\cos^2 b - 2\sin^2 a] = \cos^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$$

Bài 23. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$

b) $\sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b) = \sin^2(a+b)$

c) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos x$

Lời giải.

a) Chứng minh $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4\cos\frac{a+b}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos a + \cos b + \sin(a+b) &= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \\ &= 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\right) = 2\cos\frac{a+b}{2}\left(\sin\frac{\pi-a+b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\right) \\ &= 2\cos\frac{a+b}{2} \cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right). \end{aligned}$$

b) Chứng minh $\sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b) = \sin^2(a+b)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a \sin b \cos(a+b) &= \left[\frac{1-\cos 2a}{2} + \frac{1-\cos 2b}{2}\right] + 2\sin a \sin b \cos(a+b) \\ &= \left[1 - \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b)\right] + [\cos(a-b) - \cos(a+b)]\cos(a+b) \\ &= [1 - \cos(a+b)\cos(a-b)] + [\cos(a-b)\cos(a+b) - \cos^2(a+b)] \\ &= 1 - \cos^2(a+b) = \sin^2(a+b). \end{aligned}$$

c) Chứng minh $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\cos(x+\pi) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(x+\pi)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + \cos x - (-\cos x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos x\right] = \cos x. \end{aligned}$$

Bài 24. Chứng minh giá trị của biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$ không phụ thuộc vào biến số x :

Lời giải. $A = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right) + \cos\frac{7\pi}{12}\right] + \frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{12} + 2x\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12} + 2x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right) + \cos\frac{7\pi}{12} + \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[0 + 2\cos\frac{7\pi}{12}\right] = \cos\frac{7\pi}{12} \quad \left(\text{do } \frac{11\pi}{12} + 2x + \frac{\pi}{12} - 2x = \pi\right) \end{aligned}$$

Vậy $A = \cos \frac{7\pi}{12}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x).

Bài 25. Chứng minh rằng các biểu thức dưới đây không phụ thuộc vào giá trị của biến số x .

$$a) A = \sin^2 x + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$$

$$b) B = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} a) A &= \sin^2 x + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2x + \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \text{ (không phụ thuộc vào } x \text{)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B &= \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \cot x \\ &= \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\cos x + \sin x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1 \text{ (không phụ thuộc vào } x \text{)}. \end{aligned}$$

Dạng 7. Dùng công thức biến đổi để tính giá trị (rút gọn) của một biểu thức lượng giác

Ví dụ 15. Rút gọn biểu thức $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$.

Từ đó tính giá trị biểu thức $T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$

Lời giải. Ta có $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos 3x + 2 \sin x \cos 5x$
 $= \sin 2x + \sin 4x + \sin(-2x) + \sin 6x + \sin(-4x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x$
 Như vậy, $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = \sin 6x$.

Áp dụng kết quả trên, ta có

$$T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \Rightarrow T \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} = 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{Do } \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7} \text{ nên } T \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow T = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 16. Tính giá trị biểu thức $A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ$

Lời giải. Ta có $A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1 - \cos 20^\circ}{2} + \frac{1}{2} [\cos 120^\circ + \cos 20^\circ]$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cos 120^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 120^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$\text{Vậy } A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 17. Rút gọn các biểu thức sau đây:

$$a) A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$$

$$b) B = \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a}$$

Lời giải.

$$a) \text{ Ta có } A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin a}{2 \cos 3a \sin a} = -\frac{\sin 3a}{\cos 3a} = -\tan 3a.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a} = \frac{(\sin 3a + \sin a) - 2 \sin 2a}{(\cos 3a + \cos a) - 2 \cos 2a} \\ &= \frac{2 \sin 2a \cos a - 2 \sin 2a}{2 \cos 2a (\cos a - 1)} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 26. Tính giá trị các biểu thức sau đây:

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{h) } H = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{b) } B = \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{i) } I = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\text{c) } C = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{j) } J = \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

$$\text{d) } D = \cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ$$

$$\text{k) } K = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ$$

$$\text{e) } E = \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \sin 100^\circ$$

$$\text{l) } L = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$$

$$\text{f) } F = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$$

$$\text{m) } M = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ$$

$$\text{g) } G = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$$

Lời giải.

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{4\pi}{12} \right) - \cos \frac{6\pi}{12} \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{b) } B = \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{16\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} - 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5} \\ &\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = \sin \frac{2\pi}{5} - \left[\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right] = \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \\ &\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \quad \left(\text{do } \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5} \right) \end{aligned}$$

$$\text{d) } D = \cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ = 2 \cos 60^\circ \cos (-25^\circ) - \cos 25^\circ = \cos 25^\circ - \cos 25^\circ = 0$$

$$\text{e) } E = \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \sin 100^\circ = 2 \cos 120^\circ \cos 10^\circ + \cos 10^\circ = -\cos 10^\circ + \cos 10^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ) \\ &= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ} - \left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ} \right) \\ &= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \cos 9^\circ \sin 81^\circ}{\sin 90^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \cos 27^\circ \sin 63^\circ}{\sin 90^\circ} \\ &= \frac{\cos 9^\circ \cos 81^\circ}{\sin 90^\circ} - \frac{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} \\ &= \frac{4 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ} = 4 \quad (\text{do } \cos 36^\circ = \sin 54^\circ). \end{aligned}$$

$$\text{g) } G = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{6\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{9} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } H &= \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \\
 \Rightarrow H \cdot \sin \frac{\pi}{7} &= \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{7}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } I &= \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = -\cos \frac{6\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7} \\
 \Rightarrow I \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) &= \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

$$\text{j) Ta có } J = \cos 36^\circ \cos 72^\circ \Rightarrow J \cdot \sin 36^\circ = \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ$$

$$\Rightarrow J \cdot \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sin 72^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4} \sin 144^\circ = \frac{1}{4} \sin 36^\circ$$

$$\text{Vậy } J = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } K &= \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = -\cos 144^\circ - \cos 72^\circ \\
 \Rightarrow K \cdot (-\sin 36^\circ) &= \sin 36^\circ \cos 144^\circ + \sin 36^\circ \cos 72^\circ \\
 &= \frac{1}{2} [\sin 180^\circ - \sin 108^\circ + \sin 108^\circ - \sin 36^\circ] = \frac{1}{2} (-\sin 36^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) } L &= \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} \\
 \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5} \\
 \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{5\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{5\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{7\pi}{5} \right] \\
 \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right] = \frac{1}{2} \left[-\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right] = -\sin \frac{\pi}{5} \\
 \Rightarrow L &= -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{m) } M &= \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ \Rightarrow M \cdot \sin 10^\circ = 1 - 4 \sin 70^\circ \sin 10^\circ \\
 \Rightarrow M \cdot \sin 10^\circ &= 1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ) = 1 - 1 + \sin 10^\circ = \sin 10^\circ \\
 \Rightarrow M &= 1
 \end{aligned}$$

Bài 27. Cho $a = \frac{\pi}{11}$. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau đây

$$\text{a) } A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$$

$$\text{b) } B = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$$

$$\text{c) } C = \cos a + \cos \left(a + \frac{2\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{4\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{6\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{8\pi}{5} \right)$$

Lời giải.

