

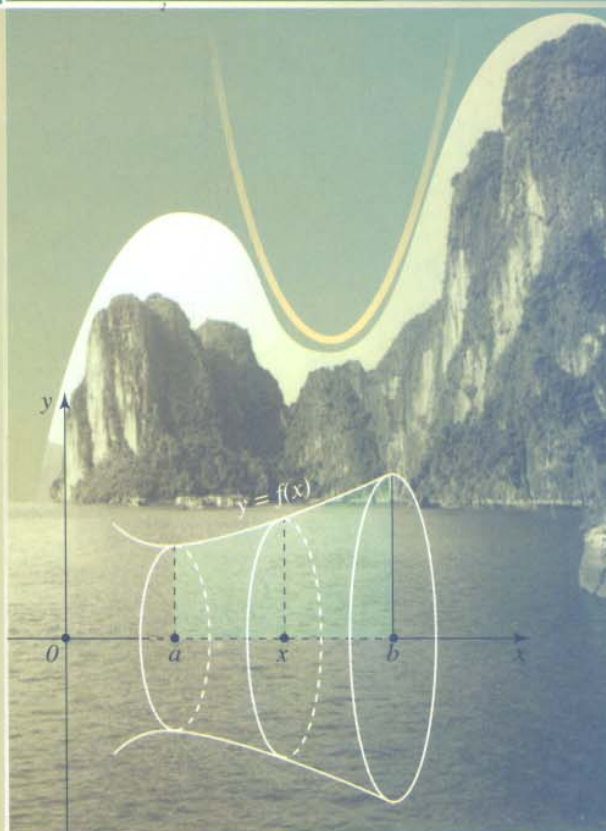
BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12

NÂNG CAO

NGUYỄN HUY ĐOÀN (Chủ biên)
TRẦN PHƯƠNG DUNG - NGUYỄN XUÂN LIÊM
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - ĐOÀN QUỲNH
ĐẶNG HÙNG THẮNG



HÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



NGUYỄN HUY ĐOAN (Chủ biên)
TRẦN PHƯƠNG DUNG - NGUYỄN XUÂN LIÊM
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC - ĐOÀN QUỲNH - ĐẶNG HÙNG THẮNG

BÀI TẬP
GIẢI TÍCH
12
NÂNG CAO

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam

01-2010/CXB/651-1485/GD

Mã số : NB203T0

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ**1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ**

Hàm số đơn điệu. Cho hàm số f xác định trên K , trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

- f đồng biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- f nghịch biến trên K nếu với mọi $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Điều kiện cần để hàm số đơn điệu

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I . Khi đó :

- Nếu hàm số f đồng biến trên I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.
- Nếu hàm số f nghịch biến trên I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu

1) Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I .

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số đồng biến trên I .
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của I thì hàm số nghịch biến trên I .
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f không đổi trên I .

2) Giả sử hàm số f liên tục trên nửa khoảng $[a ; b)$ và có đạo hàm trên khoảng $(a ; b)$.

- Nếu $f'(x) > 0$ (hoặc $f'(x) < 0$) với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên nửa khoảng $[a; b)$.
- Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số f không đổi trên nửa khoảng $[a; b)$.

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Điểm cực trị. Giả sử hàm số f xác định trên tập hợp $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$) và $x_0 \in \mathcal{D}$.

x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ sao cho $x_0 \in (a; b) \subset \mathcal{D}$ và

$$f(x) < f(x_0) \text{ với mọi } x \in (a; b) \setminus \{x_0\}.$$

Điểm cực tiểu của hàm số được định nghĩa tương tự.

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Nếu hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0 và hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

(Hàm số f có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó nó không có đạo hàm).

Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

1) Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .

Chú ý. Không cần xét hàm số f có hay không có đạo hàm tại điểm $x = x_0$.

2) Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 . Khi đó :

- Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0 .
- Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

$$M = \max_{x \in \mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}, f(x_0) = M. \end{cases}$$

$$m = \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m \\ \exists x_0 \in \mathcal{D}, f(x_0) = m. \end{cases}$$

4. PHÉP TÍNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(x_0; y_0)$.

- Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0. \end{cases}$$

- Nếu $(\mathcal{C})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ đối với hệ toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ thì phương trình của $(\mathcal{C})$ đối với hệ toạ độ $(I; \vec{i}, \vec{j})$ là

$$Y = f(X + x_0) - y_0.$$

5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong bốn điều kiện sau được thoả mãn :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty.$$

- Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.

- Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) được gọi là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Cách tìm tiệm cận xiên : Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

6. SỰ GIAO NHAU VÀ SỰ TIẾP XÚC CỦA HAI ĐƯỜNG CONG

1) Hoành độ giao điểm của hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là nghiệm của phương trình

$$f(x) = g(x).$$

Do đó, số nghiệm phân biệt của phương trình trên bằng số giao điểm của hai đường cong.

2) • Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gọi là tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0 ; y_0)$ nếu chúng có tiếp tuyến chung tại điểm M . Khi đó, M được gọi là tiếp điểm.

• Hai đường cong $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm. Nghiệm của hệ phương trình trên là hoành độ của tiếp điểm.

• Đường thẳng $y = px + q$ là tiếp tuyến của parabol $y = ax^2 + bx + c$ khi và chỉ khi phương trình

$$ax^2 + bx + c = px + q$$

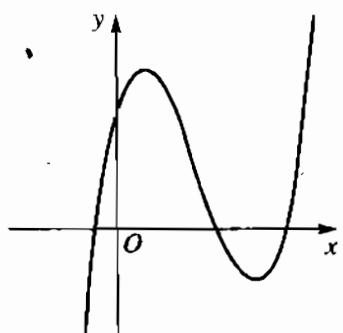
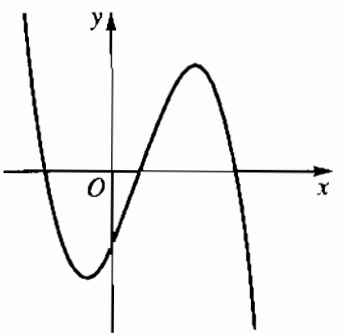
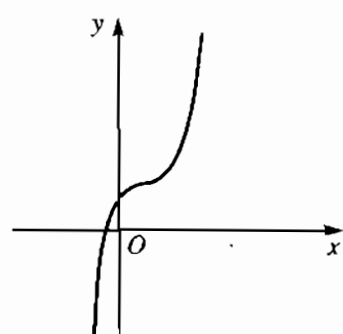
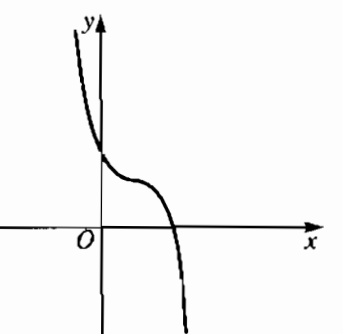
hay

$$ax^2 + (b - p)x + c - q = 0$$

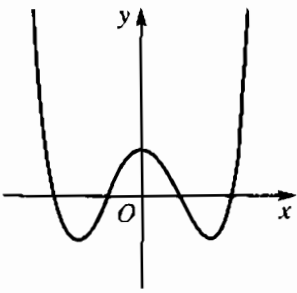
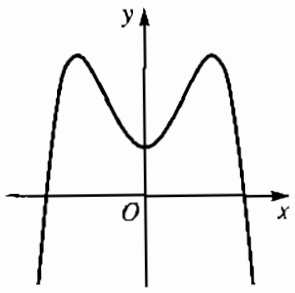
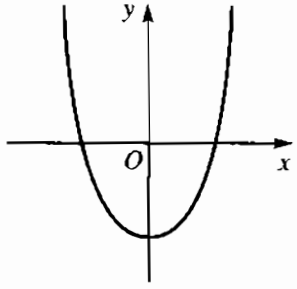
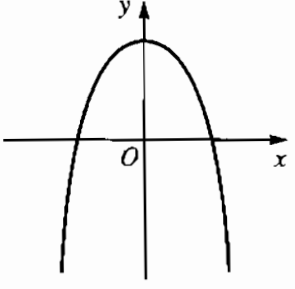
có nghiệm kép.

7. CÁC DẠNG ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ

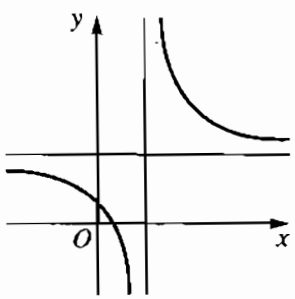
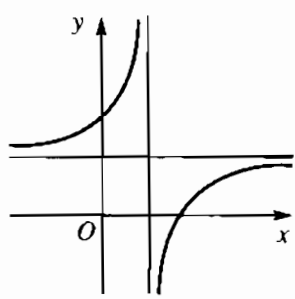
Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có một trong các dạng sau đây

$a > 0$	$a < 0$
 Có 2 điểm cực trị	 Có 2 điểm cực trị
 Luôn đồng biến	 Luôn nghịch biến

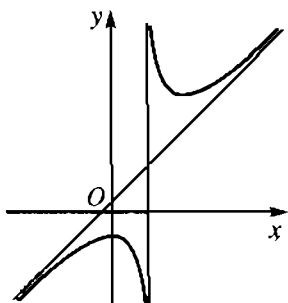
Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có một trong các dạng sau đây.

$a > 0$	$a < 0$
 Có 3 điểm cực trị	 Có 3 điểm cực trị
 Có 1 điểm cực trị	 Có 1 điểm cực trị

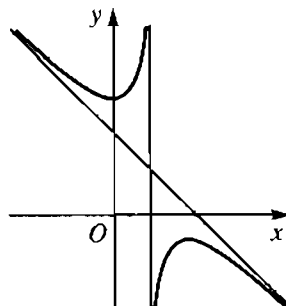
Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có một trong các dạng sau đây

 Luôn nghịch biến	 Luôn đồng biến
---	--

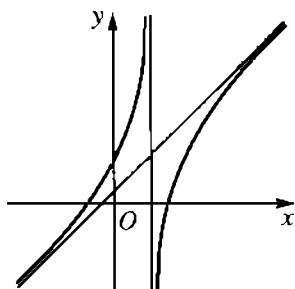
Đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + c'} = px + q + \frac{r}{a'x + c'}$ ($a \neq 0, a' \neq 0, r \neq 0$)
có một trong các dạng sau đây.



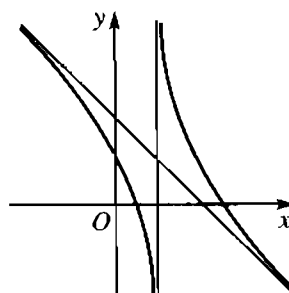
Có cực trị



Có cực trị



Luôn đồng biến



Luôn nghịch biến

B. ĐỀ BÀI

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1.1. $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$ là hai điểm của parabol $y = x^2$.

Xác định điểm C thuộc parabol sao cho tiếp tuyến tại C với parabol song song với đường thẳng AB .

1.2. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$;

b) $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$;

c) $y = \frac{x+1}{3\sqrt{x}}$;

d) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

1.3. Xét chiều biến thiên của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x + 5$;

b) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 11$;

c) $f(x) = x^3 - \frac{4}{5}x^5 + 8$;

d) $f(x) = 9x^7 - 7x^6 + \frac{7}{5}x^5 + 12$.

1.4. Chứng minh rằng

a) Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$;

b) Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 9}$ đồng biến trên nửa khoảng $[3; +\infty)$;

c) Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ nghịch biến trên mỗi nửa khoảng $[-2; 0)$ và $(0; 2]$.

1.5. Chứng minh rằng

a) Hàm số $y = \frac{3-x}{2x+1}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó ;

b) Hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x}{2x+1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó ;

c) Hàm số $y = -x + \sqrt{x^2 + 8}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

1.6. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1.7. Với các giá trị nào của m , hàm số

$$y = x + 2 + \frac{m}{x-1}$$

đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó ?

1.8. Với các giá trị nào của a , hàm số

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2a+1)x - 3a + 2$$

nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

1.9. Cho hàm số $f(x) = 2 - \sin^2 x - \sin^2(a+x) - 2\cos a \cos x \cos(a+x)$.

a) Tìm đạo hàm của hàm số f .

b) Từ a) suy ra rằng hàm số f lấy giá trị không đổi trên $\mathbb{R}$ và tính giá trị không đổi đó.

1.10. Cho hàm số $f: \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \cos x + \sin x \tan \frac{x}{2}.$$

a) Tìm đạo hàm của hàm số f .

b) Từ a) suy ra rằng f là một hàm hằng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ và tìm hàm hằng đó.

1.11. Cho hàm số $f(x) = 2x^2\sqrt{x-2}$.

a) Chứng minh rằng hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

b) Chứng minh rằng phương trình $2x^2\sqrt{x-2} = 11$ có một nghiệm duy nhất.

1.12. Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ và nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

b) Chứng minh rằng với mọi $m \in (-1; 1)$, phương trình

$$\sin^2 x + \cos x = m$$

có một nghiệm duy nhất thuộc đoạn $[0; \pi]$.

1.13. Cho hàm số

$$f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x.$$

a) Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Chứng minh rằng

$$2\sin x + \tan x > 3x \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

1.14. a) Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \tan x - x$ đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Chứng minh rằng

$$\tan x > x + \frac{x^3}{3} \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

1.15. Cho hàm số $f(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

a) Xét chiều biến thiên của hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

b) Từ đó suy ra rằng

$$\tan x \leq \frac{4}{\pi}x \text{ với mọi } x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1.16. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$;

b) $f(x) = -5x^3 + 3x^2 - 4x + 5$;

c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 3$;

d) $f(x) = x - 3 + \frac{9}{x-2}$.

1.17. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{x^2 + 8x - 24}{x^2 - 4}$;

b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$;

c) $f(x) = x\sqrt{3-x}$;

d) $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$.

1.18. Tìm cực trị của các hàm số sau :

a) $y = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x$, $x \in [0; \pi]$;

b) $y = 2\sin x + \cos 2x$; $x \in [0; \pi]$.

1.19. Tìm các hệ số a, b, c sao cho hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2.

1.20. Tìm các số thực p và q sao cho hàm số

$$f(x) = x + p + \frac{q}{x+1}$$

đạt cực đại tại điểm $x = -2$ và $f(-2) = -2$.

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1.21. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[-4; 4]$;

b) $f(x) = x^3 + 5x - 4$ trên đoạn $[-3; 1]$;

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$;

d) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ trên nửa khoảng $(-2; 4]$;

e) $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$;

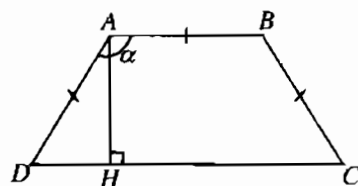
f) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1.22. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các hàm số sau :

a) $y = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$;

b) $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$.

1.23. Hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB và hai cạnh bên đều dài 1m. Tính góc $\alpha = \widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ sao cho hình thang có diện tích lớn nhất và tính diện tích lớn nhất đó (h.1.1).



Hình 1.1

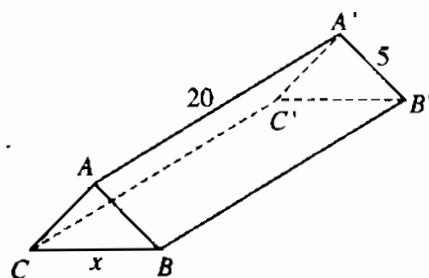
1.24. Trong các tam giác vuông mà cạnh huyền có độ dài bằng 10cm, hãy xác định tam giác có diện tích lớn nhất.

1.25. Một hành lang giữa hai nhà có hình dạng của một lăng trụ đứng (h.1.2). Hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20m, rộng 5m.

Gọi x (mét) là độ dài của cạnh BC .

a) Tính thể tích V của hình lăng trụ theo x .

b) Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



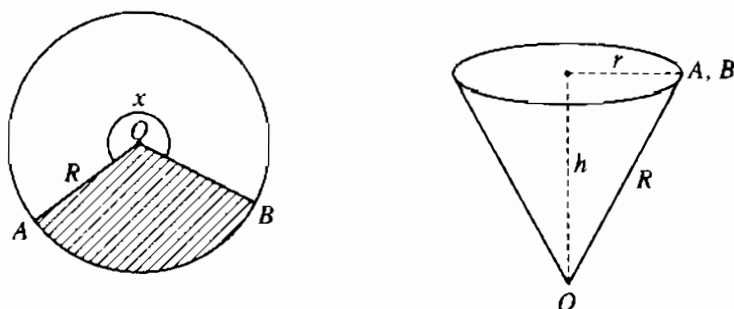
Hình 1.2

1.26. Cắt bỏ hình quạt tròn AOB (hình phẳng có nét gạch trong hình 1.3) từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn còn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là góc ở tâm của quạt tròn dùng làm phễu (h.1.3), $0 < x < 2\pi$.

a) Hãy biểu diễn bán kính r của hình tròn đáy và đường cao h của hình nón theo R và x .

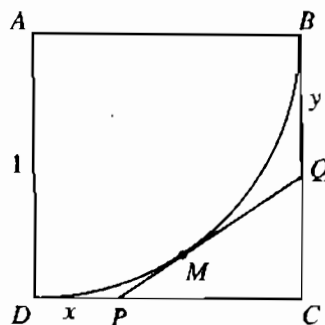
b) Tính thể tích hình nón theo R và x .

c) Tìm x để hình nón có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



Hình 1.3

1.27. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và cung $\widehat{BD}$ là một phần tư đường tròn tâm A , bán kính AB chứa trong hình vuông (h.1.4). Tiếp tuyến tại điểm M của cung $\widehat{BD}$ cắt đoạn thẳng CD tại điểm P và cắt đoạn thẳng BC tại điểm Q .



Hình 1.4

Đặt $x = DP$ và $y = BQ$.

a) Chứng minh rằng

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \text{ và}$$

$$PQ = x + y.$$

Từ đó tính y theo x .

b) Tính PQ theo x và tìm x để PQ có độ dài nhỏ nhất.

1.28. Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ T (T nằm giữa 0° và 30°C) được cho bởi công thức

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3 (\text{cm}^3).$$

Ở nhiệt độ nào nước có khối lượng riêng lớn nhất?

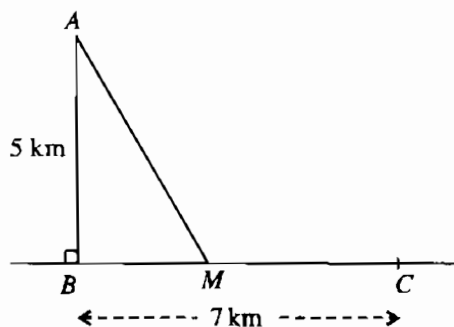
1.29. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức

$$f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264} \text{ (xe/giây),}$$

trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm.

Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.

1.30. Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5\text{km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km . Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h (h.1.5).



Hình 1.5

Xác định vị trí của điểm M để người đó đến kho nhanh nhất.

§4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP TÍNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

1.31. a) Xác định điểm I thuộc đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ có hoành độ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

b) Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của $(\mathcal{C})$ đối với hệ toạ độ IXY .

Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của $(\mathcal{C})$.

1.32. Cùng các câu hỏi như trong bài tập 1.31 đối với các hàm số sau :

a) $y = -x^3 + 3x^2 + 2x$;

b) $y = x^3 + 6x^2 + x - 12$.

1.33. a) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm I của đường cong

$$y = x^3 - 3x^2 + 4 \quad (\mathcal{C})$$

biết rằng hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.

b) Xét vị trí tương đối của đường cong $(\mathcal{C})$ và tiếp tuyến tại điểm I của $(\mathcal{C})$ (tức là xác định các khoảng trên đó $(\mathcal{C})$ nằm phía trên hoặc phía dưới tiếp tuyến).

1.34. Cùng các câu hỏi như trong bài tập 1.33 đối với đường cong

$$y = x^3 + 3x^2 + 4x - 2.$$

1.35. Xác định đỉnh I của mỗi parabol $(\mathcal{P})$ dưới đây. Viết công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của parabol $(\mathcal{P})$ đối với hệ toạ độ IXY .

a) $y = x^2 - 4x + 3$; b) $y = 2x^2 + 3x - \frac{7}{8}$.

§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1.36. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = \frac{x+1}{2x+1}$; b) $y = 4 + \frac{1}{x-2}$;

c) $y = \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$; d) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x+1}$.

1.37. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị các hàm số sau :

a) $y = 2x - 1 + \frac{1}{x}$; b) $y = \frac{x^2 + 2x}{x-3}$;

c) $y = x - 3 + \frac{1}{2(x-1)^2}$; d) $y = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 + 1}$.

1.38. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

$$a) y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x} ;$$

$$b) y = \frac{x}{1 - x^2} ;$$

$$c) y = \frac{x^3}{x^2 - 1} ;$$

$$d) y = \frac{\sqrt{x}}{4 - x^2}.$$

1.39. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau :

$$a) y = \sqrt{x^2 - x + 1} ;$$

$$b) y = x + \sqrt{x^2 + 2x} ;$$

$$c) y = \sqrt{x^2 + 3} ;$$

$$d) y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

1.40. a) Xác định giao điểm I của hai đường tiệm cận của đường cong

$$y = \frac{x - 5}{2x + 3}. \quad (\mathcal{H})$$

b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathcal{H})$ đối với hệ tọa độ IXY .

Từ đó suy ra rằng I là tâm đối xứng của đường cong $(\mathcal{H})$.

1.41. a) Xác định giao điểm I của hai đường tiệm cận của đường cong

$$y = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}. \quad (\mathcal{C})$$

b) Viết công thức chuyển hệ tọa độ trong phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OI}$ và viết phương trình của đường cong $(\mathcal{C})$ đối với hệ tọa độ IXY .

1.42. Cùng các câu hỏi như trong bài tập 1.41 đối với đồ thị của các hàm số sau :

$$a) y = \frac{x + 5}{2x + 1} ;$$

$$b) y = 3x + 4 + \frac{2}{x + 1}.$$

1.43. a) Vẽ đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{với } x < -1, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} & \text{với } x \geq -1. \end{cases}$$

b) Tìm đạo hàm của hàm số f tại điểm $x = -1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong ($\mathcal{C}$) tại điểm $I(-1; 0)$ và xét vị trí tương đối của ($\mathcal{C}$) với tiếp tuyến đó.

d) Từ đồ thị ($\mathcal{C}$) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -f(x) = \begin{cases} -\frac{x+1}{x-1} & \text{với } x < -1, \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} & \text{với } x \geq -1. \end{cases}$$

§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

1.44. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2.$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của ($\mathcal{C}$) tại điểm uốn của nó.

1.45. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

b) Chứng minh rằng điểm uốn của đường cong ($\mathcal{C}$) là tâm đối xứng của nó.

c) Với các giá trị nào của m , đường thẳng $y = m$ cắt ($\mathcal{C}$) tại ba điểm phân biệt ?

1.46. a) Tìm các hệ số a, b, c sao cho đồ thị của hàm số

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ là -1 .

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị vừa tìm được của a, b, c .

1.47. a) Tìm các hệ số m, n sao cho hàm số

$$y = -x^3 + mx + n$$

đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$ và đồ thị của nó đi qua điểm $(1; 4)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị của m, n vừa tìm được.

1.48. a) Tìm các hệ số m, n, p sao cho hàm số

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + nx + p$$

đạt cực đại tại điểm $x = 3$ và đồ thị ($\mathcal{C}$) của nó tiếp xúc với đường thẳng $y = 3x - \frac{1}{3}$ tại giao điểm của ($\mathcal{C}$) với trục tung.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với các giá trị vừa tìm được của m, n, p .

1.49. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3.$$

b) Chứng minh rằng phương trình

$$-x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3 = 0$$

có ba nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

1.50. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^4 - 2x^2 + 3.$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại mỗi điểm uốn của nó.

1.51. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$y = -x^4 + 2x^2 + 2.$$

b) Chứng minh rằng với mọi $m < 2$, phương trình

$$-x^4 + 2x^2 + 2 - m = 0$$

có hai nghiệm.

c) Từ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số đã cho suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số

$$y = |-x^4 + 2x^2 + 2|.$$

1.52. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^4 + x^2 - 3.$$

b) Chứng minh rằng đường thẳng $y = -6x - 7$ tiếp xúc với đồ thị của hàm số đã cho tại điểm có hoành độ bằng -1 .

§7. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

1.53. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{H}$) của hàm số

$$y = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

b) Chứng minh rằng ($\mathcal{H}$) nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị làm tâm đối xứng.

1.54. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{H}$) của hàm số

$$y = \frac{-x + 3}{2x + 1}.$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đường thẳng $y = mx + m - 4$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong ($\mathcal{H}$).

1.55. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{H}$) của hàm số

$$y = x + 1 + \frac{4}{x + 1}.$$

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của ($\mathcal{H}$) là tâm đối xứng của ($\mathcal{H}$).

1.56. a) Chứng minh rằng với mọi $m > 0$, hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (2m - 1)x - 1}{x + 2}$$

có cực đại và cực tiểu.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 1$.

1.57. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$$

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong ($\mathcal{C}$) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

c) Tiếp tuyến đó cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của ($\mathcal{C}$) theo thứ tự tại hai điểm A và B . Chứng minh rằng M là trung điểm của đoạn thẳng AB và

diện tích tam giác OAB không phụ thuộc vào vị trí của điểm M trên đường cong ($\mathcal{C}$).

1.58. a) Tìm các giá trị của m sao cho hàm số

$$y = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x - 1}$$

ng nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 0$.

§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

1.59. Cho hàm số

$$y = x^3 - 2m(x + 1) + 1.$$

a) Với các giá trị nào của m , đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt ?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.

1.60. a) Tìm giao điểm của đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ và parabol $y = x^2 - 4x + 2$.

b) Xét vị trí tương đối của đường cong ($\mathcal{C}$) và parabol (tức là xác định mỗi khoảng trên đó ($\mathcal{C}$) nằm phía trên hoặc phía dưới parabol).

1.61. Với các giá trị nào của m , phương trình

$$4x^3 - 3x - 2m + 3 = 0$$

có một nghiệm duy nhất ?

1.62. Cho hai hàm số

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} \text{ và } g(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}.$$

a) Chứng minh rằng đồ thị ($\mathcal{G}$) của hàm số f và đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số g tiếp xúc với nhau tại điểm A có hoành độ $x = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến chung ($\mathcal{J}$) của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{C}$) tại điểm A .

c) Chứng minh rằng ($\mathcal{P}$) nằm phía dưới đường thẳng ($\mathcal{J}$) và ($\mathcal{C}$) nằm phía trên ($\mathcal{J}$).

1.63. Chứng minh rằng các đồ thị của ba hàm số

$$f(x) = x^2 - 3x + 4, g(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ và } h(x) = -4x + 6\sqrt{x}$$

tiếp xúc với nhau tại một điểm.

1.64. Chứng minh rằng parabol ($\mathcal{P}$) có phương trình

$$y = x^2 - 3x - 1$$

tiếp xúc với đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$y = \frac{-x^2 + 2x - 3}{x - 1}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của parabol ($\mathcal{P}$) và đường cong ($\mathcal{C}$) tại tiếp điểm của chúng.

1.65. Chứng minh rằng có hai tiếp tuyến của parabol $y = x^2 - 3x$ đi qua điểm

$$A\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right) \text{ và chúng vuông góc với nhau.}$$

1.66. Cho hàm số

$$y = \frac{mx - 1}{x - m}, \quad m \neq \pm 1.$$

Gọi ($\mathcal{H}_m$) là đồ thị của hàm số đã cho.

a) Chứng minh rằng với mọi $m \neq \pm 1$, đường cong ($\mathcal{H}_m$) luôn đi qua hai điểm cố định A và B .

b) Gọi M là giao điểm của hai đường tiệm cận của ($\mathcal{H}_m$). Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

1.67. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}.$$

1.71. Đường thẳng $y = 3x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 2$ khi m bằng

- (A) 1 hoặc -1 ; (B) 4 hoặc 0 ;
(C) 2 hoặc -2 ; (D) 3 hoặc -3.

1.72. Tiếp tuyến của parabol $y = 4 - x^2$ tại điểm $(1 ; 3)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác vuông. Diện tích tam giác vuông đó là

- (A) $\frac{25}{4}$; (B) $\frac{5}{4}$;
(C) $\frac{25}{2}$; (D) $\frac{5}{2}$.

1.73. Đồ thị của hàm số $y = \frac{9(x^2 + 1)(x + 1)}{3x^2 - 7x + 2}$

- (A) Nhận đường thẳng $x = 3$ làm tiệm cận đứng ;
(B) Nhận đường thẳng $x = -2$ làm tiệm cận đứng ;
(C) Nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang ;
(D) Nhận đường thẳng $y = 3x + 10$ làm tiệm cận xiên.

1.74. Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$ cắt

- (A) Đường thẳng $y = 3$ tại hai điểm ;
(B) Đường thẳng $y = -4$ tại hai điểm ;
(C) Đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ tại ba điểm ;
(D) Trục hoành tại một điểm.

1.75. Hai tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ đi qua điểm $(2 ; 3)$ có các hệ số góc là

- (A) 2 và 6 ; (B) 1 và 4 ;
(C) 0 và 3 ; (D) -1 và 5.

1.76. Đường thẳng đi qua điểm $(1 ; 3)$ và có hệ số góc k cắt trục hoành tại điểm A và trục tung tại điểm B (hoành độ của điểm A và tung độ của điểm B là những số dương). Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất khi k bằng

- (A) -1 ; (B) -2 ;
(C) -3 ; (D) -4.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

1.77. Chứng minh rằng trong các hình hộp chữ nhật có đáy là một hình vuông và thể tích bằng 1000, hình lập phương có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

1.78. Một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp hình cầu bán kính a .

a) Chứng minh rằng thể tích của hình chóp là

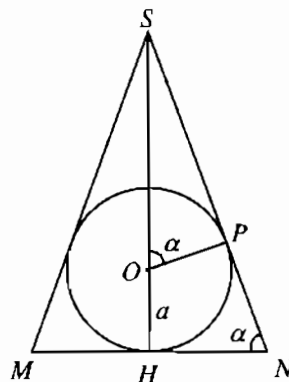
$$V = \frac{4a^2x^2}{3(x-2a)},$$

trong đó x là chiều cao của hình chóp.

b) Với giá trị nào của x , hình chóp có thể tích nhỏ nhất ?

Hướng dẫn a) Mặt phẳng đi qua đường cao SH của hình chóp và trung điểm M của một cạnh đáy cắt hình chóp theo tam giác cân SMN và cắt hình cầu theo hình tròn tâm O bán kính a nội tiếp tam giác SMN (h.1.6).

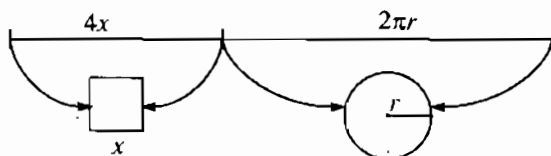
Có thể tính thể tích hình chóp theo x và $\alpha = \widehat{SNH}$. Sau đó sử dụng đẳng thức $x = a + OS$ để tìm hệ thức giữa a , x và α .



Hình 1.6

1.79. Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn thứ hai được uốn thành vòng tròn (h.1.7).

Phải cắt sợi dây như thế nào để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất ?



Hình 1.7

1.80. Một công ti bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100 000 đồng một tháng thì có thêm hai căn hộ bị bỏ trống.

Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ti đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng ? Khi đó, có bao nhiêu căn hộ được cho thuê ?

Hướng dẫn. Nếu tăng giá cho thuê mỗi căn hộ x (đồng/tháng) thì sẽ có $\frac{2x}{100000}$ căn hộ bị bỏ trống.

Khi đó, số tiền công ti thu được là

$$S = (2\,000\,000 + x) \left(50 - \frac{2x}{100000} \right) \text{ (đồng/tháng)}.$$

1.81. Cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - \frac{2}{3}.$$

- a) Với các giá trị nào của m , hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- b) Với các giá trị nào của m , hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 2$.

1.82. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1.$$

- a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đồ thị $(\mathcal{C}_m)$ của hàm số đã cho và đường thẳng $y = 2mx - 4m + 3$ luôn có một điểm chung cố định.
- b) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng đã cho và đường cong $(\mathcal{C}_m)$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt.
- c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với $m = 1$.

1.83. Cho hàm số

$$y = x^3 + (m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 2.$$

- a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đồ thị $(\mathcal{C}_m)$ của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định.
- b) Chứng minh rằng mọi đường cong $(\mathcal{C}_m)$ tiếp xúc với nhau tại một điểm.
Viết phương trình tiếp tuyến chung của các đường cong $(\mathcal{C}_m)$ tại điểm đó.

