

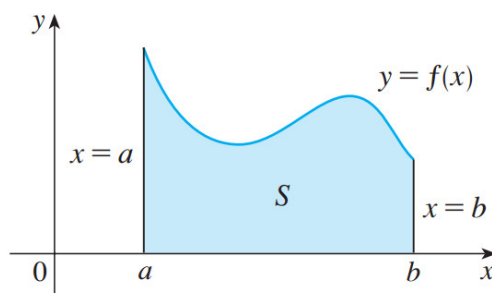
CHUYÊN ĐỀ

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TRONG BÀI TOÁN DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG VỚI DỮ KIẾN TOÁN THỰC TẾ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. **Định lí:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

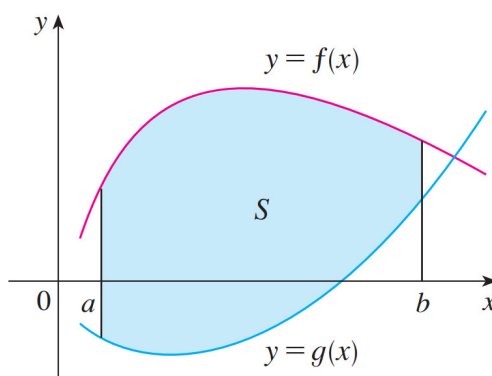
$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



2. **Bài toán 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$; trục hoành Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a; x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x)| dx.$$

3. **Bài toán 2.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x); y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a; x = b$ là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



 **Lưu ý:**

1) Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

✓ Giải phương trình $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$ ($x_1 < x_2 < \dots < x_n$).

$$\begin{aligned} \checkmark \text{ Tính } S &= \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + \dots + \int_{x_n}^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|. \end{aligned}$$

Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

2) Trong nhiều trường hợp, bài toán yêu cầu tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$; $y = g(x)$.

Khi đó, ta có công thức tính như sau $S = \int_{x_1}^{x_n} |f(x) - g(x)| dx$.

Trong đó x_1 và x_n tương ứng là nghiệm nhỏ nhất, lớn nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

B. BÀI TẬP

1. NHỮNG BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG ĐỒ THỊ HÀM PARABOL

Phương pháp

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ, xác định parabol.

Bước 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $y = f(x)$ và các đường được cho trong bài toán.

Bước 3. Tùy theo thực tế mỗi bài, tính diện tích theo yêu cầu.

Chú ý: Mấu chốt của vấn đề tính diện tích parabol nằm ở khâu chọn hệ trục tọa độ phù hợp. Nên chọn hệ trục sao cho đỉnh parabol luôn nằm trùng với gốc O hoặc nằm trên trục Oy . Khi đó hàm số parabol luôn có dạng $y = ax^2 + b$.

DẠNG 1

CÁC BÀI TOÁN TÍNH DIỆN TÍCH PARABOL ĐƠN THUẦN

Câu 1. Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hóa có dạng hình parabol. Người ta dự định lắp cửa kính cho vòm cửa này. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào biết rằng vòm cửa cao $8m$ và rộng $8m$.

Hướng dẫn giải

Định hướng: Ở bài toán này, bản chất chỉ là việc xác định được đồ thị hàm parabol thỏa mãn với vòm cửa, sau đó tính diện tích.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Vòm cửa là đồ thị của hàm số parabol có dạng:

$$y = ax^2 + b. \quad (P)$$

Theo đề ra:

$$(4;8) \in (P) \text{ nên } 8 = 16a + b. \quad (1)$$

$$(0;0) \in (P) \text{ nên } 0 = 0a + b. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra parabol có dạng $y = \frac{1}{2}x^2$.

Khi đó, vòm cửa được giới hạn bởi các đường

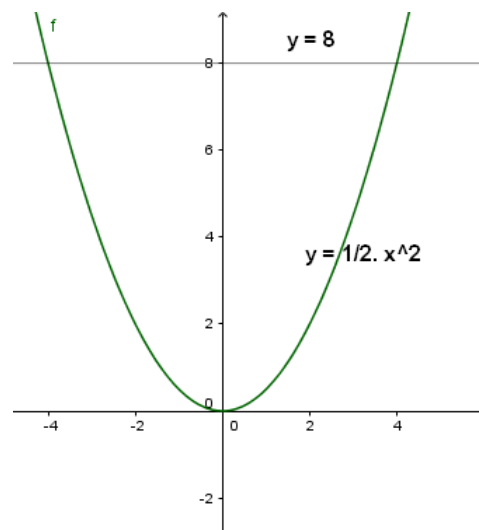
$$y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 8.$$

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{2}x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Diện tích vòm cửa là

$$S = \int_{-4}^4 \left(8 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \left(8x - \frac{1}{6}x^3 \right) \Big|_{-4}^4 = \frac{128}{3}.$$



Câu 2. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Tính số tiền bác Năm phải trả.

Hướng dẫn giải

Định hướng: Bài toán trên hoàn toàn tương tự ví dụ 1. Bản chất của bài toán là tính diện tích phần hình phẳng và đồ thị hàm số parabol.

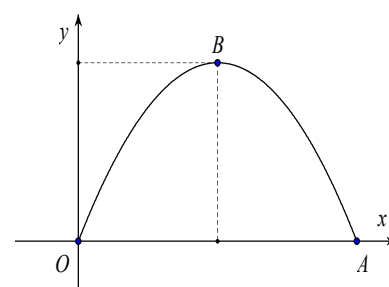
Cách 1:

• Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$

Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra $(P): y = -x^2 + 3x$



• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \frac{9}{2}$

• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ (đồng).

Cách 2:

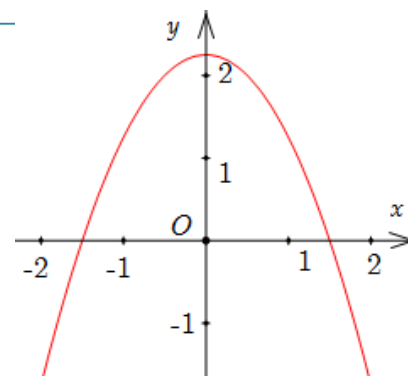
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Đỉnh $I(0; 2,25) \in Oy$, (P) đi qua $A(1,5; 0)$

Gọi phương trình của parabol là $(P): y = ax^2 + b$

Dễ dàng tìm được $y = -x^2 + 2,25$.

Từ đây ta tính diện tích hình phẳng như bình thường.



Bài tập tương tự

Câu 1. Một người làm một cái cổng cổ xưa có dạng Parabol như hình vẽ. Hãy tính diện tích của cái cổng?