- a) Ta có $A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A = 2 \sin a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 2a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 3a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 4a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 5a \sin \frac{a}{2}$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A = \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{3a}{2} + \cos \frac{3a}{2} - \cos \frac{5a}{2} + \dots - \cos \frac{9a}{2} + \cos \frac{9a}{2} - \cos \frac{11a}{2}$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A = \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{11a}{2}$.
 Với $a = \frac{\pi}{11}$ ta có $2 \sin \frac{\pi}{22} \cdot A = \cos \frac{\pi}{22} - \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{22} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{22}$.
- b) Ta có $B = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$
 $\Rightarrow 2B \cdot \sin a = 2 \sin a \cos 2a + 2 \sin a \cos 4a + 2 \sin a \cos 6a + 2 \sin a \cos 8a + 2 \sin a \cos 10a$
 $\Rightarrow 2B \cdot \sin a = -\sin a + \sin 3a - \sin 3a + \sin 5a + \dots - \sin 9a + \sin 11a$
 $\Rightarrow 2B \cdot \sin a = -\sin a + \sin 11a$.
 Với $a = \frac{\pi}{11}$ ta có $2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot B = -\sin \frac{\pi}{11} + \sin \pi \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$.
- c) Ta có $C = \cos a + \cos \left(a + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$
 $\Rightarrow 2C \cdot \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos a + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{2\pi}{5}\right)$
 $\quad + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$
 $= -\sin \left(a - \frac{\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{3\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{3\pi}{5}\right)$
 $\quad + \sin \left(a + \frac{5\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{5\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{7\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{7\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{9\pi}{5}\right)$
 $\Rightarrow 2C \cdot \sin \frac{\pi}{5} = \sin \left(a + \frac{9\pi}{5}\right) - \sin \left(a - \frac{\pi}{5}\right) = 2 \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) \sin \pi = 0 \Rightarrow C = 0$.

Bài 28. Rút gọn các biểu thức dưới đây:

- a) $A = 4 \sin \frac{x}{3} \sin \frac{x+\pi}{3} \sin \frac{x-\pi}{3}$ f) $F = \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$
- b) $B = 4 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x+\pi}{3} \cos \frac{x-\pi}{3}$ g) $G = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos a + \cos b}$
- c) $C = \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$
- d) $D = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$ h) $H = \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a-b)}$
- e) $E = \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$ i) $I = \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x)$

Lời giải.

- a) $A = 4 \sin \frac{x}{3} \sin \frac{x+\pi}{3} \sin \frac{x-\pi}{3} = 4 \sin \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{2x}{3} \right] = -\sin \frac{x}{3} + 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow A = -\sin \frac{x}{3} + \sin x - \sin \frac{x}{3} \Rightarrow A = \sin x$
- b) $B = 4 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x+\pi}{3} \cos \frac{x-\pi}{3} = 4 \cos \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2x}{3} \right] = -\cos \frac{x}{3} + 2 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow B = -\cos \frac{x}{3} + \cos x + \cos \frac{x}{3} \Rightarrow B = \cos x$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{2} - \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{2} \\ &\Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right] = 1 - \cos\frac{\pi}{4} \cos x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x} = \frac{\sin 7x + \sin x + \sin 4x}{\cos 7x + \cos x + \cos 4x} = \frac{2 \sin 4x \cos 3x + \sin 4x}{2 \cos 4x \cos 3x + \cos 4x} \\ &\Rightarrow D = \frac{\sin 4x (2 \cos 3x + 1)}{\cos 4x (2 \cos 3x + 1)} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } E &= \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{\cos 3x + \cos x - \cos 2x}{\sin 3x + \sin x - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x} \\ &\Rightarrow E = \frac{\cos 2x (2 \cos x - 1)}{\sin 2x (2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x} = \frac{2 \sin^2 4x - 2 \sin^2 2x}{2 \cos^2 x - 2 \cos^2 2x} = \frac{(1 - \cos 8x) - (1 - \cos 4x)}{(1 + \cos 2x) - (1 + \cos 4x)} = \frac{\cos 4x - \cos 8x}{\cos 2x - \cos 4x} \Rightarrow F = \\ &= \frac{-2 \sin 6x \sin(-x)}{-2 \sin 3x \sin(-x)} = \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\sin 3x} = 2 \cos 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } G &= \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \cdot 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} \\ &\Rightarrow G = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = \cos b - \cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } H &= \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a-b)} = \frac{(1 + \cos 2a) - (1 + \cos 2b)}{2 \sin(a-b)} = \frac{\cos 2a - \cos 2b}{2 \sin(a-b)} \\ &= \frac{-2 \sin(a+b) \sin(a-b)}{2 \sin(a-b)} = -\sin(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } I &= \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) \\ &= \sin x + 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x \\ &= \sin x - \sin x + \sin 3x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x = \sin 7x \end{aligned}$$

Dạng 8. Nhận dạng tam giác. Một số hệ thức trong tam giác

- Biến đổi, dẫn đến $\sin A = 1$ hoặc $\cos A = 0$ sẽ có $A = 90^\circ$.
- Nếu $a^2 + b^2 = c^2$ thì $C = 90^\circ$.
- Nếu $\sin(A - B) = 0$ hoặc $\cos(A - B) = 1$ thì $A = B$, suy ra tam giác cân.
- Tam giác cân mà có một góc bằng 60° là tam giác đều.

Một số lưu ý khi giả thiết cho A, B, C là ba góc của một tam giác

- $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow (A + B)$ và C bù nhau, tương tự với $(B + C)$ và A, \dots
- $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$ và $\frac{C}{2}$ phụ nhau, tương tự với $\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ và $\frac{A}{2}, \dots$
- Các góc A, B, C đều có số đo trong khoảng $(0^\circ; 180^\circ)$
- Các góc $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ đều là các góc nhọn nên có các giá trị lượng giác đều dương.

Ví dụ 18. Chứng minh rằng ΔABC vuông khi $\sin A \sin C = \cos A \cos C$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\sin A \sin C = \cos A \cos C &\Leftrightarrow \cos A \cos C - \sin A \sin C = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(A + C) = 0 \Leftrightarrow -\cos B = 0 \Leftrightarrow \cos B = 0 \Leftrightarrow B = 90^\circ\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại B .