1.84. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số

$$y = x^4 - 4x^2 + 3.$$

b) Từ đồ thị ($\mathcal{C}$) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số

$$y = |x^4 - 4x^2 + 3|.$$

c) Tìm các giá trị của m sao cho phương trình

$$|x^4 - 4x^2 + 3| + 2m - 1 = 0$$

có 8 nghiệm phân biệt.

1.85. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$y = -x^4 - 2x^2 + 3.$$

b) Với các giá trị nào của m , đường thẳng $y = 8x + m$ là tiếp tuyến của đường cong ($\mathcal{C}$) ?

1.86. a) Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Từ đó suy ra rằng

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \text{ với mọi } a, b \in \mathbb{R}.$$

1.87. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{H}$) của hàm số.

$$y = \frac{x+4}{x+2}.$$

b) Chứng minh rằng parabol ($\mathcal{P}$) có phương trình $y = x^2 + 2$ tiếp xúc với đường cong ($\mathcal{H}$). Xác định tiếp điểm và viết phương trình tiếp tuyến chung của ($\mathcal{H}$) và ($\mathcal{C}$) tại điểm đó.

c) Xét vị trí tương đối của ($\mathcal{P}$) và ($\mathcal{H}$) (tức là xác định mỗi khoảng trên đó ($\mathcal{P}$) nằm phía trên hay phía dưới ($\mathcal{H}$)).

1.88. Cho hàm số

$$y = \frac{x-2}{x-1}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{H}$) của hàm số đã cho.

b) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$, đường thẳng $y = mx - 3m$ cắt đường cong ($\mathcal{H}$) tại hai điểm phân biệt, trong đó ít nhất một giao điểm có hoành độ lớn hơn 2.

1.89. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}.$$

b) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng $y = m - x$ cắt đường cong ($\mathcal{C}$) tại hai điểm A và B .

c) Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m thay đổi.

1.90. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + m}{x - 1}$, $m \neq -1$.

a) Tìm m sao cho đồ thị ($\mathcal{C}_m$) của hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y = -x + 7$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với $m = 1$.

1.91. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số đã cho.

b) Dựa vào đồ thị, hãy biện luận số giao điểm của đường thẳng $y = m(x + 1) + 3$ và đường cong ($\mathcal{C}$), tùy theo các giá trị của m .

C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1.1. $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

1.2. a) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; 1)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

1.3. a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

c) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

d) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

a) $f'(x) = (x+1)^2(2x-1)$;

b) $f'(x) = 3(x^2+1)(x-2)$;

c) $f'(x) = x^2(3-4x^2)$;

d) $f'(x) = 7x^4(3x-1)^2$.

1.4. Giải. a) Hàm số liên tục trên đoạn $[1 ; 2]$ và có đạo hàm

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} < 0 \quad \text{với mọi } x \in (1 ; 2).$$

Do đó hàm số nghịch biến trên đoạn $[1 ; 2]$.

b) Hàm số liên tục trên nửa khoảng $[3 ; +\infty)$ và có đạo hàm

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}} > 0 \quad \text{với mọi } x \in (3 ; +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[3 ; +\infty)$.

1.5. Giải. c) Vì $y' = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

1.6. Giải. Ta có $f'(x) = 1 - \sin 2x$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hàm số f liên tục trên mỗi đoạn $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi \right]$ và có đạo hàm

$$f'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi đoạn $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi ; \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$

Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1.7. Giải. Ta có $y' = 1 - \frac{m}{(x-1)^2}$ với mọi $x \neq 1$.

• Nếu $m \leq 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \neq 1$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; 1)$ và $(1 ; +\infty)$.

- Nếu $m > 0$ thì

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 1 - m}{(x - 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{m}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{m}$		1		$1 + \sqrt{m}$	$+\infty$	
y'		+	0	-		-	0	+
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(1 - \sqrt{m}; 1)$ và $(1; 1 + \sqrt{m})$.

Điều kiện đòi hỏi không được thoả mãn.

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $m \leq 0$.

1.8. Giải. Ta có $f'(x) = -x^2 + 4x + 2a + 1$.

$$\Delta' = 2a + 5; \Delta' = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2}.$$

- Nếu $a = -\frac{5}{2}$ thì $f'(x) = -(x - 2)^2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$ chỉ tại

điểm $x = 2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Dễ thấy hàm số f đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Điều kiện đòi hỏi không được thoả mãn.

- Nếu $\Delta' < 0$, tức là $a < -\frac{5}{2}$ thì $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$a \leq -\frac{5}{2}.$$

1.9. a) $f'(x) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sin^2 a$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn

b) Từ a) suy ra rằng f lấy giá trị không đổi trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$f(x) = f(0) = 2 - \sin^2 a - 2\cos^2 a = \sin^2 a \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

1.10. *Giải.* a) Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + \cos x \tan \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= -\sin x + \cos x \tan \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} \\ &= -\sin x + \tan \frac{x}{2} (1 + \cos x) \\ &= -\sin x + \tan \frac{x}{2} \cdot 2\cos^2 \frac{x}{2} \\ &= -\sin x + \sin x = 0 \text{ với mọi } x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

b) Từ a) suy ra rằng f là một hàm hằng trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó $f(x) = f(0) = 1$ với mọi $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

1.11. *Giải.* a) Hàm số xác định và liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

$$f'(x) = 2 \left(2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x-2}} \right) = \frac{x(5x-8)}{\sqrt{x-2}} > 0 \text{ với mọi } x \in (2; +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

b) Hàm số liên tục trên đoạn $[2; 3]$, $f(2) = 0$, $f(3) = 18$. Vì $0 < 11 < 18$ nên theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục, tồn tại số thực

$c \in (2 ; 3)$ sao cho $f(c) = 11$. Số thực c là một nghiệm của phương trình đã cho. Vì hàm số f đồng biến trên $[2 ; +\infty)$ nên c là nghiệm duy nhất của phương trình.

1.12. Giải. a) Hàm số liên tục trên đoạn $[0 ; \pi]$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có} \quad f'(x) &= 2\sin x \cos x - \sin x \\ &= \sin x(2\cos x - 1), \quad x \in (0 ; \pi).\end{aligned}$$

Vì khi đó $\sin x > 0$ nên

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{5}{4}$	-1

Hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ và nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$.

b) • Hàm số f liên tục trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}$ và $f(\pi) = -1$. Theo định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục, với mọi $m \in (-1 ; 1) \subset \left(-1 ; \frac{5}{4}\right)$, tồn tại một số thực $c \in \left(\frac{\pi}{3} ; \pi\right)$ sao cho $f(c) = 0$. Số c là nghiệm của phương trình trong b). Vì hàm số f nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$ nên trên đoạn này, phương trình có một nghiệm duy nhất.

• Vì với mọi $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$, ta có $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$ nên phương trình đã nêu không có nghiệm với $m \in (-1 ; 1)$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất thuộc $[0 ; \pi]$.

1.13. Giải. a) Hàm số đã cho liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \\&= \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} \\&= \frac{(1 - \cos x)^2(2\cos x + 1)}{\cos^2 x} > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Do đó hàm số f đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Từ a) suy ra $f(x) > f(0) = 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tức là ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

1.14. Giải. a) Hàm số f liên tục trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Từ a) suy ra $f(x) > 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, tức là

$$\tan x > x \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Xét hàm số

$$g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3} \text{ trên nửa khoảng } \left[0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Hàm số liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và có đạo hàm

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 > 0 \text{ với mọi } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

(vì $\tan x > x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$). Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $g(x) > g(0) = 0$ với mọi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

1.15. Giải. a) Hàm số f liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4 - \pi}{\pi} - \tan^2 x, x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}}.$$

Đễ dàng thấy rằng $0 < \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}} < 1 = \tan \frac{\pi}{4}$. Do đó tồn tại một số duy nhất

$$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \text{ sao cho } \tan \alpha = \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}}.$$

Bảng biến thiên

x	0	α	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

Hàm số đồng biến trên đoạn $[0; \alpha]$ và nghịch biến trên $\left[\alpha; \frac{\pi}{4}\right]$.

b) Theo bảng biến thiên, ta có

$$f(x) \geq 0 \text{ với mọi } x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

Từ đó có bất đẳng thức cần chứng minh.

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1.16. a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = 8$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$; $f(2) = 7$.

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị.

c) Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -2$; $f(-2) = -115$ và $x = 2$; $f(2) = 13$, đạt cực đại tại điểm $x = 1$; $f(1) = 20$.

d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$; $f(-1) = -7$, đạt cực tiểu tại điểm $x = 5$; $f(5) = 5$.

1.17. a) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$; $f(1) = 5$ và đạt cực đại tại điểm $x = 4$; $f(4) = 2$.

b) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$; $f(-2) = -\frac{1}{4}$ và đạt cực đại tại điểm $x = 2$; $f(2) = \frac{1}{4}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$; $f(2) = 2$.

d) *Giải.* Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{với } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{với } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{với } x > 0. \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1, \quad x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		1	2	1	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$, $f(0) = 2$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = -1$ và $x = 1$; $f(-1) = f(1) = 1$.

1.18. Giải. a) $y' = 2\sin x \cos x + \sqrt{3}\sin x$

$$= \sin x(2\cos x + \sqrt{3}).$$

Với $0 < x < \pi$, ta có $\sin x > 0$. Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{5\pi}{6}$	π
y'	+	0	-
y		$1\frac{3}{4}$	

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{5\pi}{6}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1\frac{3}{4}$.

Có thể áp dụng quy tắc 2.

$$y' = \sin 2x + \sqrt{3}\sin x; \quad y'' = 2\cos 2x + \sqrt{3}\cos x;$$

$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{5\pi}{6}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1\frac{3}{4}$.

b) $y' = 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x(1 - 2\sin x).$

Với $0 < x < \pi$, ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}.$$

Ta áp dụng quy tắc 2.

$$y'' = -2\sin x - 4\cos 2x ;$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} - 4\cos\pi = 2 > 0.$$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} - 4\cos\frac{\pi}{3} = -3 < 0.$$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$; $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

$$y''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{5\pi}{6} - 4\cos\frac{5\pi}{3} = -3 < 0.$$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{5\pi}{6}$; $y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

1.19. $a = 3$; $b = -9$; $c = 2$.

1.20. $p = 1$, $q = 1$.

Giải. Ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{q}{(x+1)^2} \text{ với mọi } x \neq -1.$$

- Nếu $q \leq 0$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \neq -1$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty ; -1)$ và $(-1 ; +\infty)$. Hàm số không có cực đại, cực tiểu.

- Nếu $q > 0$ thì phương trình

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - q}{(x+1)^2} = 0$$

có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 - \sqrt{q}$ và $x_2 = -1 + \sqrt{q}$.

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{q}$	-1	$-1+\sqrt{q}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow f(x_1) \searrow$		$\nwarrow f(x_2) \nearrow$			

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x_1 = -1 - \sqrt{q}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x_2 = -1 + \sqrt{q}$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$ khi và chỉ khi

$$-1 - \sqrt{q} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{q} = 1 \Leftrightarrow q = 1.$$

$$f(-2) = -2 \Leftrightarrow p = 1.$$

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1.21. a) $\min_{x \in [-4; 4]} f(x) = f(1) = -4$; $\max_{x \in [-4; 4]} f(x) = f(4) = 77$.

b) $\min_{x \in [-3; 1]} f(x) = f(-3) = -46$; $\max_{x \in [-3; 1]} f(x) = f(1) = 2$.

c) $\min_{x \in [-1; 3]} f(x) = f(2) = 0$; $\max_{x \in [-1; 3]} f(x) = f(3) = 25$.

d) *Giải.* $f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq -2$. Hàm số đồng biến trên nửa khoảng $(-2; 4]$.

x	-2	4
$f'(x)$		+
$f(x)$		$\frac{2}{3}$

$\max_{x \in (-2; 4]} f(x) = f(4) = \frac{2}{3}$. Hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng $(-2; 4]$.

e) Hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(1; +\infty)$;

$$\min_{x \in (1; +\infty)} f(x) = f(2) = 5.$$

f) *Giải.* Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \text{ với } -1 < x < 1.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$$\min_{x \in [-1; 1]} f(x) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \max_{x \in [-1; 1]} f(x) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

1.22. a) $\min_{x \in \mathbb{R}} y = -11$; $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 9$.

b) $\min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{23}{27}$; $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 5$.

Hướng dẫn

b) $y = \sin^3 x + (1 - \cos 2x) + \sin x + 1,$

$$y = \sin^3 x + 2\sin^2 x + \sin x + 1.$$

Đặt $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$), ta được

$$y = t^3 + 2t^2 + t + 1.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(t) = t^3 + 2t^2 + t + 1 \text{ trên đoạn } [-1; 1].$$

1.23. Hình thang có diện tích lớn nhất khi $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Khi đó diện tích hình thang

$$\text{là } S = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Hướng dẫn

Dựng $AH \perp CD$. Đặt $x = \widehat{ADC}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ta được $AH = \sin x$; $DH = \cos x$;

$DC = 1 + 2\cos x$. Diện tích hình thang là

$$S = \frac{AB + CD}{2} AH = (1 + \cos x) \sin x; 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Bài toán quy về: Tìm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho tại điểm đó S đạt giá trị lớn nhất

trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$S' = (\cos x + 1)(2\cos x - 1), 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1.24. Trong các tam giác vuông đó, tam giác vuông cân có diện tích lớn nhất.

Độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác đó là $x = y = 5\sqrt{2}$ (cm).

Hướng dẫn. Gọi x, y là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có cạnh huyền dài 10cm, $0 < x < 10$ và $0 < y < 10$.

Diện tích tam giác là $S = \frac{1}{2}xy$ (cm²).

Ta có $x^2 + y^2 = 100$.

S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi tích $x^2 y^2 = x^2(100 - x^2)$ đạt giá trị lớn nhất. Bài toán quy về: Tìm $x \in (0; 10)$ sao cho tại đó hàm số

$$z = x^2(100 - x^2), x \in (0; 10)$$

đạt giá trị lớn nhất.

1.25. a) $V = 5x\sqrt{100 - x^2} \text{ (m}^3\text{)}, 0 < x < 10.$

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x = 5\sqrt{2} \text{ (m)}.$

$$\max_{x \in (0; 10)} V = V(5\sqrt{2}) = 250(\text{m}^3).$$

1.26. *Giải.* a) Vì độ dài của đường tròn đáy hình nón bằng độ dài $\widehat{AB}$ của quạt tròn dùng làm phễu, nên ta có

$$2\pi r = R\alpha.$$

Do đó

$$r = \frac{R\alpha}{2\pi},$$

và
$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 \alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

b) Thể tích hình nón là

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{R^3}{24\pi^2} \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}, 0 < \alpha < 2\pi.$$

c) Ta tìm $\alpha \in (0; 2\pi)$ sao cho tại đó V đạt giá trị lớn nhất.

$$V' = \frac{R^3}{24\pi^2} \cdot \frac{\alpha(8\pi^2 - 3\alpha^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}.$$

Với $0 < \alpha < 2\pi$, ta có

$$V' = 0 \Leftrightarrow 8\pi^2 - 3\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \approx 1,63\pi.$$

α	0	$\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$	2π
V'	+	0	-
V		$\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$	

Hình nón có thể tích lớn nhất khi $\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi \approx 1,63\pi.$

$$\max_{\alpha \in (0; 2\pi)} V = V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi\right) = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3.$$

1.27. a) $y = \frac{1-x}{x+1}, 0 < x < 1;$

b) $PQ = \frac{x^2 + 1}{x + 1}, 0 < x < 1.$

Đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi $x = \sqrt{2} - 1.$

1.28. $T \approx 3,9665 (^{\circ}\text{C}).$

Hướng dẫn. Tìm $T \in (0; 30)$ sao cho tại đó V đạt giá trị nhỏ nhất.

1.29. 27,08(km/h) ; 8,9 (xe/ giây).

Hướng dẫn. $f'(v) = 290,4 \cdot \frac{-0,36v^2 + 264}{(0,36v^2 + 13,2v + 264)^2}, v > 0.$

$$f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = \frac{\sqrt{264}}{0,6}.$$

f đạt giá trị lớn nhất khi $v = \frac{\sqrt{264}}{0,6} \approx 27,08 \text{ (km/h)};$

$$f\left(\frac{\sqrt{264}}{0,6}\right) \approx f(27,08) \approx 8,9.$$

1.30. $BM = 2\sqrt{5} \approx 4,472(\text{km}).$

Hướng dẫn. Đặt $x = BM, 0 \leq x \leq 7.$ Khi đó, $AM = \sqrt{x^2 + 25}, MC = 7 - x.$

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6} \text{ (giờ)}, 0 \leq x \leq 7.$$

Hàm số T đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = 2\sqrt{5} \approx 4,472 \text{ (km)}.$

§4. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ PHÉP TÍNH TIẾN HỆ TOẠ ĐỘ

1.31. a) *Giải.* Ta có

$$y' = 3x^2 - 6x + 2 ; y'' = 6x - 6 ;$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Toạ độ của điểm I là $(1 ; -1)$.

b) Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y - 1. \end{cases}$$

Phương trình của $(\mathcal{C})$ đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y - 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 2(X + 1) - 1,$$

$$\text{hay } Y = X^3 - X.$$

Đây là một hàm số lẻ. Do đó đồ thị $(\mathcal{C})$ của nó nhận gốc toạ độ I làm tâm đối xứng.

1.32. a) $I(1 ; 4)$ là điểm uốn của đồ thị.

Công thức chuyển hệ toạ độ trong phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{OI}$ là

$$\begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y + 4. \end{cases}$$

Phương trình của đường cong đã cho đối với hệ toạ độ IXY là

$$Y = -X^3 + 5X.$$

$$\text{b) } I(-2 ; 2) ; \begin{cases} x = X - 2, \\ y = Y + 2 \end{cases} ; Y = X^3 - 11X.$$

1.33. a) Điểm $I(1 ; 2)$; phương trình tiếp tuyến của đường cong $(\mathcal{C})$ tại điểm I là $y = -3x + 5$.

b) Trên khoảng $(-\infty ; 1)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến ; trên khoảng $(1 ; +\infty)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến.

Hướng dẫn. b) Đặt $g(x) = -3x + 5$; $f(x) - g(x) = (x - 1)^3$.

1.34. a) $I(-1; -4)$; phương trình tiếp tuyến của đường cong tại điểm I là $y = x - 3$.

b) Trên khoảng $(-\infty; -1)$ đường cong ($\mathcal{C}$) nằm phía dưới tiếp tuyến; trên khoảng $(-1; +\infty)$ đường cong ($\mathcal{C}$) nằm phía trên tiếp tuyến.

1.35. a) $I(2; -1)$; $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 1 \end{cases}$; $Y = X^2$.

b) $I\left(-\frac{3}{4}; -2\right)$; $\begin{cases} x = X - \frac{3}{4} \\ y = Y - 2 \end{cases}$, $Y = 2X^2$.

§5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1.36. a) Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-$ và

$x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+$). Đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

b) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow 2^-$ và $x \rightarrow 2^+$). Đường thẳng $y = 4$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

c) *Giải.* Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận

đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow 1^+$ và $x \rightarrow 1^-$).

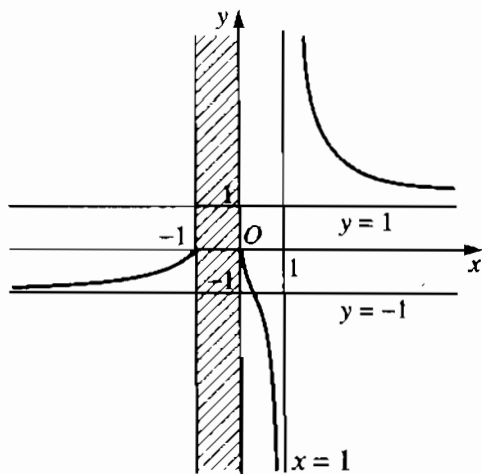
$$\text{Vì} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x}} = -1$$

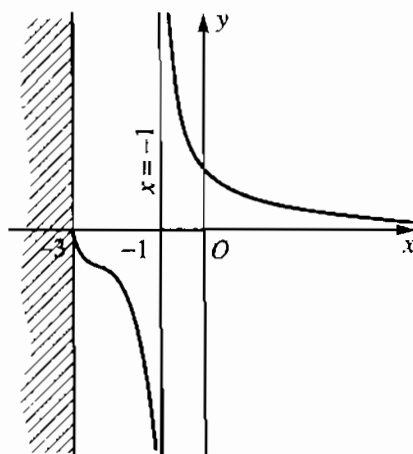
nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$) và đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$) (h.1.8).

d) Đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow (-1)^-$ và $x \rightarrow (-1)^+$).

Đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$) (h.1.9).



Hình 1.8



Hình 1.9

1.37. a) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow 0^+$ và $x \rightarrow 0^-$).

Đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

b) Đường thẳng $x = 3$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow 3^-$ và $x \rightarrow 3^+$).

Đường thẳng $y = x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

c) Giải

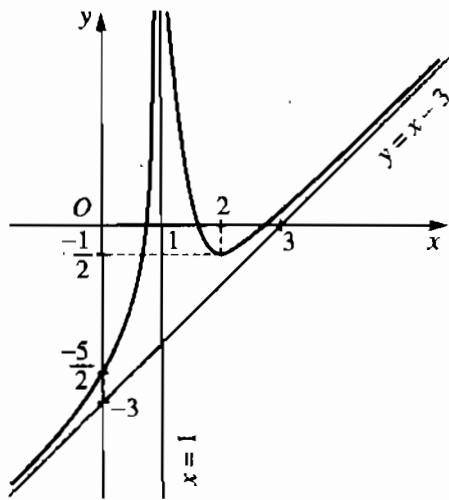
Vì $\lim_{x \rightarrow 1} y = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là

tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow 1^-$ và $x \rightarrow 1^+$). Vì

$$y - (x - 3) = \frac{1}{2(x-1)^2} \rightarrow 0$$

khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$

nên đường thẳng $y = x - 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$) (h.1.10).



Hình 1.10

d) Đường thẳng $y = 2x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

Hướng dẫn. Có thể viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = 2x - 1 + \frac{1 - 2x}{x^2 + 1}.$$

Vì hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của nó không có tiệm cận đứng.

1.38. a) Đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow 0^+$ và $x \rightarrow 0^-$).

Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow 2^+$ và $x \rightarrow 2^-$).

Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

b) Tiệm cận đứng : $x = 1$ (khi $x \rightarrow 1^+$ và $x \rightarrow 1^-$).

Tiệm cận đứng : $x = -1$ (khi $x \rightarrow (-1)^+$ và $x \rightarrow (-1)^-$).

Tiệm cận ngang : $y = 0$ (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

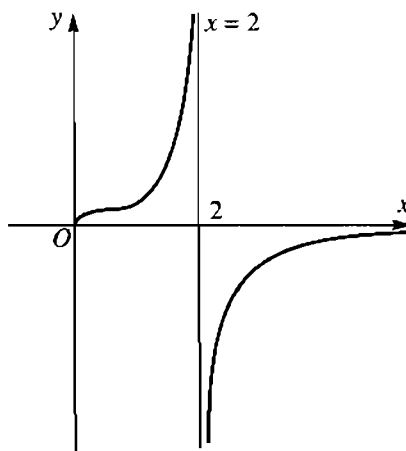
c) Tiệm cận đứng : $x = 1$ (khi $x \rightarrow 1^+$ và $x \rightarrow 1^-$).

Tiệm cận đứng : $x = -1$ (khi $x \rightarrow (-1)^+$ và $x \rightarrow (-1)^-$).

Tiệm cận xiên : $y = x$ (khi $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$).

d) Tiệm cận đứng : $x = 2$ (khi $x \rightarrow 2^+$ và $x \rightarrow 2^-$).

Tiệm cận ngang : $y = 0$ (khi $x \rightarrow +\infty$)
(h.1.11).



Hình 1.11

1.39. a) *Giải.* Ta có

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1, \end{aligned}$$

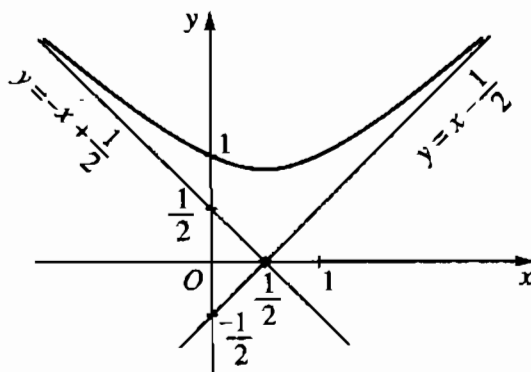
$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Đường thẳng $y = x - \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).

$$\begin{aligned}
 a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 1}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Đường thẳng $y = -x + \frac{1}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$) (h.1.12).



Hình 1.12

b) Tiệm cận xiên : $y = 2x + 1$ (khi $x \rightarrow +\infty$).

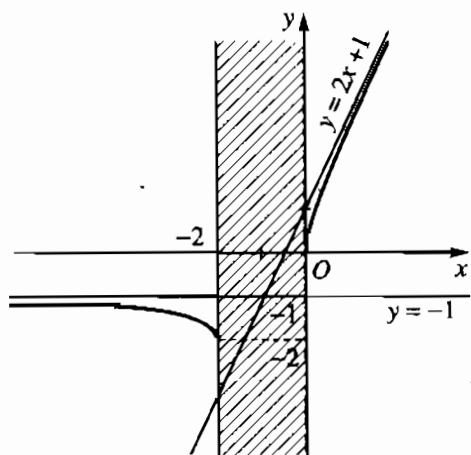
Tiệm cận ngang : $y = -1$ (khi $x \rightarrow -\infty$) (h.1.13).

c) Tiệm cận xiên : $y = x$ (khi $x \rightarrow +\infty$),

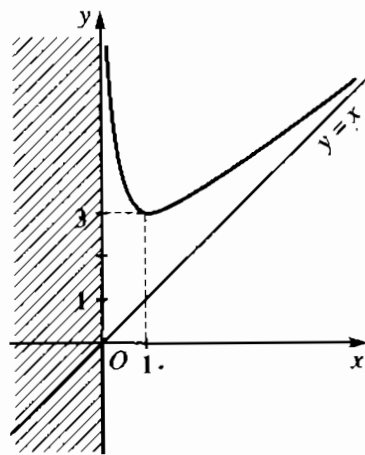
Tiệm cận xiên : $y = -x$ (khi $x \rightarrow -\infty$).

d) Tiệm cận đứng : $x = 0$ (khi $x \rightarrow 0^+$).

Tiệm cận xiên : $y = x$ (khi $x \rightarrow +\infty$) (h.1.14).



Hình 1.13



Hình 1.14

1.40. a) $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

b) $\begin{cases} x = X - \frac{3}{2} \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}; Y = -\frac{13}{4X}$.

1.41. a) $I(2; 5)$.

b) $\begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 5 \end{cases}; Y = 2X - \frac{1}{X}$.

$$1.42. a) I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \begin{cases} x = X - \frac{1}{2} \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}; Y = \frac{9}{4X}.$$

$$b) I(-1; 1); \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}; Y = 3X + \frac{2}{X}.$$

1.43. Giải. b) Ta có $f(-1) = 0$, và

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\frac{x+1}{x-1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\frac{x}{2}(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -\frac{1}{2}$. Vậy hàm số f có đạo hàm tại điểm $x = -1$

$$\text{và } f'(-1) = -\frac{1}{2}.$$

c) Phương trình tiếp tuyến của $(\mathcal{C})$ tại điểm I là $y = -\frac{1}{2}(x+1)$.

Trên khoảng $(-\infty; -1)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới tiếp tuyến đó; trên khoảng $(-1; +\infty)$ đường cong $(\mathcal{C})$ nằm phía trên tiếp tuyến đó.

d) Lấy đối xứng đường cong $(\mathcal{C})$ qua trục hoành, ta được đồ thị của hàm số $y = -f(x)$.

§6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM ĐA THỨC

1.44. b) $y = -x - \frac{7}{3}$.

1.45. c) $0 < m < 4$.

1.46. a) $a = 3, b = 3, c = 2$.

Hướng dẫn. a) Dễ thấy $c = 2$. Vì đồ thị của hàm số cần tìm đi qua điểm $(-1; 1)$ nên $f(-1) = -1 + a - b + 2 = 1$. Do đó $a = b$.

Vì đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ là -1 nên $f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$.

1.47. a) $m = 3, n = 2$.

1.48. *Giải*

a) Đường thẳng $y = 3x - \frac{1}{3}$ cắt trục tung tại điểm $A\left(0; -\frac{1}{3}\right)$.

Vì đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số đã cho đi qua điểm A nên $f(0) = p = -\frac{1}{3}$.

Ta có $f'(x) = -x^2 + 2mx + n$. Vì ($\mathcal{C}$) tiếp xúc với đường thẳng $y = 3x - \frac{1}{3}$ tại điểm A nên $f'(0) = n = 3$.

Do hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$ nên

$$f'(3) = -9 + 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Với các giá trị m, n, p vừa tìm được, ta có hàm số

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - \frac{1}{3}.$$

Khi đó, $f''(x) = -2x + 2$ và $f''(3) = -4 < 0$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

1.49. b) Hướng dẫn. Từ bảng biến thiên của hàm số, dễ dàng thấy rằng phương trình đã cho có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 , trong đó $x_1 < -1$, $x_2 \in (-1; 2)$ và $x_3 > 2$. Hơn nữa, vì $f(0) = -3 < 0$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$, nên $x_2 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

1.50. b) $y = -\frac{8}{3\sqrt{3}}x + \frac{10}{3}$ và $y = \frac{8}{3\sqrt{3}}x + \frac{10}{3}$.

1.51. Hướng dẫn. c) Giữ nguyên phần của $(\mathcal{C})$ nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần của $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành, ta được đồ thị của hàm số $y = |-x^4 + 2x^2 + 2|$.

§7. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

1.54. b) Với mọi giá trị của m , đường thẳng $y = m(x + 1) - 4$ luôn đi qua điểm $(-1; -4)$ thuộc $(\mathcal{H})$.

1.56. a) Giải. Ta viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = mx - 1 + \frac{1}{x + 2}.$$

Khi đó

$$y' = m - \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{mx^2 + 4mx + 4m - 1}{(x + 2)^2}.$$

Với $m > 0$, phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = -2 - \frac{1}{\sqrt{m}}; \quad x_2 = -2 + \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y						

Hàm số đạt cực đại tại điểm x_1 và đạt cực tiểu tại điểm x_2 .

1.57. b) $y = \left(1 + \frac{1}{x_0^2}\right)x - \frac{2}{x_0}.$

c) *Hướng dẫn.* Hoành độ của điểm B là nghiệm của phương trình

$$\left(1 + \frac{1}{x_0^2}\right)x - \frac{2}{x_0} = x, \text{ suy ra } x_B = 2x_0.$$

Vì $x_A + x_B = 0 + 2x_0 = 2x_M$, và ba điểm A, M, B thẳng hàng nên M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Dễ thấy

$$y_A = -\frac{2}{x_0}.$$

Diện tích tam giác OAB là

$$S = \frac{1}{2}|y_A||x_B| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|x_0|} \cdot 2|x_0| = 2.$$

1.58. a) $m \leq \frac{1}{2}.$

Hướng dẫn. Ta viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = -2x + m + \frac{1-2m}{x-1}.$$

Khi đó $y' = -2 + \frac{2m-1}{(x-1)^2}.$

- Nếu $2m-1 \leq 0$ hay $m \leq \frac{1}{2}$ thì $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$. Do đó hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

- Để thấy nếu $2m - 1 > 0$ hay $m > \frac{1}{2}$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1 < 1 < x_2$.

x	$-\infty$	x_1			1	x_2			$+\infty$
y'		-	0	+		+	0	-	
y									

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(x_1 ; 1)$ và $(1 ; x_2)$. Trong trường hợp này, các giá trị của m không thỏa mãn điều kiện đòi hỏi.

§8. MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

1.59. a) Giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned}
 x^3 + 1 - 2m(x + 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1 - 2m) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f(x) = x^2 - x + 1 - 2m = 0. \end{cases} & \quad (1)
 \end{aligned}$$

Đồ thị của hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1 , tức là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m - 3 > 0 \\ 3 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{8} \text{ và } m \neq \frac{3}{2}.$$

1.60. a) $(1 ; -1)$.

- b) Trên khoảng $(-\infty ; 1)$, $(\mathcal{C})$ nằm phía dưới parabol ; trên khoảng $(1 ; +\infty)$, $(\mathcal{C})$ nằm phía trên parabol.

1.61. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$4x^3 - 3x + 3 = 2m.$$

Do đó nghiệm của phương trình đã cho là hoành độ giao điểm của đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số $y = 4x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 2m$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = 4x^3 - 3x + 3$. Từ đó dễ dàng tìm được các giá trị của m sao cho đường thẳng $y = 2m$ cắt ($\mathcal{C}$) tại đúng một điểm.