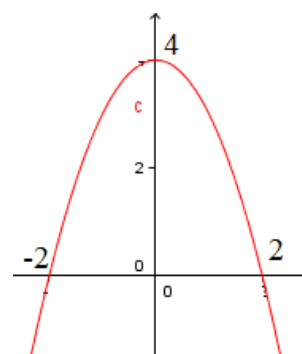
Hướng dẫn giải

Phương trình parabol (P) có đỉnh $I(0; 4)$ và qua điểm $(0; 2)$ là

$$y = -x^2 + 4$$

Diện tích cái cổng chính bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4 \\ y = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$



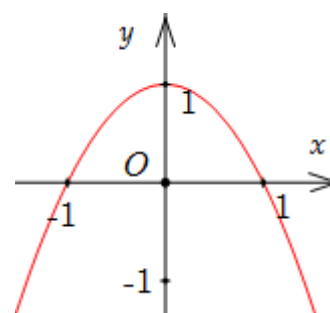
$$\text{Từ đó ta có } S = \int_{-2}^2 |-x^2 + 4| dx = \left| \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \right| = \frac{32}{3} (\text{đvdt})$$

Câu 2. Gọi S là diện tích Ban - Công của một ngôi nhà có hình dạng như hình vẽ (S được giới hạn bởi parabol (P) và trục Ox). Khi đó.

Lời giải

Tìm phương trình parabol (P) qua ba điểm: đỉnh $A(0; 1)$, $B(-1; 0)$

và $C(1; 0)$ giao điểm với trục Ox ta được $(P): y = -x^2 + 1$.



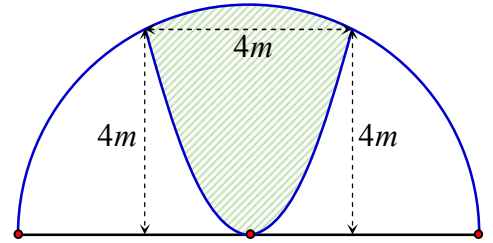
$$\text{Diện tích } S = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

DẠNG 2

CÁC BÀI TOÁN TÍNH DIỆN TÍCH XÁC ĐỊNH BỞI 2 HÀM SỐ

$$y = f(x); y = g(x)$$

- Câu 1.** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu), cách nhau một khoảng bằng 4 (m), phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ Nhật Bản là 100.000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cỏ Nhật Bản trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



Hướng dẫn giải

Định hướng: Bản chất của bài toán là tính diện tích phần không tô màu, (được giới hạn bởi nửa đường tròn, đồ thị hàm parabol). Ta chuyển bài toán về tính diện tích hình phẳng bởi hai đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ và trục Ox bằng việc chọn hệ trục tọa độ phù hợp.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình nửa đường tròn là

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - x^2} = \sqrt{20 - x^2}.$$

Phương trình parabol (P) có đỉnh là gốc O sẽ có dạng $y = ax^2$. Mặt khác (P) qua điểm $M(2; 4)$ do

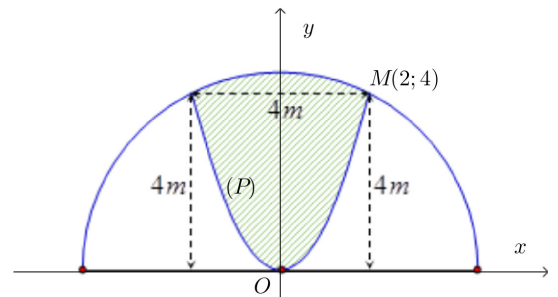
$$\text{đó: } 4 = a(-2)^2 \Rightarrow a = 1.$$

Phần diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và nửa đường tròn. (phần tô màu)

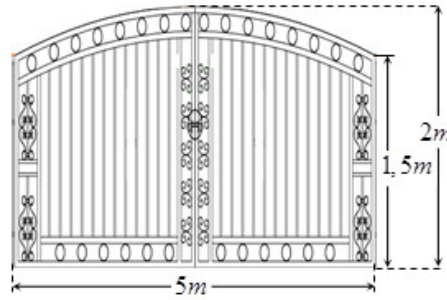
$$\text{Ta có công thức } S_1 = \int_{-2}^2 (\sqrt{20 - x^2} - x^2) dx \approx 11,94 m^2.$$

$$\text{Vậy phần diện tích trồng cỏ là } S_{\text{trồng cỏ}} = \frac{1}{2} S_{\text{hình tròn}} - S_1 \approx 19,47592654$$

$$\text{Vậy số tiền cần có là } S_{\text{trồng cỏ}} \times 100000 \approx 1.948.000 \text{ (đồng).đồng.}$$



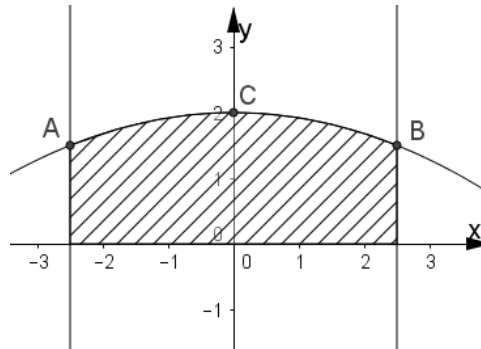
Câu 2. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá $1(m^2)$ của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (**làm tròn đến hàng nghìn**).



Hướng dẫn giải

Định hướng: Bài toán quy về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = f(x)$ hai đường thẳng $x = a$; $x = b$ và trục Ox .

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5)$, $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$.

Giả sử đường cong phía trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + b$, với $a; b; c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $B(2,5;1,5)$, $C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(2,5)^2 + b = 1,5 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 2 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

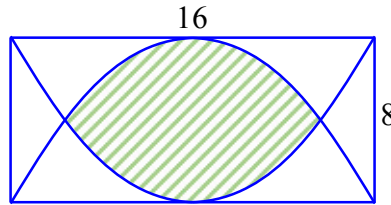
$y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$, $x = 2,5$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \left(-\frac{2}{25} \frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_{-2,5}^{2,5} = \frac{55}{6}.$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là

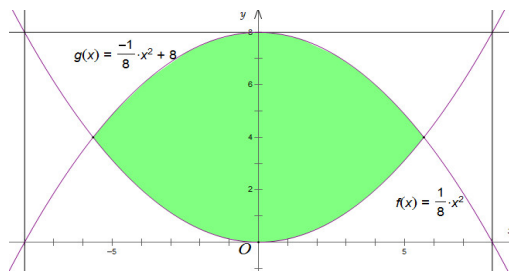
$$S \times 700000 = \frac{55}{6} \times 700000 \approx 6.417.000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 3. Một mảnh vườn toán học có dạng hình chữ nhật, chiều dài là 16m và chiều rộng là 8m. Các nhà Toán học dùng hai đường parabol, mỗi parabol có đỉnh là trung điểm của một cạnh dài và đi qua 2 mút của cạnh dài đối diện; phần mảnh vườn nằm ở miền trong của cả hai parabol (**phần gạch sọc như hình vẽ minh họa**) được trồng hoa Hồng. Biết chi phí để trồng hoa Hồng là 45.000 đồng/1m². Hỏi các nhà Toán học phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên phần mảnh vườn đó? (**Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn**).



