

Trao đổi kinh nghiệm dạy học theo định hướng tiếp cận năng lực người học

Bàn về một cách tiếp cận khác cho bài toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Ths. HOÀNG MINH QUÂN

GV Trường THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Nội

Trong chương trình toán THPT, các bài toán về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng tuy không mới. Song, nó vẫn mang tính thời sự trong các bài kiểm tra định kì, các kì thi học sinh giỏi, kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông hằng năm. Bài viết sau đây khai thác một hướng tiếp cận khác **cho bài toán tính góc giữa đường thẳng với mặt phẳng**

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Định nghĩa

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) . Góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) .

1.2. Các xác định góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α)

➤ Cách 1:

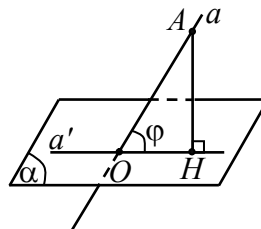
Bước 1. Tìm $O = a \cap (\alpha)$.

Bước 2. Lấy $A \in a$ và dựng $AH \perp (\alpha)$ tại H .

Khi đó $(a, (\alpha)) = (a, a') = \widehat{AOH}$.

Bước 3. Tính số đo của góc $\widehat{AOH}$

➤ **Chú ý:** $0^\circ \leq (a, (\alpha)) \leq 90^\circ$



➤ **Cách 2:** Tính gián tiếp theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chọn một đường thẳng $d \parallel a$ mà góc giữa d và (α) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (d, (\alpha))$

Hướng 2: Chọn một mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$ mà góc giữa a và (β) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (a, (\beta))$

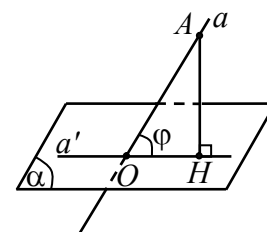
Tuy nhiên việc xác định hình chiếu của một điểm lên mặt phẳng không phải lúc nào cũng thuận lợi. Chính vì vậy, việc đưa ra một cách tiếp cận khác là sử dụng khoảng cách để tính góc giữa đường thẳng với mặt phẳng nhằm khắc phục khó khăn đó.

1.3. Định hướng tiếp cận

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) . Để tính góc φ giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) , ta tiếp cận thông qua ý tưởng đơn giản khác như sau :

Bước 1: Tìm $O = a \cap (\alpha)$.

Bước 2: Tính $\sin \varphi = \frac{d(A, (\alpha))}{OA}$



Cách tiếp cận này thích hợp cho học sinh nắm chắc việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Sau đây chúng tôi đưa ra một số ví dụ minh họa với lời giải theo hướng tiếp cận sử dụng khoảng cách để tính góc giữa đường thẳng với mặt phẳng

2. Ví dụ minh họa

2.1. Áp dụng cho các bài toán khối chóp.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD , I là trung điểm của SB . Biết độ dài các đoạn $SA = a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AD = \frac{3a}{2}$. Góc giữa đường thẳng IG và mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}$.

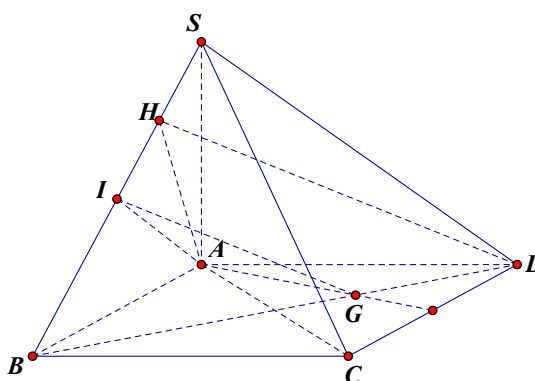
B. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

C. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{16}$.

D. $\arcsin \frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn A



Có $SB = 2a$ nên tam giác SAI đều cạnh a .

Gọi H là trung điểm của SI thì $\frac{BI}{BH} = \frac{BG}{BD}$ nên $IG \parallel HD$, hay $(IG, (SCD)) = (HD, (SCD))$

Có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = \frac{3a}{2}$ và tam giác AHD vuông tại A , suy ra $HD = a\sqrt{3}$

Vì $HS = \frac{1}{4}BS$ nên $d(H, (SCD)) = \frac{1}{4}d(B, (SCD)) = \frac{1}{4}d(A, (SCD)) = \frac{1}{4}d$

$$\text{Mà } \frac{1}{d^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{13}{9a^2} \Rightarrow d = \frac{3a}{\sqrt{13}} \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{3a}{4\sqrt{13}}$$

$$\text{Suy ra } \sin(HD, (SCD)) = \frac{d(H, (SCD))}{HD} = \frac{3a}{4\sqrt{13} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}.$$

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SD và BO . Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SCD) thì giá trị $\sin \alpha$ bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{7}$.