1.62. b) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

c) *Hướng dẫn*

Đặt $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, ta có

$$g(x) - h(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{x+1}{2}.$$

- Với $x + 1 \leq 0$ hay $x \leq -1$, ta có $g(x) - h(x) > 0$.
- Với $x + 1 > 0$ hay $x > -1$,

$$g(x) - h(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) > h(x)$$

$$\Leftrightarrow g^2(x) > h^2(x)$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x + 1) > (x + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 1)^2 > 0.$$

Vậy $g(x) - h(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và chỉ có đẳng thức với $x = 1$.

1.63. *Hướng dẫn.* Giao điểm của các đồ thị của hai hàm số f và g là $A(1; 2)$.

Dễ thấy A thuộc đồ thị của hàm số h và các hàm số f, g, h có đạo hàm bằng nhau tại điểm $x = 1$.

1.64. Phương trình tiếp tuyến chung của $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{C})$ là $y = x - 5$.

Hướng dẫn. Ta viết hàm số thứ hai dưới dạng

$$y = -x + 1 - \frac{2}{x-1}.$$

Hoành độ tiếp điểm của $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{C})$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} -x + 1 - \frac{2}{x-1} = x^2 - 3x - 1 \\ -1 + \frac{2}{(x-1)^2} = 2x - 3. \end{cases}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với phương trình

$$\frac{2}{(x-1)^2} = 2(x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

$x = 2$ cũng là nghiệm của phương trình đầu của hệ.

Hệ có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Do đó hai đường cong $(\mathcal{P})$ và $(\mathcal{C})$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(2; -3)$.

1.65. Giải

Phương trình của đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k là

$$y = k\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}. \quad (\mathcal{D}_k)$$

Hoành độ giao điểm của parabol và đường thẳng $(\mathcal{D}_k)$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 3x = kx - \frac{3}{2}k - \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(k+3)x + 3k + 5 = 0.$$

Đường thẳng $(\mathcal{D}_k)$ là tiếp tuyến của parabol khi và chỉ khi phương trình trên có nghiệm kép, tức là

$$\Delta' = (k+3)^2 - 2(3k+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1.$$

Như vậy có hai tiếp tuyến của parabol đi qua điểm A . Hệ số góc của hai tiếp tuyến đó là $k_1 = 1$ và $k_2 = -1$. Vì $k_1 k_2 = -1$ nên hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

1.66. Giải

a) Đồ thị $(\mathcal{H}_m)$ của hàm số đã cho đi qua điểm $(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi

$$y_0 = \frac{mx_0 - 1}{x_0 - m}.$$

Với mọi $m \neq \pm 1$, đường cong $(\mathcal{H}_m)$ luôn đi qua điểm $(x_0; y_0)$ khi và chỉ khi phương trình trên (với ẩn số m) nghiệm đúng với mọi $m \neq \pm 1$. Với $m \neq \pm 1$, phương trình trên tương đương với phương trình

$$\begin{aligned} y_0(x_0 - m) &= mx_0 - 1 \\ \Leftrightarrow (x_0 + y_0)m &= x_0 y_0 + 1. \end{aligned}$$

Phương trình nghiệm đúng với mọi $m \neq \pm 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ x_0 y_0 + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y_0 = -x_0 \\ -x_0^2 + 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình có hai nghiệm $(-1; 1)$ và $(1; -1)$.

Vậy với mọi $m \neq \pm 1$, đường cong $(\mathcal{H}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định $A(-1; 1)$ và $B(1; -1)$.

b) Tập hợp các điểm M khi m lấy các giá trị trong tập hợp $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ là đường thẳng $y = x$ bỏ đi hai điểm $(-1; -1)$ và $(1; 1)$.

1.67. Giải

b) Hoàn thành đồ thị của đường thẳng $y = m$ và đồ thị $(\mathcal{C})$ của hàm số đã cho là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 1}{x} &= m \\ \Leftrightarrow x^2 - (m + 3)x + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{aligned}\Delta &= (m+3)^2 - 4 > 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 &> 0 \\ \Leftrightarrow m < -5 \text{ hoặc } m > -1.\end{aligned}\quad (2)$$

c) Khi đó, tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+3}{2} \text{ và } y_M = m. \quad (3)$$

Từ đó suy ra

$$x_M = \frac{y_M + 3}{2} \text{ hay } y_M = 2x_M - 3.$$

Vậy điểm M nằm trên đường thẳng $y = 2x - 3$.

Từ (3) suy ra $m = 2x_M - 3$.

Từ (2), ta có

$$\begin{cases} 2x_M - 3 < -5 \\ 2x_M - 3 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M < -1 \\ x_M > 1. \end{cases}$$

Vậy tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m lấy các giá trị trong tập hợp $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$ là phần của đường thẳng

$$y = 2x - 3 \text{ ứng với } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

Đó là hai nửa đường thẳng.

1.68. b) Giữ nguyên phần của đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần của đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành, ta được

$$\text{đồ thị của hàm số } y = \frac{x^2 + x + 1}{|x + 1|}.$$

c) $m > 3$.

Hướng dẫn. b) Vì $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{|x + 1|} = \left| \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \right| = |f(x)|.$$

c) Sử dụng đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

1.69. (C) ; 1.70. (D) ; 1.71. (B) ; 1.72. (A).

1.73. (D) ; 1.74. (C) ; 1.75. (A) ; 1.76. (C).

1.78. b) $x = 4a$.

Hướng dẫn. a) Ta có $HN = x \cot \alpha$; $MN = 2x \cot \alpha$. Thể tích hình chóp là

$$V = \frac{1}{3} MN^2 . SH = \frac{4}{3} x^3 \cot^2 \alpha.$$

Ta tính $\cot^2 \alpha$ theo a và x . Từ đẳng thức $SH = OH + OS$ ta có

$$x = a + \frac{a}{\cos \alpha} ; \text{ do đó } \cos \alpha = \frac{a}{x - a},$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{a^2}{(x - a)^2} = \frac{x^2 - 2ax}{(x - a)^2},$$

$$\cot^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{a^2}{x(x - 2a)}.$$

Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.

b) Chú ý rằng V xác định với $x > 2a$.

1.79. Độ dài cạnh hình vuông là $x = \frac{60}{\pi + 4}$ (cm).

Đoạn dây được uốn thành hình vuông có độ dài là $\frac{240}{\pi + 4} \approx 33,6$ (cm).

Bán kính đường tròn là $r = \frac{30}{\pi + 4}$ (cm).

Đoạn dây được uốn thành vòng tròn có độ dài là $\frac{60\pi}{\pi + 4} \approx 26,4$ (cm).

Hướng dẫn. Gọi x là độ dài cạnh hình vuông và r là bán kính hình tròn.
Ta có

$$4x + 2\pi r = 60.$$

Từ đó $x = \frac{1}{2}(30 - \pi r)$, $0 < r < \frac{30}{\pi}$.

Tổng diện tích hình vuông và hình tròn là

$$S = \pi r^2 + x^2 = \pi r^2 + \frac{1}{4}(30 - \pi r)^2.$$

Để thấy S đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $r = \frac{30}{\pi + 4}$.

1.80. 2 250 000 đồng/tháng ; 45 căn hộ.

1.81. a) $m \geq 1$; b) $m = 2$.

Hướng dẫn. a) $y' = x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 ; x = 3 - 2m.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$3 - 2m \leq 1.$$

b) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3 - 2m = -1$.

1.82. a) $A(2 ; 3)$; b) $m < 0$ hoặc $m > \frac{4}{9}$ và $m \neq \frac{9}{8}$.

Hướng dẫn. a) Đường thẳng $y = 2m(x - 2) + 3$ luôn đi qua điểm cố định $A(2 ; 3)$.

Vì $f(2) = 2^3 - 3m \cdot 2^2 + 3(2m - 1) \cdot 2 + 1 = 3$ với mọi m nên điểm A thuộc $(\mathcal{C}_m)$ với mọi m .

b) Hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong $(\mathcal{C}_m)$ là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1 = 2m(x - 2) + 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x - 2 - 2m(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[x^2 - (3m - 2)x + 1 - 2m] = 0.$$

1.83. a) $A(1; -4)$; **b)** $y = -x - 3$.

Hướng dẫn. **b)** $y' = 3x^2 + 2(m - 1)x - 2(m + 1)$.

$$y'(1) = -1 \text{ với mọi } m \in \mathbb{R}.$$

Do đó các đường cong $(\mathcal{C}_m)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $A(1; -4)$.

1.84. c) $0 < m < \frac{1}{2}$.

1.85. b) Giải. Ta có $y' = -4x^3 - 4x$.

Hoành độ tiếp điểm của đường thẳng và đường cong $(\mathcal{C})$ là nghiệm của phương trình

$$-4x^3 - 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$M(-1; 0)$ là tiếp điểm của đường thẳng và $(\mathcal{C})$. Vì điểm M nằm trên đường thẳng nên

$$8(-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = 8.$$

1.86. Giải. **b)** Vì $|a + b| \leq |a| + |b|$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ nên từ a) suy ra

$$f(|a + b|) \leq f(|a| + |b|),$$

hay

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} = \frac{|a|}{1 + |a| + |b|} + \frac{|b|}{1 + |a| + |b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

1.87. b) Tiếp điểm : $A(-1 ; 3)$. Phương trình tiếp tuyến chung : $y = -2x + 1$.

c) Trên mỗi khoảng $(-\infty ; -2)$ và $(0 ; +\infty)$, $(\mathcal{P})$ nằm phía trên $(\mathcal{H})$; trên khoảng $(-2 ; 0)$, $(\mathcal{P})$ nằm phía dưới $(\mathcal{H})$.

1.88. Giải. b) Hoàn chỉnh giao điểm của đường thẳng và đường cong $(\mathcal{H})$ là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} mx - 3m &= \frac{x-2}{x-1} \\ \Leftrightarrow (mx - 3m)(x-1) &= x-2 \\ \Leftrightarrow f(x) &= mx^2 - (4m+1)x + 3m+2 = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Vì với mọi $m \neq 0$,

$$\Delta = (4m+1)^2 - 4m(3m+2) = 4m^2 + 1 > 0$$

nên phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2 + \frac{1 - \sqrt{4m^2 + 1}}{2m}$ và

$x_2 = 2 + \frac{1 + \sqrt{4m^2 + 1}}{2m}$. Do đó, với mọi $m \neq 0$, đường thẳng cắt đường cong $(\mathcal{H})$ tại hai điểm phân biệt.

- Nếu $m < 0$ thì $x_1 > 2$ vì $\frac{1 - \sqrt{4m^2 + 1}}{2m} > 0$.
- Nếu $m > 0$ thì $x_2 > 2$ vì $\frac{1 + \sqrt{4m^2 + 1}}{2m} > 0$.

1.89. b) Với mọi $m \in \mathbb{R}$, đường thẳng đã cho đều cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm phân biệt

A và B .

c) Tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m thay đổi là đường thẳng $y = 3x - 4$.

1.90. a) $m = 1$.

1.91. b) Giải. Đường thẳng $y = m(x + 1) + 3$ có hệ số góc m , đi qua điểm $I(-1 ; 3)$; I nằm trên tiệm cận đứng $x = -1$ của $(\mathcal{C})$.

- Với $m < 0$ đường thẳng không cắt đường cong $(\mathcal{C})$.
- Với $m = 0$ đường thẳng tiếp xúc với $(\mathcal{C})$ tại điểm $(0 ; 3)$.
- Với $0 < m < 2$ đường thẳng cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm (cả hai giao điểm đều thuộc nhánh phải của $(\mathcal{C})$).
- Với $m = 2$, đường thẳng song song với tiệm cận xiên của $(\mathcal{C})$; đường thẳng cắt $(\mathcal{C})$ tại một điểm.
- Với $m > 2$, đường thẳng cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm thuộc hai nhánh của $(\mathcal{C})$.

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA LŨY THỪA VÀ CĂN

- Với n nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.
- Với n nguyên dương lẻ và a là số thực bất kì, chỉ có một căn bậc n của a , kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Với n nguyên dương chẵn và a là số thực dương, có đúng hai căn bậc n của a là hai số đối nhau ; căn có giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$, căn có giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.
- Số âm không có căn bậc chẵn.

Số mũ α	Cơ số a	Lũy thừa a^α
$\alpha = n \in \mathbb{N}^*$	$a \in \mathbb{R}$	$a^\alpha = a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số}}$
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n} \ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$\alpha = \lim r_n \ (r_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. TÍNH CHẤT CỦA LUYỆN THỪA

- Giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa.

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta} ; \quad \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta} ; (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta} ;$$

$$(a \cdot b)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha} ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}} .$$

$$\text{Với } a > 1, \quad a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta .$$

$$\text{Với } 0 < a < 1, \quad a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta .$$

3. ĐỊNH NGHĨA LÔGARIT

Với $a > 0, a \neq 1, b > 0$,

$$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^{\alpha} = b .$$

Đặc biệt

$$\log b = \alpha \Leftrightarrow 10^{\alpha} = b ;$$

$$\ln b = \alpha \Leftrightarrow e^{\alpha} = b .$$

4. TÍNH CHẤT CỦA LÔGARIT

Giả thiết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa.

- $\log_a 1 = 0 ; \log_a a = 1 ; a^{\log_a b} = b ; \log_a a^b = b .$

- $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c ;$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c ;$$

$$\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b .$$

Đặc biệt : $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.

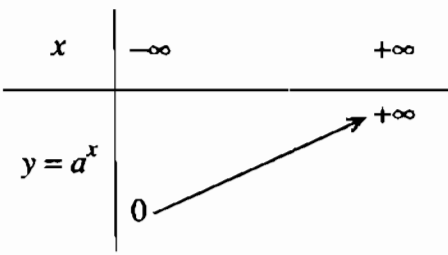
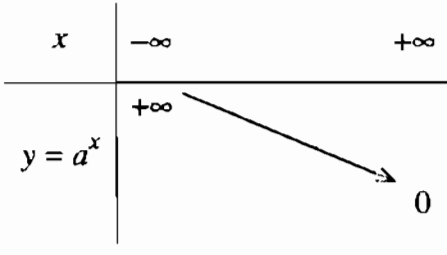
• $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

Đặc biệt : $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$.

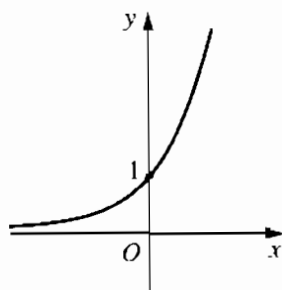
• Khi $a > 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c > 0$.

• Khi $0 < a < 1$ thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow 0 < b < c$.

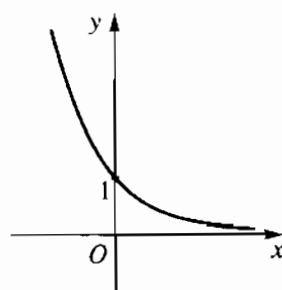
5. HÀM SỐ MŨ $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

$a > 1$	$0 < a < 1$
• $y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ • Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ • Bảng biến thiên 	• $y' < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ • Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ • Bảng biến thiên 

• Đồ thị



• Đồ thị



6. HÀM SỐ LÔGARIT $y = \log_a x$ ($a > 0$ và $a \neq 1$)

$a > 1$

- $y' > 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$
- Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

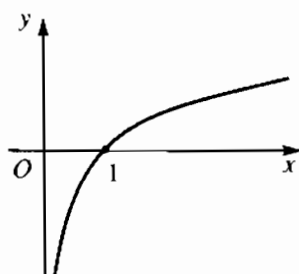
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

• Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$y = \log_a x$	$-\infty$	$+\infty$

• Đồ thị



$0 < a < 1$

- $y' < 0$ với mọi $x \in (0; +\infty)$
- Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$

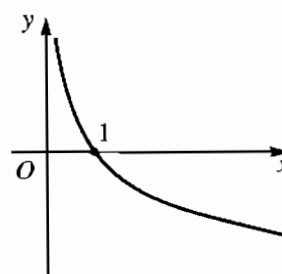
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$y = \log_a x$	$+\infty$	$-\infty$

• Đồ thị



7. HÀM SỐ LŨY THỪA $y = x^\alpha$

- Hàm số $y = x^\alpha$ có tập xác định là $(0; +\infty)$, trừ các trường hợp sau :

Nếu α nguyên dương thì hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Nếu α nguyên âm hoặc $\alpha = 0$ thì hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}^*$.

- Hàm số $y = x^\alpha$ ($\alpha \neq 0$) đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $\alpha > 0$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi $\alpha < 0$.
- Có đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 1)$.

8. GIỚI HẠN

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}; \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

9. BẢNG ĐẠO HÀM CẦN NHỚ

$(e^x)' = e^x$	$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot u'(x) \ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$((u(x))^\alpha)' = \alpha (u(x))^{\alpha-1} \cdot u'(x)$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n \sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

10. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

a) $0 < a \neq 1$ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) ;$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

b) $a > 1$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) ;$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0 ;$$

c) $0 < a < 1$

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) ;$$

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x).$$

B. ĐỀ BÀI

§1. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

2.1. Viết dưới dạng số nguyên hoặc phân số tối giản

$$3^{-1} \cdot 15 ; \frac{4}{6^{-2}} ; \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} ; (3 \cdot 5^{-2})^3 ; \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-1} ; \frac{2^6 \cdot 9}{3 \cdot 2^3}.$$

2.2. Viết dưới dạng lũy thừa nguyên của 10

$$10^{-2} \cdot 10^4 ; \frac{10^{-5}}{10^{-1}} ; (10^{-3})^{-5}.$$

2.3. Với giá trị nào của x thì đẳng thức đúng ?

a) $\sqrt[3]{x^3} = -x ;$

b) $\sqrt[6]{x^6} = -x ;$

c) $\sqrt[4]{x^4} = |x| ;$

d) $\sqrt[7]{x^7} = x.$

2.4. Hãy chứng minh các tính chất sau đây của căn bậc n dựa vào tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên dương :

a) Cho n là một số nguyên dương, k là một số nguyên. Khi đó, với hai số không âm a và b , ta có

$$1) \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} ;$$

$$2) \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0) ;$$

$$3) \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad (k > 0) ;$$

$$4) \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \quad (k > 0) ;$$

$$5) \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^k \quad (a \neq 0 \text{ nếu } k \leq 0).$$

b) Đối với hai số a, b tùy ý mà $0 \leq a < b$ và n nguyên dương, ta có

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

2.5. Dùng các khẳng định trong bài 2.4 để đơn giản các biểu thức sau :

$$a) \sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} ; \quad b) \sqrt[4]{5 \frac{1}{16}} ; \quad c) \sqrt[3]{\sqrt[5]{27}} ; \quad d) \sqrt[6]{64^3}.$$

2.6. So sánh

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt[3]{-0,4} \text{ và } \sqrt[5]{-0,3} ; & b) \sqrt[5]{-5} \text{ và } \sqrt[3]{-3} ; \\ c) \sqrt[3]{-2} \text{ và } \sqrt[5]{-4} ; & d) \sqrt[3]{-5} \text{ và } \sqrt[5]{-3}. \end{array}$$

2.7. Đơn giản biểu thức

$$\begin{array}{ll} a) \sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}, \text{ với } a < 0 ; & b) \sqrt[4]{a^4} + 2\sqrt[7]{a^7}, \text{ với } a \geq 0 ; \\ c) \sqrt[5]{a^5} - \sqrt[6]{a^6}, \text{ với } a \geq 0 ; & d) \sqrt[3]{a^3} + 3\sqrt[8]{a^8}, \text{ với } a < 0. \end{array}$$

2.8. Đơn giản biểu thức

$$a) \sqrt[3]{\sqrt{x^6 y^{12}}} - \left(\sqrt[5]{xy^2} \right)^5 ; \quad b) \frac{a^{\frac{4}{3}} b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} ;$$

$$c) \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \times a^{\frac{1}{4}} + 1 ;$$

$$d) \left(\frac{1}{m + \sqrt{2}} - \frac{m^2 + 4}{m^3 + 2\sqrt{2}} \right) \times \left(\frac{m}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{m} \right).$$

2.9. Tính giá trị của biểu thức

$$\text{a) } 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}} ;$$

$$\text{b) } 0,001^{-\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (9^0)^2 ;$$

$$\text{c) } 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5} ;$$

$$\text{d) } (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19 \cdot (-3)^{-3}.$$

2.10. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào có nghĩa, biểu thức nào không có nghĩa ?

$$\text{a) } (-2)^{-\frac{1}{5}} ;$$

$$\text{b) } (-3)^{-6} ;$$

$$\text{c) } 5^{\frac{3}{4}} ;$$

$$\text{d) } 0^{-3}.$$

2.11. Tìm điều kiện xác định của mỗi biểu thức sau :

$$\text{a) } (x+2)^{\frac{-4}{7}} ;$$

$$\text{b) } x^{\frac{1}{3}} ;$$

$$\text{c) } x^{-\frac{1}{4}} ;$$

$$\text{d) } (x-3)^{\frac{2}{3}}.$$

2.12. Với giá trị nào của x thì mỗi đẳng thức sau đúng ?

$$\text{a) } \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^6 = x ;$$

$$\text{b) } (x^4)^{\frac{1}{4}} = -x ;$$

$$\text{c) } (x^8)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{|x|} ;$$

$$\text{d) } (x^{0,7})^{\frac{1}{7}} = -x.$$

2.13. Biến đổi thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ (với $a > 0, b > 0, x > 0$)

$$\text{a) } \frac{1}{8} \sqrt[7]{2^5 \cdot ax^3} ;$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{a^5 \cdot \sqrt{a}} ;$$

$$\text{c) } \sqrt[8]{b^3 \cdot \sqrt[4]{b}} ;$$

$$\text{d) } \frac{1}{3} \sqrt[4]{27 \sqrt[3]{a}}.$$

2.14. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt[8]{3} + \sqrt[8]{2}} = (\sqrt[8]{3} - \sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

2.15. Khử căn thức ở mẫu

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}}$; b) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$.

2.16. Không dùng máy tính và bảng số, hãy tính

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}.$$

2.17. Tính giá trị của biểu thức

a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\frac{5}{4^{12}}} \cdot \pi^0$; b) $\frac{\sqrt[3]{3}}{e^0 \cdot \sqrt{3}} \cdot 9^{\frac{7}{12}}$.

§2. LUYỆN THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

2.18. Hãy so sánh

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ và 1 ; b) $2^{-\sqrt{12}}$ và $\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}$;
c) $3^{-\sqrt{2}}$ và 1 ; d) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{6}}$ và $0,7^{\frac{1}{3}}$.

2.19. Hãy tính

a) $\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; b) $4^{1-2\sqrt{3}} \cdot 16^{1+\sqrt{3}}$;
c) $27^{\sqrt{2}} : 3^{3\sqrt{2}}$; d) $\left(2^{\sqrt[5]{8}}\right)^{\sqrt[4]{4}}$.

2.20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a) $y = 3^{-x+\sqrt{x}}$;

b) $y = (0,5)^{\sin^2 x}$.

2.21. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $y = 2^x + 2^{-x}$;

b) $y = 2^{x-1} + 2^{3-x}$;

c) $y = e^{\frac{x}{1+x^2}}$;

d) $y = 5^{\sin^2 x} + 5^{\cos^2 x}$.

2.22. Với giá trị nào của a thì phương trình

$$2^{ax^2-4x-2a} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{-4}}$$

có nghiệm duy nhất ?

2.23. a) Hãy tìm a để có đẳng thức

$$4 \cdot 2^{3a} = 0,25^{\frac{a^2}{2}} .$$

b) Hãy tìm b để có đẳng thức

$$0,2^{3b-5} = 25^{b^2} .$$

2.24. a) Gọi m là giá trị gần đúng của 10^π , chính xác đến hàng phần vạn. Dùng máy tính bỏ túi để tính m .

b) Gọi (α_n) là dãy các giá trị gần đúng hơi thiếu của π , tức là

$$\alpha_1 = 3 ; \alpha_2 = 3,1 ; \alpha_3 = 3,14 ; \alpha_4 = 3,141 ; \alpha_5 = 3,1415 ; \alpha_6 = 3,14159 ; \dots$$

Dùng máy tính bỏ túi để xác định số tự nhiên n nhỏ nhất, sao cho giá trị gần đúng của 10^{α_n} (tính chính xác đến hàng phần vạn) cũng bằng m .

2.25. a) Gọi M là giá trị gần đúng của $2^{\sqrt{3}}$ (chính xác đến hàng phần nghìn). Dùng máy tính bỏ túi để tính M .

b) Gọi (β_n) là dãy các giá trị gần đúng hơi thừa của $\sqrt{3}$, tức là :

$$\beta_1 = 2 ; \beta_2 = 1,8 ; \beta_3 = 1,74 ; \beta_4 = 1,733 ; \beta_5 = 1,7321 ; \dots$$

Dùng máy tính bỏ túi để xác định số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho giá trị gần đúng của 2^{β_n} (tính chính xác đến hàng phần nghìn) cũng bằng M .

Đơn giản các biểu thức (bài 2.26 và 2.27)

2.26. a) $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$;

b) $a^{\pi} \cdot \sqrt[4]{a^2 : a^{4\pi}}$;

c) $(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$;

d) $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1,3} : \sqrt[3]{a^{3\sqrt{2}}}$.

2.27. a) $\frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1$;

b) $\frac{(a^{2\sqrt{3}} - 1)(a^{2\sqrt{3}} + a^{\sqrt{3}} + a^{3\sqrt{3}})}{a^{4\sqrt{3}} - a^{\sqrt{3}}}$;

c) $\frac{a^{\sqrt{5}} - b^{\sqrt{7}}}{\frac{2\sqrt{5}}{a^3} + a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} \frac{\sqrt{7}}{b^3} + b^{\frac{2\sqrt{7}}{3}}}$;

d) $\sqrt{(a^{\pi} + b^{\pi})^2 - \left(\frac{1}{4^{\pi}} ab\right)^{\pi}}$.

Sử dụng máy tính bỏ túi để giải các bài từ 2.28 đến 2.32.

2.28. Biết rằng tỉ lệ lạm phát hàng năm của một quốc gia trong 10 năm qua là 5%. Hỏi nếu năm 1994, giá của một loại hàng hoá của quốc gia đó là A (USD) thì sau n năm ($0 \leq n \leq 10$) giá của loại hàng hoá đó là bao nhiêu ?

Áp dụng. Năm 1994, tiền nạp xăng cho một ô tô là 24,95 USD. Hỏi năm 2000, tiền nạp xăng cho xe ô tô đó phải là bao nhiêu ?

Các bài toán từ 2.29 đến 2.32 sử dụng công thức tăng trưởng mũ.

2.29. Tỉ lệ tăng dân số hàng năm của In-đô-nê-xi-a là 1,5%. Năm 1998, dân số của nước này là 212 942 000 người. Hỏi dân số của In-đô-nê-xi-a vào năm 2006 ?

2.30. Năm 1994, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là $\frac{358}{10^6}$. Biết rằng tỉ lệ

thể tích khí CO_2 trong không khí tăng 0,4% hàng năm. Hỏi năm 2004, tỉ lệ thể tích khí CO_2 trong không khí là bao nhiêu ?

2.31. Biết rằng tỉ lệ giảm dân số hàng năm của Nga là 0,5%. Năm 1998, dân số của Nga là 146 861 000 người. Hỏi năm 2008 dân số của Nga sẽ là bao nhiêu ?

2.32. Tỉ lệ giảm dân số hàng năm của I-ta-li-a là 0,1%. Năm 1998, dân số của I-ta-li-a là 56 783 000 người. Hỏi dân số nước này vào năm 2020 (22 năm sau đó) ?

§3, §4. LÔGARIT, LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

2.33. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng, đẳng thức nào sai ?

a) $\log_{\pi} 1 = 0$;

b) $\log_3 \frac{1}{81} = 4$;

c) $\log_4 16 = 2$;

d) $\log_5 \frac{1}{125^{-1}} = -3$;

e) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = 2$;

g) $\log_{0,5} 4 = -2$.

2.34. Hãy tính

a) $\log_{\sqrt{2}} 8$;

b) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 27$;

c) $\log_{2\sqrt{2}} 128$;

d) $\log_{\sqrt{5}} 0,2$.

2.35. Hãy tìm lôgarit của các số sau theo cơ số a :

a) 25 ; $\frac{1}{5}$; $\sqrt{5}$ với $a = 5$;

b) 64 ; $\frac{1}{8}$; 2 với $a = 8$;

c) 16 ; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{2}$ với $a = 2$;

d) 27 ; $\frac{1}{9}$; $\sqrt{3}$ với $a = 3$.

2.36. Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau đây xác định ?

a) $\log_{0,2} (7 - x)$;

b) $\log_6 \frac{1}{1 - 2x}$;

c) $\log_{\frac{1}{4}} (-x^2)$;

d) $\log_{0,7} (-2x^3)$.

2.37. Tìm x , biết :

a) $\log_3 x = -1$;

b) $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$;

c) $\log_5 x = 2$;

d) $\log_{\frac{1}{x}} x = 1$;

e) $\log_{\sqrt{5}} x = 0$;

g) $\log_7 x = -2$.

2.38. Viết mỗi số sau dưới dạng lôgarit cơ số a

a) $2; \frac{1}{2}; 1; 0$ với $a = 4$; b) $3; -1; -3; 1$ với $a = 3$;

c) $3; \frac{1}{2}; 0; -1$ với $a = 2$; d) $1; -2; 0; 3$ với $a = 5$.

2.39. Hãy sử dụng tính chất của lôgarit để đơn giản biểu thức

a) $2,3^{\log_2 3^2}$; b) $\pi^{\log_\pi 5}$; c) $2^{\log_2 5}$; d) $3,8^{\log_{3,8} 11}$;

e) $5^{1+\log_5 3}$; g) $10^{1-\lg 2}$; h) $\left(\frac{1}{7}\right)^{1+\log_1 \frac{2}{7}}$; i) $3^{2-\log_3 18}$;

k) $4^{2\log_4 3}$; l) $5^{3\log_5 \frac{1}{2}}$; m) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\log_1 \frac{3}{2}}$; n) $6^{2\log_6 5}$.

2.40. Biết rằng $\log_5 2 = a$ và $\log_5 3 = b$. Hãy tính các lôgarit sau theo a và b :

a) $\log_5 72$; b) $\log_5 15$;

c) $\log_5 12$; d) $\log_5 30$.

2.41. Lấy lôgarit theo cơ số 3 của mỗi biểu thức sau đây ($a > 0, b > 0$), rồi viết dưới dạng tổng hoặc hiệu các lôgarit:

a) $\left(\sqrt[5]{a^3 b}\right)^{\frac{2}{3}}$; b) $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}$;

c) $9a^4 \sqrt[5]{b}$; d) $\frac{b^2}{27a^7}$.

Tính giá trị các biểu thức (bài 2.42 và 2.43).

2.42. a) $\log_9 15 + \log_9 18 - \log_9 10$; b) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$.

c) $\log_{36} 2 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}} 3$; d) $\log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$.

$$2.43. a) \left(81^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8} \right) \cdot 49^{\log_7 2} ;$$

$$b) 16^{1 + \log_4 5} + 4^{\frac{1}{2} \log_2 3 + 3 \log_5 5} ;$$

$$c) 72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4} \right).$$

Tìm x từ đẳng thức (bài 2.44 và 2.45).

$$2.44. a) \log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 3 ;$$

$$b) \log_4 x = \frac{1}{3} \log_4 216 - 2 \log_4 10 + 4 \log_4 3.$$

$$2.45. a) \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{2}{3} \log_{\frac{1}{2}} a - \frac{1}{5} \log_{\frac{1}{2}} b ; \quad b) \log_{\frac{2}{3}} x = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} a + \frac{4}{7} \log_{\frac{2}{3}} b.$$

2.46. Hãy so sánh

$$a) \log_2 10 \text{ và } \log_5 30 ;$$

$$b) \log_{0,3} 2 \text{ và } \log_5 3 ;$$

$$c) \log_3 5 \text{ và } \log_7 4 ;$$

$$d) \log_3 10 \text{ và } \log_8 57.$$

2.47. Tìm giá trị của biểu thức

$$a) \log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \cos \frac{\pi}{12} ;$$

$$b) \log_4 (\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{3}) + \log_4 (\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{21} + \sqrt[3]{9}) ;$$

$$c) \log_{10} \tan 4 + \log_{10} \cot 4 ;$$

$$d) \log_{\pi} (5 + 2\sqrt{6}) + \log_{\pi} (5 - 2\sqrt{6}).$$

2.48. Hãy chứng minh

$$a) \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2 ;$$

$$b) 4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4} ;$$

$$c) \log_3 7 + \log_7 3 > 2 ;$$

$$d) 3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}.$$

2.49. Biết $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$ và $abc \neq 1$. Tính $\log_{abc} x$ theo α, β, γ .

2.50. a) Biết $\log_7 12 = a$, $\log_{12} 24 = b$. Tính $\log_{54} 168$ theo a và b .

b) Biết $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$. Tính $\log_{25} 24$ theo a và b .