Hướng dẫn giải

Định hướng: Bài toán quy về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Vì hai đồ thị hàm số trên đối xứng, nên ta cũng có thể chuyển bài toán về dạng tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = 4$. Lời giải dưới đây được trình bày theo cách thứ nhất.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Hàm số có đồ thị $y = f(x)$ có dạng $y = ax^2$.

Vì $O(0;0)$ và $M(8;8)$ thuộc (P) nên ta có: $y = \frac{1}{8}x^2$.

Tương tự ta tìm được đồ thị hàm số $y = g(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 8$.

Diện tích phần trồng hoa là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$.

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{8}x^2 = -\frac{1}{8}x^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{32}.$$

Diện tích phần trồng hoa là :

$$S = \int_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}} \left| -\frac{1}{8}x^2 + 8 - \frac{1}{8}x^2 \right| dx = \int_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}} \left| -\frac{1}{4}x^2 + 8 \right| dx$$

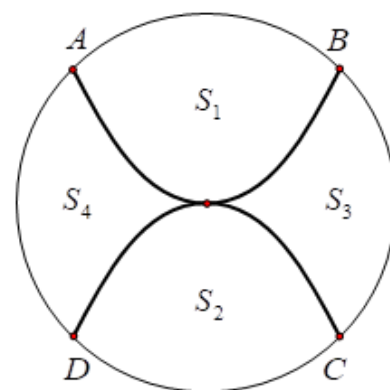
$$= \int_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}} \left(-\frac{1}{4}x^2 + 8 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{12} + 8x \right) \Big|_{-\sqrt{32}}^{\sqrt{32}} = \frac{96\sqrt{32} - (\sqrt{32})^3}{6} \quad (m^2).$$

Số tiền để trồng hoa là :

$$\frac{96\sqrt{32} - (\sqrt{32})^3}{6} \cdot 45000 \approx 2715290 \text{ (đồng)}.$$

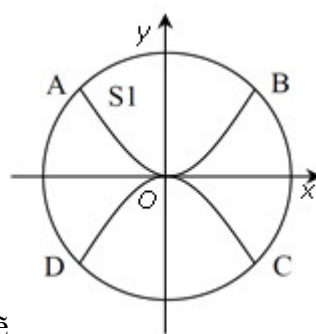
Bài tập tương tự.

Câu 1. Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O . Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần, bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O . Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng 4 m (như hình vẽ). Phần diện tích S_1, S_2 dùng để trồng hoa, phần diện tích S_3, S_4 dùng để trồng cỏ (Diện tích



làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai). Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng / m^2 , kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi nhà trường cần bao nhiêu tiền để trồng bồn hoa đó? (Số tiền làm tròn đến hàng chục nghìn)

Hướng dẫn giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Parabol có hàm số dạng $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $B(2;2)$ nên có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2$.

Đường tròn bồn hoa có tâm là gốc tọa độ và bán kính $OB = 2\sqrt{2}$ nên có phương trình là $x^2 + y^2 = 8$. Do ta chỉ xét nhánh trên của đường tròn nên ta chọn hàm số nhánh trên là $y = \sqrt{8 - x^2}$.

Vậy diện tích phần $S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx$

Do đó, diện tích trồng hoa sẽ là $S_1 + S_2 = 2 \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \approx 15,233...$

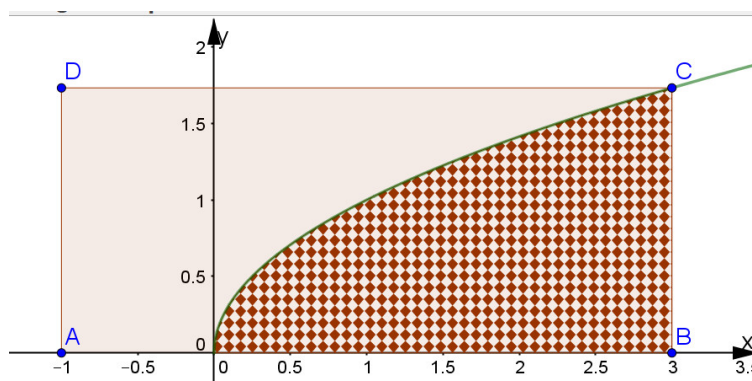
Vậy tổng số tiền để trồng bồn hoa là:

$$15,233 \times 150.000 + \left(\pi (2\sqrt{2})^2 - 15,233 \right) \times 100.000 \approx 3.274.924 \text{ đồng.}$$

Làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta có kết quả là 3.270.000 đồng.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hình chữ nhật (H) có một cạnh nằm trên trục hoành, và có hai đỉnh trên một đường chèo là $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$, với $a > 0$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau, tìm a .

Hướng dẫn giải



Gọi $ABCD$ là hình chữ nhật với AB nằm trên trục Ox , $A(-1;0)$ và $C(a;\sqrt{a})$

Nhận thấy đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0 và đi qua $C(a;\sqrt{a})$. Do đó nó chia hình chữ nhật $ABCD$ ra làm 2 phần là có diện tích lần lượt là S_1, S_2 . Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$ và trục Ox , $x=0$, $x=a$ và S_2 là diện tích phần còn lại. Ta lần lượt tính S_1, S_2 .

Tính diện tích $S_1 = \int_0^a \sqrt{x} dx$.

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$; Khi $x=0 \Rightarrow t=0; x=a \Rightarrow t=\sqrt{a}$.

Do đó $S_1 = \int_0^{\sqrt{a}} 2t^2 dt = \left(\frac{2t^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$.

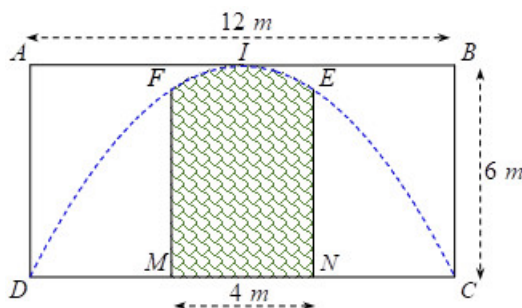
Hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a+1$; $AD=\sqrt{a}$ nên

$$S_2 = S_{ABCD} - S_1 = \sqrt{a}(a+1) - \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a}$$

Do đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ chia hình (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau nên :

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{a} + \sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 3\sqrt{a} \Leftrightarrow a = 3 \text{ (Do } a > 0 \text{)}.$$

Câu 3. Một công ty quảng cáo X muốn làm một bức tranh trang trí hình $MNEIF$ ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao $BC = 6 \text{ m}$, chiều dài $CD = 12 \text{ m}$ (hình vẽ bên). Cho biết $MNEF$ là hình chữ nhật có $MN = 4 \text{ m}$; cung EIF có hình dạng là một phần của cung parabol có đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C , D . Kinh phí làm bức tranh là $900.000 \text{ đồng}/\text{m}^2$.