Ví dụ 19. Chứng minh rằng ΔABC cân khi $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. (1)

Lời giải. Ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}\cos(A - B) - \cos(A + B) &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) + \cos C &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) &= 1 \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow A = B.\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

Ví dụ 20 (ĐH Ngoại ngữ Hà Nội-1995). Cho ΔABC với diện tích S và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}.$$

Lời giải. Đặt $Q = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$. Khi đó

$$\begin{aligned}Q &= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos C] \\ &= 2 \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 4 \sin A \sin B \sin C \\ &= 4 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R} \cdot \frac{2}{R^2} = \frac{2S}{R^2}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 21. Cho ΔABC . Chứng minh rằng

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0.$$

Lời giải. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2R[\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B)] = 0.$$

Mà ta có

$$\begin{aligned}\sin A \sin(B - C) &= \sin(B + C) \sin(B - C) = -(\cos 2B - \cos 2C) \\ \sin B \sin(C - A) &= \sin(C + A) \sin(C - A) = -(\cos 2C - \cos 2A) \\ \sin C \sin(A - B) &= \sin(A + B) \sin(A - B) = -(\cos 2A - \cos 2B).\end{aligned}$$

Cộng lại ta được:

$$\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) = 0.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 22. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \tan \frac{A-B}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} \cdot \tan \frac{A-B}{2} &= \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R(\sin A - \sin B)} \cdot \tan \frac{A-B}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \tan \frac{A+B}{2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 23 (ĐH Ngoại ngữ Hà Nội-1998). Cho A, B, C và a, b, c là các góc và các cạnh của ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{2 \sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{c^2} &= \frac{4R^2(\sin^2 A - \sin^2 B)}{4R^2 \sin^2 C} = \frac{1 - \cos 2A - (1 - \cos 2B)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin^2 C} = \frac{-2 \sin(B+A) \sin(B-A)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{2 \sin C \sin(A-B)}{\sin^2 C} = \frac{2 \sin(A-B)}{\sin C}. \end{aligned}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 24. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin A + \sin B - \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)$$

$$\text{Vì } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \text{ nên } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \text{ và } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$$

$$\text{Từ đó } \sin A + \sin B - \sin C = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right]$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot (-2) \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Vậy } \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Ví dụ 25. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2}\right)}{2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - \cos \left(2 \cdot \frac{C}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right)}{2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right)} \\ &= \cot \frac{C}{2} \frac{-2 \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2}\right)}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \left(-\frac{B}{2}\right)} = \cot \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \\ \text{Vậy } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 26. Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} &\Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \Leftrightarrow \sin A = \tan \frac{B+C}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \left(2 \cdot \frac{A}{2}\right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cot \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} \\ \text{Do } 0^\circ < \frac{A}{2} < 90^\circ &\text{ nên } \cos \frac{A}{2} \neq 0 \text{ và } \sin \frac{A}{2} > 0. \\ \text{Từ đó } 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} &\Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 45^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ \\ \text{Vậy } ABC &\text{ là tam giác vuông tại } A. \end{aligned}$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 29. Cho A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Chứng minh rằng

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
- $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C$
- $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$
- $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$
- $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$h) \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

Lời giải.

a) Chứng minh rằng $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\text{do } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(\text{do } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \left(-\frac{B}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

b) Chứng minh rằng $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \left(\text{do } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \right) \\ &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(\text{do } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} (-2) \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right) = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

c) Chứng minh rằng $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) \left(\text{do } A+B+C = 180^\circ \right) \\ &= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 2 \sin C \cdot (-2) \sin A \sin(-B) = 4 \sin A \sin B \sin C. \end{aligned}$$

d) Chứng minh rằng $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 &= 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1 + 1 \\ &= -2 \cos C \cos(A-B) - 2 \cos C \cos(A+B) \left(\text{do } A+B+C = 180^\circ \right) \\ &= -2 \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= -2 \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = -4 \cos A \cos B \cos C. \end{aligned}$$

e) Chứng minh rằng $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1] \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [-2 \cos C \cos(A-B) - 2 \cos C \cos(A+B) - 1] \\ &= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C \end{aligned}$$

f) Chứng minh rằng $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= 1 + \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C \\ &= 1 - \cos C \cos(A-B) - \cos C \cos(A+B) \left(\text{do } A+B+C = 180^\circ \right) \\ &= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 1 - \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C \end{aligned}$$

g) Chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$\begin{aligned} \text{Ta có Ta có } A + B + C = 180^\circ &\Rightarrow A + B = 180^\circ - C \Rightarrow \tan(A + B) = \tan(180^\circ - C) \\ &\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B) \\ &\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C \\ &\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C. \end{aligned}$$

h) Chứng minh rằng $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A + B + C = 180^\circ &\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \Rightarrow \tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}\right) = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\ &\Rightarrow \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2} = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\ &\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1. \end{aligned}$$

Bài 30. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cdot \cos \frac{A}{2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{b-c}{a} \cdot \cos \frac{A}{2} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A} \cdot \cos \frac{A}{2} \\ &= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \cdot \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B-C}{2}. \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 31 (ĐH Đà Nẵng 1997). Chứng minh rằng ΔABC vuông khi

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}. \quad (1)$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{2R \sin B}{\cos B} + \frac{2R \sin C}{\cos C} = \frac{2R \sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos B \cos C} = \frac{1}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \sin B \sin C = \cos B \cos C \\ &\Leftrightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C = 0 \Leftrightarrow \cos(B+C) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\pi - A) = 0 \Leftrightarrow -\cos A = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Bài 32. Cho a, b, A, B khác không và $aB + bA \neq 0$ sao cho

$$\frac{\sin(x - \alpha)}{\sin(x - \beta)} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} = \frac{A}{B}.$$

Chứng minh rằng: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{aA + bB}{aB + bA} &= \frac{aB \left(\frac{A}{B} + \frac{b}{a} \right)}{aB \left(1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{A}{B} \right)} = \frac{\frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)} + \frac{\sin(x - \beta)}{\sin(x - \alpha)}}{1 + \frac{\sin(x - \beta)}{\sin(x - \alpha)} \cdot \frac{\cos(x - \alpha)}{\cos(x - \beta)}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} [\sin(2x - 2\alpha) + \sin(2x - 2\beta)]}{\sin(x - \alpha) \cos(x - \beta) + \cos(x - \alpha) \sin(x - \beta)} \\ &= \frac{\sin(2x - \alpha - \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin(x - \alpha + x - \beta)} = \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Như vậy: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$, điều phải chứng minh.

Bài 33 (ĐH-2004A). Cho ΔABC không tù, thoả mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3.$$

Tính ba góc của tam giác ABC .

Lời giải. Gọi $M = \cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C - 3$. Khi đó

$$\begin{aligned} M &= 2 \cos^2 A - 1 + 4\sqrt{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 3 \\ &= 2 \cos^2 A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 4. \end{aligned}$$

Do $\sin \frac{A}{2} > 0$, $0 < \cos \frac{B-C}{2} \leq 1$ nên

$$M \leq 2 \cos^2 A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4.$$

Mặt khác, do tam giác ABC không tù nên $\cos A \geq 0$, $\cos^2 A \leq \cos A$. Suy ra

$$\begin{aligned} M &\leq 2 \cos A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 = 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \right) + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 \\ &= -4 \sin^2 \frac{A}{2} + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 2 = -2 \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 1 \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy $M \geq 0$, hay $\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C \leq 3$. Theo giả thiết

$$M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 A = \cos A \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = C = 45^\circ. \end{cases}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 34. Chứng minh $\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^4 a + \cos^4 a - 1 &= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a - 1 = -2\sin^2 a \cos^2 a \\ \sin^6 a + \cos^6 a - 1 &= (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^2 a \cos^2 a) - 1 \\ &= (1 - 2\sin^2 a \cos^2 a) - \sin^2 a \cos^2 a - 1 \\ &= -3\sin^2 a \cos^2 a \end{aligned}$$

Do đó: $\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{-2\sin^2 a \cos^2 a}{-3\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{2}{3}$

Bài 35. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left[1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} \right]$.