2.51. Đơn giản biểu thức sau rồi tính giá trị khi $x = -2$.

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4(4x^4).$$

2.52. Cho a, b là độ dài hai cạnh góc vuông, c là độ dài cạnh huyền của một tam giác vuông, trong đó $c - b \neq 1$ và $c + b \neq 1$.

Chứng minh rằng

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

2.53. Cho hai số dương a và b . Chứng minh rằng

$$a) a^{\log b} = b^{\log a};$$

$$b) a^{\ln b} = b^{\ln a}.$$

2.54. Hãy tính

$$a) \log(2 + \sqrt{3})^{20} + \log(2 - \sqrt{3})^{20}; \quad b) 3\log(\sqrt{2} + 1) + \log(5\sqrt{2} - 7);$$

$$c) \ln\sqrt{e} + \ln\frac{1}{e};$$

$$d) 5\ln e^{-1} + 4\ln(e^2\sqrt{e}).$$

2.55. Đơn giản biểu thức

$$a) A = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e;$$

$$b) B = 2\ln a + 3\log_a e - \frac{3}{\ln a} - \frac{2}{\log_a e}.$$

2.56. Hãy tính

$$a) \frac{\log_5 2}{\log_5 6} + \frac{\log_4 3}{\log_4 6}; \quad b) \left(\log_7 2 + \frac{1}{\log_5 7} \right) \cdot \log 7; \quad c) \frac{2\log_2 3}{\log_4 9}.$$

2.57. Hãy so sánh $2\ln e^3$ với $8 - \ln \frac{1}{e}$.

2.58. a) Biết $\log 3 \approx 0,4771$, tính $\log_{81} 90$ (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

b) Biết $\log 2 \approx 0,3010$; $\ln 10 \approx 2,3026$. Tính $\ln 2$ (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

2.59. Tìm x , biết

$$\text{a) } \log x = \frac{1}{2} \log 5a - 3 \log b + 4 \log c; \quad \text{b) } \log x = 5 \log m + \frac{2}{3} \log n - \frac{1}{4} \log p.$$

2.60. Năm 1992, người ta đã biết số $p = 2^{756839} - 1$ là một số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất được biết cho đến lúc đó). Hỏi rằng, viết trong hệ thập phân, số nguyên tố đó có bao nhiêu chữ số? (Biết rằng $\log 2 \approx 0,30102$).

2.61. Biểu diễn các số sau theo $\ln 2$:

$$\ln 16; \quad \ln 512; \quad \ln(0,125); \quad \frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8}; \quad \ln 72 - 2 \ln 3.$$

2.62. Biểu diễn các số sau theo $a = \ln 2$, $b = \ln 3$:

$$\ln 36; \quad \ln \frac{1}{12}; \quad \ln(2,25); \quad \ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln(0,875).$$

2.63. Biết $\log 3 = p$, $\log 5 = q$. Hãy chứng minh

$$\log_{15} 30 = \frac{1+p}{p+q}.$$

Sử dụng máy tính bỏ túi để giải các bài tập 2.64 và 2.65.

2.64. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức là P giảm theo công thức

$$P = P_0 \cdot e^{-ix},$$

trong đó $P_0 = 760 \text{ mmHg}$ là áp suất ở mức nước biển ($x = 0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000m thì áp suất của không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất không khí ở độ cao 3000m là bao nhiêu?

2.65. a) Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Nhật là 0,2%. Năm 1998, dân số của Nhật là 125 932 000. Vào năm nào dân số của Nhật sẽ là 140 000 000?

b) Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Ấn Độ là 1,7%. Năm 1998, dân số của Ấn Độ là 984 triệu. Hỏi sau bao nhiêu năm dân số của Ấn Độ sẽ đạt 1,5 tỉ?

§5, §6. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA

2.66. Trong các hàm số sau đây, hãy chỉ ra hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó ?

a) $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$;

b) $y = \left(\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}\right)^x$;

c) $y = 2^{-x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}\right)^x$;

d) $y = (\sqrt{11} - \sqrt{10})^x \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{10})^x$.

2.67. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{5x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 5} (2^x - 3^x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x \right)$.

2.68. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :

a) $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$;

b) $y = (\sin x - \cos x)e^{2x}$;

c) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

d) $y = 2^x - \sqrt{e^x}$.

2.69. Cho số n nguyên dương.

a) Tính $f^{(n)}(x)$, biết rằng $f(x) = a^x$ ($a > 0$ và $a \neq 1$) ;

b) Tính $f^{(n)}(x)$, biết rằng $f(x) = e^{3x}$; $f(x) = e^{kx}$ (k là hằng số) ;

c) Tính $f^{(2005)}(x)$, biết rằng $f(x) = e^x + e^{-x}$.

2.70. Vẽ đồ thị các hàm số sau :

a) $y = 3^x$;

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

c) $y = -3^x$;

d) $y = 3^{|x|}$.

2.71. Cho $0 < a < 1$. Với giá trị nào của x thì đồ thị của hàm số $y = a^x$

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = a$?

b) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y = a$?

2.72. Cũng câu hỏi tương tự như bài tập 2.71 với điều kiện $a > 1$.

2.73. Có thể nói gì về cơ số a , biết rằng :

a) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{2}{3}}$;

b) $a^{\frac{5}{4}} > a^{\frac{7}{8}}$.

2.74. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 9} \log_3 x$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(4x+1)}{x}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1) - \ln(2x+1)}{x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

Hướng dẫn d). Vận dụng công thức $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

2.75. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau :

a) $y = \ln(x^2 + 1)$;

b) $y = \frac{\ln x}{x}$;

c) $y = (1 + \ln x) \ln x$;

d) $y = x^2 \ln \sqrt{x^2 + 1}$.

2.76. Cho số n nguyên dương.

a) Tìm $f^{(n)}(x)$, biết rằng $f(x) = \ln x$;

b) Tìm $f^{(n)}(x)$, biết rằng $f(x) = x \ln x$.

2.77. Trong các hàm số sau đây, hãy chỉ ra hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên tập xác định của nó.

a) $y = \log_{\sqrt{3}} x$;

b) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$;

c) $y = \log_{\frac{\pi}{4}} x$;

d) $y = \log_a x$ với $a = \frac{1}{5(\sqrt{6} - \sqrt{5})}$.

2.78. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = \log_2 x$;

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;

c) $y = |\log_2 x|$;

d) $y = \log_2(x + 1)$.

2.79. Tính giá trị gần đúng của đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm đã chỉ ra (chính xác đến hàng phần nghìn) :

a) $y = \log_2 \cos x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$;

b) $y = \frac{3^x}{x^5}$ tại $x = 1$;

c) $y = \log_x 2$ tại $x = 5$.

2.80. Chứng minh rằng đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = -\log_a(-x)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$.

2.81. Với giá trị nào của x thì đồ thị của hàm số $y = \log_2 x$

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 2$?

b) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y = 1$?

2.82. Với giá trị nào của x thì đồ thị của hàm số $y = (0,5)^x$

a) Nằm ở phía trên đường thẳng $y = 4$?

b) Nằm ở phía dưới đường thẳng $y = \frac{1}{4}$?

2.83. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (3x + 1)^e$;

b) $y = \sqrt[3]{x}$;

c) $y = \sqrt[3]{\ln^2 2x}$;

d) $y = \sqrt[3]{\sqrt{\cos x}}$.

2.84. Vẽ đồ thị của các hàm số sau :

a) $y = x^3$;

b) $y = x^4$;

c) $y = \sqrt{x}$.

2.85. a) Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng minh rằng hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} (x + 1)$ nghịch biến trên tập các số thực dương.

2.86. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x+3} - e^3}{2x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1}$;

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{2x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan x}$.

§7. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

2.87. Giải các phương trình sau :

a) $(3 - 2\sqrt{2})^{3x} = 3 + 2\sqrt{2}$;

b) $5^{x+1} + 6.5^x - 3.5^{x-1} = 52$;

c) $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 9.5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$;

d) $3^x.2^{x+1} = 72$.

2.88. Giải các phương trình sau :

a) $\log_3 x(x+2) = 1$;

b) $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$;

c) $\log_2 (x^2 - 3) - \log_2 (6x - 10) + 1 = 0$;

d) $\log_2 (2^{x+1} - 5) = x$.

2.89. Giải các phương trình sau :

a) $2\log 2x = \log(x^2 + 75)$;

b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^{2x}$;

c) $\log(x+10) + \frac{1}{2}\log x^2 = 2 - \log 4$;

d) $(0,5)^{2+3x} = (\sqrt{2})^{-x}$.

2.90. Giải các phương trình sau :

a) $4^{x+1} - 6.2^{x+1} + 8 = 0$;

b) $3^{1+x} + 3^{1-x} = 10$;

c) $3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 27 = 0$;

d) $3.25^x + 2.49^x = 5.35^x$.

2.91. Giải các phương trình sau :

a) $3^{2x+4} + 45.6^x - 9.2^{2x+2} = 0$;

b) $8^{x+1} + 8.(0,5)^{3x} + 3.2^{x+3} = 125 - 24.(0,5)^x$.

2.92. Dùng phương pháp đặt ẩn phụ để giải các phương trình sau :

a) $\log_2^2(x-1)^2 + \log_2(x-1)^3 = 7$;

b) $\log_{4x} 8 - \log_{2x} 2 + \log_9 243 = 0$;

c) $3\sqrt{\log_3 x} - \log_3 3x - 1 = 0$.

2.93. Dùng phương pháp đặt ẩn phụ để giải các phương trình sau :

a) $4\log_9 x + \log_x 3 = 3$;

b) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$;

c) $\frac{1 + \log_3 x}{1 + \log_9 x} = \frac{1 + \log_{27} x}{1 + \log_{81} x}$.

2.94. Dùng phương pháp đặt ẩn phụ để giải các phương trình sau :

a) $\left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6 - \sqrt{35}}\right)^x = 12$;

b) $\log_2(2x^2 - 5) + \log_{2x^2-5} 4 = 3$.

2.95. Giải các phương trình sau :

a) $\log_9(\log_3 x) + \log_3(\log_9 x) = 3 + \log_3 4$;

b) $\log_2 x \log_4 x \log_8 x \log_{16} x = \frac{2}{3}$;

c) $\log_5 x^4 - \log_2 x^3 - 2 = -6 \log_2 x \log_5 x$.

2.96. Tìm m để mỗi phương trình sau có nghiệm :

a) $25^{x+1} - 5^{x+2} + m = 0$;

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - m \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2m + 1 = 0$.

2.97. Tìm m để mỗi phương trình sau có nghiệm duy nhất :

a) $16^{x+1} + 4^{x-1} - 5m = 0$;

b) $2\log_2(x+4) = \log_2(mx)$.

2.98. Giải các phương trình sau :

a) $5^{7^x} = 7^{5^x}$;

b) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$;

c) $5^{3-\log_5 x} = 25x$;

d) $x^{-6} \cdot 3^{-\log_x 3} = 3^{-5}$.

2.99. Giải các phương trình sau :

a) $9x^{\log_9 x} = x^2$;

b) $x^4 \cdot 5^3 = 5^{\log_x 5}$.

2.100. Giải các phương trình sau :

a) $2^{x^2-4} = 3^{x-2}$;

b) $4^{\log_{0.5}(\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 2)} = \frac{1}{9}$.

2.101. Giải các phương trình sau :

a) $3^x = 5 - 2x$;

b) $\left(\frac{4}{5}\right)^x = -2x^2 + 4x - 9$;

c) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5x - \frac{3}{2}$.

2.102. Giải các phương trình sau :

a) $6^x + 8^x = 10^x$;

b) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = \sqrt{10^x}$;

c) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$;

d) $3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x = -2x + 6$.

2.103. Giải các phương trình sau :

a) $3^{2x-1} + 3^{x-1}(3x-7) - x + 2 = 0$;

b) $25^{5-x} - 2.5^{5-x}(x-2) + 3 - 2x = 0$.

2.104. Giải các phương trình sau :

a) $x^{\log_2 9} = x^2.3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$;

b) $3^x - 4 = 5^{\frac{x}{2}}$.

2.105. a) Cho $a > 1$, $b > 1$. Chứng minh rằng, nếu phương trình $a^x + b^x = c$ có nghiệm x_0 thì nghiệm đó là duy nhất.

b) Chứng minh kết quả tương tự với trường hợp $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$.

2.106. Giải các phương trình sau :

a) $2^{\cos^2 x} + 4.2^{\sin^2 x} = 6$;

b) $3^{2\sin x + 2\cos x + 1} - \left(\frac{1}{15}\right)^{-\cos x - \sin x - \log_{15} 8} + 5^{2\sin x + 2\cos x + 1} = 0$.

2.107. Giải các phương trình sau :

a) $\log(x^3 + 1) - \frac{1}{2}\log(x^2 + 2x + 1) = \log x$;

b) $\log_3(3x^2) \cdot \log_x^2 3 = 1$.

2.108. Giải các phương trình sau :

a) $x + \log(3^x - 1) = x \log \frac{10}{3} + \log 6$;

b) $x + \log_5(125 - 5^x) = 25$.

2.109. Tùy theo m , hãy biện luận số nghiệm của phương trình :

$$(m - 3).9^x + 2(m + 1).3^x - m - 1 = 0.$$

2.110. Giải phương trình

$$2\log_3 \cot x = \log_2 \cos x.$$

2.111. Giải và biện luận các phương trình sau :

a) $\log_3 x - \log_3(x - 2) = \log_{\sqrt{3}} m$;

b) $4^{\sin x} + 2^{1+\sin x} = m$.

§8. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Giải các hệ phương trình sau (từ bài 2.112 đến 2.118).

2.112. a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 + \log_2 15 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 1 + \log 8 \\ \log(x + y) - \log(x - y) = \log 3. \end{cases}$

2.113. a) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y = 25 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$

2.114. a) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3^{-x} + 3^{-y} = \frac{4}{9} \\ x + y = 3. \end{cases}$

2.115. a) $\begin{cases} 2^x + 5^{x+y} = 7 \\ 2^{x-1} \cdot 5^{x+y} = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ \log_3(x + y) - \log_5(x - y) = 1. \end{cases}$

$$2.116. a) \begin{cases} \log^2 x = \log^2 y + \log^2 xy \\ \log^2(x-y) + \log x \log y = 0; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3^{\log x} = 4^{\log y} \\ (4x)^{\log 4} = (3y)^{\log 3}. \end{cases}$$

$$2.117. a) \begin{cases} 4^{\log_3 xy} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y = 1 + \log_2 x \\ x^y = 64. \end{cases}$$

$$2.118. a) \begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_5(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5^{\ln x} = 6^{\ln y} \\ (6x)^{\ln 6} = (5y)^{\ln 5}. \end{cases}$$

§9. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

2.119. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau :

$$a) y = \log(x^2 - 3x + 2);$$

$$b) y = \sqrt{\log_{0,8} \frac{2x+1}{x+5} - 2};$$

$$c) y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1};$$

$$d) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1}.$$

2.120. Tìm điều kiện của m để mỗi hàm số sau xác định với mọi x :

$$a) y = \log_5(x^2 - mx + m + 2);$$

$$b) y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}};$$

$$c) y = \log_2 \log_3[(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m].$$

Giải các bất phương trình (từ bài 2.121 đến 2.125)

$$2.121. a) 3^{2x+5} > 1;$$

$$b) 27^x < \frac{1}{3};$$

$$c) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4} > 4;$$

$$d) 6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}.$$

$$2.122. \text{ a) } \log_{\frac{1}{2}}(5x+1) < -5 ;$$

$$\text{b) } \log_4 \frac{1+3x}{x-1} \geq 0 ;$$

$$\text{c) } \log_{0,8}(x^2+x+1) < \log_{0,8}(2x+5) ;$$

$$\text{d) } \log_{\frac{1}{3}} \left(\log_2 \frac{1+2x}{1+x} \right) > 0.$$

$$2.123. \text{ a) } 9^x < 3^{x+1} + 4 ;$$

$$\text{b) } 3^x - 3^{-x+2} + 8 > 0 ;$$

$$\text{c) } x^{\log_3 x + 4} < 243 ;$$

$$\text{d) } \log_2^2 x + \log_2 4x - 4 \geq 0.$$

$$2.124. \text{ a) } \log_x 3 - \log_{\frac{x}{3}} 3 < 0 ;$$

$$\text{b) } \log_2(x+4)(x+2) \leq 6 ;$$

$$\text{c) } \log_2 x + \log_2 \frac{3x-1}{x^2+1} > 0 ;$$

$$\text{d) } \log_{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x - 1 \right] < \log_{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{4} \right)^x - 3 \right].$$

$$2.125. \text{ a) } 3 \log_x 4 + 2 \log_{4x} 4 + 3 \log_{16x} 4 \leq 0 ;$$

$$\text{b) } \log_4 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi bài tập dưới đây, hãy chọn một phương án trong các phương án đã cho để được khẳng định đúng.

2.126. a) Nếu $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$ thì

- (A) $a > 1, b > 1$; (B) $0 < a < 1, b > 1$;
(C) $a > 1, 0 < b < 1$; (D) $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

b) Nếu $a^{\frac{13}{7}} < a^{\frac{15}{8}}$ và $\log_b(\sqrt{2} + \sqrt{5}) > \log_b(2 + \sqrt{3})$ thì

- (A) $a > 1, b > 1$; (B) $0 < a < 1, b > 1$;
(C) $a > 1, 0 < b < 1$; (D) $0 < a < 1, 0 < b < 1$.

c) Nếu $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^x > \sqrt{6} + \sqrt{5}$ thì

- (A) $x > 1$; (B) $x < 1$; (C) $x > -1$; (D) $x < -1$.

2.127. a) Giá trị của $\log_a a$ ($a > 0$ và $a \neq 1$) bằng

- (A) 3; (B) $\frac{1}{3}$; (C) -3; (D) $-\frac{1}{3}$.

b) Giá trị của $a^{\log_a 4}$ ($a > 0$ và $a \neq 1$) bằng

- (A) 4; (B) 2; (C) 16; (D) $\frac{1}{2}$.

c) Giá trị của $a^{4\log_a 5}$ ($a > 0$ và $a \neq 1$) bằng

- (A) 5^8 ; (B) 5^2 ; (C) 5^4 ; (D) 5.

2.128. Nếu $\log_{12} 6 = a$ và $\log_{12} 7 = b$ thì

- (A) $\log_2 7 = \frac{a}{a-1}$; (B) $\log_2 7 = \frac{a}{1-b}$;
(C) $\log_2 7 = \frac{a}{1+b}$; (D) $\log_2 7 = \frac{b}{1-a}$.

2.129. a) Nếu $\log 3 = a$ thì $\log 9000$ bằng

(A) $a^2 + 3$;

(B) $3 + 2a$;

(C) $3a^2$;

(D) a^2 .

b) Nếu $\log 3 = a$ thì $\frac{1}{\log_{81} 100}$ bằng

(A) a^4 ;

(B) $\frac{a}{8}$;

(C) $2a$;

(D) $16a$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

2.130. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai ?
Giải thích vì sao.

a) $\log_2 5 > 0$;

b) $\log_{0,2} 0,8 < 0$;

c) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7} > 0$;

d) $\log_3 4 > \log_4 \frac{1}{3}$.

2.131. Đơn giản các biểu thức sau :

a) $A = 25^{\log_5 6} + 10^{1+\log 2} - 2^{\log_4 9}$; b) $B = \log_2 \log_5 \sqrt{45}$.

2.132. Cho $a > 3b > 0$ và $a^2 + 9b^2 = 10ab$. Chứng minh rằng

$$\log(a - 3b) - \log 2 = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

2.133. Tính đạo hàm của các hàm số sau trên tập xác định của nó :

a) $y = e^{3x+1} \cos 2x$;

b) $y = \ln \sqrt{x^3 - 1}$;

c) $y = \log_2(x^2 + e^x)$;

d) $y = 5^{\cos x + \sin x}$.

2.134. Cho ba số dương a, b, c đôi một khác nhau và khác 1. Chứng minh rằng

a) $\log_a^2 \frac{b}{c} = \log_a^2 \frac{c}{b}$;

b) $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$;

c) Trong ba số $\log_{\frac{a}{b}} \frac{c}{b}$, $\log_{\frac{b}{c}} \frac{a}{c}$, $\log_{\frac{c}{a}} \frac{b}{a}$ luôn có ít nhất một số lớn hơn 1.

2.135. Giải các phương trình sau :

$$a) 9.243^{\frac{x+5}{x-7}} = 2187^{\frac{x+17}{x-3}} ;$$

$$b) 4^{\sqrt{x^2+5}-x} - 2^{\sqrt{x^2+5}-x+2} = -4 ;$$

$$c) |2005 - x|^{2006} + |2006 - x|^{2005} = 1 ;$$

$$d) 3^x + 3^{-x} = \sqrt[3]{8 - x^2}.$$

2.136. Giải các phương trình sau :

$$a) \log_2 x - \log_4(x-3) = 2 ;$$

$$b) \frac{\log_{\sqrt{5}} x \cdot \log_{25} x}{\log_5 x} = \log_{125} 2x ;$$

$$c) \frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2\log_1(4-x)}{\frac{4}{\log_2(3+x)}} = 1 ;$$

$$d) 7^{\log x} + x^{\log 7} = 98.$$

2.137. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 500 \\ \log_{\sqrt{2}}(2x-y) = 4 ; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_{27} xy = 3 \log_{27} x \log_{27} y \\ \log_3 \frac{x}{y} = \frac{3 \log_3 x}{4 \log_3 y} . \end{cases}$$

2.138. Giải các bất phương trình sau :

$$a) |\log_4 x - 3| < 1 ;$$

$$b) \log_2 x + \log_3 x < 1 + \log_2 x \log_3 x ;$$

$$c) 15^{2x+3} > 5^{3x+1} \cdot 3^{x+5} ;$$

$$d) \frac{\log_a^2 x + \log_a x + 2}{\log_a x - 2} > 1 \text{ với } a > 0 \text{ và } a \neq 1.$$

C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

§1. LUYỆN THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

2.1. 5 ; 144 ; $\frac{7}{3}$; $\frac{27}{15625}$; $\frac{1}{6}$; 24 .

2.2. 10^2 ; 10^{-4} ; 10^{15} .

2.3. a) $x = 0$; b) $x \leq 0$; c) mọi x ; d) mọi x .

2.4. a) *Hướng dẫn*

1) và 2) : Luyện thừa bậc n hai vế.

3) và 4) : Luyện thừa bậc nk hai vế.

5) Sử dụng 1) khi $a = b$ và quy nạp theo k .

b) *Giải*. Do $0 \leq a < b$ nên $\sqrt[n]{a} \geq 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$.

Giả sử $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$, suy ra $(\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n$ vì $n > 0$, hay $a \geq b$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $a < b$.

Vậy $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

2.5. a) 2 ; b) $\frac{3}{2}$; c) $\sqrt[5]{3}$; d) 8 .

2.6. a) $\sqrt[3]{-0,4} > \sqrt[3]{-0,3}$; b) $\sqrt[5]{-5} > \sqrt[3]{-3}$;
c) $\sqrt[3]{-2} > \sqrt[5]{-4}$; d) $\sqrt[3]{-5} < \sqrt[5]{-3}$.

Hướng dẫn. Xét luyện thừa bậc 15 của hai số $\sqrt[3]{|a|}$ và $\sqrt[5]{|b|}$. Sau đó sử dụng tính chất b) bài 2.4.

2.7. a) $2a$; b) $3a$;
c) 0 ; d) $-2a$.

2.8. a) bằng 0 nếu $x \geq 0$; bằng $-2xy^2$ nếu $x < 0$; b) ab ;
c) $\sqrt{a}$; d) $\frac{-\sqrt{2}}{2m}$.

2.9. a) $-2\frac{26}{27}$;

b) $6\frac{15}{16}$;

c) 12 ;

d) 10.

2.10. a) không có nghĩa ;

b) có nghĩa ;

c) có nghĩa ;

d) không có nghĩa.

2.11. a) $x > -2$;

b) $x > 0$;

c) $x > 0$;

d) $x > 3$.

2.12. a) $x > 0$;

b) $x < 0$;

c) $x = \pm 1$;

d) Không có giá trị nào của x .

2.13. a) $2^{-\frac{16}{7}} \cdot \frac{1}{a^7} x^{\frac{3}{7}}$;

b) $a^{\frac{7}{4}}$;

c) $b^{\frac{5}{8}}$;

d) $3^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{12}}$.

2.14. *Hướng dẫn.* Biến đổi vế trái thành vế phải và áp dụng hằng đẳng thức :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

2.15. a) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt[3]{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{9} - 2}$

$$= \frac{(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})(\sqrt[3]{9^2} + 2\sqrt[3]{9} + 4)}{(\sqrt[3]{9})^3 - 2^3} = \frac{(\sqrt[3]{3} - \sqrt{2})(3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{9} + 4)}{1}.$$

b) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{12}.$

2.16. Đặt $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$. Khi đó

$$x^3 = 12 + 3\sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} \quad x \Leftrightarrow x^3 = 12 + 3 \cdot \frac{5}{3}x \Leftrightarrow x^3 - 5x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 4) = 0 \quad (1)$$

Ta có $x^2 + 3x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 3$.

2.17. a) 1 ; b) 3.

§2. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

2.18. a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} > 1$; b) $2^{-\sqrt{12}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2,5}$;

c) $3^{-\sqrt{2}} < 1$; d) $0,7^{\frac{\sqrt{5}}{6}} < 0,7^{\frac{1}{3}}$.

2.19. a) $3\sqrt{3}$; b) 64; c) 1; d) 4.

2.20. a) $\sqrt[4]{3}$; b) 1.

Hướng dẫn

a) $-x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}, \forall x \geq 0.$

b) $\sin^2 x \geq 0, \forall x.$

2.21. a) 2; b) 4; c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; d) $2\sqrt{5}.$

Hướng dẫn. a), b), d) Sử dụng bất đẳng thức Cô-si.

c) Nhận xét: $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$

2.22. $a = 0.$

Giải. $\frac{1}{(\sqrt{2})^{-4}} = (\sqrt{2})^4 = 2^2.$ Để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, điều kiện cần và đủ là phương trình

$$ax^2 - 4x - 2a = 2 \quad (1)$$

có nghiệm duy nhất.

Khi $a = 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}.$

Khi $a \neq 0$, (1) trở thành phương trình bậc hai $ax^2 - 4x - 2(a+1) = 0.$ Nó có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta' = 4 + 2(a+1)a = 0$$

hay $a^2 + a + 2 = 0.$ Điều này không xảy ra.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $a = 0.$

- 2.23. a) $a \in \{-1; -2\}$; b) $b \in \left\{-\frac{5}{2}; 1\right\}$.
- 2.24. a) $m = 1385,4557$; b) $n = 9$.
- 2.25. a) $m = 3,322$; b) $n = 5$.
- 2.26. a) a ; b) $\sqrt{a}$; c) a^3 ; d) $a^{1,3}$.
- 2.27. a) $\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}}}$; b) $a^{\sqrt{3}} + 1$;
- c) $a^{\frac{\sqrt{5}}{3}} - b^{\frac{\sqrt{7}}{3}}$; d) $|a^{\pi} - b^{\pi}|$.
- 2.28. $A(1 + 0,05)^n$ USD; 33,44USD.
- 2.29. 240091000.
- 2.30. $373 \cdot 10^{-6}$.
- 2.31. 13 969 9000.
- 2.32. 55 547 000.

§3, §4. LÔGARIT, LÔGARIT THẬP PHẦN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

- 2.33. a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Sai; e) Sai; g) Đúng.
- 2.34. a) 6; b) -6; c) $\frac{14}{3}$; d) -2.

Hướng dẫn. Biến đổi các lôgarit đã cho về dạng $\log_{a^{\alpha}} a^{\beta}$. Từ đó có

$$\log_{a^{\alpha}} a^{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

- 2.35. a) $2; -1; \frac{1}{2}$; b) $2; -1; \frac{1}{3}$;
- c) $4; -2; \frac{1}{2}$; d) $3; -2; \frac{1}{2}$.

2.41. a) $\frac{2}{5}\log_3 a + \frac{2}{15}\log_3 b$;

b) $\frac{1}{6}\log_3 b - 2\log_3 a$;

c) $2 + 4\log_3 a + \frac{1}{5}\log_3 b$;

d) $2\log_3 b - 7\log_3 a - 3$.

Giải

b)
$$A = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}} \right)^{-0,2} = a^{10 \cdot (-0,2)} \cdot b^{\left(\frac{5}{6}\right) \cdot (-0,2)} = a^{-2} \cdot b^{\frac{1}{6}}.$$

Suy ra $\log_3 A = \frac{1}{6}\log_3 b - 2\log_3 a$.

2.42. a) $\frac{3}{2}$;

b) -4 ;

c) $\frac{1}{2}$;

d) $-\frac{1}{2}$.

Giải. b) $2\log_{\frac{1}{3}} 6 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400 + 3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 6^2 - \log_{\frac{1}{3}} 400^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{45} \right)^3$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{36 \cdot 45}{20} = \log_{\frac{1}{3}} (9 \cdot 9) = \log_{3^{-1}} 3^4 = -\frac{4}{1} = -4.$$

2.43. a) 19 ;

b) 592 ;

c) $\frac{45}{2}$.

Giải. c) $72 \left(49^{\frac{1}{2} \log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_5 \sqrt{5} 4} \right) = 72 \left(49^{\log_7 \frac{3}{6}} + 5^{\log_5 4^{-2}} \right)$

$$= 72 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{16} \right) = \frac{72 \cdot 5}{16} = \frac{45}{2}.$$

2.44. a) $\frac{40}{9}$;

b) 4,86.

Giải. a) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$

$$= \log_6 2^3 + \log_6 5 - \log_6 3^2 = \log_6 \frac{8 \cdot 5}{9} = \log_6 \frac{40}{9}.$$

Suy ra $x = \frac{40}{9}$.

2.45. a) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[5]{b}}$;

b) $\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[7]{b^4}$.

2.46. a) $\log_2 10 > \log_5 30$;

b) $\log_5 3 > \log_{0,3} 2$.

c) $\log_3 5 > \log_7 4$;

d) $\log_3 10 > \log_8 57$.

Giải. a) $\log_2 10 > \log_2 8 = 3$; $\log_5 30 < \log_5 125 = 3$.

Suy ra $\log_2 10 > \log_5 30$.

c) $\log_3 5 > \log_3 3 = 1 = \log_7 7 > \log_7 4$.

2.47. a) -1 ;

b) 1 ;

c) 0 ;

d) 0 .

Giải. a) $\log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \cos \frac{\pi}{12} = \log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \right)$
 $= \log_2 \sin \frac{\pi}{6} = \log_2 \frac{1}{2} = -1$.

2.48. Giải. a) Ta có $\log_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}}$ và $\frac{1}{\left| \log_3 \frac{1}{2} \right|} + \left| \log_3 \frac{1}{2} \right| > 2$

(theo công thức đổi cơ số của lôgarit, bất đẳng thức Cô-si và $\frac{1}{\left| \log_3 \frac{1}{2} \right|} \neq \left| \log_3 \frac{1}{2} \right|$).

Mặt khác, $\log_3 \frac{1}{2} < 0$ nên $-\frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} - \log_3 \frac{1}{2} > 2$, hay

$$\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2.$$

$$b) 4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4} \Leftrightarrow \log_4 4^{\log_5 7} = \log_4 7^{\log_5 4} \Leftrightarrow \log_5 7 = \log_5 4 \cdot \log_4 7.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng suy ra đẳng thức đầu tiên đúng.

$$c) \text{ Ta có } \log_3 7 > 0, \log_7 3 > 0 \text{ và } \log_3 7 = \frac{1}{\log_7 3} \neq \log_7 3. \text{ Theo bất đẳng}$$

thức Cô-si, ta có

$$\frac{1}{\log_7 3} + \log_7 3 > 2, \text{ suy ra } \log_3 7 + \log_7 3 > 2.$$

$$d) 3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_3 3^{\log_2 5} = \log_3 5^{\log_2 3} \Leftrightarrow \log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5.$$

Đẳng thức cuối cùng đúng, suy ra đẳng thức đầu tiên đúng.

$$2.49. \bullet x = 1 \Rightarrow \log_{abc} x = 0 ;$$

$$\bullet x \neq 1 \Rightarrow \log_{abc} x = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}.$$

$$\text{Hướng dẫn. } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

$$2.50. a) \frac{ab+1}{a(8-5b)} ;$$

$$b) \frac{5-b}{2a+2ab-4b+2}.$$

Hướng dẫn

$$a) \log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 (3 \cdot 7 \cdot 8)}{\log_7 (2 \cdot 3^3)} = \frac{\log_7 3 + 1 + 3\log_7 2}{\log_7 2 + 3\log_7 3}.$$

Như vậy, để tính được $\log_{54} 168$ qua a, b ta cần tính được $\log_7 3, \log_7 2$ qua a, b .