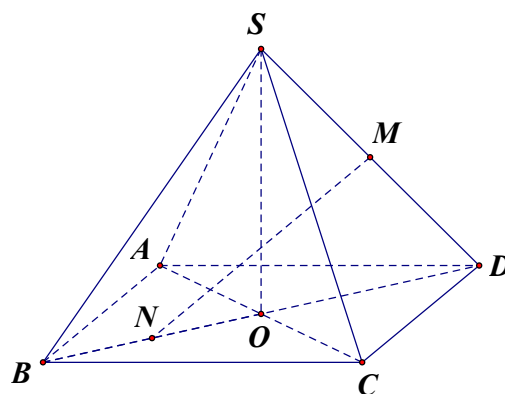
B. $\frac{2\sqrt{3}}{7}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\triangle SBD$ là tam giác đều nên $\widehat{SDB} = 60^\circ$ và $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$$\text{Suy ra } MN^2 = MD^2 + ND^2 - 2MD \cdot ND \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2} + \frac{9a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7a^2}{8}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

$$\text{Mặt khác } d(N, (SCD)) = \frac{3}{2} d(O, (SCD))$$

$$\text{Mà } \frac{1}{d^2(O, (SCD))} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{3a^2} = \frac{14}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d^2(O, (SCD)) = \frac{3a^2}{14} \Rightarrow d(O, (SCD)) = \frac{a\sqrt{42}}{14} \Rightarrow d(N, (SCD)) = \frac{3a\sqrt{42}}{28}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{d(N, (SCD))}{MN} = \frac{3a\sqrt{42}}{28} \cdot \frac{4}{a\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{3}}{7}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $SA = a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi β là góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) . Khi đó $\sin \beta$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

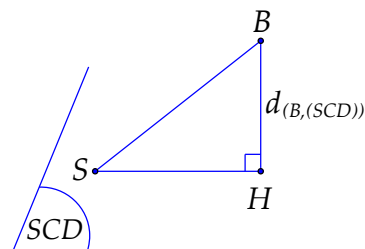
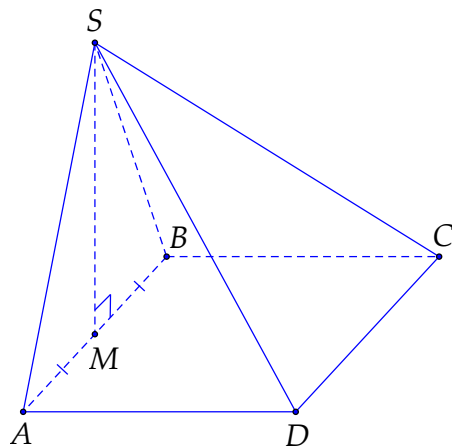
D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm của AB . Vì tam giác SAB là tam giác đều nên $SM \perp AB$.

Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SM \perp (ABCD). \\ SM \perp AB, SM \subset (SAB) \end{cases}$$



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SCD) . Suy ra $BH \perp (SCD)$.
Suy ra HS là hình chiếu vuông góc của BS lên mặt phẳng (SCD) , do đó:

$$(\widehat{SB, (SCD)}) = (\widehat{SB, SH}) = \widehat{BSH}.$$

Ta có: $\sin \beta = \sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d_{(B, (SCD))}}{SB}.$

Do $BM \parallel (SCD)$

$$\Rightarrow d_{(B, (SCD))} = d_{(M, (SCD))} = \frac{SM \cdot d_{(M, CD)}}{\sqrt{SM^2 + d_{(M, CD)}^2}} = \frac{SM \cdot d_{(B, CD)}}{\sqrt{SM^2 + d_{(B, CD)}^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$$

Vậy $\sin \beta = \sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{d_{(B, (SCD))}}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{6}a}{4}}{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$

2.2. Áp dụng cho các bài toán khối lăng trụ.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa đường thẳng AD' và mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}.$

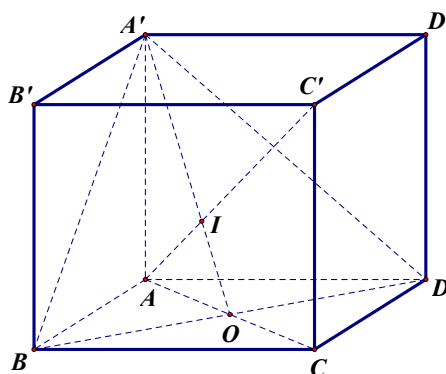
B. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$

C. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}.$

D. $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải

Chọn B



+ Do $AD' // BC'$ nên góc giữa đường thẳng AD' và mặt phẳng $(A'BD)$ bằng góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BD)$.

+ Do $AA'BD$ là tứ diện vuông nên $\frac{1}{d^2(A, (A'BD))} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{3}{a^2}$

$$\Rightarrow d(A, (A'BD)) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

+ Gọi α là góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BD)$.

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{d(C', (A'BD))}{BC'} = \frac{2d(A, (A'BD))}{BC'} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 5: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , $AA' = a\sqrt{3}$. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

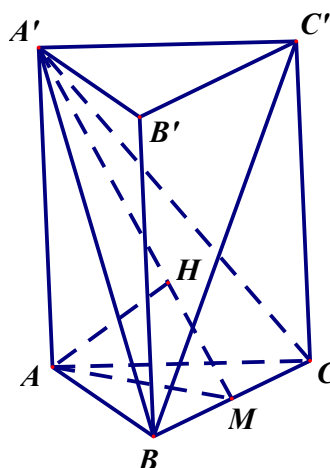
B. $\frac{\sqrt{5}}{10}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{65}}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'BC)$.