Tính giá trị A nếu $\cos x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left(\frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) \\ &= \frac{1 + \cos x}{\sin x} \cdot \frac{2(1 - \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{2(1 - \cos^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{2\sin^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2}{\sin x} \end{aligned}$$

Ta có: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Do: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ nên $\sin x > 0$

Vậy $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó: $A = \frac{2}{\sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Bài 36. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x :

a) $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x$

b) $B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 2\cos^4 x - (1 - \cos^2 x)^2 + (1 - \cos^2 x)\cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^4 x - (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) + \cos^2 x - \cos^4 x + 3 - 3\cos^2 x \\ &= 2 \text{ (không phụ thuộc } x\text{)}. \end{aligned}$$

b) Điều kiện $\sin x \cdot \cos x \neq 0, \tan x \neq 1$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\frac{1}{\tan x} + 1}{\frac{1}{\tan x} - 1} \\ &= \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \\ &= \frac{2 - (1 + \tan x)}{\tan x - 1} = \frac{1 - \tan x}{\tan x - 1} = -1. \end{aligned}$$

Bài 37. Chứng minh $A = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$

Lời giải. Ta có:

$$\sin \frac{7\pi}{16} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \right) = \cos \frac{\pi}{16}$$

$$\sin \frac{5\pi}{16} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16} \right) = \cos \frac{3\pi}{16}$$

Mặt khác: $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$.

Do đó:

$$\begin{aligned} A &= \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} \\ &= \left(\sin^4 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \frac{\pi}{16} \right) + \left(\sin^4 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{3\pi}{16} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) \left(\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Bài 38. Chứng minh: $16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = 1$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ) \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (8 \sin 20^\circ) \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cdot \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} \cdot 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} \sin 80^\circ = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1 \end{aligned}$$

Bài 39. Chứng minh: $\cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) = \frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} &\cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) + \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right) \right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos 2x + 2 \cos 2x \cdot \cos \frac{4\pi}{3} \right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2x) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài 40. Chứng minh: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x} = \cot x - \cot 16x$.

Lời giải. Ta có: $\cot a - \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b \cos a - \sin a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$

Do đó: $\cot x - \cot 2x = \frac{\sin(2x-x)}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$

Tương tự:

$$\cot 2x - \cot 4x = \frac{1}{\sin 4x}$$

$$\cot 4x - \cot 8x = \frac{1}{\sin 8x}$$

$$\cot 8x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 16x}$$

Cộng về theo về các đẳng thức trên ta được:

$$\cot x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x}.$$

Bài 41. Chứng minh: $8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ = 1$

Lời giải. Ta có: $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2 \cos^2 36^\circ - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2(1 - 2 \sin^2 18^\circ)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2(1 - 4 \sin^2 18^\circ + 4 \sin^4 18^\circ) - 1$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^4 18^\circ - 8 \sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ - 1 = 0 \text{ (do } 0 < \sin 18^\circ < 1).$$

Bài 42. Chứng minh: $\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \cos^3 2x$.

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} & \sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x \\ &= \sin 3x \left(\frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \right) + \cos 3x \left(\frac{3 \cos x + \cos 3x}{4} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4}(\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x) + \frac{1}{4}(\cos^2 3x - \sin^2 3x)$$

$$= \frac{3}{4} \cos(3x - x) + \frac{1}{4} \cos 6x$$

$$= \frac{1}{4}(3 \cos 2x + \cos(3 \cdot 2x))$$

$$= \frac{1}{4}(3 \cos 2x + 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x)$$

$$= \cos^3 2x.$$

Bài 43. Tính $P = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Lời giải. Ta có:

$$P = \frac{1}{2}(1 - \cos 100^\circ) + \frac{1}{2}(1 - \cos 140^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos 100^\circ + \cos 140^\circ) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ \right)$$

$$= 1 - (\cos 120^\circ \cos 20^\circ) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ$$

$$= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{5}{4}.$$

Bài 44. Tính: $P = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ \cdot \cos 21^\circ \cdot \cos 24^\circ$

Lời giải. Ta có:

$$\cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4 \cos 15^\circ (\cos 21^\circ \cos 24^\circ)$$

$$= 2 \cos 15^\circ \cos 3^\circ - 2 \cos 15^\circ (\cos 45^\circ + \cos 3^\circ)$$

$$= 2 \cos 15^\circ \cos 3^\circ - 2 \cos 15^\circ \cos 45^\circ - 2 \cos 15^\circ \cos 3^\circ$$

$$= -2 \cos 15^\circ \cos 45^\circ$$

$$= -(\cos 60^\circ + \cos 30^\circ)$$

$$= -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

Bài 45. Cho $\triangle ABC$ tùy ý với ba góc đều là nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

Lời giải. Ta có: $A + B = \pi - C$

Nên: $\tan(A + B) = -\tan C$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

Vậy $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $\tan A, \tan B, \tan C$ ta được:

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt[3]{P}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Do đó: } \text{Min}P = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

Bài 46. Chứng minh: $8 + 4 \tan \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} = \cot \frac{\pi}{32}$.

Lời giải. Ta có:

$$\cot a - \tan a = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a} = \frac{\cos 2a}{\frac{1}{2} \sin 2a} = 2 \cot 2a.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} & \cot \frac{\pi}{32} - \tan \frac{\pi}{32} - 2 \tan \frac{\pi}{16} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 2 \cot \frac{\pi}{16} - 2 \tan \frac{\pi}{16} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 4 \cot \frac{\pi}{8} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 8 \cot \frac{\pi}{4} = 8 \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Bài 47. Cho $\cos x = \frac{3}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\sin y = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < y < \pi$. Hãy tính

$$\cos 2x, \sin 2x, \sin 2y, \cos 2y, \cos(x+y), \sin(x-y).$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \frac{\pi}{2} < y < \pi &\Rightarrow \cos y < 0 \Rightarrow \cos y = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8} \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ \cos 2y &= 2 \cos^2 y - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25} \\ \sin 2y &= 2 \sin y \cos y = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25} \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{12 + 3\sqrt{7}}{20} \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4\sqrt{7} + 9}{20}. \end{aligned}$$

Bài 48. Chứng minh rằng

$$a) \quad \sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1); \quad b) \quad \sin 4x = \sin x (8 \cos^3 x - 4 \cos x).$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\ &= \sin x (2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos^2 x = \sin x (4 \cos^2 x - 1).\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin x \cdot 4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) = \sin x (8 \cos^3 x - 4 \cos x).$$

Bài 49. Cho α là góc lượng giác tùy ý, $\alpha \neq \frac{3k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

$$\left(\cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3} \right) \tan \frac{2\alpha}{3} = 2.$$

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}\left(\cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3} \right) \tan \frac{2\alpha}{3} &= \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{3}}{\cos \frac{\alpha}{3}} \right) \cdot \tan \frac{2\alpha}{3} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{3} - \sin^2 \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\alpha}{3}} \tan \frac{2\alpha}{3} = \frac{\cos \frac{2\alpha}{3}}{\frac{1}{2} \sin \frac{2\alpha}{3}} \tan \frac{2\alpha}{3} = 2 \cot \frac{2\alpha}{3} \tan \frac{2\alpha}{3} = 2.\end{aligned}$$

Bài 50 (ĐHQG Hà Nội-1996). Chứng minh rằng $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$.