Từ giả thiết $a = \log_7 12, b = \log_{12} 24$, ta tính được $\log_7 2, \log_7 3$ từ hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\log_7 2 + \log_7 3 = a \\ 3\log_7 2 + \log_7 3 = ab. \end{cases}$$

$$b) \log_{25} 24 = \frac{1}{2} \log_5 24 = \frac{3}{2} \log_5 2 + \frac{1}{2} \log_5 3.$$

Ta cần tính $\log_5 2$ và $\log_5 3$ theo $a = \log_6 15$ và $b = \log_{12} 18$.

$$\text{Ta có } a = \log_6 15 = \frac{\log_5 15}{\log_5 6} = \frac{1 + \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } b = \log_{12} 18 = \frac{\log_5 18}{\log_5 12} = \frac{\log_5 2 + 2 \log_5 3}{2 \log_5 2 + \log_5 3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta tính được $\log_5 2$ và $\log_5 3$ theo a và b .

2.51. -6.

$$\begin{aligned} \text{Giải. } A &= \log_4 \frac{x^2}{4} - 2 \log_4 (4x^4) = 2 \log_4 |x| - 1 - 2(1 + 4 \log_4 |x|) \\ &= -3 - 6 \log_4 |x| = -3 - 3 \log_2 |x|. \end{aligned}$$

Khi $x = -2$ thì $A = -3 - 3 \log_2 2 = -6$.

2.52. Hướng dẫn. Áp dụng định lí Py-ta-go $a^2 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$ và

$$\text{lưu ý rằng } \log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\beta \alpha}.$$

$$\text{2.53. Giải. a) } a^{\log b} = b^{\log a} \Leftrightarrow \log a^{\log b} = \log b^{\log a}$$

$$\Leftrightarrow \log b \cdot \log a = \log a \cdot \log b.$$

Đẳng thức cuối đúng suy ra đẳng thức đầu cũng đúng.

b) Làm tương tự.

$$\text{2.54. a) } 0; \quad \text{b) } 0; \quad \text{c) } -\frac{1}{2}; \quad \text{d) } 5.$$

$$\text{2.55. a) } 2 \ln^2 a + 2; \quad \text{b) } 0.$$

$$\text{Hướng dẫn. Sử dụng } \log_\alpha \beta = \frac{1}{\log_\beta \alpha}.$$

2.56. a) 1 ; b) 1 ; c) 2.

Hướng dẫn. a) Đưa về lôgarit cơ số 3.

2.57. $2\ln e^3 < 8 - \ln \frac{1}{e}$.

2.58. a) $\approx 1,024$; b) $\approx 0,693$.

Giải

$$\text{a) } \log_{81} 90 = \frac{\log 90}{\log 81} = \frac{1 + 2 \log 3}{4 \log 3} \approx \frac{1 + 2 \cdot 0,4771}{4 \cdot 0,4771} \approx 1,024.$$

$$\text{b) } \ln 2 = \ln 10 \cdot \log 2 \approx 2,3026 \cdot 0,3010 \approx 0,693.$$

2.59. a) $\frac{\sqrt{5a} \cdot c^4}{b^3}$; b) $\frac{m^5 \sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{p}}$.

2.60. 227824.

Hướng dẫn.

$$p + 1 = 2^{756839} \Rightarrow \log(p + 1) = 756839 \cdot \log 2 \approx 227823,68$$

$$\Rightarrow p + 1 \approx 10^{227823,68} \Rightarrow 10^{227823} < p + 1 < 10^{227824}$$

2.61. $4\ln 2$; $9\ln 2$; $-3\ln 2$; $\frac{1}{2}\ln 2$; $3\ln 2$.

2.62. $2a + 2b$; $-2a - b$; $2b - 2a$; $11a + b$.

Giải. Tính biểu thức cuối

$$\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0,875) = \ln 3 + \ln 7 + 2\ln 2 + 2\ln 7 - 3\ln(7 \cdot 0,5^3)$$

$$= \ln 3 + 2\ln 2 - 3\ln 2^{-3}$$

$$= 11\ln 2 + \ln 3 = 11a + b.$$

2.63. Giải

$$\begin{aligned}
 \log_{15} 30 &= 1 + \log_{15} 2 = 1 + \frac{\log 2}{\log 3 + \log 5} \\
 &= \frac{\log 3 + \log 5 + \log 2}{\log 3 + \log 5} \\
 &= \frac{\log 3 + \log 10}{\log 3 + \log 5} = \frac{1 + p}{p + q}.
 \end{aligned}$$

2.64. $\approx 530,23 \text{ mmHg.}$

Hướng dẫn. Trước tiên tìm i từ đẳng thức

$$672,71 = 760.e^{1000.i} \quad (i \approx -0,00012).$$

Từ đó $p \approx 760.e^{3000.(-0,00012)}.$

2.65. a) Năm 2051 ;

b) Khoảng 25 năm.

§5, §6. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA

2.66. a) Đồng biến ;

b) Nghịch biến ;

c) Đồng biến, vì $2^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} \right)^x = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2} \right)^x$ và $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2} > 1.$

d) Không đồng biến, không nghịch biến mà là hàm số không đổi,

vì $(\sqrt{11} - \sqrt{10})^x \cdot (\sqrt{11} + \sqrt{10})^x = (11 - 10)^x = 1.$

2.67. a) 3.

Hướng dẫn. Viết $\frac{e^{3x} - 1}{x} = 3 \cdot \frac{e^{3x} - 1}{3x}$, rồi vận dụng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

b) $-\frac{1}{5}$.

Giải.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{5x} - \frac{e^{3x} - 1}{5x} \right)$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{5} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}.$$

c) -211.

d) 1.

Giải.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

2.68. a) $y' = x^2 e^x$;

b) $y' = (3 \sin x - \cos x) e^{2x}$;

c) $y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$;

d) $y' = 2^x \ln 2 - \frac{\sqrt{e^x}}{2}$.

2.69. a) $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$.

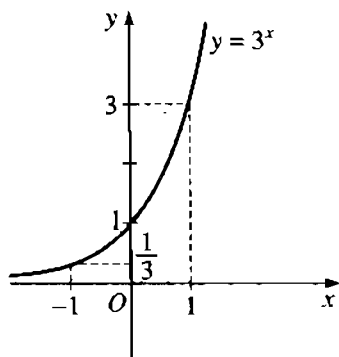
Hướng dẫn. Chứng minh công thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học và sử dụng $(a^x)' = a^x \ln a$.

b) Với $f(x) = e^{3x}$ thì $f^{(n)}(x) = 3^n \cdot e^{3x}$;

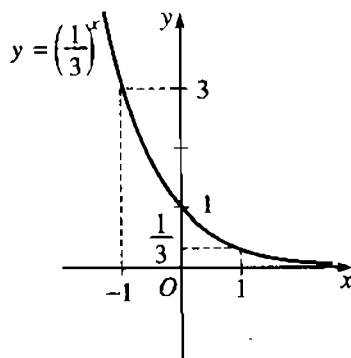
Với $f(x) = e^{kx}$ thì $f^{(n)}(x) = k^n \cdot e^{kx}$.

c) $f'(x) = e^x - e^{-x}$; $f''(x) = e^x + e^{-x}$; ... ; $f^{(2005)}(x) = e^x - e^{-x}$.

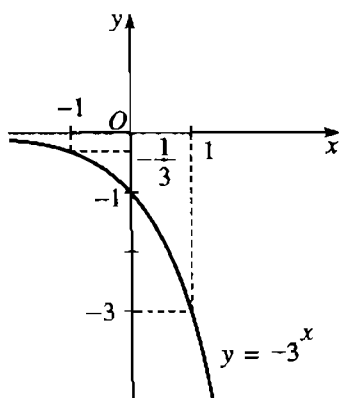
2.70. (h.2.1)



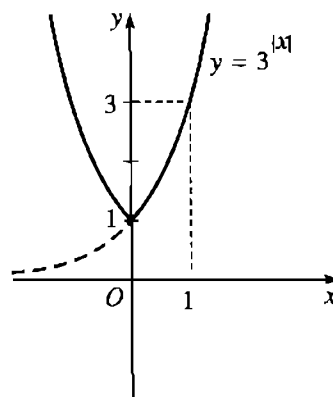
a)



b)



c)



d)

Hình 2.1

2.71. a) $x < 1$; b) $x > 1$.

2.72. a) $x > 1$; b) $x < 1$.

2.73. a) $0 < a < 1$;

b) $a > 1$.

2.74. a) 2 ;

b) 4. *Hướng dẫn*

Viết $\frac{\ln(4x+1)}{x} = 4 \cdot \frac{\ln(4x+1)}{4x}$ và vận dụng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

c) 1.

Giải

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1) - \ln(2x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{3x} \cdot 3 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{2x} \cdot 2 \\ = 3 - 2 = 1.$$

d) $\frac{3}{2}$.

Giải.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

2.75. a) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$;

b) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$;

c) $y' = \frac{1 + 2 \ln x}{x}$;

d) $y' = x \ln(x^2 + 1) + \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

2.76. a) $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}$.

Hướng dẫn. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

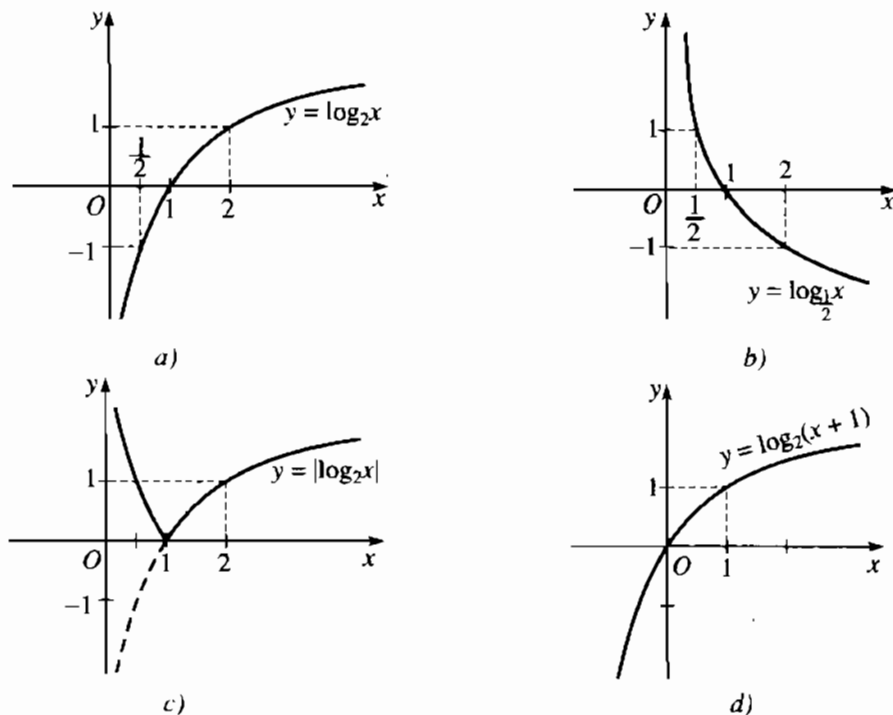
b) $f'(x) = 1 + \ln x$; $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-2} (n-2)!}{x^{n-1}}$ ($n \geq 2$).

Hướng dẫn. Vận dụng kết quả câu a).

2.77. a) Đồng biến ; b) Nghịch biến ; c) Nghịch biến ;

d) Nghịch biến, vì $a = \frac{1}{5(\sqrt{6} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{5} < 1$.

2.78. (h.2.2)



Hình 2.2

2.79. a) $y' = \frac{-\tan x}{\ln 2}$; $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\tan \frac{\pi}{6}}{\ln 2} \approx -0,833$;

b) $y' = \frac{3^x(x \ln 3 - 5)}{x^6}$; $y'(1) = 3 \ln 3 - 5,3 \approx -11,704$;

c) $y' = -\frac{1}{x \ln 2 (\log_2 x)^2}$; $y'(5) = -\frac{1}{5 \ln 2 (\log_2 5)^2} = -\frac{\ln 2}{5 \cdot (\ln 5)^2} \approx -0,054$.

2.80. Gọi (G_1) và (G_2) lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = a^x$ và $y = -\log_a(-x)$. $M(x_0; y_0)$ là một điểm bất kì. Khi đó điểm đối xứng với M qua đường thẳng $y = -x$ là $M'(-y_0; -x_0)$. Ta có

$$M \in (G_1) \Leftrightarrow y_0 = a^{x_0} \Leftrightarrow x_0 = \log_a y_0 \Leftrightarrow -x_0 = -\log[(-y_0)] \quad M' \in (G_2).$$

Điều đó chứng tỏ (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$.

2.81. a) $x > 4$;

b) $x < 2$.

2.82. a) $x < -2$;

b) $x > 2$.

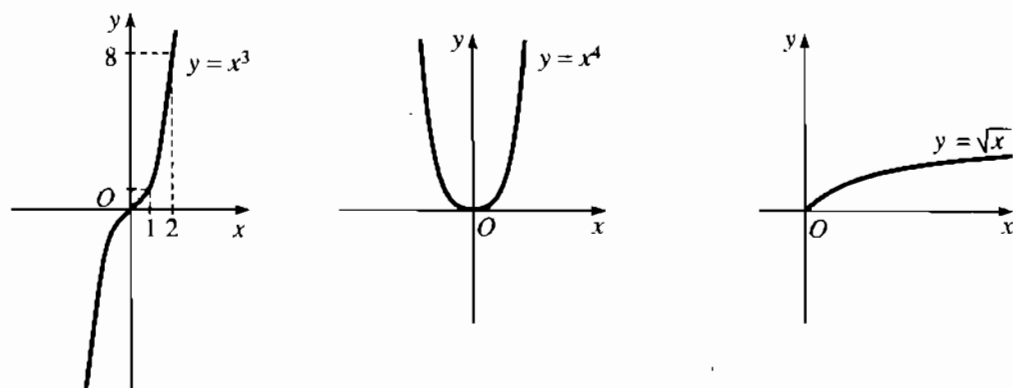
2.83. a) $y' = 3e(3x+1)^{e-1}$;

b) $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

c) $y' = \frac{2}{3x} \ln^{-\frac{1}{3}} 2x$.

d) $y' = -\frac{\sin x}{\frac{5}{6\cos^6 x}}$.

2.84. (h.2.3)



Hình 2.3

2.85. a) Với x_1, x_2 bất kì thuộc $\mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ ta có

$$y_1 - y_2 = \frac{2^{x_1} - 2^{-x_1}}{3} - \frac{2^{x_2} - 2^{-x_2}}{3} = \frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{3} + \frac{2^{-x_2} - 2^{-x_1}}{3}.$$

Vì hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên $\frac{2^{x_1} - 2^{x_2}}{3} < 0$; $\frac{2^{-x_2} - 2^{-x_1}}{3} < 0$.

Do đó $y_1 - y_2 < 0$, tức là $y_1 < y_2$. Vậy hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Cách làm tương tự câu a) với lưu ý hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập các số thực dương.

2.86. a) $\frac{5e^3}{2}$;

b) 2.

$$\begin{aligned} \text{Giải. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot (\sqrt{x+1} + 1) = 2. \end{aligned}$$

c) 0 ;

d) 2.

$$\text{Giải. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\tan x}{x}} \cdot 2 = \frac{1}{1} \cdot 2 = 2.$$

§7. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

2.87. a) $x = -\frac{1}{3}$;

Hướng dẫn. Nhận xét $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 1$, nên $3 + 2\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^{-1}$.

b) $x = 1$;

Hướng dẫn. $5^{x+1} + 6 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x-1} = 5^{x-1} \cdot 52$.

c) $x = 0$;

Giải. $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 9 \cdot 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$

$$\Leftrightarrow 3^x(3 + 9 + 27) = 5^x(9 + 5 + 25)$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 5^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

d) $x = 2$.

2.88. a) $x = 1$ và $x = -3$;

b) $x = 1$;

c) $x = 2$;

Giải. Điều kiện $x^2 - 3 > 0$ và $6x - 10 > 0$; tức là $x > \sqrt{3}$. Ta có

$$\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{x^2 - 3}{6x - 10} \cdot 2\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{3x - 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Tìm được $x = 1$ và $x = 2$.

Đối chiếu với điều kiện, chỉ có $x = 2$ thoả mãn.

d) $x = \log_2 5$.

Hướng dẫn. $\log_2(2^{x+1} - 5) = x \Leftrightarrow 2^{x+1} - 5 = 2^x$.

2.89. a) $x = 5$;

b) $x = -\frac{1}{4}$;

c) $x = -5$; $x = -5 + 5\sqrt{2}$;

d) $x = -\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn. d) Đưa về $2^{-(2+3x)} = 2^{\frac{-x}{2}}$.

2.90. a) $x = 0$ và $x = 1$.

Hướng dẫn. Đặt $y = 2^{x+1}$ (với $y > 0$) đưa phương trình đã cho về dạng

$$y^2 - 6y + 8 = 0.$$

b) $x = -1$ và $x = 1$;

Hướng dẫn. Đặt $y = 3^x$ (với $y > 0$) ta có $3y^2 - 10y + 3 = 0$.

c) $x = -\frac{3}{2}$ và $x = -1$;

Giải. $3^{4x+8} - 4 \cdot 3^{2x+5} + 27 = 0 \Leftrightarrow 3^{2(2x+4)} - 12 \cdot 3^{2x+4} + 27 = 0$.

Đặt $y = 3^{2x+4}$ (với $y > 0$), dẫn đến phương trình $y^2 - 12y + 27 = 0$.

Tìm được $y = 3$ và $y = 9$ (đều thoả mãn).

Với $y = 3$ thì $3^{2x+4} = 3 \Leftrightarrow 2x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Với $y = 9$ thì $3^{2x+4} = 3^2 \Leftrightarrow 2x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

d) $x = 0$ và $x = \log_5 \frac{2}{3}$.

Giải. Chia hai vế của phương trình cho 35^x , ta được

$$3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^x = 5.$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ (với $t > 0$), ta có $3t + \frac{2}{t} = 5$ hay $3t^2 - 5t + 2 = 0$.

Từ đó tìm được $t = 1$ và $t = \frac{2}{3}$ (đều thoả mãn).

Với $t = 1$ ta có $\left(\frac{5}{7}\right)^x = 1$ nên $x = 0$.

Với $t = \frac{2}{3}$ ta có $\left(\frac{5}{7}\right)^x = \frac{2}{3}$ nên $x = \log_5 \frac{2}{3}$.

2.91. a) $x = -2$.

Hướng dẫn. Chia cả hai vế cho 6^x , rồi đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (với $t > 0$) dẫn đến

phương trình $9t^2 + 5t - 4 = 0$.

b) $x = -1$ và $x = 1$.

Giải. $8^{x+1} + 8 \cdot (0,5)^{3x} + 3 \cdot 2^{x+3} = 125 - 24 \cdot (0,5)^x$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot \frac{1}{2^{3x}} + 24 \cdot 2^x + 24 \cdot \frac{1}{2^x} = 125$$

$$\Leftrightarrow 8 \left(2^{3x} + \frac{1}{2^{3x}} \right) + 24 \left(2^x + \frac{1}{2^x} \right) = 125.$$

Đặt $y = 2^x + \frac{1}{2^x}$ với $y \geq 2$, ta có

$$8(y^3 - 3y) + 24y = 125 \Leftrightarrow y^3 = \frac{125}{8} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}.$$

Khi đó $2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{5}{2}$, dẫn đến phương trình $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$ với $t = 2^x$ ($t > 0$).

Giải phương trình ẩn t này, ta tìm được $t = 2$ và $t = \frac{1}{2}$.

Với $t = 2$ thì $2^x = 2$, tức là $x = 1$.

Với $t = \frac{1}{2}$ thì $2^x = \frac{1}{2}$, tức là $x = -1$.

2.92. a) $x = 3$ và $x = 1 + 2^{-\frac{7}{4}}$.

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 1$.

Đặt $y = \log_2(x - 1)$, dẫn đến phương trình $4y^2 + 3y - 7 = 0$.

b) $x = 2^{-\frac{4}{5}}$ và $x = 2^{-3}$.

Giải. Điều kiện $x > 0$; $x \neq \frac{1}{2}$; $x \neq \frac{1}{4}$. Ta có

$$\log_{4x} 8 - \log_{2x} 2 + \log_9 243 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_8 4x} - \frac{1}{\log_2 2x} + \frac{5}{2} = 0.$$

Đặt $t = \log_2 x$ (với $t \neq -1$; $t \neq -2$), ta có phương trình

$$\frac{3}{2+t} - \frac{1}{1+t} + \frac{5}{2} = 0.$$

Quy đồng mẫu số và rút gọn dẫn đến $5t^2 + 19t + 12 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm $t = -3$ và $t = -\frac{4}{5}$.

Đối chiếu với điều kiện các giá trị tìm được đều thoả mãn. Dẫn đến

$x = 2^{-\frac{4}{5}}$ và $x = 2^{-3}$.

c) $x = 3$ và $x = 81$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \sqrt{\log_3 x}$ (với $t \geq 0$) dẫn đến phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$.

2.93. a) $x = 3$ và $x = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn. Lưu ý $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$. Đặt $t = \log_3 x$ (với $t \neq 0$) dẫn đến phương trình $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

b) $x = 8$ và $x = 2^{\frac{2}{3}}$.

Hướng dẫn. Lưu ý $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$. Đặt $t = \log_2 x$ (với $t \neq 0$) dẫn đến phương trình $-3t^2 + 7t + 6 = 0$.

c) $x = 1$ và $x = \frac{1}{243}$.

Giải. Đặt $t = \log_3 x$, ta có

$$\frac{1+t}{1+\frac{1}{2}t} = \frac{1+\frac{1}{3}t}{1+\frac{1}{4}t} \Leftrightarrow 3(1+t)(4+t) = 2(2+t)(3+t)$$

$$\Leftrightarrow 12 + 15t + 3t^2 = 12 + 10t + 2t^2 \Leftrightarrow t^2 + 5t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -5.$$

Với $t = 0$ thì $\log_3 x = 0$, nên $x = 3^0 = 1$.

Với $t = -5$ thì $\log_3 x = -5$, nên $x = 3^{-5} = \frac{1}{243}$.

2.94. a) $x = 2$ và $x = -2$.

Hướng dẫn. Nhận xét $\sqrt{6 + \sqrt{35}} \cdot \sqrt{6 - \sqrt{35}} = 1$, đặt $t = \left(\sqrt{6 + \sqrt{35}}\right)^x$

(với $t > 0$) dẫn đến phương trình $t + \frac{1}{t} = 12$.

b) $x = \pm\sqrt{3,5}$ và $x = \pm\sqrt{4,5}$.

Hướng dẫn. Đặt $t = \log_2(2x^2 - 5)$ (với $t \neq 0$) dẫn đến phương trình

$$t + \frac{2}{t} = 3.$$

2.95. a) $x = 3^{36}$.

Giải. $\log_9(\log_3 x) + \log_3(\log_9 x) = 3 + \log_3 4$

$$\Leftrightarrow \log_3(\log_3 x)^{\frac{1}{2}} + \log_3\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right) = 3 + \log_3 4$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[\frac{1}{2}(\log_3 x)^{\frac{3}{2}}\right] = 3 + \log_3 4$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 x)^{\frac{3}{2}} = 2^3 \cdot 3^3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x = 36 \Leftrightarrow x = 3^{36}.$$

b) $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn. Biến đổi đưa về lôgarit cơ số 2.

c) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ và $x = \sqrt{5}$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình về dạng tích

$$(3\log_2 x + 2)(2\log_5 x - 1) = 0.$$

2.96. a) $m \leq \frac{25}{4}$.

Giải. Đặt $5^{x+1} = t$ (với $t > 0$). Bài toán trở thành :

Tìm m để phương trình $t^2 - 5t + m = 0$ (1) có ít nhất một nghiệm dương.

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta = 25 - 4m \geq 0$ hay $m \leq \frac{25}{4}$. Gọi các

nghiệm của (1) là t_1 và t_2 ($t_1 \leq t_2$), theo hệ thức Vi-ét $t_1 + t_2 = 5$ suy ra $t_2 > 0$. Vậy với $m \leq \frac{25}{4}$ thì phương trình (1) có ít nhất nghiệm $t_2 > 0$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm.

b) $m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{5}$.

Giải. Đặt $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t$ (với $t > 0$). Bài toán trở thành :

Tìm m để phương trình $t^2 - mt + 2m + 1 = 0$ (2) có ít nhất một nghiệm dương. Điều kiện để (2) có nghiệm là

$$\Delta = m^2 - 4(2m + 1) = m^2 - 8m - 4 \geq 0$$

hay $m \leq 4 - 2\sqrt{5}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{5}$.

Gọi các nghiệm của (2) là t_1 và t_2 ($t_1 \leq t_2$), theo hệ thức Vi-ét :

$$t_1 + t_2 = m ; t_1 t_2 = 2m + 1.$$

- Với $m \geq 4 + 2\sqrt{5}$ thì $t_1 + t_2 = m \geq 4 + 2\sqrt{5}$ suy ra $t_2 > 0$.
- Với $m < -\frac{1}{2}$ thì $t_1 t_2 < 0$ suy ra $t_2 > 0$.
- Với $-\frac{1}{2} < m \leq 4 - 2\sqrt{5}$ thì $t_1 + t_2 < 0$ và $t_1 t_2 > 0$ suy ra $t_1 < t_2 < 0$.

Vậy với $m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{5}$ thì phương trình (2) có ít nhất nghiệm $t_2 > 0$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm.

Chú ý. Có thể lập bảng xét dấu trực tiếp với

$$\Delta = m^2 - 8m - 4 ; S = m ; P = 2m + 1.$$

2.97. a) $m > 0$.

Giải. Đặt $4^x = t$ (với $t > 0$). Bài toán trở thành :

Tìm m để phương trình $16t^2 + \frac{t}{4} - 5m = 0$ (1) có nghiệm dương duy nhất.

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta = \frac{1}{16} + 320m \geq 0$ hay $m \geq -\frac{1}{5120}$. Lại có

$$t_1 + t_2 = -\frac{1}{64}; \quad t_1 t_2 = -\frac{5m}{16}.$$

Nên (1) có nghiệm dương duy nhất khi $-\frac{5m}{16} < 0$, tức là $m > 0$.

b) $m = 16$ hoặc $m < 0$.

Giải. Bài toán quy về tìm m để hệ

$$\begin{cases} (x+4)^2 = mx \\ x+4 > 0 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} x^2 + (8-m)x + 16 = 0 & (1) \\ x > -4 & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất}$$

tức là (1) có nghiệm duy nhất thoả mãn $x > -4$.

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta = m^2 - 16m \geq 0$ hay $m \leq 0$ hoặc $m \geq 16$.

Xét các trường hợp :

- $m = 0$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{0-8}{2} = -4$ (không thoả mãn $x > -4$).

- $m = 16$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{16-8}{2} = 4$ (thoả mãn $x > -4$).

- $m < 0$ hoặc $m > 16$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

Ta có : $x_1 < -4 < x_2 \Leftrightarrow (x_1+4)(x_2+4) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + 4(x_1+x_2) + 16 < 0$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có $x_1 x_2 = 16$ và $x_1 + x_2 = m - 8$.

Dẫn đến $16 + 4(m-8) + 16 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

2.98. a) $x = \log_7(\log_5 7).$

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế rồi chia cả hai vế cho 5^x , ta được

$$\left(\frac{7}{5}\right)^x = \log_5 7.$$

b) $x = 3$ và $x = -\log_5 2.$

Giải. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế, ta được

$$\log_5 5^x + \log_5 8^{\frac{x-1}{x}} = \log_5 500.$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x-1}{x} \cdot 3 \log_5 2 = 3 + 2 \log_5 2.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x(3 \log_5 2 - 2 \log_5 2 - 3) - 3 \log_5 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x(\log_5 2 - 3) - 3 \log_5 2 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -\log_5 2.$

c) $x = \sqrt{5}.$

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế.

d) $x = \sqrt{3}$ và $x = \sqrt[3]{3}.$

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$. Lấy lôgarit cơ số x cả hai vế rồi đặt $t = \log_x 3$, dẫn đến phương trình $t^2 - 5t + 6 = 0.$

2.99. a) $x = 9.$

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 9 cả hai vế rồi đặt $t = \log_9 x$, dẫn đến phương trình $(t - 1)^2 = 0.$

b) $x = \frac{1}{5}$ và $x = \sqrt[4]{5}.$

Hướng dẫn. Lấy lôgarit cơ số 5 cả hai vế rồi đặt $t = \log_5 x$ dẫn đến phương trình $4t^2 + 3t - 1 = 0.$

2.100. a) $x = 2$ và $x = \log_2 3 - 2$.

b) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \arctan \frac{1}{5} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa là

$$\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 > 0.$$

Lấy lôgarit cơ số 4 cả hai vế của phương trình, ta được

$$\log_{0,5}(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2) = \log_4 3^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\log_2(\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2) = -\log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 2 = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow \cos x(5 \sin x - \cos x) = 0.$$

- $\cos x = 0$ ta tìm được $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

- $5 \sin x - \cos x = 0$, tức là $\tan x = \frac{1}{5}$. Do đó $x = \arctan \frac{1}{5} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2.101. a) $x = 1$.

Hướng dẫn. Hàm số $f(x) = 3^x$ luôn đồng biến, hàm số $g(x) = 5 - 2x$ luôn nghịch biến và $f(1) = g(1)$.

b) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. $\left(\frac{4}{5}\right)^x > 0$ với mọi x , còn $-2x^2 + 4x - 9 < 0$ với mọi x .

c) $x = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn. Hàm số $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ luôn nghịch biến, còn hàm số

$$g(x) = 5x - \frac{3}{2} \text{ luôn đồng biến và } f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right).$$

2.102. a) $x = 2$.

Hướng dẫn. Chia hai vế cho 10^x , ta được $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ rồi chứng tỏ rằng $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

b) $x = 2$.

Giải. Chia hai vế cho $\sqrt{10^x}$, ta được

$$\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{10}\right)^x} + \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{10}\right)^x} = 1.$$

Đặt vế trái là $f(x)$ ta thấy $f(2) = 1$.

Với $x > 2$, ta có

$$f(x) = \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{10}\right)^x} + \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{10}\right)^x} < \sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{6}}{10}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{6}}{10}\right)^2} = 1.$$

Với $x < 2$, tương tự ta có $f(x) > 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

c) $x = 2$. *Hướng dẫn.* Chia hai vế cho 2^x .

d) $x = 1$.

Giải. Đặt $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{6}\right)^x$; $g(x) = -2x + 6$. Để

thấy $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$; $g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = g(1) = 4$.

Với $x > 1$ ta có $f(x) > f(1) = g(1) > g(x)$;

Với $x < 1$ ta có $f(x) < f(1) = g(1) < g(x)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

2.103. a) $x = 0$ và $x = 1$.

Giải. Đặt $t = 3^{x-1}$ (với $t > 0$), ta có $3t^2 + (3x - 7)t + 2 - x = 0$. (1)

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn t , ta tìm được $t = \frac{1}{3}$ và $t = -x + 2$.

• Với $t = \frac{1}{3}$ thì $3^{x-1} = 3^{-1}$, do đó $x = 0$.

• Với $t = -x + 2$ thì $3^{x-1} = -x + 2$.

Hàm số $f(x) = 3^{x-1}$ luôn đồng biến và $f(1) = 1$.

Hàm số $g(x) = -x + 2$ luôn nghịch biến và $g(1) = 1$.

Do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất của $3^{x-1} = -x + 2$.

b) $x = 4$.

Hướng dẫn. Đặt $t = 5^{5-x}$ (với $t > 0$), dẫn đến phương trình

$t^2 - 2t(x-2) + 3 - 2x = 0$, rồi làm tiếp như câu a).

2.104. a) $x = 2$.