Hỏi công ty X cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh đó?

Hướng dẫn giải

- Nếu chọn hệ trục tọa độ có gốc là trung điểm O của MN , trục hoành trùng với đường thẳng

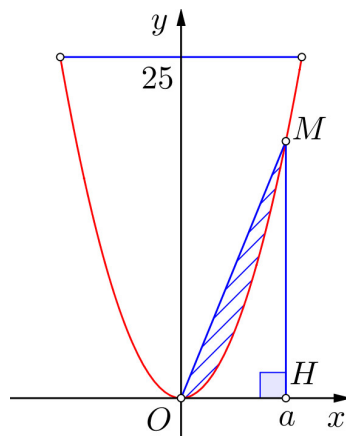
MN thì parabol có phương trình là $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$.

- Khi đó diện tích của khung tranh là $S = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{6}x^2 + 6 \right) dx = \frac{208}{9} \text{ m}^2$

- Suy ra số tiền là: $\frac{208}{9} \times 900.000 = 20.800.000 \text{ đồng}$.

Câu 4. Ông B có một khu vườn giới hạn bởi một đường parabol và một đường thẳng. Nếu đặt trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên thì parabol có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng là $y = 25$. Ông B dự định dùng một mảnh vườn nhỏ được chia từ khu vườn bởi một đường thẳng đi qua O và điểm M trên parabol để trồng một loại hoa. Hãy giúp ông B xác định điểm M bằng cách tính độ dài OM để diện tích mảnh vườn nhỏ bằng $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải



Gọi điểm H có hoành độ a , ($a > 0$) là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox .

Khi đó ta có pt đường thẳng OM có dạng $y = \tan \alpha \cdot x$, (với

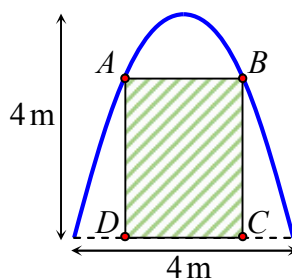
$$\alpha = \widehat{MOH}) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{MH}{OH} = \frac{a^2}{a} = a \Rightarrow y = ax.$$

Vậy diện tích mảnh vườn cần tính là:

$$S = \int_0^a (ax - x^2) dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^3}{6} \Leftrightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow a = 3.$$

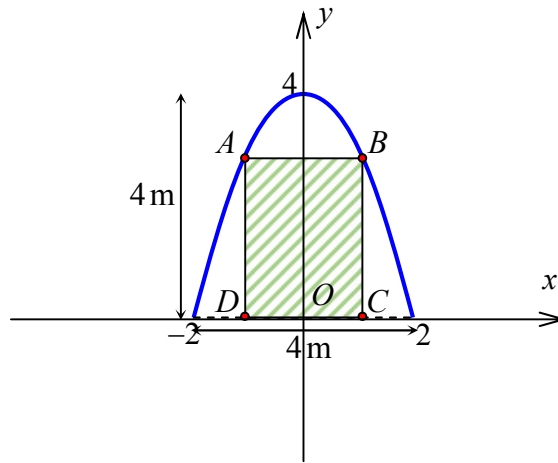
$$\text{Suy ra } OM = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}.$$

- Câu 5.** Trong đợt hội trại “Khi tôi 18” được tổ chức tại trường THPT X, Đoàn trường có thực hiện một dự án ảnh trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 200.000 đồng cho một m^2 bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?



Hướng dẫn giải

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó phương trình đường parabol có dạng: $y = ax^2 + b$.



Parabol cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$ và cắt trục hoành tại $(2; 0)$ nên:

$$\begin{cases} b = 4 \\ a \cdot 2^2 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Do đó, phương trình parabol là $y = -x^2 + 4$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường parabol và trục hoành là:

$$S_1 = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}.$$

Gọi $C(t; 0) \Rightarrow B(t; 4 - t^2)$ với $0 < t < 2$.

Ta có $CD = 2t$ và $BC = 4 - t^2$. Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là

$$S_2 = CD \cdot BC = 2t \cdot (4 - t^2) = -2t^3 + 8t.$$

Diện tích phần trang trí hoa văn là:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{32}{3} - (-2t^3 + 8t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 8t + \frac{32}{3}$ với $0 < t < 2$. Ta có $f'(t) = 6t^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \in (0; 2) \\ t = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0; 2) \end{cases}.$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$\swarrow$ $\frac{96-32\sqrt{3}}{9}$ $\searrow$		

Như vậy, diện tích phần trang trí nhỏ nhất là bằng $\frac{96-32\sqrt{3}}{9} \text{ m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là: $\frac{96-32\sqrt{3}}{9} \cdot 200000 \approx 902000$ đồng.

2. NHỮNG BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG ĐỒ THỊ HÀM ELIP

Phương pháp

Bước 1. Chọn hệ trục tọa độ, xác định Elip.

Bước 2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường được cho trong bài toán.

Bước 3. Tùy theo thực tế mỗi bài, tính diện tích theo yêu cầu.

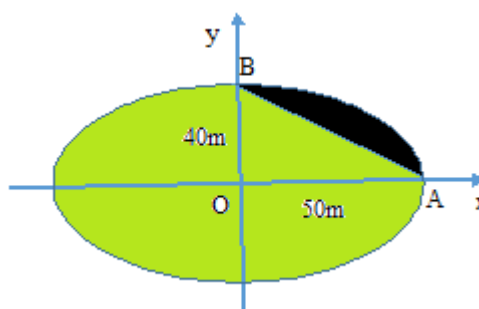
Chú ý Mấu chốt của vấn đề tính diện tích Elip nằm ở khâu chọn hệ trục tọa độ phù hợp. Nên chọn hệ trục sao cho tâm Elip luôn nằm trùng với gốc O . Khi đó hàm số elip luôn có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Câu 1. Anh Toàn có một cái ao hình elip với độ dài trục lớn và độ dài trục bé lần lượt là 100m và 80m . Anh chia ao ra hai phần theo một đường thẳng từ một đỉnh của trục lớn đến một đỉnh của trục bé (*Bề rộng không đáng kể*). Phần rộng hơn anh nuôi cá lấy thịt, phần nhỏ anh nuôi cá giống. Biết lãi nuôi cá lấy thịt và lãi nuôi cá giống trong 1 năm lần lượt là 20.000 đồng/m^2 và 40.000 đồng/m^2 . Hỏi trong 1 năm anh Toàn có bao nhiêu tiền lãi từ nuôi cá trong ao đã nói trên (*Lấy làm tròn đến hàng nghìn*).