Lời giải. Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

Do đó

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x}{-\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x} = \frac{\frac{1}{4}(-1 + \cos 4x)}{\frac{3}{8}(-1 + \cos 4x)} = \frac{2}{3}.$$

Bài 51. Chứng minh rằng với mọi x, y, z ta có

$$\cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z - \cos^2(x + y + z) = 2 \cos(x + y) \sin(y + z) \sin(z + x).$$

Lời giải. Kí hiệu Q là vế trái. Ta có

$$\begin{aligned}Q &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} - \frac{1 + \cos 2z}{2} - \frac{1 + \cos 2(x + y + z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 2y) - \frac{1}{2} [\cos 2(x + y + z) + \cos 2z] \\ &= \cos(x + y) \cos(x - y) - \cos(x + y + 2z) \cos(x + y) \\ &= -\cos(x + y) [\cos(x + y + 2z) - \cos(x - y)] \\ &= 2 \cos(x + y) \sin(x + z) \sin(y + z) = \text{Vế phải}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 52 (ĐH Đà Nẵng-1998). Chứng minh rằng

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Lời giải. Kí hiệu T là vế trái. Nhân vế trái với $2 \sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ ta được

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot T &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - 2 \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} - \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Như thế $2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot T = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow T = \frac{1}{2}$.

Bài 53 (ĐHQG Hà Nội-1995). Chứng minh rằng:

$$\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ.$$

Lời giải. Kí hiệu T là vế trái của đẳng thức cần chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin(40^\circ + 50^\circ)}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sin 80^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \cos 10^\circ + 6}{3 \cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \left(\cos 10^\circ + \frac{6}{4\sqrt{3}} \right)}{3 \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \left(\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{3 \cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} (\cos 10^\circ + \cos 30^\circ)}{3 \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \cdot 2 \cos 20^\circ \cos 10^\circ}{3 \cos 10^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

§4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG VI

I. Đề số 1a

Câu 1 (1,0 điểm). Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của các cung có số đo lần lượt là $\frac{\pi}{15}$ và 36° .

Lời giải. Độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ là $l_1 = \frac{\pi}{15} \cdot 30 = 2\pi$ (cm).

Độ dài của cung có số đo 36° là $l_3 = \frac{\pi}{180} \cdot 36 \cdot 30 = 6\pi$ (cm).

Câu 2 (2,0 điểm). Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin(\alpha - \pi)$;

b) $\cos\left(\frac{17\pi}{2} + \alpha\right)$.

Lời giải.

a) $\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha < 0$ (vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$);

b) $\sin\left(\frac{17\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + 8\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha > 0$ (vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$).

Câu 3 (3,0 điểm). Tìm $\sin x, \cos x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x$ và $\tan 2x$ biết $\tan x = \frac{4\sqrt{11}}{7}$ và $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$.

Lời giải. $\tan x = \frac{4\sqrt{11}}{7} \Rightarrow \cot x = \frac{7\sqrt{11}}{44}$.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{225}{49} \Rightarrow \cos x = -\frac{7}{15} \quad (\text{vì } -\pi < x < -\frac{\pi}{2}).$$

$$\sin x = \tan x \cdot \cos x = -\frac{4\sqrt{11}}{15}.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{56\sqrt{11}}{225}.$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = -\frac{127}{225}.$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{56\sqrt{11}}{127}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2 x(1 + \tan x)}$;

b) $B = \frac{2 \sin(a+b)}{\cos(a+b) + \cos(a-b)}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sin^2 x(1 + \cot x) + \cos^2 x(1 + \tan x)} = \sqrt{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} \\ &= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|. \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{2 \sin a \cos b + 2 \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b + \cos a \cos b + \sin a \sin b} \\ &= \frac{2 \sin a \cos b + 2 \sin b \cos a}{2 \cos a \cos b} \\ &= \tan a + \tan b. \end{aligned}$$

Câu 5 (1,0 điểm). Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì tam giác ABC vuông.

Lời giải. Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos B + \cos C \\ \Leftrightarrow \sin A &= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ \Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} &= \cos \frac{B-C}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} = \frac{B-C}{2} \\ \frac{A}{2} = \frac{B+C}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=C \\ A+C=B. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó, tam giác ABC vuông tại B hoặc vuông tại C .

II. Đề số 1b

Câu 1 (1,0 điểm). a) Đổi số đo của góc 18° sang đơn vị radian.

b) Đổi số đo của cung $\frac{3\pi}{20}$ sang độ, phút, giây.

c) Cho đường tròn có bán kính 15cm. Tìm độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải.

a) $18^\circ = \frac{\pi}{10}$.

b) $\frac{3\pi}{20} = 27^\circ$.

c) Độ dài của cung có số đo $\frac{\pi}{6}$ là $l = \frac{\pi}{6} \cdot 15 = \frac{5\pi}{2}$ (cm).

Câu 2 (2,0 điểm). Cho $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau:

a) $\sin(\alpha - 12\pi)$;

b) $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$.

Lời giải.

a) $\sin(\alpha - 12\pi) = \sin \alpha < 0$;

b) $\tan\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha < 0$.

Câu 3 (3,0 điểm). a) Cho $\tan x = -3$. Tính $A = \frac{5 \sin x + 4 \cos x}{6 \sin x - 7 \cos x}$.

b) Tính $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ biết $\cos x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lời giải.

a) $A = \frac{5 \tan x + 4}{6 \tan x - 7} = \frac{5(-3) + 4}{6(-3) - 7} = \frac{11}{25}$.

b) Ta có $\cos x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{5}$ (do $\frac{\pi}{2} < x < \pi$).

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos x - \sin x \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$$

Câu 4 (3,0 điểm). Rút gọn các biểu thức sau:

a) $B = \cos\left(\frac{2017\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{2017\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.

b) $C = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$.

Lời giải.

a) $B = \sin a \cos b - \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin b \cos a$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} C &= \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\cos x + \sin x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1. \end{aligned}$$

Câu 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C thỏa mãn $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} 2 \sin A \sin B &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow 2 \sin A \sin B &= 1 - \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow \cos A \cos B + \sin A \sin B &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) &= 1 \\ \Leftrightarrow A - B &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= B. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

III. Đề số 2a

Bài 1 (2,0 điểm). Cho $\tan a = \frac{4}{3}$ ($\pi < a < \frac{3\pi}{2}$). Tính $\sin 2a; \tan\left(2a - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải. Ta có

• $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}$ (do $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$) (0.5đ)

• $\sin a = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}$ (0.5đ)

$$\bullet \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow \tan 2a = \frac{24}{7} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$\bullet \tan\left(2a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{31}{17} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 2 (2,0 điểm). Chứng minh đẳng thức: $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \tan^2 x} = \sin x + \cos x$.