Giải. Điều kiện $x > 0$. Áp dụng công thức $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, ta có

$$9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x}. \quad (1)$$

Chia hai vế của (1) cho $3^{\log_2 x}$ ta có

$$3^{\log_2 x} = x^2 - 1.$$

Đặt $\log_2 x = t$, ta có $x = 2^t$ dẫn đến phương trình

$$3^t = 4^t - 1, \text{ tức là } \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1. \quad (2)$$

Vế trái của (2) là hàm nghịch biến (vì các cơ số $\frac{3}{4} < 1$; $\frac{1}{4} < 1$), còn vế phải của (2) là hằng số, nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 1$. Suy ra $x = 2$.

b) $x = 2$.

Hướng dẫn. Chia cả hai vế của phương trình cho $3^x (= (\sqrt{9})^x)$, ta có

$$4\left(\sqrt{\frac{1}{9}}\right)^x + \left(\sqrt{\frac{5}{9}}\right)^x = 1.$$

Sau đó lập luận như phương trình (2) của câu a).

2.105. a) Khi $a > 1$, $b > 1$ thì các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ đồng biến.

Với $x > x_0$ ta có $a^x > a^{x_0}$; $b^x > b^{x_0}$. Vì vậy $a^x + b^x > a^{x_0} + b^{x_0} = c$.

Với $x < x_0$ ta có $a^x < a^{x_0}$; $b^x < b^{x_0}$. Vì vậy $a^x + b^x < a^{x_0} + b^{x_0} = c$.

Do đó phương trình $a^x + b^x = c$ có nghiệm x_0 thì nghiệm đó là duy nhất.

b) Cách giải tương tự như câu a), với lưu ý khi $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ thì các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ nghịch biến.

Câu a) và b) được minh hoạ bởi các ví dụ sau :

$$4^x + 6^x = 13.2^x \Leftrightarrow 2^x + 3^x = 13 \text{ có nghiệm duy nhất } x = 2.$$

$$16^x + 9^x = 25^x \Leftrightarrow \left(\frac{16}{25}\right)^x + \left(\frac{9}{25}\right)^x = 1 \text{ có nghiệm duy nhất } x = 1.$$

2.106. a) $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Hướng dẫn. Đặt $t = 2^{\cos^2 x}$ ($1 \leq t \leq 2$), ta được phương trình $t^2 - 6t + 8 = 0$.

Giải ra ta được $t = 4$ (loại) và $t = 2$.

$$\text{b) } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi; x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Giải. Biến đổi phương trình về dạng

$$3.3^{2(\sin x + \cos x)} - 8.15^{\cos x + \sin x} + 5.5^{2(\cos x + \sin x)} = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2(\sin x + \cos x)}$, rồi đặt $t = \left(\frac{5}{3}\right)^{\cos x + \sin x}$

(với $t > 0$) dẫn đến phương trình

$$5t^2 - 8t + 3 = 0.$$

Giải ra ta được $t = 1$ và $t = \frac{3}{5}$.

• Với $t = 1$ ta có $\left(\frac{5}{3}\right)^{\cos x + \sin x} = 1$, dẫn đến $\cos x + \sin x = 0$ hay $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Do vậy $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

• Với $t = \frac{3}{5}$ ta có $\left(\frac{5}{3}\right)^{\cos x + \sin x} = \frac{3}{5}$, dẫn đến $\cos x + \sin x = -1$ hay

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Do vậy } x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2.107. a) $x = 1$.

b) $x = 3^{1+\sqrt{2}}; x = 3^{1-\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cơ số 3, rồi đặt $t = \log_3 x$ (với $t \neq 0$).

2.108. a) $x = 1$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình về dạng

$$\log \frac{3^x - 1}{6} = x \left(\log \frac{10}{3} - 1 \right).$$

Dẫn đến $\frac{3^x - 1}{6} = \frac{1}{3^x}$ rồi đặt $t = 3^x$ (với $t > 0$), ta có phương trình $t^2 - t - 6 = 0$

với hai nghiệm $t = 3$ và $t = -2$ (loại). Do đó $x = 1$.

b) Vô nghiệm.

Hướng dẫn. Cách giải tương tự như câu a).

2.109. Với $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$ hoặc $m = 1$ thì phương trình có một nghiệm.

Với $-1 < m < 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $1 < m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm.

Hướng dẫn. Đặt $y = 3^x$ (với $y > 0$), ta có

$$(m - 3)y^2 + 2(m + 1)y - (m + 1) = 0. \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số nghiệm dương của (1).

• Xét $m = 3$ thì (1) có nghiệm $y = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn $y > 0$).

• Nếu $m \neq 3$ thì $\Delta' = (m + 1)^2 + (m + 1)(m - 3) = 2(m + 1)(m - 1)$.

Đặt $f(y) = (m - 3)y^2 + 2(m + 1)y - (m + 1)$, ta có

$$(m - 3)f(0) = (3 - m)(m + 1),$$

$$S = \frac{2(m + 1)}{3 - m}.$$

Lập bảng xét dấu

m	Δ'	$(m - 3)f(0)$	S	Kết luận về nghiệm
-1	+	-	-	$y_1 < 0 < y_2$
	0	0	0	$y_1 = y_2 = 0$
	-	+	+	Vô nghiệm
1	0			$y_1 = y_2 = 1$
	+	+	+	$0 < y_1 < y_2$
3		0	$\parallel$	$y = \frac{1}{2}$
	+	-	-	$y_1 < 0 < y_2$

Từ đó dẫn đến kết quả.

2.110. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Hướng dẫn. Điều kiện $\cos x > 0, \sin x > 0$.

Đặt $\log_2 \cos x = t = \log_3 \cot^2 x$, ta có $\begin{cases} \cot^2 x = 3^t \\ \cos x = 2^t. \end{cases}$

Do $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$ nên dẫn đến $\frac{(2^t)^2}{1 - (2^t)^2} = 3^t$ hay $4^t + 12^t = 3^t$.

Sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ, ta tìm được $t = -1$.

$$\text{Do đó } \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Với điều kiện $\cos x > 0$, $\sin x > 0$, chỉ có nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ là thích hợp.

2.111. a) Với $m > 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{2m^2}{m^2 - 1}$.

Với $m \leq 1$ thì phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 2$, $m > 0$. Đưa về tìm nghiệm lớn hơn 2 của phương trình $x = (x - 2)m^2$ hay $(1 - m^2)x = -2m^2$.

b) Với $m < \frac{5}{4}$ hoặc $m > 8$: Phương trình vô nghiệm.

Với $m = \frac{5}{4}$: phương trình có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Với $m = 8$: phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Với $\frac{5}{4} < m < 8$: phương trình có nghiệm $x = \varphi + k2\pi$; $x = \pi - \varphi + k2\pi$

với $\varphi = \log_2(-1 + \sqrt{m+1})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn. Đặt $2^{\sin x} = y$, vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq y \leq 2$.

Ta có phương trình $y^2 + 2y - m = 0. \quad (1)$

Tính được $\Delta' = 1 + m$.

- Với $m < -1$ thì (1) vô nghiệm ;
- Với $m = -1$ thì (1) có nghiệm kép $y = -1$ (loại) ;

• Với $m > -1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $y_1 = -1 + \sqrt{m+1}$ và $y_2 = -1 - \sqrt{m+1}$ (loại).

$y_1 = -1 + \sqrt{m+1}$ thoả mãn điều kiện khi

$$\begin{cases} -1 + \sqrt{m+1} \geq \frac{1}{2} \\ -1 + \sqrt{m+1} \leq 2 \end{cases} \text{ tức là } \begin{cases} m \geq \frac{5}{4} \\ m \leq 8. \end{cases}$$

Khi đó

$$2^{\sin x} = -1 + \sqrt{m+1} \Leftrightarrow \sin x = \log_2(-1 + \sqrt{m+1}) = \sin \varphi \left(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có $x = \varphi + k2\pi$; $x = \pi - \varphi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Từ đó ta đi đến kết luận trên.

§8. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

2.112. a) $(x; y)$ là $(5; 6)$, $(6; 5)$.

Hướng dẫn. Điều kiện $x > 0, y > 0$.

Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ như sau :

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 y = 1 + \log_2 15 &\Leftrightarrow \log_2 xy = \log_2 30 \\ &\Leftrightarrow xy = 30. \end{aligned}$$

b) $(x; y) = (8; 4)$:

Hướng dẫn. Điều kiện $x + y > 0, x - y > 0$.

Biến đổi phương trình thứ nhất và thứ hai trong hệ như sau :

$$\log(x^2 + y^2) = 1 + \log 8 \Leftrightarrow \log(x^2 + y^2) = \log 80 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 80.$$

$$\log(x + y) - \log(x - y) = \log 3 \Leftrightarrow \log \frac{x + y}{x - y} = \log 3 \Leftrightarrow \frac{x + y}{x - y} = 3.$$

2.113. a) $(x; y) = (5; 2)$.

Giải

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x - y) = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3^{y+3} \cdot 2^y = 972 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 6^y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

b) $(x; y) = (20; 5)$.

Hướng dẫn. Biến đổi phương trình thứ hai trong hệ thành

$$\frac{x}{y} = 4 \text{ (với } x > 0, y > 0 \text{)}.$$

2.114. a) $(x; y)$ là $(1; 0), (0; 1)$.

Hướng dẫn. Cách 1. Rút y từ phương trình thứ hai, thế vào phương trình thứ nhất thì được $3^x + 3^{1-x} = 4$. Sau đó đặt $t = 3^x$ (với $t > 0$).

Cách 2. Viết phương trình thứ hai thành $3^{x+y} = 3$ hay $3^x \cdot 3^y = 3$. Sau đó đặt $u = 3^x, v = 3^y$ (với $u > 0, v > 0$) dẫn đến hệ $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3. \end{cases}$

b) $(x; y)$ là $(1; 2), (2; 1)$.

2.115. a) $(x; y)$ là $(\log_2 5; \log_5 2 - \log_2 5), (1; 0)$.

Hướng dẫn. Đặt $u = 2^x, v = 5^{x+y}$ (với $u > 0, v > 0$), ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = 7 \\ uv = 10. \end{cases}$$

b) $(x; y) = (2; 1)$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ: $x \pm y > 0$. Khi đó

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ \log_3(x + y) - \log_5(x - y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x + y) + \log_3(x - y) = 1 \\ \log_3(x + y) - \frac{\log_3(x - y)}{\log_3 5} = 1. \end{cases}$$

Tiếp theo, đặt $u = \log_3(x + y)$ và $v = \log_3(x - y)$, ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u - \frac{v}{\log_3 5} = 1. \end{cases}$$

2.116. a) $(x; y)$ là $(2; 1)$, $\left(\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Giải. ĐKXĐ: $x > 0, y > 0, x > y$.

Biến đổi phương trình đầu như sau :

$$\log^2 x = \log^2 y + (\log x + \log y)^2 \Leftrightarrow 2\log^2 y + 2\log x \log y = 0$$

$$\Leftrightarrow \log y(\log x + \log y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log y = 0 \\ \log x + \log y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

- Với $y = 1$, thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\log^2(x - 1) + \log x \log 1 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

- Với $y = \frac{1}{x}$, thế vào phương trình thứ hai ta được

$$\log^2\left(x - \frac{1}{x}\right) + \log x \log \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \log^2 \frac{x^2 - 1}{x} - \log^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log \frac{x^2 - 1}{x} = \log x \\ \log \frac{x^2 - 1}{x} = -\log x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x^2 \text{ (loại)} \\ \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 2.$$

Kết hợp với ĐKXĐ, ta được $x = \sqrt{2}; y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn. Lôgarit cơ số 10 hai vế của hai phương trình trong hệ ta được

$$\begin{cases} \log x \log 3 = \log y \log 4 \\ \log 4(\log 4 + \log x) = \log 3(\log 3 + \log y) \end{cases}$$

rồi đặt $u = \log x$, $v = \log y$.

2.117. a) $(x; y)$ là $(3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6})$, $(3 + \sqrt{6}; 3 - \sqrt{6})$.

Hướng dẫn. ĐKXD: $xy > 0$.

Áp dụng công thức $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$, phương trình đầu của hệ có thể viết thành

$$(2^2)^{\log_3 xy} = 2 + 2^{\log_3 xy}.$$

Đặt $t = 2^{\log_3 xy}$ (với $t > 0$) ta có $t^2 = 2 + t$. Giải phương trình tìm được $t = -1$ (loại) và $t = 2$. Từ đó $\log_3 xy = 1$ hay $xy = 3$.

Biến đổi phương trình thứ hai của hệ thành

$$(x + y)^2 - 3(x + y) - 18 = 0.$$

Giải ra, ta được $x + y = 6$ và $x + y = -3$.

Như vậy, ta có hai hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 3. \end{cases}$

b) $(4; 3)$, $\left(\frac{1}{8}; -2\right)$.

Hướng dẫn. Thế y từ phương trình đầu vào phương trình thứ hai rồi lấy lôgarit cơ số 2 cả hai vế.

2.118. a) $(x; y) = (1; 1)$.

Hướng dẫn. ĐKXD: $3x \pm 2y > 0$.

Lôgarit cơ số 5 hai vế của phương trình đầu, ta được

$$\log_5(3x + 2y) + \log_5(3x - 2y) = 1.$$

Biến đổi phương trình thứ hai thành $\log_5(3x + 2y) - \frac{\log_5(3x - 2y)}{\log_5 3} = 1$.

Sau đó đặt $\log_5(3x + 2y) = u$, $\log_5(3x - 2y) = v$ (với $u > 0$, $v > 0$) dẫn đến hệ

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u - \frac{v}{\log_5 3} = 1. \end{cases}$$

b) $(x; y) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{5}\right)$.

Hướng dẫn. Điều kiện : $x > 0$, $y > 0$.

Lôgarit cơ số e hai vế của cả hai phương trình của hệ dẫn đến

$$\begin{cases} \ln x \ln 5 = \ln y \ln 6 \\ \ln 6(\ln 6 + \ln x) = \ln 5(\ln 5 + \ln y). \end{cases}$$

§9. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

2.119. a) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

b) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{55}{34}\right]$.

Giải. Ta phải có $\log_{0,8} \frac{2x+1}{x+5} \geq 2 = \log_{0,8}(0,8)^2$. (1)

Vì hàm số lôgarit cơ số 0,8 là hàm số nghịch biến nên

$$(1) \Leftrightarrow 0 < \frac{2x+1}{x+5} \leq (0,8)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x+5} > 0 \\ \frac{2x+1}{x+5} - 0,64 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \text{ hoặc } x > -\frac{1}{2}; \\ -5 < x \leq \frac{55}{34}. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq \frac{55}{34}.$$

c) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

d) $(2; 4]$.

2.120. a) $2 - 2\sqrt{3} < m < 2 + 2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn. $x^2 - mx + m + 2 > 0$ với mọi x , dẫn đến $\Delta = m^2 - 4m - 8 < 0$.

b) $m > \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn. Dẫn đến giải $x^2 - 2x + 3m > 1$ với mọi x .

c) $m > \frac{7}{3}$.

Giải

Hàm số $y = \log_2 \log_3 [(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m]$ xác định với mọi x khi và chỉ khi $\log_3 [(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m] > 0$ với mọi x , tức là

$$(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m - 1 > 0 \text{ với mọi } x. \quad (1)$$

+ Với $m = 2$ (không thỏa mãn).

+ Với $m \neq 2$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -3m + 7 < 0 \\ a = m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{7}{3} \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}.$$

2.121. a) $x > -2,5$; b) $x < -\frac{1}{3}$; c) $2 < x < 3$; d) $x > 4$.

Hướng dẫn. d) Do $6^{2x+3} = 3^{2x+3} \cdot 2^{2x+3}$ nên ta có

$$\begin{aligned} 6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1} &\Leftrightarrow 2^{x-4} \cdot 3^{-x+4} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4} < \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &\Leftrightarrow x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4. \end{aligned}$$

2.122. a) $x > \frac{31}{5}$;

b) $x \leq -1$ hoặc $x > 1$;

c) $x > \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ hoặc $-2,5 < x < \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$;

d) $x > 0$.

Hướng dẫn: Sử dụng tính chất của hàm số lôgarit

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2 \frac{1+2x}{1+x}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < \log_2 \frac{1+2x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1+2x}{1+x} < 2.$$

$$\bullet \text{ Từ } \frac{1+2x}{1+x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{1+x} - \frac{2(1+x)}{1+x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{1+x} < 0 \Leftrightarrow x > -1. \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Từ } \frac{1+2x}{1+x} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ hoặc } x > 0. \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2), ta được $x > 0$.

2.123. a) $x < \log_3 4$.

Hướng dẫn. Đặt $3^x = t$ (với $t > 0$), ta có $t^2 < 3t + 4$.

b) $x > 0$.

Hướng dẫn. Đặt $3^x = t$ (với $t > 0$), ta có $t^2 + 8t - 9 > 0$.

$$\text{c) } \frac{1}{243} < x < 3.$$

Hướng dẫn. Lôgarit cơ số 3 cả hai vế của bất phương trình, ta có

$$(\log_3 x + 4)\log_3 x < 5.$$

Đặt $\log_3 x = t$, ta được $t^2 + 4t - 5 < 0$ hay $-5 < t < 1$.

Do đó $-5 < \log_3 x < 1$. Suy ra $3^{-5} < x < 3$.

$$\text{d) } x \leq \frac{1}{4} \text{ hoặc } x \geq 2.$$

Hướng dẫn. Đặt $\log_2 x = t$, ta có $t^2 + t - 2 \geq 0$.

2.124. a) $0 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Hướng dẫn. Nhận xét $\log_{\frac{x}{3}} 3 = \frac{1}{\log_3 \frac{x}{3}} = \frac{1}{\log_3 x - 1}$ rồi đặt $\log_3 x = t$,

$$\text{ta có } \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{t(t-1)} < 0 \Leftrightarrow t > 1 \text{ hoặc } t < 0.$$

- Với $t > 1$ thì $\log_3 x > 1$ nên $x > 3$;
- Với $t < 0$ thì $\log_3 x < 0$ nên $0 < x < 1$.

b) $-3 - \sqrt{65} \leq x < -4$ hoặc $-2 < x \leq -3 + \sqrt{65}$.

c) $x > 1$.

Hướng dẫn. Điều kiện : $x > \frac{1}{3}$, ta có : $\log_2 \frac{x(3x-1)}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 > 0$.

d) $x > -1$. *Hướng dẫn.* Đặt $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t$ (với $t > 0$), ta có $t^2 - t - 2 < 0$.

2.125. a) $0 < x < \frac{1}{16}$ hoặc $\frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{4}$ hoặc $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

Hướng dẫn. Đưa về cùng lôgarit cơ số 4.

$$3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\log_4 x} + \frac{2}{\log_4 x + 1} + \frac{3}{\log_4 x + 2} \leq 0.$$

Đặt $\log_4 x = t$, ta có $\frac{3}{t} + \frac{2}{t+1} + \frac{3}{t+2} \leq 0$.

Dẫn đến $\frac{8t^2 + 16t + 6}{t(t+1)(t+2)} \leq 0$. Do đó $t < -2$ hoặc $-\frac{3}{2} \leq t < -1$ hoặc $-\frac{1}{2} \leq t < 0$.

Từ đó ta có kết quả như trên.

b) $x < -2$ hoặc $1 < x < 2$.

Hướng dẫn. Trước hết đưa về cùng lôgarit cơ số 4, sau đó đưa về cùng lôgarit

cơ số 3, rồi đặt $t = \log_3 \frac{x-1}{x+1}$, ta sẽ có bất phương trình $\frac{t^2 - 1}{t} < 0$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

2.126. a) Chọn (B) ; b) Chọn (C) ; c) Chọn (D).

2.127. a) Chọn (B), vì $\log_{a^3} a = \frac{1}{3}$ $\log_a a = \frac{1}{3}$.

b) Chọn (C), vì $a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2 \log_a 4} = a^{\log_a 4^2} = 16$.

c) Chọn (B), vì $a^{4 \log_a^2 5} = a^{2 \log_a 5} = a^{\log_a 5^2} = 5^2$.

2.128. Chọn (D), vì

$$\log_2 7 = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} 2} = \frac{\log_{12} 7}{\log_{12} 12 - \log_{12} 6} = \frac{b}{1-a}.$$

2.129. a) Chọn (B), vì

$$\log 9000 = \log 9 + \log 1000 = 2 \log 3 + 3 = 2a + 3.$$

b) Chọn (C), vì

$$\frac{1}{\log_{81} 100} = \frac{\log 81}{\log 100} = \frac{4 \log 3}{2} = \frac{4a}{2} = 2a.$$

2.130. a) Đúng, vì $\log_2 5 > \log_2 1 = 0$.

b) Sai, vì $\log_{0,2} 0,8 > \log_{0,2} 1 = 0$.

c) Sai, vì $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7} < \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$.

d) Đúng, vì $\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3} > 0 > -\log_4 3 = \log_4 \frac{1}{3}$.

Hoặc có thể giải thích $\log_3 4 > \log_3 3 = 1 = \log_4 4 > \log_4 \frac{1}{3}$.

2.131. a) $A = 53$; b) $B = -3$.

2.132. Từ $a^2 + 9b^2 = 10ab$ ta có $(a - 3b)^2 = 4ab$.

Lôgarit cơ số 10 hai vế, ta được

$$\log(a - 3b)^2 = \log 4ab$$

$$\Leftrightarrow 2 \log(a - 3b) = \log 4 + \log ab$$

$$\Leftrightarrow \log(a - 3b) - \log 2 = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$$

2.133. a) $y' = 3e^{3x+1} \cos 2x - 2e^{3x+1} \sin 2x$; b) $y' = \frac{3x^2}{2(x^3 - 1)}$;

c) $y' = \frac{2x + e^x}{(x^2 + e^x) \ln 2}$; d) $y' = 5^{\cos x + \sin x} \cdot (-\sin x + \cos x) \ln 5.$

2.134. a) Do $\log_a \frac{b}{c} = -\log_a \frac{c}{b}$ nên $\log_a^2 \frac{b}{c} = \log_a^2 \frac{c}{b}$;

b) $\log_a b \log_b c \log_c a = \log_b c \log_c a^{\log_a b} = \log_b c \log_c b = 1$;

c) Từ câu a) suy ra

$$\log_a^2 \frac{c}{b} = \log_a^2 \frac{b}{c} ; \log_b^2 \frac{a}{c} = \log_b^2 \frac{c}{a} ; \log_c^2 \frac{b}{a} = \log_c^2 \frac{a}{b}.$$

Do đó $\log_a^2 \frac{c}{b} \cdot \log_b^2 \frac{a}{c} \cdot \log_c^2 \frac{b}{a} = \log_a^2 \frac{b}{c} \cdot \log_b^2 \frac{c}{a} \cdot \log_c^2 \frac{a}{b} = 1.$

Vì vậy suy ra điều cần chứng minh.

2.135. a) $x = 10.$

Hướng dẫn. Đưa cả hai vế về lũy thừa cùng cơ số 3.

b) $x = 2.$

Hướng dẫn. Đặt $t = 2^{\sqrt{x^2+5}-x}$ (với $t > 0$), ta có $t^2 - 4t + 4 = 0.$

c) $x = 2005$ và $x = 2006.$

Hướng dẫn. Nhận xét $x = 2005$ và $x = 2006$ là hai nghiệm, rồi chứng tỏ không còn nghiệm nào khác như sau :

- Với $x < 2005$ hoặc $x > 2006$, dễ thấy vế trái lớn hơn vế phải.
- Với $2005 < x < 2006$ thì $0 < |2005 - x| < 1, 0 < |2006 - x| < 1.$

Do đó $|2005 - x|^{2006} < |2005 - x| = x - 2005$;

$$|2006 - x|^{2005} < |2006 - x| = 2006 - x.$$

Dẫn đến vế trái nhỏ hơn vế phải.

d) $x = 0$.

Hướng dẫn. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si chỉ ra vế trái không nhỏ hơn 2, còn dễ thấy vế phải không lớn hơn 2.

2.136. a) $x = 4$, $x = 12$.

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cơ số 2.

b) $x = \sqrt{2}$.

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cơ số 5.

c) $x = 3$.

Hướng dẫn. ĐKXĐ: $4 > x > -3$ và $x \neq -2$.

Đưa về lôgarit cơ số 2, chú ý ĐKXĐ để đối chiếu và chọn đáp số.

d) $x = 100$. *Hướng dẫn.* Nhận xét $x^{\log 7} = 7^{\log x}$.

2.137. a) $(x; y) = (3; 2)$.

Hướng dẫn. Biến đổi hệ phương trình về dạng

$$\begin{cases} 5^x \cdot 2^y = 500 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \cdot 2^{2x-4} = 500 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20^x = 20^3 \\ y = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

b) $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \sqrt{3}\right)$; $(x; y) = (27; 3\sqrt{3})$.

Hướng dẫn. Đưa về cùng lôgarit cơ số 3, ta có

$$\begin{cases} \log_{27} xy = 3 \log_{27} x \cdot \log_{27} y \\ \log_3 \frac{x}{y} = \frac{3 \log_3 x}{4 \log_3 y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = \log_3 x \log_3 y \\ \log_3 x - \log_3 y = \frac{3 \log_3 x}{4 \log_3 y} \end{cases}$$

Rồi đặt $u = \log_3 x$, $v = \log_3 y$ ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} u + v = uv \\ u - v = \frac{3u}{4v} \end{cases}$$

2.138. a) $16 < x < 256$.

Hướng dẫn

Cách 1. $|\log_4 x - 3| < 1 \Leftrightarrow (\log_4 x - 3)^2 < 1 \Leftrightarrow \log_4^2 x - 6\log_4 x + 8 < 0$

$$\Leftrightarrow 2 < \log_4 x < 4 \Leftrightarrow 16 < x < 256.$$

Cách 2. $|\log_4 x - 3| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_4 x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < \log_4 x < 4$

$$\Leftrightarrow 16 < x < 256.$$

b) $x > 3$ hoặc $0 < x < 2$.

Hướng dẫn. Biến đổi bất phương trình về dạng

$$(\log_2 x - 1)(1 - \log_3 x) < 0.$$

Xảy ra hai trường hợp

$$\bullet \begin{cases} \log_2 x - 1 > 0 \\ 1 - \log_3 x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

$$\bullet \begin{cases} \log_2 x - 1 < 0 \\ 1 - \log_3 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ 0 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

c) $x < 2$. *Hướng dẫn.* Chia cả hai vế của bất phương trình cho 15^{2x+3} .

d) Với $a > 1$ thì $x > a^2$;

Với $0 < a < 1$ thì $0 < x < a^2$.

Hướng dẫn. Đặt $\log_a x = t$ (với $t \neq 2$), ta có $\frac{t^2 + t + 2}{t - 2} > 1 \Leftrightarrow t > 2$, tức là

$\log_a x > 2$. Sau đó xét hai khả năng $a > 1$, $0 < a < 1$.

A – KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I – NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm

- Cho hàm số f xác định trên K , ở đó K là một khoảng, một đoạn hay một nửa khoảng. Hàm số F được gọi là *nguyên hàm* của f trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .
- Nếu hàm số f có một nguyên hàm F thì với mọi $C \in \mathbb{R}$ hàm số $y = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của f .
- Họ tất cả các nguyên hàm của f trên K được kí hiệu là $\int f(x)dx$.

Vậy $\int f(x)dx = F(x) + C$

với F là một nguyên hàm của f .

$\int f(x)dx$ còn được dùng để chỉ một nguyên hàm bất kì của f .

- Bảng nguyên hàm của các hàm số thường gặp

$$1) \int 0dx = C ; \int dx = x + C ;$$

$$2) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) ;$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0) ;$$

4) Với k là hằng số khác 0, ta có

$$a) \int \sin kx dx = -\frac{\cos kx}{k} + C ;$$

$$b) \int \cos kx dx = \frac{\sin kx}{k} + C ;$$

$$c) \int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C ;$$

$$d) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1) ;$$

$$5) a) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C ;$$

$$b) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C .$$

2. Tính chất

$$a) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$b) \int af(x) dx = a \int f(x) dx + C \quad (a \neq 0).$$

3. Công thức nguyên hàm từng phần

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

4. Công thức đổi biến số

$$\int f[u(x)]u'(x) dx = F[u(x)] + C$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f .

II – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

1. Khái niệm

Tích phân của hàm số f từ a đến b ($a, b \in K$) là

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_a^b$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên K .

2. Công thức đổi biến số

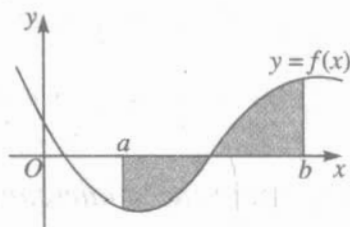
$$\int_a^b f[u(x)]u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

3. Công thức tích phân từng phần

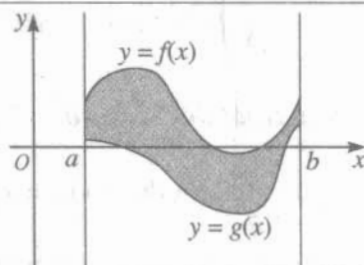
$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

4. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm)

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

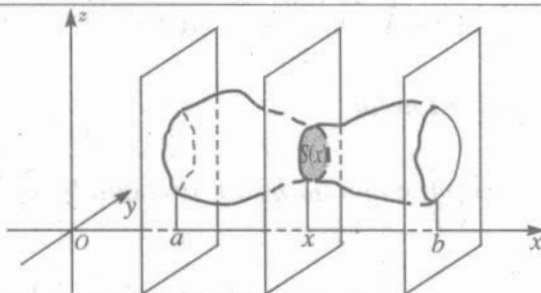


$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

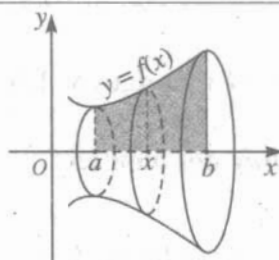


5. Thể tích vật thể

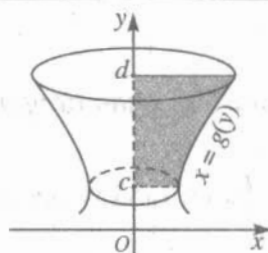
$$V = \int_a^b S(x) dx$$



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$



B. ĐỀ BÀI

§1. NGUYÊN HÀM

3.1. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = 1 - x$;

b) $y = 2 + x^2$;

c) $y = x^3 - 9$;

d) $y = \frac{2}{5} + \frac{1}{3}x^2$;

e) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$;

f) $y = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + 8x$.

3.2. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = (x + 2)(x - 3)$;

b) $y = (x^2 - 3x)(x + 1)$;

c) $y = (x - 3)^3$;

d) $y = (x + 2x^3)(x + 1)$.

3.3. Tìm

a) $\int \frac{x^2 - 3x}{x} dx$;

b) $\int \frac{4x^3 + 5x^2 - 1}{x^2} dx$;

c) $\int \frac{(x + 2)^2}{x^4} dx$;

d) $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} dx$.

3.4. Tìm

a) $\int (x^{\frac{3}{4}} + x^{-\frac{1}{2}} - 5) dx$;

b) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2x)(x + 1) dx$;

c) $\int (x^{-3} - 2x^{-2} + 4x + 1) dx$;

d) $\int \left[(2x + 3x^{-2}) \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) + 3x^{-3} \right] dx$.

3.5. Tìm hàm số $y = f(x)$, biết rằng

a) $f'(x) = 2x + 1$ và $f(1) = 5$;

b) $f'(x) = 2 - x^2$ và $f(2) = \frac{7}{3}$;

c) $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$ và $f(4) = 0$;

d) $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2$ và $f(1) = 2$.

3.6. Tìm hàm số $y = f(x)$, biết rằng :

a) $f'(x) = 3(x+2)^2$ và $f(0) = 8$;

b) $f'(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1$ và $f(1) = 2$;

c) $f'(x) = (x+1)(x-1) + 1$ và $f(0) = 1$;

d) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ và $f(-1) = 3$.

3.7. Tìm hàm số $y = f(x)$ nếu biết $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$.

3.8. Tìm hàm số $y = f(x)$ nếu biết $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}}{14}$, $f(1) = 4$.

3.9. Tìm nguyên hàm của các hàm số lượng giác sau :

a) $y = (2\tan x + \cot x)^2$; b) $y = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$; c) $y = 3 \sin^2 \frac{x}{2}$.

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

3.10. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau bằng phương pháp đổi biến số :

a) $y = (5x+3)^5$; b) $y = \sin^4 x \cos x$; c) $y = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

3.11. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = (4x-1)^3$; b) $y = (3x+5)^6$;
c) $y = (7-3x)^8$; d) $y = (5x+2)^{-6}$; e) $y = (9-4x)^{-2}$.