Hướng dẫn giải

Định hướng: Bản chất của bài toán là tính diện tích phần tô màu, đen (được giới hạn bởi elip, đồ thị đường thẳng). Ta chuyển bài toán về tính diện tích hình phẳng bởi hai đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ và trục Ox bằng việc chọn hệ trục tọa độ phù hợp



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Phương trình Elip sẽ có tâm Elip trùng với gốc tọa độ. (do Elip có tính đối xứng nên ta xét góc phần tư thứ nhất của Elip khi đó phương trình ở góc phần tư thứ nhất của Elip là

$$y = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - (bx)^2} = \frac{1}{50} \sqrt{50^2 - (40x)^2}$$

Từ đó ta sẽ tìm được diện tích của $\frac{1}{4}$ ao là:

$$S_1 = \int_0^{50} \frac{1}{50} \sqrt{50^2 - (40x)^2} dx = 500\pi (m^2)$$

Sau khi tìm được diện tích toàn bộ phần ao ta sẽ tính được diện tích phần nuôi cá.

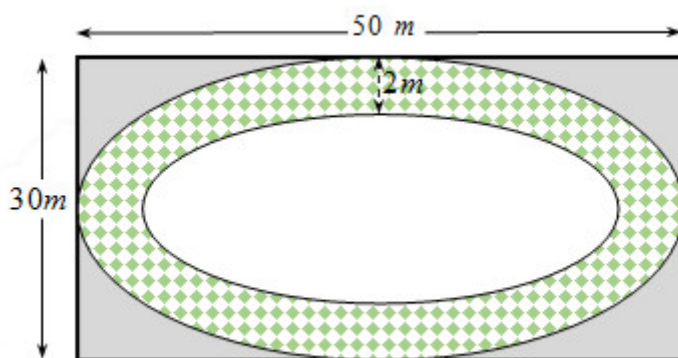
$$\text{Diện tích toàn bộ ao là } S = \pi \cdot 40 \cdot 50 = 2000\pi (m^2)$$

$$\text{Diện tích phần nuôi cá giống là } S_1 = \frac{S}{4} - S_{\Delta OAB} = 500\pi - 1000 (m^2)$$

$$\text{Diện tích phần nuôi cá thịt là } S_2 = S - S_1 = 1500\pi + 1000 (m^2)$$

$$\text{Tiền lãi từ nuôi cá là } 40000 \cdot S_1 + 20000 \cdot S_2 \approx 137080000$$

Câu 2. Một sân chơi dành cho trẻ em hình chữ nhật có chiều dài $50m$ và chiều rộng là $30m$ người ta làm một con đường nằm trong sân (như hình vẽ). Biết rằng viền ngoài và viền trong của con đường là hai đường elip và chiều rộng của mặt đường là $2m$. Kinh phí để làm mỗi m^2 làm đường 500.000 đồng. Tính tổng số tiền làm con đường đó. (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



Hướng dẫn giải

Định hướng: Bài toán quy về tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai elip đồng tâm (tâm trùng với gốc tọa độ) $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$.

Gọi S là diện tích của elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có $S = \pi ab$.

Chứng minh $S = \int_{-a}^a b \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) = \pi ab$

Xét hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành và trục tung lần lượt là các trục đối xứng của hình chữ nhật trong đó trục hoành dọc theo chiều dài của hình chữ nhật.

Gọi (E_1) là elip lớn, (E_2) là elip nhỏ ta có:

$$(E_1): \frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{15^2} = 1 \Rightarrow \text{Diện tích của nó là } S_1 = \pi \cdot 25 \cdot 15 = 375\pi.$$

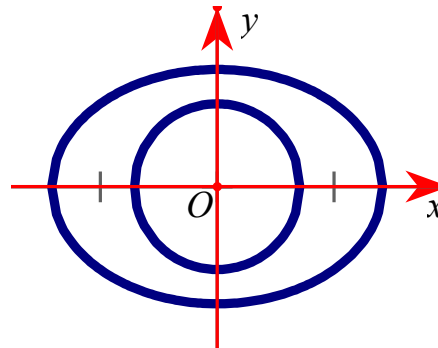
$$(E_2): \frac{x^2}{23^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1 \Rightarrow \text{Diện tích của nó là } S_2 = \pi \cdot 23 \cdot 13 = 299\pi.$$

Diện tích con đường là $375\pi - 299\pi = 76\pi$.

Do đó số tiền đầu tư là $76\pi \cdot 500.000 \approx 119320000$.

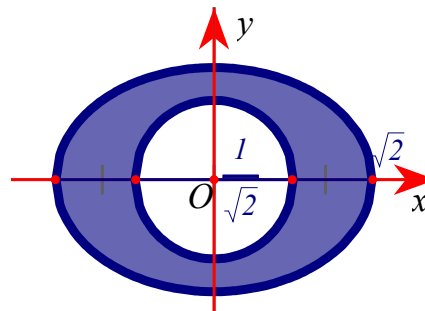
Câu 3. Người ta cần trồng hoa tại phần đất nằm phía ngoài đường tròn tâm gốc tọa độ, bán kính bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$ và phía trong của Elip có độ dài trục lớn bằng $2\sqrt{2}$ và trục nhỏ bằng 2 (như hình vẽ).

Trong mỗi một đơn vị diện tích cần bón $\frac{100}{(2\sqrt{2}-1)\pi}$ kg phân hữu cơ. Hỏi cần sử dụng bao nhiêu kg phân hữu cơ để bón cho hoa?



Hướng dẫn giải

Diện tích hình phẳng giới hạn giữa elip và đường tròn chính là diện tích hình elip trừ diện tích hình tròn.



- Phương trình elip có trục lớn $2a = 2\sqrt{2}$, trục nhỏ $2b = 2$ là $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Áp dụng công thức diện tích $S_{elip} = \pi ab$ ta được $S_{elip} = \pi\sqrt{2}$.

• Phương trình đường tròn (C) tâm $O(0;0)$ bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ là $(C): x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$.

Áp dụng công thức diện tích $S_{hình\ tròn} = \pi R^2 = \frac{\pi}{2}$.

* Vậy diện tích hình phẳng $S = S_{elip} - S_{hình\ tròn} = \pi\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$.

Do đó khối lượng phân cần bón $\left(\pi\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{100}{(2\sqrt{2}-1)\pi} = 50$.

+ Chứng minh công thức diện tích elip: $S_{elip} = \pi ab$ với $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

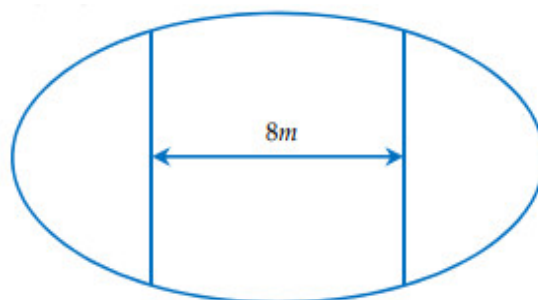
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, (y \geq 0) \\ y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, (y < 0) \end{cases}$$

Do tính đối xứng nên $S_{elip} = 4 \underbrace{\frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx}_I$.