Lời giải. VT = $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{(\sin x + \cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{\sin x - \cos x}{\sin x - \cos x} = VP \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 3 (2,0 điểm). Chứng minh biểu thức: $A = \sin^2 x + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ không phụ thuộc vào x .

Lời giải. $A = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2} \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) \right] \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\cos 2x + 2\cos\frac{2\pi}{3} \cos 2x \right) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= \frac{3}{2} \text{ (không phụ thuộc vào } x) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 4 (2,0 điểm). Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sin 3x + \sin 2x + \sin x}{2 + \cos x - 2\sin^2 x}$.

Lời giải. $A = \frac{\sin 3x + \sin 2x + \sin x}{2 + \cos x - 2\sin^2 x}$
 $= \frac{2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x}{2(1 - \sin^2 x) + \cos x} \dots\dots\dots (0.75đ)$

$$= \frac{4\sin x \cdot \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x}{2\cos^2 x + \cos x} \dots\dots\dots (0.75đ)$$

$$= \frac{2\sin x \cdot \cos x(2\cos x + 1)}{\cos x(2\cos x + 1)} = 2\sin x \dots\dots\dots (0.5đ)$$

Bài 5 (2,0 điểm). Trong tam giác ABC , chứng minh rằng :
 $\sin^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 - 2\cos A \sin B \sin C$.

Lời giải. VT = $\sin^2 A + 1 + \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) \dots\dots\dots (0.5đ)$

$$= 2 - \cos^2 A - \cos A \cos(B - C) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= 2 - \cos A [\cos A + \cos(B - C)]$$

$$= 2 - 2\cos A \cos \frac{A+B-C}{2} \cos \frac{A-B+C}{2} \dots\dots\dots (0.5đ)$$

$$= 2 - 2\cos A \sin B \sin C = VP \text{ (do } A+B+C = \pi) \dots\dots\dots (0.5đ)$$

IV. Đề số 2b

Bài 1 (2,0 điểm). Cho $\tan a = \frac{3}{4}$; $\left(\pi < a < \frac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\sin 2a$; $\tan\left(2a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải. Ta có

• $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \tan^2 a = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos a = \frac{4}{5}$ (do $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$) (0.5đ)

• $\sin a = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}$ (0.5đ)

• $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow \tan 2a = \frac{24}{7}$ (0.5đ)

• $\tan\left(2a + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{31}{17}$ (0.5đ)

Bài 2 (2,0 điểm). Chứng minh đẳng thức: $\frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin x + \cos x}{1 - \cot^2 x} = \sin x + \cos x$.

Lời giải. VT = $\frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \frac{(\sin x + \cos x) \sin^2 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ (0.5đ)

= $\frac{\cos^2 x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x}$ (0.5đ)

= $\frac{\cos^2 x \sin^2 x}{\cos x - \sin x}$ (0.5đ)

= $\sin x + \cos x = VP$ (0.5đ)

Bài 3 (2,0 điểm). Chứng minh biểu thức: $A = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ không phụ thuộc vào x.

Lời giải. $A = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2}$ (0.5đ)

= $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) \right]$ (0.5đ)

= $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos 2x + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos 2x \right)$ (0.5đ)

= $\frac{3}{2}$ (không phụ thuộc vào biến x) (0.5đ)

Bài 4 (2,0 điểm). Rút gọn biểu thức : $B = \frac{\sin 3a - \sin 2a + \sin a}{2 - \cos a - 2\sin^2 a}$

Lời giải. $B = \frac{\sin 3a - \sin 2a + \sin a}{2 - \cos a - 2\sin^2 a}$ (0.75đ)

= $\frac{2 \sin 2a \cdot \cos a - \sin 2a}{2(1 - \sin^2 a) - \cos a}$ (0.75đ)

= $\frac{4 \sin a \cdot \cos^2 a - 2 \sin a \cdot \cos a}{2 \cos^2 a - \cos a}$ (0.75đ)

= $\frac{2 \sin a \cdot \cos a (2 \cos a - 1)}{\cos a (2 \cos a - 1)} = 2 \sin a$ (0.5đ)

Bài 5 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$.

Lời giải. VT = $2 \sin(A + B) \sin(A - B) + 2 \sin C \cos C$ (0.5đ)

= $2 \sin C \cos(A - B) - 2 \sin C \cos(A + B)$ (do $A + B + C = \pi$) (0.5đ)

= $2 \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ (0.5đ)

= $4 \sin A \sin B \sin C = VP$ (0.5đ)

Bài 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 9}{x}$

Lời giải. Ta có: $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 9}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{9}{x} = x + 3 + \frac{9}{x}$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương x và $\frac{9}{x}$

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{9}{x} + 3 \geq 2 \cdot 3 + 3$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{x}{9}$$

Vậy $\min y = 9$. Dấu “ m ” xảy ra khi $x = \frac{9}{x} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(n) \\ x = -3(l) \end{cases}$

V. ĐỀ SỐ 3a

Bài 1 (1,0 điểm). Thực hiện đổi đơn vị đo góc.

a) Đổi số đo góc 50° sang radian.

b) Đổi số đo góc $\frac{\pi}{36}$ radian sang độ.

Lời giải.

a) Ta có $50^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$ rad.

b) Ta có $\frac{\pi}{36}$ rad = $\frac{\pi}{36} \cdot \frac{180}{\pi} = 5^\circ$

Bài 2 (3,0 điểm). Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

a) Tính các giá trị lượng giác của góc α .

b) Tính $\cos(25\pi - \alpha)$ và $\cot\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$

Lời giải.

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$, do đó: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - (\sin \alpha)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -2\sqrt{2}.$$

b) Ta có:

$$\cos(25\pi - \alpha) = \cos(24\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bài 3 (3,0 điểm). Không sử dụng máy tính, hãy tính:

a) $\sin 2025^\circ$.

$$\text{b) } \cos \frac{11\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24}.$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \sin 2025^\circ = \sin(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 45^\circ) = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } \cos \frac{11\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{11\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) + \cos \left(\frac{11\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\sqrt{2}-1}{4} \end{aligned}$$

Bài 4 (2,0 điểm). Tính giá trị các biểu thức $P = \frac{3 \sin a - 5 \cos a}{\sin^3 a + \sin a \cos^2 a + 3 \cos^3 a}$, biết $\cos a = \frac{2}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < a < 0$.

Lời giải. Ta có: $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{9}{4} \Rightarrow \tan^2 a = \frac{5}{4}$.