Ta có: $\sin \varphi = \frac{d(C', (A'BC))}{C'B} = \frac{d(A, (A'BC))}{C'B}$ (vì $AC' \cap (A'BC) = O$ với O là trung điểm AC').

Gọi M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của A lên $A'M$.

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (AA'M) \text{ hay } BC \perp AH.$$

Mặt khác $AH \perp A'M$ nên $AH \perp (A'BC)$ hay $d(A, (A'BC)) = AH$.

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AH = \frac{AA' \cdot AM}{\sqrt{AA'^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}; C'B = \sqrt{BB'^2 + B'C'^2} = 2a.$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $AD = 2$, $AA' = 3$. (α) là mặt phẳng đi động đi qua B và song song với $A'C'$. Gọi φ là góc giữa (α) với đường thẳng CD' . Giá trị lớn nhất của $\sin \varphi$ bằng

A. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

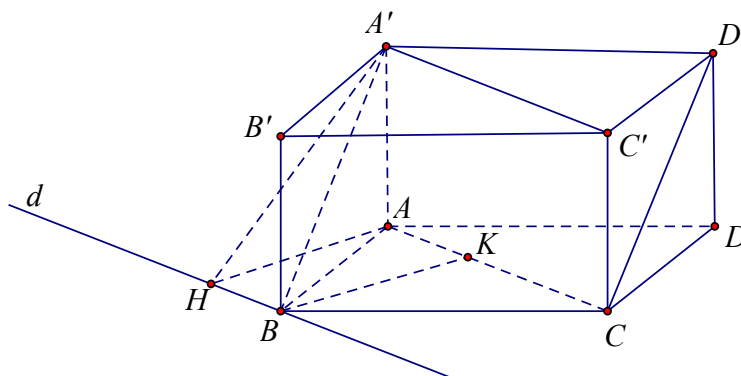
B. 1.

C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

D. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $CD' \parallel BA' \Rightarrow (\widehat{CD', (\alpha)}) = (\widehat{BA', (\alpha)})$.

Do $(\alpha) \parallel A'C'$ nên (α) chứa đường thẳng d qua B và song song với $A'C'$.

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{d_{(A'; (\alpha))}}{A'B} \leq \frac{d_{(A'; d)}}{A'B}.$$

$$A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = \sqrt{10}.$$

Dựng $A'H \perp d$ tại $H \Rightarrow A'H = d_{(A'; d)}$.

Ta có $\begin{cases} d \perp AA' \\ d \perp A'H \end{cases} \Rightarrow d \perp (AHA') \Rightarrow AH \perp d$.

Kẻ $BK \perp AC$ tại K

$$\Rightarrow AH = BK = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow A'H = \sqrt{AH^2 + AA'^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin \varphi \leq \frac{A'H}{A'B} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $(\alpha) \perp A'H$.

$$\text{Vậy } \max(\sin \varphi) = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

2.3. Bài tập tự luyện

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Cạnh bên $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Sin của góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{\sqrt{30}}{15}$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Tang góc tạo bởi đường thẳng DM với mặt phẳng (SAB) bằng?

A. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{26}}{13}$.

D. $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° , cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Gọi O là tâm của đáy, E là trung điểm cạnh AD . Gọi φ là góc giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SBE) . Biết $SO = \frac{a}{2}$ thì $\sin \varphi$ bằng

A. $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = 2a$, $BC = a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Giá trị $\sin$ của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Giá trị lớn nhất của góc tạo bởi BD' với mặt phẳng (BDC') bằng

A. $\arcsin \frac{1}{3}$. B. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{3}}$. D. $\arcsin \frac{1}{3\sqrt{2}}$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$; $AD = 2a$; I là trọng tâm tam giác $(A'C'D')$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng ID và mặt phẳng (ICB) , biết $A'B = a\sqrt{3}$. Giá trị của $\sin \varphi$ bằng

A. $\frac{9}{\sqrt{253}}$. B. $\frac{6}{11\sqrt{2}}$. C. $\frac{6}{\sqrt{253}}$. D. $\frac{\sqrt{23}}{11}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , $AB = 2a$ và $\widehat{ACB} = 120^\circ$. Biết $AA' = a$. Gọi I là trung điểm AB thì $\sin$ của góc giữa đường thẳng IA' và mặt phẳng $(C'AB)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Câu 9: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, gọi I là trung điểm $A'B'$. Gọi φ là góc tạo bởi AC' và (BIC') . Biết $AA' = a$; $AB = 2a$ thì giá trị $\cos \varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{2}{5}$

Câu 10: Cho lăng trụ tam giác ABC có $AB = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC và góc giữa AA' tạo với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . $\sin$ của góc tạo bởi AA' và mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{9}{5\sqrt{41}}$. B. $\frac{9}{4\sqrt{51}}$. C. $\frac{7}{4\sqrt{51}}$. D. $\frac{9}{7\sqrt{41}}$.