Đặt $x = a \sin u \Rightarrow dx = a \cos u du$; đổi cận $\begin{cases} x = a \Rightarrow \sin u = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \Rightarrow \sin u = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} \cdot a \cos u du = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \cos u du = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du \\ &= \frac{a^2}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 \pi}{4}. \text{ Vậy } S_{elip} = \pi ab. \end{aligned}$$

Câu 4. Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16 m và độ dài trục bé bằng 10 m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8 m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng / $1 m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường elip tâm O là

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$. Khi đó diện tích mảnh vườn cần tìm được chia làm 2 qua trục lớn, gọi diện tích 1 phần là S .

Khi đó diện tích S của mảnh vườn bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị $y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -4; x = 4$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx \Rightarrow S = \int_{-4}^4 \sqrt{25 - \frac{25x^2}{64}} dx = 38,2644591$$

Do đó số tiền cần dùng là $100000.2.38,2644591 \approx 7653000$ đồng.

3. NHỮNG BÀI TOÁN THỰC TẾ SỬ DỤNG ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

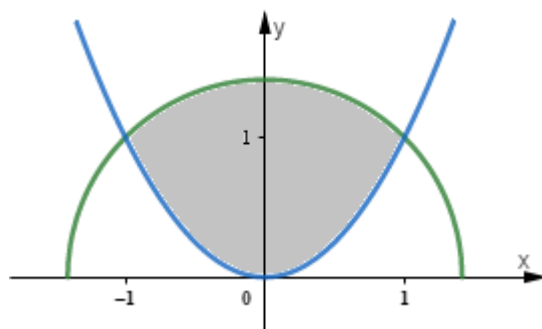
Bước 1. Xác định Phương trình của đường tròn : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Diện tích toàn phần của đường tròn : $S = \pi R^2$.

Bước 2. Trộn hệ trục tọa độ để đặt đường tròn và phác họa phần mặt phẳng cần tính diện tích được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường tròn.

Bước 3. Ta sử dụng công thức tính diện tích $\int_u^v (f(x) - g(x)) dx$ để tính diện tích phần cần tính.

Bước 4. Tùy thuộc vào câu hỏi để kết luận và đưa ra kết quả bài toán.

Câu 1. Một bồn hoa tại “Hội hoa xuân” được thiết kế như hình vẽ bên dưới. Bồn hoa được giới hạn bởi hai nhánh đường cong gồm một parabol và một đường tròn. Nếu xét trên hệ trục dưới đây thì ta có phương trình hai đường lần lượt là $y = x^2$ và $y = \sqrt{2 - x^2}$. Diện tích bồn hoa bằng



A. $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$.

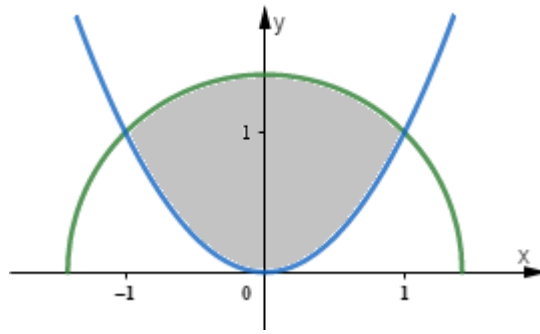
B. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$.

C. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

D. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2-x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

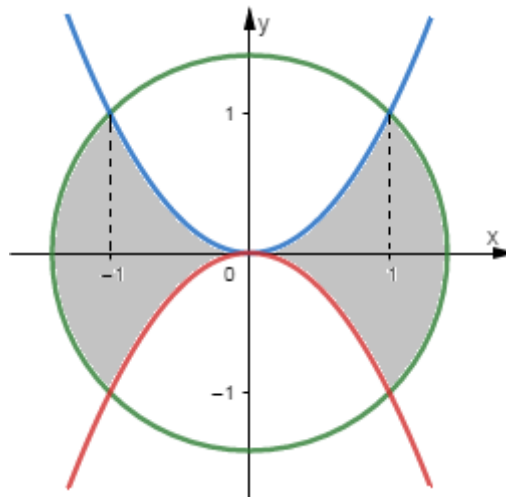
Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = A - \int_{-1}^1 x^2 dx = A - \frac{2}{3}$.

Đặt $x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Ta có: $A = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dx = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} + 1$.

Vậy $S = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$.

Câu 2. Một logo quảng cáo hình tròn được sơn hai màu. Hãy tính diện tích phần được sơn màu như hình vẽ. Biết rằng logo được thiết kế lớn là hình tròn có bán kính $2m$ có hai phần được giới hạn bởi 2 parabol giống nhau và tiếp xúc đỉnh như hình vẽ, mỗi parabol cắt đường tròn tại 2 điểm cách nhau $2m$.



A. $\pi + \frac{2}{3}$.

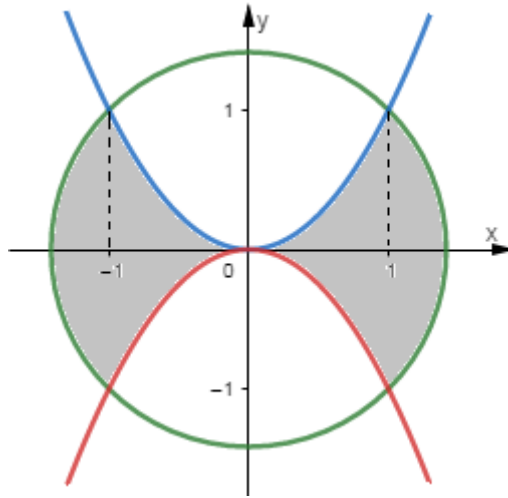
B. $2\pi - \frac{2}{3}$.

C. $\pi - \frac{2}{3}$.

D. $2\pi + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. khi đó ta có phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = 2$ và parabol phía trên là $y = x^2$ (do đi qua các điểm $(1;1)$ và $(-1;1)$)

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng:

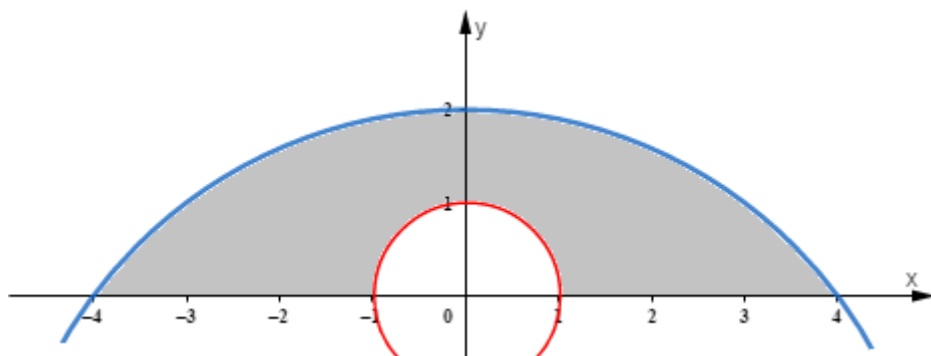
$$S = \pi(\sqrt{2})^2 - 2 \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = 2\pi - 2A + 2 \int_{-1}^1 x^2 dx = 2\pi + \frac{4}{3} - 2A.$$