3.12. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{x^3}{(6x^4+5)^5}$; b) $y = \sin x \sqrt{2\cos x - 1}$; c) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

3.13. Bằng phương pháp đổi biến số, hãy tìm :

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$; b) $\int 3x^2\sqrt{x^3+1} dx$;

$$c) \int \frac{x}{(3x^2 + 9)^4} dx ;$$

$$d) \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x - 5} dx.$$

3.14. Bằng phương pháp đổi biến số, hãy tìm :

$$a) \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx ;$$

$$b) \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx ;$$

$$c) \int \frac{1}{x \ln x} dx ;$$

$$d) \int 2xe^{x^2+4} dx.$$

3.15. Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{4000}{1 + 0,5t}$

và lúc đầu đám vi trùng có 250000 con. Hỏi sau 10 ngày số lượng vi trùng là bao nhiêu ?

3.16. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1}$ (m/s²).

Vận tốc ban đầu của vật là 6 m/s. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

3.17. Gọi $h(t)$ (cm) là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây.

Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5} \sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở

bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

3.18. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, hãy tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

$$a) y = xe^{-x} ;$$

$$b) y = x \ln x ;$$

$$c) y = \sqrt{x} \ln x ;$$

$$d) y = x \sin \frac{x}{3}.$$

3.19. Dùng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần, hãy tìm

$$a) \int x^2 e^x dx ;$$

$$b) \int 3x^2 \cos(2x) dx ;$$

$$c) \int x^3 \ln(2x) dx ;$$

$$d) \int x^2 \cos(3x) dx.$$

3.20. Giả sử khi áp dụng công thức nguyên hàm từng phần, ta dẫn đến

$$\int f(x) dx = a G(x) - b \int f(x) dx$$

Với $b \neq -1$.

Chúng minh rằng

$$\int f(x)dx = \frac{aG(x)}{b+1} + C \text{ với } C \text{ là hằng số.}$$

3.21. Sử dụng kết quả bài 3.20 để tìm

a) $\int e^x \cos x dx$; b) $\int e^x \sin x dx$; c) $\int e^x \sin 2x dx$.

3.22. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $y = x^3 \sin x$; b) $y = \sin(\ln x)$.

3.23. Đặt $I_n = \int x^n e^x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Chúng minh rằng $I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$;

b) Tìm I_1, I_2, I_3 .

3.24. Đặt $I_n = \int \sin^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

a) Chúng minh rằng $I_n = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$;

b) Tìm I_3 .

§3. TÍCH PHẦN

3.25. Tính các tích phân sau :

a) $\int_2^4 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$;

b) $\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1}\right) dx$;

c) $\int_2^5 (3x-4)^4 dx$;

d) $\int_{-2}^0 (x - e^{-x}) dx$.

3.26. Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 (x^2 - 3x^{-4}) dx$;

b) $\int_0^2 (x\sqrt{x} - x) dx$;

$$\text{c) } \int_0^{-1} x^3(x+1)dx ; \quad \text{d) } \int_1^4 (\sqrt{x}-1)^2 dx ; \quad \text{e) } \int_1^3 \frac{x^3 - x^2 + x}{x} dx.$$

3.27. Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } \int_0^1 (e^x + 1)dx ; \quad \text{b) } \int_1^2 \frac{4}{e^{2x}} dx ;$$

$$\text{c) } \int_{-1}^1 (e^x - e^{-x})dx ; \quad \text{d) } \int_0^1 (\sqrt{e^x} - 1)dx ; \quad \text{e) } \int_1^{-1} e^{1-2x} dx.$$

3.28. a) Giả sử $\int_0^3 f(x)dx = 3$ và $\int_0^4 f(z)dz = 7$. Tính $\int_3^4 f(t)dt$.

b) Giả sử $\int_{-1}^1 f(t)dt = 5$ và $\int_{-1}^3 f(r)dr = 6$. Tính $\int_1^3 f(u)du$.

3.29. Giả sử M và m theo thứ tự là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số f trên đoạn $[a; b]$. Chứng minh rằng

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

3.30. a) Sử dụng bất đẳng thức ở bài 3.29 để đánh giá các tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad J = \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^2}, \quad L = \int_{0.5}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

b) Từ công thức $I = J + L$, hãy đưa một đánh giá chính xác hơn cho I .

3.31. Tính $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx$.

3.32. Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{\sin(\pi t)}{\pi}$ (m/s).

Tính quãng đường di chuyển của vật đó trong khoảng thời gian 1,5 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

3.33. Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1,2 + \frac{t^2 + 4}{t + 3}$ (m/s). Tìm quãng đường vật đi được trong 4 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

3.34. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$;

b) $\int_0^2 |1 - x| dx$;

c) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$.

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

3.35. Tính các tích phân sau :

a) $\int_4^5 \left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^2 dx$;

b) $\int_1^2 \frac{3}{1 - 2x} dx$;

c) $\int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$;

d) $\int_0^1 \frac{2x^2}{x^3 + 1} dx$;

e) $\int_{10}^{12} \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} dx$.

3.36. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$;

b) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{\cos^2 3x(1 + \tan 3x)} dx$;

c) $\int_0^{\pi} \cos(2x + \pi) dx$;

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin 2x} dx$.

3.37. Tính các tích phân sau :

a) $\int_1^2 x\sqrt{x^2 + 3} dx$;

b) $\int_{-1}^1 (3x + 2)^4 dx$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} dx$.

3.38. a) Cho $a > 0$. Chứng minh rằng

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}(r - k),$$

trong đó r và k là các số thực thoả mãn $\tan r = \frac{\beta}{a}$, $\tan k = \frac{\alpha}{a}$.

b) Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$.

3.39. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1)\cos x dx$;

b) $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$;

c) $\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx$;

d) $\int_1^e x^2 \ln x dx$;

e) $\int_0^1 x e^x dx$.

3.40. Đặt $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$. Chứng minh rằng $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Từ đó hãy tính I_5 .

3.41. Đặt $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Chứng minh rằng $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Từ đó hãy tính I_6 và I_7 .

§5, §6. MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

3.42. a) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 2\pi$.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2 - x$, $y = x^2$, và trục hoành trong miền $x \geq 0$.

3.43. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 3$.

3.44. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = x^3$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$;

b) Đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$ và trục hoành ;

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = -2$;

d) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = 4$.

e) Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x} - x$ và trục hoành.

3.45. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = e^x + 1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.

b) Đồ thị hàm số $y = e^{2x} - 1$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$ và đường thẳng $x = 2$.

c) Đồ thị hàm số $y = e^x - e^{-x}$, trục hoành, đường thẳng $x = -1$ và đường thẳng $x = 1$.

3.46. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x+1}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 4$.

b) Đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2-x}$, trục hoành, đường thẳng $x = -1$ và đường thẳng $x = 1$.

3.47. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và đường thẳng $x = -1$.

b) Đồ thị hàm số $y = 1 - \frac{1}{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$ và đường thẳng $x = 2$.

c) Đồ thị hàm số $y = 1 - \frac{1}{x^2}$, đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

3.48. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tìm k .

3.49. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{(x-1)^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 2$ và đường thẳng $x = 3$;

b) Đồ thị hàm số $y = \frac{2}{(x-1)^2}$, đường thẳng $y = 2$ và đường thẳng $y = 8$.

3.50. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hai hàm số $y = x^2 + 2$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$;

b) Đồ thị hai hàm số $y = 2 - x^2$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$;

c) Đồ thị hai hàm số $y = 2 - x^2$, $y = x$;

d) Đồ thị hai hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$ và trục hoành.

3.51. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hai hàm số $y = 7 - 2x^2$ và $y = x^2 + 4$;

b) Hai đường cong $x - y^2 = 0$ và $x + 2y^2 = 3$;

c) Hai đường cong $x = y^3 - y^2$ và $x = 2y$.

3.52. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = 3$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 3$) là một hình chữ nhật có hai kích thước là x và $2\sqrt{9 - x^2}$.

3.53. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = x(4 - x)$ và trục hoành ;

b) Đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$;

c) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$;

d) Đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

3.54. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung mỗi hình phẳng giới hạn bởi :

a) Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục tung và hai đường thẳng $y = 0, y = 4$;

b) Đồ thị hàm số $y = x^3$, trục tung và hai đường thẳng $y = 1, y = 2$;

c) Đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục tung và hai đường thẳng $y = 0, y = 1$;

d) Đồ thị hàm số $y = 3 - x^2$, trục tung và đường thẳng $y = 1$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi bài tập từ 3.55 đến 3.57, hãy chọn một phương án trong bốn phương án đã cho để được khẳng định đúng.

3.55. Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số

(A) $f(x) = e^{2x}$; (B) $f(x) = 2xe^{x^2}$; (C) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$; (D) $f(x) = x^2e^{x^2} - 1$.

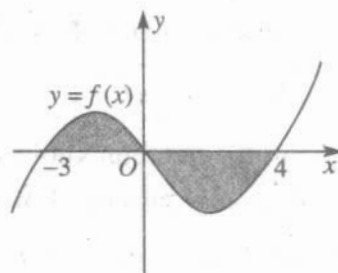
3.56. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$. Diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình 3.1) là

(A) $\int_{-3}^4 f(x)dx$;

(B) $\int_{-3}^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx$;

(C) $\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$;

(D) $\int_0^{-3} f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx$.



Hình 3.1

3.57. Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln K$. Giá trị của K là

- (A) 9 ; (B) 3 ; (C) 81 ; (D) 8.

3.58. Cho $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ và $u = x^2 - 1$. Chọn **khẳng định sai** trong các khẳng định sau :

(A) $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$; (B) $I = \frac{2}{3}\sqrt{27}$;

(C) $I = \int_1^2 \sqrt{u}du$; (D) $I = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3$.

Trong mỗi bài tập từ 3.59 đến 3.61, hãy chọn một phương án trong bốn phương án đã cho để được khẳng định đúng.

3.59. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$. Khi đó n bằng

- (A) 6 ; (B) 5 ; (C) 4 ; (D) 3.

3.60. Giá trị của $\int_0^2 2e^{2x}dx$ bằng

- (A) e^4 ; (B) $e^4 - 1$; (C) $4e^4$; (D) $3e^4$.

3.61. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là

- (A) $\frac{4}{3}$; (B) $\frac{3}{2}$; (C) $\frac{5}{3}$; (D) $\frac{23}{15}$.

3.62. Giả sử $\int_{-2}^2 f(x)dx = 4$, $\int_2^5 f(x)dx = 3$, $\int_{-2}^5 g(x)dx = 6$. Khẳng định sau đây

đúng hay sai : " $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in [-2 ; 5]$ " ?

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

3.63. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau bằng phương pháp đổi biến :

a) $y = x^3(x^4 - 1)^2$;

b) $y = \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}$;

c) $y = \frac{18\tan^2 x}{(2 + \tan^3 x)^2 \cos^2 x}$;

d) $\sqrt{1 + \sin^2(x-1)} \sin(x-1)\cos(x-1)$.

3.64. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau bằng phương pháp lấy nguyên hàm từng phần :

a) $y = x^2 \cos x$;

b) $y = x^2 e^x$;

c) $y = x^3 e^x$;

d) $y = e^{-x} \cos x$;

e) $y = e^{2x} \cos 3x$.

3.65. Bằng cách phối hợp hai phương pháp đổi biến số và lấy nguyên hàm từng phần, tìm

a) $\int e^{\sqrt{7x+4}} dx$;

b) $\int \ln(x + x^2) dx$;

c) $\int x \tan^2 x dx$;

d) $\int \sin(\ln x) dx$.

3.66. Giá trị trung bình của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a ; b]$ là một số, kí hiệu $m(f)$ được tính theo công thức

$$m(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Hãy tính giá trị trung bình của mỗi hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra :

a) $f(x) = \sin x$ trên đoạn $[0 ; \pi]$;

b) $f(x) = \tan x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$;

c) $f(x) = |x| - 1$ trên đoạn $[-1 ; 3]$;

d) $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1 ; 1]$.

3.67 Tính đạo hàm của các hàm số sau :

$$\text{a) } G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t dt \quad (x > 0) ;$$

$$\text{b) } G(x) = \int_1^{\sin x} 3t^2 dt ;$$

$$\text{c) } G(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt \quad (x > 0) ;$$

$$\text{d) } G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt.$$

3.68. Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } \int_0^{\pi} \sin^2(5t) dt ;$$

$$\text{b) } \int_1^4 \frac{(1 + \sqrt{u})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u}} du ;$$

$$\text{c) } \int_{\frac{1}{8}}^1 x^{-\frac{1}{3}} \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx ;$$

$$\text{d) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 15 \sin^4(3x) \cos(3x) dx.$$

3.69. Tìm $f(4)$, biết rằng :

$$\text{a) } \int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x) ;$$

$$\text{b) } \int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos(\pi x).$$

3.70. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi :

$$\text{a) } \text{Đồ thị hai hàm số } y = |x^2 - 4|, y = \frac{x^2}{2} + 4 ;$$

$$\text{b) } \text{Các đường cong } x = y^{\frac{2}{3}}, x + y^4 = 2 \text{ và trục hoành.}$$

$$\text{c) } \text{Các đường cong } y = \sqrt{x}, x + 2y^2 = 3 \text{ và trục hoành.}$$

3.71. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục hoành mỗi hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

$$\text{a) } y = 2x - x^2, y = 0 ;$$

$$\text{b) } y = \ln x, y = 0, x = 2 ;$$

$$\text{c) } y = \sin x \cos x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}.$$

3.72. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay quanh trục tung mỗi hình phẳng giới hạn bởi các đường sau :

a) $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2 + 1}$, $y = 0$, $y = 1$; b) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 2$;

c) Hình tròn tâm $I(2; 0)$, bán kính $R = 1$.

3.73. Cho hàm số $y = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ($0 < x \leq 1$).

a) Tính diện tích hình A giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho, trục hoành và đường thẳng $x = \frac{1}{2}$;

b) Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay A xung quanh trục hoành.

c) Chứng minh rằng $x = \frac{1}{1+y^2}$ và từ câu a) suy ra giá trị của $\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}$.

C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

§1. NGUYÊN HÀM

3.1. a) $x - \frac{1}{2}x^2 + C$;

b) $2x + \frac{x^3}{3} + C$;

c) $\frac{x^4}{4} - 9x + C$;

d) $\frac{2}{5}x + \frac{x^3}{9} + C$;

e) $\frac{\sqrt{x^3}}{3} + \frac{1}{x} + C$;

f) $\frac{5}{x^2} + 4x^2 + C$.

3.2. a) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + C$;

b) $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + C$;

c) $\frac{(x-3)^4}{4} + C$;

d) $\frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.

$$3.3. a) \frac{x^2}{2} - 3x + C;$$

$$b) 2x^2 + 5x + \frac{1}{x} + C;$$

$$c) -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + C;$$

$$d) \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} + C.$$

$$3.4. a) \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 5x + C;$$

$$b) \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + C;$$

$$c) -\frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x} + 2x^2 + x + C;$$

$$d) \frac{x^4}{2} + x + C.$$

$$3.5. a) x^2 + x + 3.$$

Hướng dẫn. $f(x) = x^2 + x + C$. Vì $f(1) = 5$ suy ra $C = 5 - 2 = 3$.

$$b) 2x - \frac{x^3}{3} + 1;$$

$$c) \frac{8x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{40}{3};$$

$$d) \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + 2x - \frac{3}{2}.$$

$$3.6. a) (x+2)^3;$$

$$b) \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{x^4}{4} + x;$$

$$c) \frac{x^3}{3} + 1;$$

$$d) x^4 - x^3 + 2x + 3.$$

$$3.7. f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{5}{2}.$$

Hướng dẫn. $f(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + c$. Từ điều kiện đã cho, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b + c = 2, \\ \frac{a}{2} - b + c = 4, \\ a + b = 0. \end{cases}$$

Giải ra ta được $a = 1, b = -1, c = \frac{5}{2}$.

$$3.8. \frac{5\sqrt{x^3}}{7} + \frac{23}{7}.$$

$$3.9. \text{ a) } 4\tan x - \cot x - x + C; \quad \text{ b) } \tan x - \cot x + C; \quad \text{ c) } \frac{3}{2}(x - \sin x) + C.$$

§2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

$$3.10. \text{ a) } \frac{(5x+3)^6}{30} + C.$$

Hướng dẫn. Đổi biến $u = 5x + 3$.

$$\text{ b) } \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Hướng dẫn. Đổi biến $u = \sin x$.

$$\text{ c) } \ln(e^x + 1) + C.$$

Hướng dẫn. Đổi biến $u = e^x + 1$.

$$3.11. \text{ a) } \frac{(4x-1)^4}{16} + C;$$

$$\text{ b) } \frac{(3x+5)^7}{21} + C;$$

$$\text{ c) } \frac{-(7-3x)^9}{27} + C;$$

$$\text{ d) } \frac{-(5x+2)^{-5}}{25} + C;$$

$$\text{ e) } \frac{1}{4(9-4x)} + C.$$

$$3.12. \text{ a) } \frac{-1}{96(6x^4+5)^4} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = 6x^4 + 5$.

$$\text{ b) } -\frac{1}{3}\sqrt{(2\cos x - 1)^3} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = 2\cos x - 1$.

$$\text{ c) } \frac{1}{\cos x} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = \cos x$.

$$3.13. \text{ a) } \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + 1$.

$$\text{ b) } \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^3 + 1$.

$$c) -\frac{1}{18}(3x^2 + 9)^{-3} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = 3x^2 + 9$.

$$d) \ln |x^2 + 4x - 5| + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + 4x - 5$.

$$3.14. a) e^{\tan x} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = \tan x$.

$$b) -\ln(1 + e^{-x}) + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = e^{-x}$.

$$c) \ln |\ln x| + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = \ln x$.

$$d) e^{x^2+4} + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + 4$.

$$3.15. \approx 264334 \text{ con.}$$

$$\text{Hướng dẫn. } N(t) = 8000 \ln(1 + 0,5t) + 250\,000$$

$$N(10) = 8000 \ln 6 + 250\,000 \approx 264334 \text{ (con).}$$

$$3.16. \approx 13 \text{ m/s.}$$

$$\text{Hướng dẫn. } v(t) = 3 \ln(t + 1) + 6, v(10) = 3 \ln 11 + 6 \approx 13 \text{ (m/s).}$$

$$3.17. 2,66 \text{ cm.}$$

$$\text{Hướng dẫn. } h(t) = \frac{3}{20}(t + 8)^{\frac{4}{3}} - \frac{12}{5}.$$

$$3.18. a) -e^{-x}(x + 1) + C.$$

Hướng dẫn. $v' = e^{-x}$, $u = x$.

$$b) \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Hướng dẫn. $v' = x$, $u = \ln x$.

$$c) \frac{2x^{\frac{3}{2}} \ln x}{3} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{9} + C.$$

Hướng dẫn. $v' = x^{\frac{1}{2}}$, $u = \ln x$.

$$d) 9 \sin \frac{x}{3} - 3x \cos \frac{x}{3} + C.$$

Hướng dẫn. $v' = \sin \frac{x}{3}$, $u = x$.

$$3.19. a) (x^2 - 2x + 2) e^x + C.$$

Hướng dẫn. $v' = e^x$, $u = x^2$.

$$b) \frac{3}{4}(2x \cos 2x - \sin 2x + 2x^2 \sin 2x) + C.$$

Hướng dẫn. $v' = \cos(2x)$, $u = x^2$.

$$c) \frac{x^4 \ln(2x)}{4} - \frac{x^4}{16} + C. \quad \text{Hướng dẫn. } v' = x^3, u = \ln(2x).$$

$$d) -\frac{6x \cos(3x) - 2 \sin(3x) + 9x^2 \sin(3x)}{27} + C.$$

3.20. Giải.

Ta có : $\int f(x)dx + b \int f(x)dx = aG(x) + C_1$ (C_1 là hằng số nào đó)

hay $(b+1)f(x)dx = aG(x) + C_1$.

$$\text{Do đó : } \int f(x)dx = \frac{aG(x)}{b+1} + \frac{C_1}{b+1} = \frac{aG(x)}{b+1} + C.$$

$$3.21. a) \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

Giải. Đặt $u = e^x$, $v' = \cos x$, ta dẫn đến

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx. \quad (1)$$

Tương tự

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

Từ bài 3.20 suy ra

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

$$b) \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

$$c) \frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C.$$

$$3.22. a) -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C.$$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^3$, $v = -\cos x$.

Ta có $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx$. Tiếp tục tính $\int x^2 \cos x dx$ bằng cách lấy nguyên hàm từng phần.

$$b) \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C.$$

Giải. Đổi biến $u = \ln x$. Khi đó $\sin(\ln x) dx = e^u \sin u du$. Ta có (theo bài 3.21b)

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x) dx &= \int e^u \sin u du = \frac{1}{2} e^u (\sin u - \cos u) + C \\ &= \frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C. \end{aligned}$$

3.23. a) Hướng dẫn. Kiểm tra rằng $(x^n e^x - n I_{n-1})' = x^n e^x$.

$$b) I_1 = x e^x - e^x + C; \quad I_2 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C;$$

$$I_3 = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + C.$$

3.24. a) Hướng dẫn. Kiểm tra rằng $\left(\frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \right)' = \sin^n x$.

$$b) I_3 = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x + C.$$

§3. TÍCH PHÂN

$$3.25. a) \frac{275}{12};$$

$$b) \frac{e^2}{2} + 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \approx 5,27;$$

$$c) \frac{161019}{15} = 10734,6;$$

$$d) -1 - e^2.$$

$$3.26. a) \frac{35}{24};$$

$$b) \frac{8\sqrt{2}}{5} - 2;$$

$$c) \frac{1}{20};$$

$$d) \frac{7}{6};$$

$$e) \frac{20}{3}.$$

$$3.27. a) e;$$

$$b) 2(e^{-2} - e^{-4});$$

$$c) 0;$$

$$d) 2\sqrt{e} - 3;$$

$$e) \frac{1}{2}(e^{-1} - e^3).$$

3.28 a) 4 ; b) 1.

3.29. *Giải.* Ta có : $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a ; b]$. Áp dụng bài toán 13.b)

$$(\text{SGK trang 153}) \text{ ta suy ra : } m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a).$$

3.30. a) $\frac{1}{2} \leq I \leq 1 ; \frac{2}{5} \leq J \leq \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} \leq L \leq \frac{2}{5}.$

b) $\frac{13}{20} \leq I \leq \frac{9}{10}.$

3.31. $2 - \frac{2}{e}.$

Hướng dẫn. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| \, dx = \int_1^e \ln x \, dx - \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x \, dx.$ Nguyên hàm của $\ln x$ trên khoảng

xác định của nó là $x(\ln x - 1).$

3.32. $\frac{3}{4\pi} + \frac{1}{\pi^2} \approx 0,34(\text{m}).$

3.33. $0,8 - 13\ln 3 + 13\ln 7 \approx 11,81(\text{m}).$

3.34. a) 2. *Hướng dẫn.* $\int_0^{\pi} |\cos x| \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx.$

b) 1. *Hướng dẫn.* $\int_0^2 |1-x| \, dx = \int_0^1 (1-x) \, dx + \int_1^2 (x-1) \, dx.$

c) 12. *Hướng dẫn.* $\frac{1}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} = \frac{1}{9}(\sqrt{x+9} + \sqrt{x}).$

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

3.35. a) $\frac{1717}{4}$. Hướng dẫn. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2 = x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}$.

b) $-\frac{3\ln 3}{2}$. Hướng dẫn. Đặt $u = 2x - 1$.

c) 0. Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + 1$.

d) $\frac{2\ln 2}{3}$. Hướng dẫn. Đặt $u = x^3 + 1$.

e) $\ln 77 - \ln 54$. Hướng dẫn. Đặt $u = x^2 + x - 2$.

3.36. a) $\ln 2$. Hướng dẫn. Đặt $u = 1 + \sin x$.

b) $\frac{\ln 2}{3}$. Hướng dẫn. Đặt $u = 1 + \tan 3x$.

c) 0.

d) $\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}$.

Hướng dẫn. Đặt $u = \tan x$. Khi đó tích phân cần tính bằng $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{2u}$.

3.37. a) $\frac{7\sqrt{7}-8}{3}$;

b) 208,4.

c) 1.

Giải. Đặt $u = \tan \frac{x}{2}$. Khi đó $du = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$, suy ra $dx = \frac{2du}{1+u^2}$,

$1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2}{1+u^2}$. Vậy tích phân cần tính bằng

$$\int_0^1 du = 1.$$

3.38 a) Đặt $x = a \tan u$. Khi đó

$$dx = \frac{a du}{\cos^2 u}, \quad x^2 + a^2 = a^2(1 + \tan^2 u) = \frac{a^2}{\cos^2 u}.$$

Theo công thức đổi biến, ta có

$$\int_a^\beta \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int_k^r \frac{du}{a} = \frac{1}{a}(r - k) \text{ với } \tan r = \frac{\beta}{a}, \tan k = \frac{a}{a}.$$

b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$

Giải. Đặt $u = \tan \frac{x}{2}$. Khi đó $dx = \frac{2du}{1+u^2}$. Mặt khác

$$2 + \cos x = 2 + \frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{3+u^2}{1+u^2}. \text{ Vậy theo a), ta có}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} = \int_0^1 \frac{1+u^2}{3+u^2} \cdot \frac{2du}{1+u^2} = 2 \int_0^1 \frac{du}{u^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

3.39. a) $\pi - 3$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = 2x - 1, v' = \cos x$.

b) $\pi^3 - 6\pi$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = x^3, v' = \sin x$.

c) $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn. Trước hết đổi biến $t = 1 + x^2$. Tích phân cần tìm bằng $\frac{1}{2} \int_1^2 \ln t dt$.

Sau đó sử dụng tích phân từng phần với $u = \ln t, v' = 1$.

d) $\frac{2e^3 + 1}{9}$.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = \ln x, v' = x^2$.

e) 1.

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = x, v' = e^x$.

3.40. Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = \cos^{n-1} x$, $v' = \cos x$ suy ra

$$I_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx.$$

Thay $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ta có điều cần chứng minh.

$$\text{Suy ra } I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{8}{15}.$$

3.41. $I_6 = \frac{5\pi}{32}$, $I_7 = \frac{16}{35}$.

Hướng dẫn. Vận dụng công thức tích phân từng phần tương tự như bài 3.40.

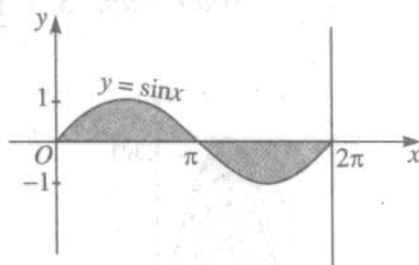
§5. §6. MỘT SỐ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

3.42. a) 4.

Hướng dẫn. Ta có $\sin x \geq 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ và $\sin x \leq 0$ trên đoạn $[\pi; 2\pi]$. Vậy diện tích hình phẳng (phần tô đậm trong hình 3.2) là

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \\ &= 2 - (-2) = 4. \end{aligned}$$

b) $\frac{5}{6}$.



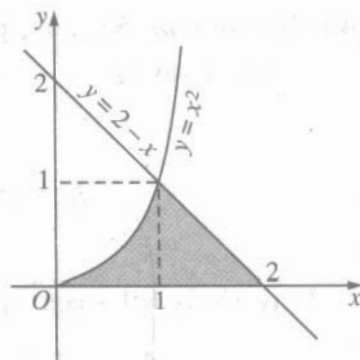
Hình 3.2

Giải. Tìm hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = 2 - x$ và $y = x^2$ bằng cách giải phương trình $2 - x = x^2$. Ta tìm được $x = 1$ và $x = -2$ (loại). Hình tạo

thành (phần tô đậm trong hình 3.3) gồm một tam giác cong và một tam giác. Diện tích tam giác cong là

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \text{ Diện tích tam giác là } \frac{1}{2}. \text{ Vậy}$$

$$\text{diện tích hình phẳng cần tìm là } \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$



Hình 3.3

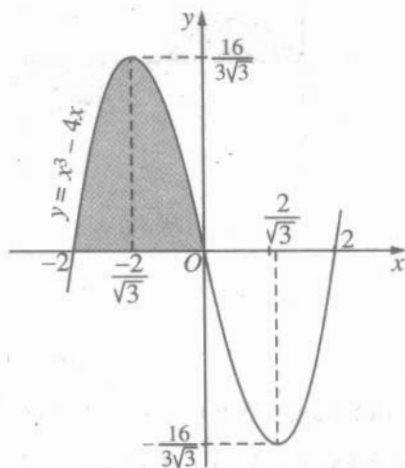
3.43. $\frac{11}{4}$.

Hướng dẫn. $S = \int_0^3 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$

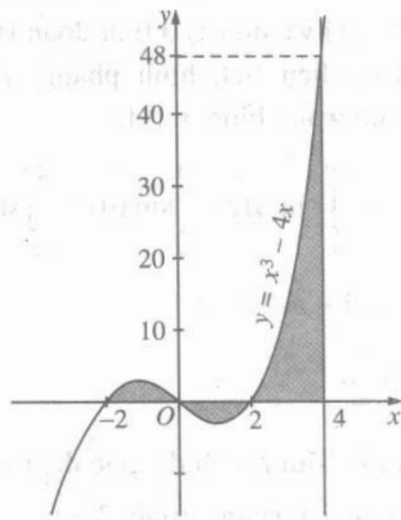
3.44. a) 4. Hướng dẫn. $S = \int_0^2 x^3 dx$.

b) $\frac{32}{3}$. Hướng dẫn. $S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$.

c) 4. Hướng dẫn. $S = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx$ (h.3.4)



Hình 3.4



Hình 3.5

d) 44. Hướng dẫn. (h.3.5)

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^4 |x^3 - 4x| dx \\
 &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \\
 &\quad + \int_2^4 (x^3 - 4x) dx = 4 + 4 + 36 = 44.
 \end{aligned}$$

e) $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn. (h.3.6) $S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx$.

3.45. a) e ; b) $\frac{e^4 - e^2}{2} - 1$;

c) $2\left(e + \frac{1}{e} - 2\right)$.

3.46. a) $2\ln 5$; b) $3\ln 3$.

3.47. a) $\ln 2 + \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn. (h.3.7) $S = \int_{-2}^{-1} \left|x + \frac{1}{x}\right| dx$.

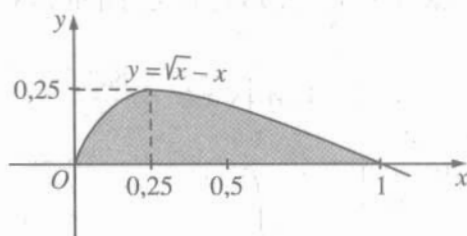
b) 0,5.

Hướng dẫn. $S = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

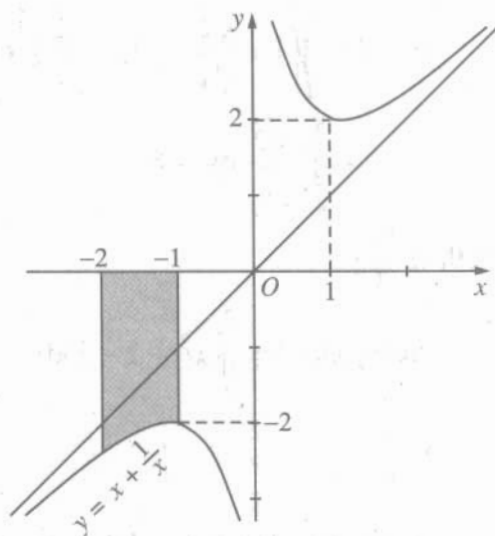
c) $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

Hướng dẫn. (h.3.8). Diện tích hình thang cong ABCD là

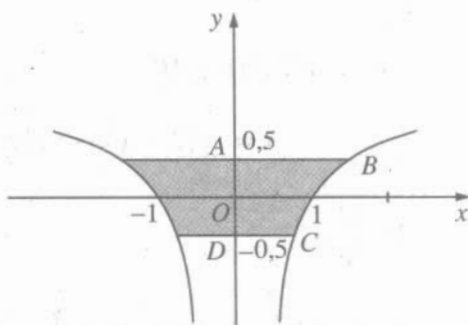
$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$



Hình 3.6



Hình 3.7



Hình 3.8

3.48. $k = \frac{8}{3}$. Hướng dẫn. Diện tích cần

tìm là $4\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{8a^2}{3}$.

3.49. a) 1.

b) 8.

Giải. Từ $y = \frac{2}{(x-1)^2}$, ta rút ra

$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \text{ hoặc } x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S &= \int_2^8 \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{y}} \right) \right] dy \\ &= \int_2^8 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{y}} dy = 8. \end{aligned}$$

3.50. a) $\frac{14}{3}$.

Hướng dẫn. $S = \int_0^2 (x^2 + 2 - x) dx$.

b) $\frac{7}{6}$.

Hướng dẫn. (h.3.9) $S = \int_0^1 (2 - x^2 - x) dx$.