Vì $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ nên $\tan a < 0$, do đó $\tan a = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó:

$$\begin{aligned} P &= \frac{3 \sin a - 5 \cos a}{\sin^3 a + \sin a \cos^2 a + 3 \cos^3 a} = \frac{\cos a (3 \tan a - 5)}{\cos^3 a (\tan^3 a + \tan a + 3)} \\ &= \frac{(1 + \tan^2 a) (3 \tan a - 5)}{(\tan^3 a + \tan a + 3)} \\ &= \frac{\left(1 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \left(3 \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) - 5 \right)}{\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^3 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \right) + 3} = \frac{125 + 54\sqrt{5}}{19} \end{aligned}$$

Bài 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC bất kì với ba góc ở đỉnh là A, B, C . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{3} \cos B + 3(\cos A + \cos C)$$

Lời giải. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3} \cos B + 3(\cos A + \cos C) = \sqrt{3} \cos B + 3 \cdot 2 \cos \left(\frac{A+C}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} \cos B + 6 \sin \left(\frac{B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-C}{2} \right) \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} P &\leq \sqrt{3} \cos B + 6 \sin \frac{B}{2} = \sqrt{3} \left(1 - 2 \sin^2 \frac{B}{2} \right) + 6 \sin \frac{B}{2} \\ &= -2\sqrt{3} \sin^2 \frac{B}{2} + 6 \sin \frac{B}{2} + \sqrt{3} \\ &= -2\sqrt{3} \left(\sin \frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \leq \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \cos \frac{A-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=C \\ \frac{B}{2} = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=C=30^\circ \\ B=120^\circ \end{cases}.$$

Như vậy, giá trị lớn nhất của P là $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ khi tam giác ABC cân tại B và góc $B = 120^\circ$.

VI. Đề số 3b**Bài 1 (1,0 điểm).** Thực hiện đổi đơn vị đo góc.

- a) Đổi số đo góc 80° sang radian.
 b) Đổi số đo góc $\frac{\pi}{18}$ radian sang độ.

Lời giải.

a) Ta có $80^\circ = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{9}$ rad.

b) Ta có $\frac{\pi}{18}$ rad = $\frac{\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi} = 10^\circ$

Bài 2 (3,0 điểm). Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

- a) Tính các giá trị lượng giác của góc α .
 b) Tính $\cos\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right)$ và $\tan(37\pi + \alpha)$

Lời giải.

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó: $\sin \alpha = \sqrt{1 - (\cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

b) Ta có:

$$\cos\left(\frac{25\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(12\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\tan(37\pi + \alpha) = \tan(36\pi + \pi + \alpha) = \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bài 3 (3,0 điểm). Không sử dụng máy tính, hãy tính:

- a) $\cos 2025^\circ$.
 b) $\sin \frac{11\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$.

Lời giải.

a) Ta có $\cos 2025^\circ = \cos(5 \cdot 360^\circ + 180^\circ + 45^\circ) = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có $\sin \frac{11\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24} = -\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{24} + \frac{5\pi}{24}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{24} - \frac{5\pi}{24}\right) \right] = -\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] =$
 $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$.

Bài 4 (2,0 điểm). Cho góc α thỏa mãn: $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$. Tính $P = 2 \tan \alpha - \cot \alpha$.

Lời giải. Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, nên ta có hệ:
$$\begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

Đặt $a = \sin \alpha$, $b = \cos \alpha$, vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $-1 < a < 0$, $-1 < b < 0$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 1 \\ (2b + 1)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b + 1 \\ 5b^2 + 4b = 0 \end{cases}$$

Suy ra $a = -\frac{3}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$, hay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Từ đó: $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\cot \alpha = \frac{4}{3}$. Do đó: $P = 2 \frac{3}{4} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$.

Bài 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn hệ thức:

$$2 \cos A \sin B \sin C + \sqrt{3} (\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

Hỏi tam giác ABC có đặc điểm gì?

Lời giải. Ta có: $2 \cos A \sin B \sin C = \cos A (\cos (B - C) - \cos (B + C))$
 $= -\cos (B + C) \cos (B - C) + \cos^2 A = -\frac{1}{2} (\cos 2B + \cos 2C) + \cos^2 A$
 $= -\frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 B + 1 - 2 \sin^2 C) + 1 - \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$.

Do đó: $2 \cos A \sin B \sin C + \sqrt{3} (\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A + \sqrt{3} (\sin A + \cos B + \cos C) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2 - (\cos^2 B - \sqrt{3} \cos B) - (\cos^2 C - \sqrt{3} \cos C) - (\sin^2 B - \sqrt{3} \sin B) = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\sin A - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = C = 30^\circ \\ A = 120^\circ \end{cases}$$

Vậy, tam giác ABC cân đỉnh A và góc $A = 120^\circ$.

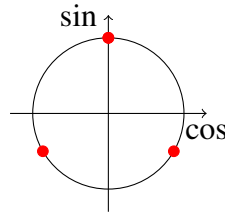
VII. Đề số 4a

Câu 1 (1,0 điểm). a) Trên đường tròn lượng giác có gốc A , hãy biểu diễn các điểm M thỏa mãn cung AM có số đo $\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

b) Xác định dấu của biểu thức $P = \cos \frac{4\pi}{5} \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \tan \frac{4\pi}{3} \cot \frac{9\pi}{5}$.

Lời giải.

a) Các điểm M được biểu diễn trên đường tròn lượng giác như sau:



$$\text{b) Vì } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi \\ -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{5} < 0 \\ \pi < \frac{4\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < \frac{9\pi}{5} < 2\pi \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \cos \frac{4\pi}{5} < 0 \\ \sin \left(-\frac{\pi}{5}\right) < 0 \\ \tan \frac{4\pi}{3} > 0 \\ \cot \frac{9\pi}{5} < 0 \end{cases} \Rightarrow P < 0$$

Câu 2 (4,0 điểm). a) Tính giá trị $\cot 135^\circ$ (không sử dụng máy tính).

b) Tính các giá trị lượng giác khác của α biết $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$).

c) Cho $\tan \alpha = -2$, tính giá trị của biểu thức $A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$.

Lời giải.

a) $\cot 135^\circ = \cot(180^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$.

b) Vì $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ nên $\sin \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$.

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{13^2}{5^2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{5}{12}, \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{c) } A = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha} = \frac{2 \tan \alpha + 1}{1 - 3 \tan \alpha} = -\frac{3}{7}.$$

Câu 3 (4,0 điểm). a) Chứng minh các biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ độc lập với x .

b) Rút gọn biểu thức $B = \sin(x + y) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y)$.

c) Chứng minh rằng $\cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x$.