Đặt $x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt$. Đổi cận: $x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Ta có: } A = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dx = \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} + 1.$$

$$\text{Vậy } S = 2\pi + \frac{4}{3} - 2 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \pi - \frac{2}{3}.$$

Câu 3. Một cổng chào được thiết kế gồm hai cung tròn có bán kính lần lượt là 1 và 5 có tâm cách nhau 3m. Phần chân cổng là đường thẳng đi qua tâm cung tròn nhỏ và vuông góc với đoạn nối tâm của hai cung tròn (tham khảo hình vẽ). Tính diện tích phần bề mặt của cổng.



A. 9,61.

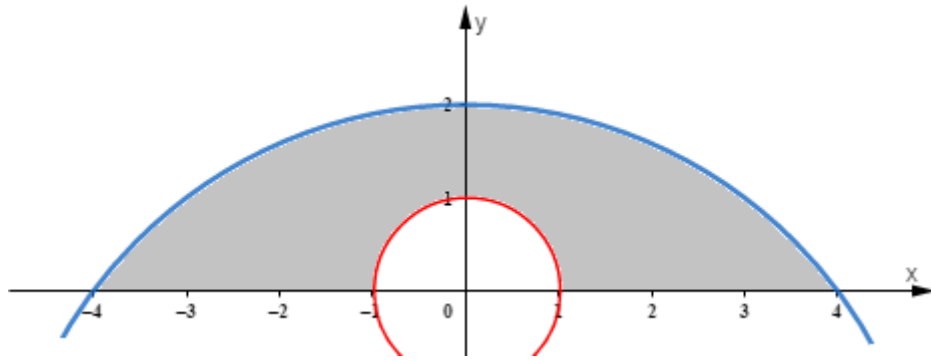
B. 9,63.

C. 19,22.

D. 18,22.

Lời giải

Chọn A.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có hai đường tròn chứa hai cung tròn có phương trình lần lượt là $x^2 + (y + 3)^2 = 25$ và $x^2 + y^2 = 1$.

Giải hệ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + (y + 3)^2 = 25 \end{cases}$ ta có $x = \pm 4$.

Nửa đường tròn nhỏ bên trong có diện tích $\frac{\pi}{2}$.

Nửa đường tròn trên của (C_1) có phương trình $y = -3 + \sqrt{25 - x^2}$

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \int_{-4}^4 \left(-3 + \sqrt{25 - x^2} \right) dx - \frac{\pi}{2}$.

Dùng máy tính để tìm kết quả ta có $S \approx 9,61$.

Câu 4. Một khoảng đất được trồng cỏ có dạng hình tròn bán kính 3m. Một chú bò được cột một sợi dây dài ở một cái cọc cách tâm khoảng đất trồng cỏ một đoạn 4m, biết rằng chú bò vươn người hết cỡ cách cọc khoảng 2m. Hỏi diện tích cỏ bị chú bò ăn mất là bao nhiêu?(làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

A. 3,98.

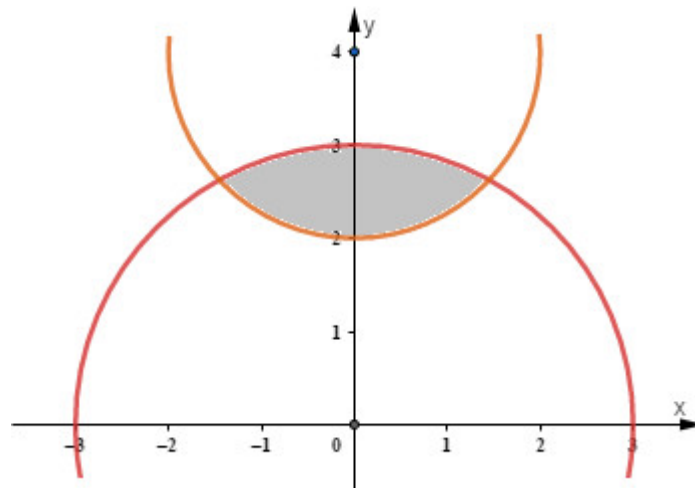
B. 3,9.

C. 1,99.

D. 1,94.

Lời giải

Chọn C.



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có phương trình hai đường tròn lần lượt là $(C_1): x^2 + y^2 = 9$ và $(C_2): x^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + (y - 4)^2 = 4 \end{cases}$ ta có $x = \pm \frac{3\sqrt{15}}{8}$.

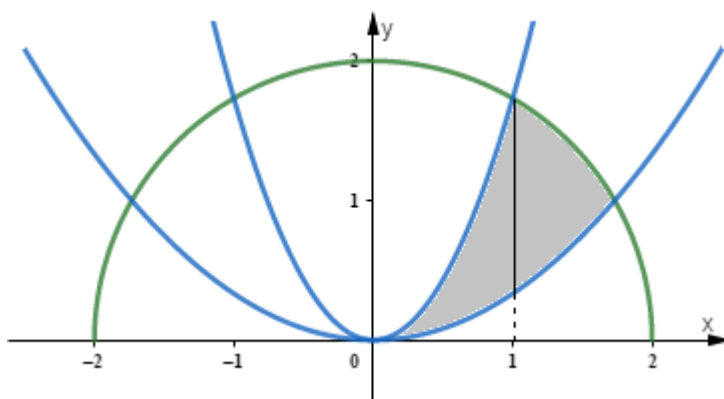
Nửa đường tròn phía trên của (C_1) có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Nửa đường tròn phía dưới của (C_2) có phương trình $y = 4 - \sqrt{4 - x^2}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \int_{-\frac{3\sqrt{15}}{8}}^{\frac{3\sqrt{15}}{8}} (\sqrt{9 - x^2} - 4 + \sqrt{4 - x^2}) dx$.

Dùng máy tính để tìm kết quả ta có: $S \approx 1,99$.

Câu 5. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = \frac{x^2}{3}$; $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{\pi}{6}$.