Lời giải.

$$\text{a) } A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)^2}{4 \sin^2 x \cos^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\cos^2 2x - 1}{\sin^2 2x} = -1.$$

$$\text{b) } B = \sin(x + y) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(-y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x - \cos x \sin y = \sin x \cos y.$$

$$\text{c) Ta có } \cos^4 x + \sin^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = \cos 4x.$$

Câu 4 (1,0 điểm). Rút gọn biểu thức $A = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2 \sin^6 x) + 6 \sin^4 x \\ &= 3 \sin^6 x (\sin^2 x - 1) - 3 \cos^6 x (\cos^2 x - 1) + (\cos^6 x + \sin^6 x) + 6 \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \\ &= -3 \sin^6 x \cos^2 x + 3 \cos^6 x \sin^2 x + (\cos^4 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) + 6 \sin^4 x \cos^2 x \\ &= 3 \sin^4 x \cos^2 x (1 - \sin^2 x) + 3 \cos^6 x \sin^2 x + 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^4 x \cos^2 x \\ &= 3 \sin^4 x \cos^4 x + 3 \cos^6 x \sin^2 x + 1 - 3 \sin^2 x \cos^4 x \\ &= -3 \sin^2 x \cos^4 x (1 - \sin^2 x) + 3 \cos^6 x \sin^2 x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

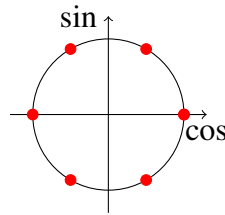
VIII. Đề số 4b

Câu 1 (1,0 điểm). a) Trên đường tròn lượng giác có gốc A , hãy biểu diễn điểm M thỏa mãn cung AM có số đo $k\frac{\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

b) Xác định dấu của biểu thức $P = \cot \frac{3\pi}{5} \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Lời giải.

a) Các điểm M được biểu diễn trên đường tròn lượng giác như sau:



$$b) \forall i \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \pi \\ -\pi < -\frac{2\pi}{3} < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \cot \frac{3\pi}{5} < 0 \\ \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow P > 0$$

Câu 2 (4,0 điểm). a) Tính giá trị $\tan 150^\circ$ (không sử dụng máy tính).

b) Tính các giá trị lượng giác khác của góc 15° biết $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

c) Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính giá trị của $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ theo m .

Lời giải.

$$a) \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$b) \tan 15^\circ = \frac{1}{\cot 15^\circ} = 2 - \sqrt{3}. \text{ Vì } 0^\circ < 15^\circ < 90^\circ \text{ nên } \sin 15^\circ > 0, \cos 15^\circ > 0.$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 15^\circ}} = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \Rightarrow \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \cdot \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

$$c) \sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2m^2 - m^4}{2}.$$

Câu 3 (4,0 điểm). a) Chứng minh các biểu thức $A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$ độc lập với x .

b) Rút gọn biểu thức $B = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin(x - y)$.

c) Chứng minh rằng $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

Lời giải.

$$a) A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x] - 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] = -1.$$

$$b) B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - \sin(x - y) = \sin x \cos y - (\sin x \cos y - \sin y \cos x) = \sin y \cos x.$$

$$c) \cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 = 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = VP.$$

Câu 4 (1,0 điểm). Chứng minh biểu thức $A = \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ không phụ thuộc vào x .

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin^4\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} - \left(-x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4 x + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 1 - 2 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 - \frac{\sin^2 2x}{2} - \frac{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = 2 - \frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

IX. Đề số 5a

Bài 1 (1,0 điểm).

- a) Trên đường tròn có bán kính bằng 21cm. Tìm độ dài của cung có số đo bằng 15° .
 b) Xác định dấu của biểu thức sau $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-89^\circ)$

Lời giải.

a) Số đo bằng cung 15° chuyển sang rad bằng $15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$.

Vậy độ dài của cung là: $l = R \cdot \alpha = 21 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{4}$ cm.

b) Ta có $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-89^\circ) = \sin 50^\circ \cdot \cos 89^\circ > 0$.

Bài 2 (2,0 điểm). Cho $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tìm các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải. Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha < 0$.

Ta có: $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}, \cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

Bài 3 (2,0 điểm). Tính $A = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha > 0$.

Ta có: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{4}{3}$.

Vậy $A = \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} - \frac{4}{3}} = -\frac{25}{7}$.

Bài 4 (2,0 điểm). Tính giá trị đúng của biểu thức $A = \frac{5 \sin^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2}{1 + \sin^2 \alpha}$ khi $\tan \alpha = \sqrt{2013}$.

Lời giải. Với $\tan \alpha = \sqrt{2013} \Rightarrow \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{2014} = \cos^2 \alpha$.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

$$\text{Vậy } A = \frac{5 \sin^4 \alpha - 3 \sin^2 \alpha - 2}{1 + \sin^2 \alpha} = \frac{5(1 - \cos^2 \alpha)^2 - 3(1 - \cos^2 \alpha) - 2}{2 - \cos^2 \alpha} = -\frac{14093}{8110378}.$$

Bài 5 (3,0 điểm). Cho ΔABC thỏa mãn $\sin \frac{A}{2} \cdot \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^3 \frac{A}{2}$.

Chứng minh rằng ΔABC cân.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin \frac{A}{2} \cdot \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos^3 \frac{A}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^3 \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos^3 \frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2}\right) = \tan \frac{B}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } C.$$

X. Đề số 5b

Bài 1 (1,0 điểm).

- Trên đường tròn có bán kính bằng 20cm. Tìm độ dài của cung có số đo bằng 15° .
- Xác định dấu của biểu thức sau $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-30^\circ)$

Lời giải.

- Số đo bằng cung 15° chuyển sang rad bằng $15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12}$.

$$\text{Vậy độ dài của cung là: } l = R \cdot \alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{3} \text{ cm.}$$

- Ta có $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-30^\circ) = \sin 50^\circ \cdot \cos 30^\circ > 0$.

Bài 2 (2,0 điểm). Chứng minh rằng $3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1$ với mọi góc α .

Lời giải. Ta có: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$.

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Bài 3 (2,0 điểm). Đưa tổng sau về dạng tích $S = \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$.

Lời giải. Ta có: $S = \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2}$

$$= \frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{\cos 6x + \cos 2x}{2}$$

$$= \cos^2 2x - \cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) = 2 \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin x.$$

Bài 4 (2,0 điểm). Rút gọn $A = \sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ + \alpha) - \sin 15^\circ \cdot \cos(15^\circ + 2\alpha)$?

Lời giải. Ta có: $\sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 a \cdot \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a \cdot \sin^2 b$

$$= \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a$$

$$= (\sin a \cos b + \sin b \cos a)(\sin a \cos b - \sin b \cos a) = \sin(a + b) \cdot \sin(a - b).$$

$$\text{Tức là } \sin^2 a - \sin^2 b = \sin(a + b) \cdot \sin(a - b).$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \sin^2(45^\circ + \alpha) - \sin^2(30^\circ + \alpha) &= \sin[(45^\circ + \alpha) + (30^\circ + \alpha)] \cdot \sin[(45^\circ + \alpha) - (30^\circ + \alpha)] \\ &= \sin 75^\circ \cdot \sin(15^\circ + 2\alpha) = \cos 15^\circ \cdot \sin(15^\circ + 2\alpha). \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó ta có } A = \cos 15^\circ \cdot \sin(15^\circ + 2\alpha) - \sin 15^\circ \cdot \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin(15^\circ + 2\alpha - 15^\circ) = \sin 2\alpha.$$

Bài 5 (3,0 điểm). Chứng minh rằng ΔABC vuông $\Leftrightarrow \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$.

Lời giải. Ta có:

$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + 2 \cos^2 C = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos C [-\cos(A-B) + \cos C] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \\ \cos B = 0 \\ \cos C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông.}$$