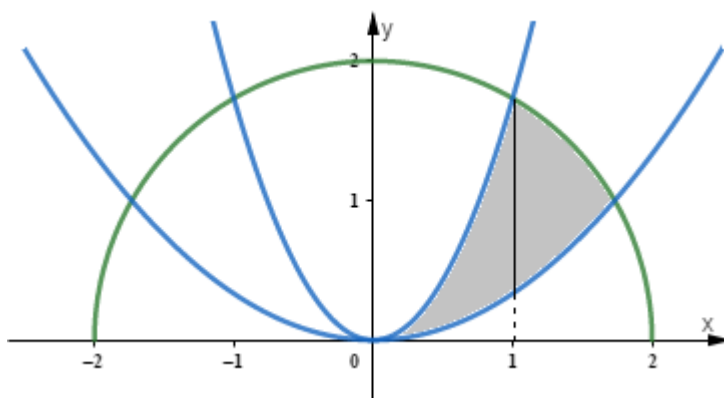
B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{2\pi}{3} + \frac{8}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B.



Xét các phương trình hoành độ giao điểm với $0 \leq x \leq 2$

$$\frac{x^2}{3} = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \frac{x^4}{9} = 4-x^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

$$x^2\sqrt{3} = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow 3x^4 = 4-x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

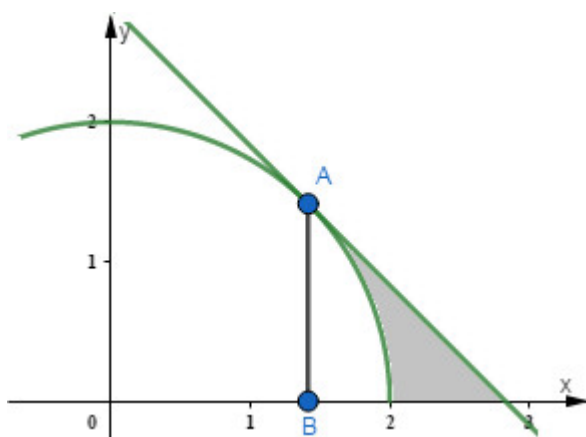
Diện tích hình phẳng cần tìm bằng

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(x^2\sqrt{3} - \frac{x^2}{3} \right) dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3\sqrt{3}}{3} - \frac{x^3}{9} \right) \Big|_0^1 + \int_1^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} \right) dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{3} dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{9} + \int_1^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} \right) dx - \left(\frac{3\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{9} \right) = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$; $x = \sqrt{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Ta có: $S = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t dx = 4 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} \right) dx = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3}.$

Câu 6. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = -x + 2\sqrt{2}$; cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $\sqrt{2} \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $2 - \frac{\pi}{3}.$

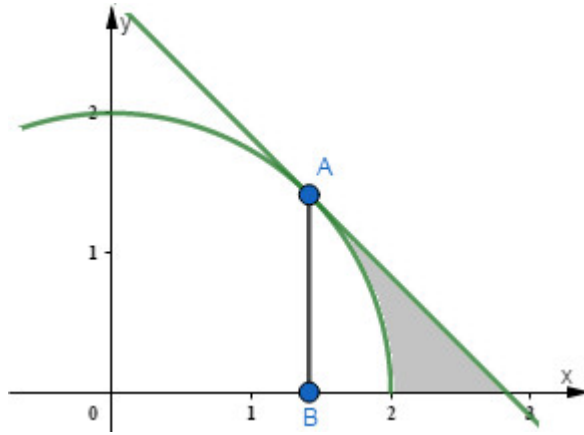
B. $2 - \frac{\pi}{4}.$

C. $2 + \frac{\pi}{2}.$

D. $2 - \frac{\pi}{2}.$

Lời giải

Chọn D.



Dựa vào hình vẽ ta thấy đường thẳng chính là tiếp tuyến của cung tròn tại điểm có hoành độ bằng $\sqrt{2}$.

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng $S = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} - \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 1 - A$.

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận: $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$; $x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Ta có: $A = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - 1$.

Vậy $S = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Câu 7. Cho tam giác vuông cân ABC tại A có $BC = 4$. Gọi H là chân đường cao hạ từ A , dựng đường tròn đường kính AH . Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường tròn nằm trong tam giác

A. $1 - \frac{\pi}{2}$.

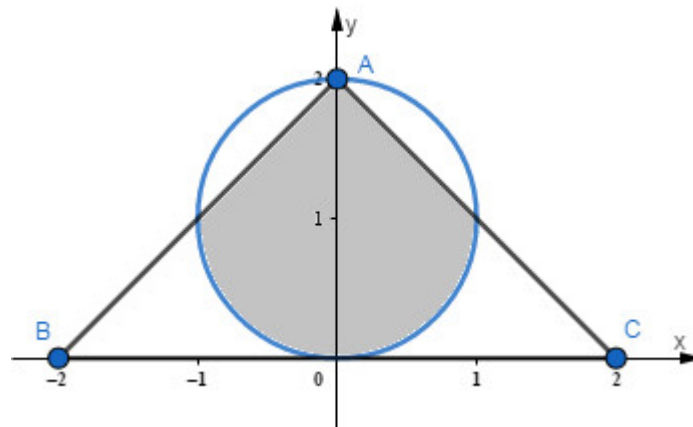
B. $1 + \frac{\pi}{2}$.

C. $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$.

D. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có đường tròn có phương trình $x^2 + (y-1)^2 = 1$; cạnh AC nằm trên đường thẳng có phương trình $y = -x + 2$.

Do tính đối xứng của hình vẽ ta chỉ cần tính 2 lần phần diện tích bên phải trục tung.

Nửa đường tròn dưới có phương trình $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $1 - \sqrt{1 - x^2} = -x + 2 \Leftrightarrow x = 1$

Diện tích hình phẳng cần tìm bằng

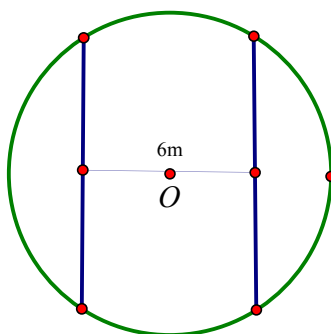
$$S = 2 \int_0^1 (-x + 2 - 1 + \sqrt{1 - x^2}) dx = (-x^2 + 2x) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = 1 + 2A$$

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$\text{Ta có: } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy } S = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

- Câu 8.** Một mảnh vườn hình tròn tâm O bán kính $6m$. Người ta cần trồng cây trên dải đất rộng $6m$ nhận O làm tâm đối xứng, biết kinh phí trồng cây là 70000 đồng/ m^2 . Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng cây trên dải đất đó (số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



Hướng dẫn giải

Xét hệ trục tọa độ oxy đặt vào tâm khu vườn, khi đó phương trình đường tròn tâm O là

$x^2 + y^2 = 36$. Khi đó phần nửa cung tròn phía trên trục Ox có phương trình

$$y = \sqrt{36 - x^2} = f(x)$$

Khi đó diện tích S của mảnh đất bằng 2 lần diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, đồ thị

$y = f(x)$ và hai đường thẳng $x = -3$; $x = 3$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-3}^3 \sqrt{36 - x^2} dx = 18\sqrt{3} + 12\pi$$

Do đó số tiền cần dùng là $70000.S = 4821322$ đồng.