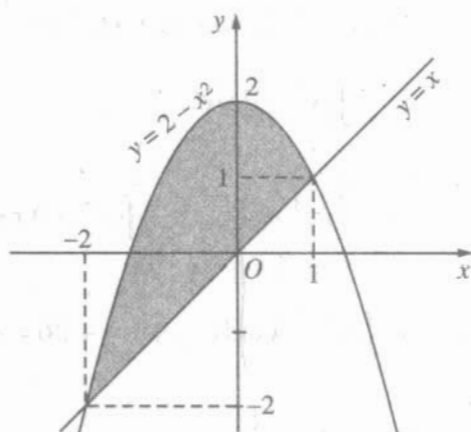
c) $\frac{9}{2}$.

Hướng dẫn. (h.3.10)

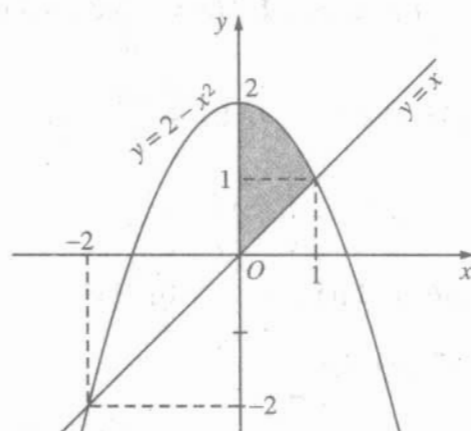
$$S = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx.$$

d) $\frac{22}{3}$.

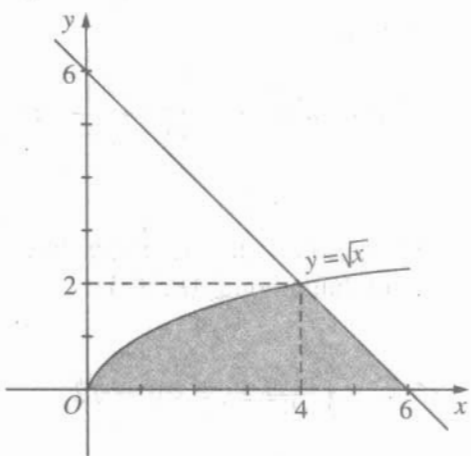
Hướng dẫn. (h.3.11) $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx + 2$.



Hình 3.9



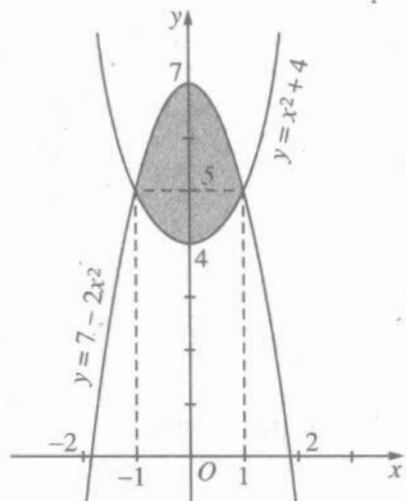
Hình 3.10



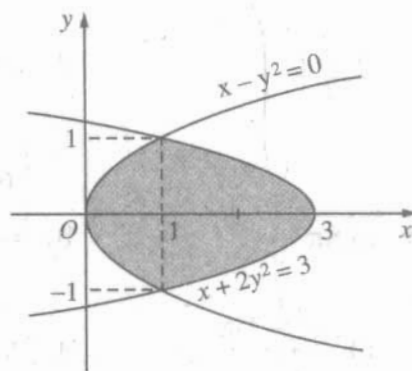
Hình 3.11

3.51. a) 4.

Hướng dẫn. (h.3.12) $S = \int_{-1}^1 (7 - 2x^2 - x^2 - 4)dx = \int_{-1}^1 (3 - 3x^2)dx = 4.$



Hình 3.12



Hình 3.13

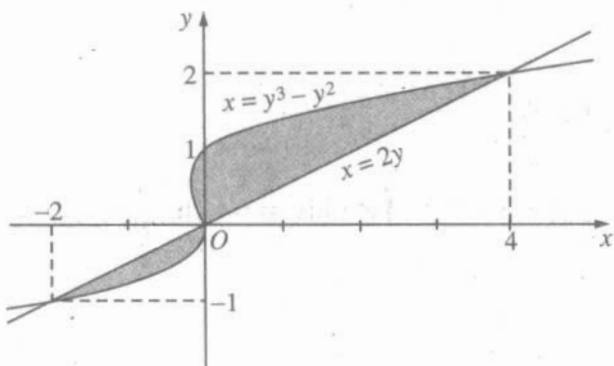
b) 4.

Hướng dẫn. (h.3.13) $S = 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx + 2 \int_1^3 \sqrt{\frac{3-x}{2}} dx = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 4.$

c) $\frac{37}{12}.$

Hướng dẫn. (h.3.14)

$$S = \int_0^2 (2y - y^3 + y^2) dy + \int_{-1}^0 (y^3 - y^2 - 2y) dy = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}.$$



Hình 3.14

3.52. 18. *Hướng dẫn.* $V = \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2} \, dx.$

3.53. a) $\frac{512\pi}{15}$; b) $\frac{(e^6 - 1)\pi}{2}$;

c) $\frac{\pi}{2}$; d) $2\pi.$

3.54. a) 8π ; b) $\frac{\left(6 \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 3\right)\pi}{5}$;

c) $\frac{(e^2 - 1)\pi}{2}$; d) $2\pi.$ *Hướng dẫn.* $V = \pi \int_1^3 (3 - y)dy.$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

3.55. Chọn B.

3.56. Chọn C.

3.57. Chọn B.

3.58. Chọn C.

3.59. Chọn D.

3.60. Chọn B.

3.61. Chọn A.

3.62. Sai.

Hướng dẫn. Ta có

$$\int_{-2}^5 f(x)dx = 4 + 3 = 7 ; \quad \int_{-2}^5 g(x)dx = 6 \text{ nên } \int_{-2}^5 f(x)dx > \int_{-2}^5 g(x)dx.$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

3.63. a) $\frac{1}{12}(x^4 - 1)^3 + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^4 - 1.$

b) $-6(1 - x^3)^{\frac{1}{2}} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = 1 - x^3.$

c) $-\frac{6}{\tan^3 x + 2} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \tan^3 x + 2.$

d) $\frac{1}{3}[1 + \sin^2(x - 1)]^{\frac{3}{2}} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = 1 + \sin^2(x - 1).$

3.64. a) $x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2, v' = \cos x.$

b) $e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^2, v' = e^x.$

c) $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = x^3, v' = e^x.$

d) $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \cos x, v' = e^{-x}.$ Khi xuất hiện $\int e^{-x} \sin x dx$ lại tiếp tục sử dụng phương pháp tích phân từng phần với $u = \sin x, v' = e^{-x}$

e) $\frac{e^{2x}}{13}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C.$

3.65. a) $\frac{2}{7}e^{\sqrt{7x+4}}\sqrt{7x+4} - \frac{2}{7}e^{\sqrt{7x+4}} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \sqrt{7x+4}$. Suy ra $dx = \frac{2}{7}u du$.

b) $x \ln(x+x^2) - 2x + \ln(x+1) + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \ln(x+x^2)$, $v' = 1$.

c) $-\frac{1}{2}x^2 + x \tan x + \ln |\cos x| + C.$

Hướng dẫn. Chú ý rằng $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, ta đưa về $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$ rồi sử dụng

phương pháp tích phân từng phần với $u = x$, $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

d) $\frac{x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \ln x$. Suy ra $dx = e^u du$.

3.66. a) $\frac{2}{\pi}$; b) 0; c) $\frac{1}{4}$; d) $1 - \frac{\pi}{4}$.

3.67. a) $\frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$; b) $3 \sin^2 x \cos x$; c) $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$; d) $2x \cos x$.

Hướng dẫn. Dùng định nghĩa tích phân và quy tắc tính đạo hàm hàm số hợp.

Chú ý rằng, nếu $F'(x) = f(x)$ và $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ thì :

$$g(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow g'(x) = F'(x) = f(x).$$

3.68. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $4\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{2}}{3}$. *Hướng dẫn.* Đặt $x = 1 + \sqrt{u}$;

c) $\frac{27\sqrt{3}}{160}$; d) -2.

Hướng dẫn. Dùng phương pháp đổi biến số, đặt $u = \sin 3x$.

3.69. a) $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn. Lấy đạo hàm hai vế, ta được

$$2xf(x^2) = -x\pi\sin(\pi x) + \cos(\pi x).$$

b) $\sqrt[3]{12}$.

3.70. a) $\frac{64}{3}$.

Hướng dẫn. (h.3.15)

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - |x^2 - 4| \right) dx \\ &= 2 \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + 4 - (4 - x^2) \right] dx \\ &\quad + 2 \int_2^4 \left[\frac{x^2}{2} + 4 - (x^2 - 4) \right] dx = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

b) $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn. (h.3.16)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx + \int_1^2 (2-x)^4 dx \\ &= \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

c) 2.

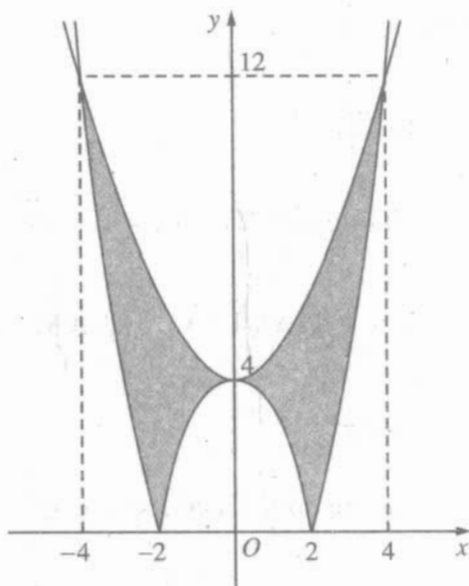
Hướng dẫn. $S = \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^3 \sqrt{\frac{3-x}{2}} dx = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$.

3.71. a) $\frac{16\pi}{15}$;

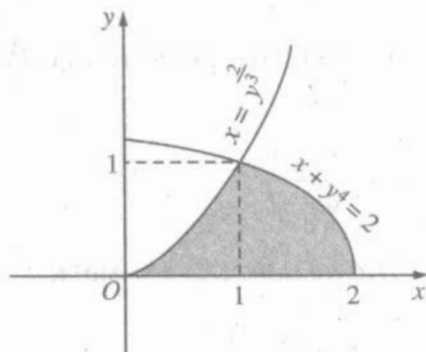
b) $2\pi (\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1)$.

Hướng dẫn. $S = \pi \int_1^2 \ln^2 x dx$.

c) $\frac{\pi^2}{16}$.



Hình 3.15



Hình 3.16

3.72. a) $\frac{\pi}{2}$;

b) $\frac{8\pi}{3}$.

Hướng dẫn. Ta có $x = 1 + \sqrt{1-y}$ hoặc $x = 1 - \sqrt{1-y}$. Vậy

$$V = \pi \int_0^1 (1 + \sqrt{1-y})^2 dy - \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-y})^2 dy = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1-y} dy = \frac{8\pi}{3}.$$

c) $4\pi^2$.

Hướng dẫn. Ta có $x = 2 + \sqrt{1-y^2}$ hoặc $x = 2 - \sqrt{1-y^2}$. Vậy

$$V = \pi \int_0^1 (2 + \sqrt{1-y^2})^2 dy - \pi \int_0^1 (2 - \sqrt{1-y^2})^2 dy = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 4\pi^2.$$

Để tính tích phân trên ta đổi biến
 $y = \sin t$.

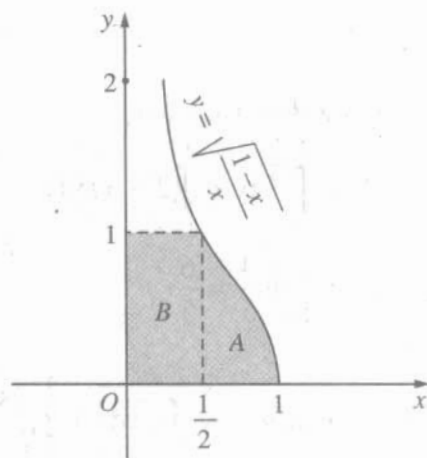
3.73. a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn. Đặt $x = \sin^2 t$.

b) $\pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$.

c) $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn. Giá trị của tích phân là diện tích hình chữ nhật B cộng với diện tích hình A (h.3.17).



Hình 3.17

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Tập hợp số phức : $\mathbb{C}$.

- Số phức (dạng đại số) : $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$) ;

a là phần thực, b là phần ảo của z .

z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 ;

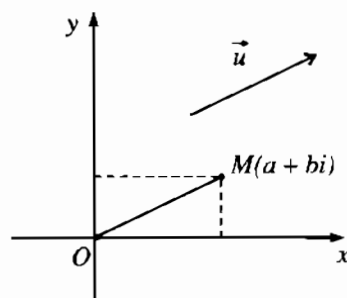
z là số ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của z bằng 0.

- Hai số phức bằng nhau :

$$a + bi = a' + b'i \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow a = a', b = b'.$$

• Biểu diễn hình học : Số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bởi điểm $M(a ; b)$ hay bởi vectơ $\vec{u} (a ; b)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy (mặt phẳng phức) (h.4.1).



Hình 4.1

- Cộng, trừ số phức :

$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i,$$

$$(a + bi) - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i,$$

$$(a, b, a', b' \in \mathbb{R}).$$

Số đối của $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

z biểu diễn bởi $\vec{u}$, z' biểu diễn bởi $\vec{u}'$ thì

$$z + z' \text{ biểu diễn bởi } \vec{u} + \vec{u}',$$

$$z - z' \text{ biểu diễn bởi } \vec{u} - \vec{u}'.$$

• Nhân hai số phức :

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i \quad (a, b, a', b' \in \mathbb{R}),$$

k là số thực, z biểu diễn bởi $\vec{u}$ thì kz biểu diễn bởi $k\vec{u}$.

• Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$

($a, b \in \mathbb{R}$) là $\bar{z} = a - bi$ (h.4.2).

$$\overline{\bar{z}} = z; \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'.$$

z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

• Môđun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overline{OM}| \quad (\text{h.4.3}).$$

$|z| \geq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}$ và $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

$|zz'| = |z||z'|$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ với mọi $z, z' \in \mathbb{C}$.

• Chia hai số phức :

Số phức nghịch đảo của z ($z \neq 0$) :

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

Thương của z' chia cho z ($z \neq 0$) :

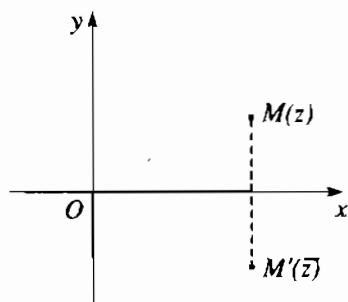
$$\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z'\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Với $z \neq 0$, $\frac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = wz$.

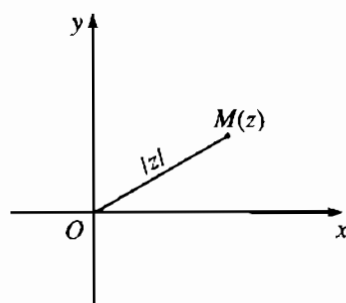
$$\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}, \quad \left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}.$$

• Căn bậc hai của số phức

z là một căn bậc hai của số phức $w \Leftrightarrow z^2 = w$.



Hình 4.2



Hình 4.3

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0.

Số phức khác 0 có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

Hai căn bậc hai của số thực $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$.

Hai căn bậc hai của số thực $a < 0$ là $\pm\sqrt{-a}i$.

• Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là số phức cho trước, $A \neq 0$):

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

$\Delta \neq 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt $\frac{-B \pm \delta}{2A}$ (δ là một căn bậc hai của Δ).

$\Delta = 0$: phương trình có một nghiệm kép là $-\frac{B}{2A}$.

• Dạng lượng giác của số phức:

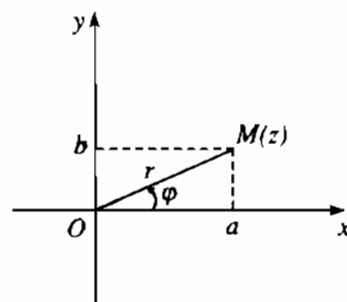
$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ($r > 0$) là dạng lượng giác của

$z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ($z \neq 0$)

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

φ là một argumen của z , $\varphi = (Ox, OM)$

(h.4.4).



Hình 4.4

• Nhân, chia số phức dưới dạng lượng giác:

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$ thì

$$zz' = rr'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')],$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')].$$

- Công thức Moa-vơ : Với n là số nguyên, $n \geq 1$, thì

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

- Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác :

Các căn bậc hai của số phức $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ($r > 0$) là $\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$

và $-\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right].$

B. ĐỀ BÀI

§1. SỐ PHỨC

4.1. Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau :

a) $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$;

b) $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$;

c) $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$;

d) $\frac{\sqrt{3} - i}{1 + i} - \frac{\sqrt{2} + i}{i}$;

e) $\frac{1}{2i} \left(i^7 - \frac{1}{i^7} \right)$;

f) $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{33} + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i}$;

g) $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{20}$.

4.2. Cho số phức $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức :

a) $z^2 - 2z + 4i$;

b) $\frac{\bar{z} + i}{iz - 1}$.

4.3. Tìm nghiệm phức của mỗi phương trình sau :

a) $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$;

b) $((2-i)\bar{z} + 3+i)\left(iz + \frac{1}{2i}\right) = 0$;

c) $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$;

d) $z^2 + \bar{z} = 0$;

e) $z^2 + |z| = 0$;

f) $z^2 + |z|^2 = 0$.

4.4. a) Các điểm A, B, C và A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$1-i, \quad 2+3i, \quad 3+i \quad \text{và} \quad 3i, \quad 3-2i, \quad 3+2i.$$

Chứng minh rằng hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

b) Biết các số phức z_1, z_2, z_3 biểu diễn bởi ba đỉnh nào đó của một hình bình hành trong mặt phẳng phức, hãy tìm số biểu diễn bởi đỉnh còn lại.

4.5. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thỏa mãn mỗi điều kiện sau :

a) $|z + \bar{z} + 3| = 4$;

b) $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$;

c) $(2-z)(i+\bar{z})$ là số thực tùy ý ;

d) $(2-z)(i+\bar{z})$ là số ảo tùy ý ;

e) $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$;

f) $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4$.

4.6. Gọi M, M' theo thứ tự là các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn số $z \neq 0$ và $z' = \frac{1+i}{2}z$. Chứng minh rằng tam giác OMM' là tam giác vuông cân (O là gốc toạ độ).

4.7. Cho A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức z_0, z_1 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$. Chứng minh rằng tam giác OAB là tam giác đều (O là gốc toạ độ).

4.8. Các vectơ $\vec{u}, \vec{u}'$ trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' .

a) Chứng minh rằng tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{u}'$ thỏa mãn

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}') ;$$

b) Từ câu a) suy ra rằng nếu $\bar{u} \neq 0$ thì $\bar{u}, \bar{u}'$ vuông góc khi và chỉ khi $\frac{z'}{z}$ là số ảo ;

c) Chứng minh rằng $\bar{u}, \bar{u}'$ vuông góc khi và chỉ khi $|z + z'| = |z - z'|$.

4.9. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số

$$-1 + i, \quad -1 - i, \quad 2i, \quad 2 - 2i.$$

Tìm các số z_1, z_2, z_3, z_4 theo thứ tự biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$. Tính $\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_3}{z_4}$ và từ đó suy ra A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn (xem bài tập 4.8). Tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào ?

4.10. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn

$$\left| \frac{z}{z - i} \right| = k,$$

(k là số thực dương cho trước).

4.11. a) Cho số phức α . Chứng minh rằng với mọi số phức z , ta có

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = |z + \alpha|^2 - \alpha\bar{\alpha}.$$

b) Từ câu a) hãy xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số z thoả mãn

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + k = 0,$$

trong đó α là số phức cho trước, k là số thực cho trước.

4.12. Tìm số phức z thoả mãn đồng thời

$$\left| \frac{z - 1}{z - i} \right| = 1 \quad \text{và} \quad \left| \frac{z - 3i}{z + i} \right| = 1.$$

4.13. Tìm số phức z thoả mãn

$$\left(\frac{z + i}{z - i} \right)^4 = 1.$$

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

4.14. Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau :

a) $-1 + 4\sqrt{3}i$; b) $4 + 6\sqrt{5}i$; c) $-1 - 2\sqrt{6}i$.

4.15. Hỏi khi số thực a thay đổi tùy ý thì các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các căn bậc hai của $a + i$ vạch nên đường nào ?

4.16. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$:

a) $(z - i)(z^2 + 1)(z^3 + i) = 0$; b) $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$.

4.17. a) Tìm các số thực a, b để có phân tích

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = (2z - 1)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình sau trên $\mathbb{C}$

$$2z^3 - 9z^2 + 14z - 5 = 0 ;$$

b) Tìm các số thực a, b để có phân tích

$$z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = (z^2 - 2z - 4)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình sau trên $\mathbb{C}$

$$z^4 - 4z^2 - 16z - 16 = 0.$$

4.18. Tìm điều kiện cần và đủ về các số thực p, q để phương trình

$$z^4 + pz^2 + q = 0$$

- a) Chỉ có nghiệm thực ;
- b) Không có nghiệm thực ;
- c) Có cả nghiệm thực và nghiệm không thực.

4.19. Giải các phương trình sau trên $\mathbb{C}$

a) $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = 0$ bằng cách đặt ẩn số phụ $w = z - \frac{1}{z}$;

b) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$.

4.20. Giải hệ phương trình hai ẩn phức z_1, z_2 sau :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4 + i \\ z_1^2 + z_2^2 = 5 - 2i. \end{cases}$$

4.21. Giải hệ phương trình hai ẩn phức z_1, z_2 sau :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = -5 - 5i \\ z_1^2 + z_2^2 = -5 + 2i. \end{cases}$$

4.22. Cho phương trình

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = 0.$$

a) Do đâu có thể nhận thấy nhanh chóng rằng $z = 1$ là một nghiệm của phương trình đó ?

b) Tìm các số phức α, β để có phân tích

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i = (z-1)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

rồi giải phương trình đã cho.

4.23. a) Chứng minh rằng nếu ba số phức z_1, z_2, z_3 thoả mãn

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \end{cases}$$

thì một trong ba số đó phải bằng 1.

b) Giải hệ phương trình ba ẩn phức z_1, z_2, z_3 sau :

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1. \end{cases}$$

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC. ỨNG DỤNG

4.24. Tìm một argumen của mỗi số phức sau :

a) $-2 + 2\sqrt{3}i$;

b) $\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}$;

c) $-\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}$;

d) $1 - \sin \varphi + i \cos \varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) ;

e) $(a + i)^3 + (a - i)^3$ (a là số thực cho trước) ;

f) $z - (1 + i\sqrt{3})$ biết một argumen của z bằng $\frac{\pi}{3}$.

4.25. Cho hai số phức khác 0 là $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$,
($r, r', \varphi, \varphi' \in \mathbb{R}$).

Tìm điều kiện cần và đủ về r, r', φ, φ' để $z = z'$.

4.26. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

a) Một argumen của $z - (1 + 2i)$ bằng $\frac{\pi}{6}$;

b) Một argumen của $z + i$ bằng một argumen của $z - 1$.

4.27. Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau :

a) $\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) i^5 (1 + \sqrt{3}i)^7$;

b) $(1 - i)^4 (\sqrt{3} + i)^6$;

c) $\frac{(1 + i)^{10}}{(\sqrt{3} + i)^9}$;

d) $z^{2000} + \frac{1}{z^{2000}}$ biết rằng $z + \frac{1}{z} = 1$.

4.28. Viết dạng lượng giác của mỗi số phức sau :

a) $\sin \varphi + i 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$;

b) $\cos \varphi + i(1 + \sin \varphi)$.

4.29. Tìm số phức z sao cho $|z| = |z - 2|$ và một argumen của $z - 2$ bằng một argumen của $z + 2$ cộng với $\frac{\pi}{2}$.

4.30. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\frac{z-2}{z+2}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{3}$.

4.31. Cho số phức z có môđun bằng 1. Biết một argumen của z là φ , hãy tìm một argumen của mỗi số phức sau :

- a) $2z^2$; b) $-\frac{1}{2\bar{z}}$; c) $\frac{\bar{z}}{z}$; d) $-z^2\bar{z}$;
 e) $z + \bar{z}$; f) $z^2 + z$; g) $z^2 - z$; h) $z^2 + \bar{z}$.

4.32. a) Hỏi với số nguyên dương n nào, số phức $\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3i}\right)^n$ là số thực, là số ảo ?

b) Cũng câu hỏi tương tự cho số phức $\left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^n$.

4.33. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$4 + (3 + \sqrt{3})i ; \quad 2 + (3 + \sqrt{3})i ; \quad 1 + 3i ; \quad 3 + i.$$

Chứng minh rằng bốn điểm đó cùng nằm trên một đường tròn.

4.34. Biểu diễn hình học các số $5 + i$ và $239 + i$ rồi chứng minh rằng nếu các số thực a, b thoả mãn các điều kiện $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ và $\tan a = \frac{1}{5}$,

$$\tan b = \frac{1}{239} \text{ thì } 4a - b = \frac{\pi}{4}.$$

4.35. Cho tam giác đều OAB trong mặt phẳng phức (O là gốc toạ độ). Chứng minh rằng nếu A, B theo thứ tự biểu diễn các số z_0, z_1 thì $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$.

4.36. a) Cho $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$). Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi ; \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\varphi.$$

b) Từ câu a), chứng minh rằng

$$\cos^4 \varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3),$$

$$\sin^5 \varphi = \frac{1}{16}(\sin 5\varphi - 5\sin 3\varphi + 10\sin \varphi).$$

4.37. Tìm dạng lượng giác của các căn bậc hai của các số phức sau :

a) $\cos \varphi - i \sin \varphi$;

b) $\sin \varphi + i \cos \varphi$;

c) $\sin \varphi - i \cos \varphi$.

với $\varphi \in \mathbb{R}$ cho trước.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Trong mỗi bài tập từ 4.38 đến 4.42, hãy chọn một phương án trong bốn phương án đã cho để được khẳng định đúng.

4.38. Với mọi số ảo z , số $z^2 + |z|^2$ là :

(A) Số thực dương ;

(B) Số thực âm ;

(C) Số 0 ;

(D) Số ảo khác 0.

4.39. Nếu $|z| = 1$ thì $\frac{z^2 - 1}{z}$

(A) Lấy mọi giá trị phức ;

(B) Là số ảo ;

(C) Bằng 0 ;

(D) Lấy mọi giá trị thực.

4.40. Tập hợp các nghiệm phức của phương trình $z^2 + |z|^2 = 0$ là :

(A) Tập hợp mọi số ảo ;

(B) $\{\pm i; 0\}$;

(C) $\{-i; 0\}$;

(D) $\{0\}$.

4.41. Nếu một argumen của số phức $z \neq 0$ là φ thì số phức $\left(-\frac{z}{\bar{z}^2}\right)$ có một argumen là :

- (A) $-\varphi$; (B) $-\varphi + \pi$;
(C) $3\varphi + \pi$; (D) $\varphi + \pi$.

4.42. Nếu một argumen của số phức $z \neq 0$ là φ thì số phức iz^2 có một argumen là

- (A) -2φ ; (B) $2\varphi + \frac{\pi}{2}$;
(C) $\varphi + \pi$; (D) $-2\varphi + \frac{\pi}{2}$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

4.43. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số $z' = \alpha z + \beta$ trong đó z là số phức tùy ý thoả mãn $|z - z_0| \leq R$ ($z_0, \alpha \neq 0, \beta$ là những số phức cho trước, R là số thực dương cho trước).

4.44. Chứng minh rằng hai số phức phân biệt z_1, z_2 thoả mãn điều kiện $|z_1| = |z_2|$ khi và chỉ khi $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo.

4.45. a) Cho số phức $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khác 0. Chứng minh rằng tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) sao cho $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = k$ (k là số thực cho trước) là một đường thẳng.

b) Tìm α và k trong câu a) để đường thẳng nói trên đi qua các điểm biểu diễn số 2 và $3i$.

4.46. Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thoả mãn từng điều kiện sau :

- a) $|2i - 2\bar{z}| = |2z - 1|$; b) $|2iz - 1| = 2|z + 3|$.

4.47. Cho A, B, C, D là bốn điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$1 + 2i, \quad 1 + \sqrt{3} + i, \quad 1 + \sqrt{3} - i, \quad 1 - 2i.$$

Chứng minh rằng $ABCD$ là một tứ giác nội tiếp đường tròn. Hỏi tâm đường tròn đó biểu diễn số phức nào ?

4.48. Tìm số phức z thoả mãn đồng thời

$$\left| \frac{z-1}{z-3} \right| = 1 \text{ và } \left| \frac{z-2i}{z+i} \right| = 2.$$

4.49. Giải hệ phương trình hai ẩn phức z, w sau :
$$\begin{cases} z^3 + w^5 = 0 \\ z^2 (\bar{w})^4 = 1. \end{cases}$$

4.50. Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho

$$\frac{z+i}{\bar{z}+i} \text{ là số thực.}$$

4.51. Tìm những số thực a, b để có phân tích

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = (z^2 + 1)(z^2 + az + b),$$

rồi giải phương trình sau trên $\mathbb{C}$

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0.$$

4.52. Cho a, b, c là ba số thực sao cho $\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c \neq 0$. Tìm phần ảo của số phức

$$(1 + i \tan a)(1 + i \tan b)(1 + i \tan c)$$

rồi từ đó suy ra rằng với ba số a, b, c như thế thì :

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

khi và chỉ khi $a + b + c = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4.53. Viết dạng lượng giác của các số phức

$$\text{a) } \frac{1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi}; \quad \text{b) } [1 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)][1 + \cos \varphi + i \sin \varphi].$$

4.54. a) Cho các số thực a, b sao cho $\sin \frac{a}{2} \neq 0$.

Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, xét các tổng

$$S = \cos b + \cos(a+b) + \cos(2a+b) + \dots + \cos(na+b),$$

$$T = \sin b + \sin(a+b) + \sin(2a+b) + \dots + \sin(na+b).$$

Tính $S + iT$, từ đó suy ra S và T .

b) Chứng minh rằng với mỗi số thực $a \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), mỗi số nguyên $n \geq 1$,

$$\text{ta có : } \sin a + \sin 3a + \dots + \sin(2n-1)a = \frac{\sin^2 na}{\sin a},$$

$$\cos a + \cos 3a + \dots + \cos(2n-1)a = \frac{\sin 2na}{2 \sin a}.$$

5.55. Trong mặt phẳng phức xét ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp đường tròn đơn vị, A là điểm biểu diễn số 1 (giả sử đi dọc chu vi đa giác theo ngược chiều quay kim đồng hồ gặp các đỉnh kế tiếp B, C, D, E). Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là các số phức theo thứ tự biểu diễn bởi các điểm B, C, D, E .

a) Chứng minh rằng $1, z_1, z_2, z_3, z_4$ là các nghiệm của phương trình $z^5 - 1 = 0$ và $z_1 + \frac{1}{z_1} = 2\cos \frac{2\pi}{5}$.

b) Viết $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$ rồi đưa phương trình $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ về phương trình bậc hai đối với ẩn phụ $w = z + \frac{1}{z}$.

$$\text{Từ đó suy ra } \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

4.56. a) Trong mặt phẳng phức cho điểm A biểu diễn số phức ω . Chứng minh rằng phép biến đổi của mặt phẳng phức biến điểm biểu diễn số phức z tùy ý thành điểm biểu diễn số phức z' sao cho $z' - \omega = i(z - \omega)$ là phép quay tâm A góc quay $\frac{\pi}{2}$.

b) Giả sử ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số α, β, γ . Gọi P, Q theo thứ tự là tâm các hình vuông dựng bên ngoài ABC trên các cạnh AB, AC và gọi N là trung điểm của BC . Tìm các số phức biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{NP}$ rồi chứng minh rằng NQP là tam giác vuông cân.

C. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

§1. SỐ PHỨC

4.1. a) 1 và 1 ;

b) 0 và 4 ;

c) -16 và 37 ;

d) $\frac{\sqrt{3}-3}{2}$ và $\frac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2}$;

e) -1 và 0 ;

f) 13 và -32 ;

g) -2^{10} và $2^{10} + 1$.

Hướng dẫn. g) Tính tổng cấp số nhân công bội $(1+i)$.

4.2. a) $x^2 - y^2 - 2x$ và $2(xy - y + 2)$;

b) $\frac{-2xy}{x^2 + (y+1)^2}$ và $\frac{y^2 - x^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}$.

4.3. a) $\frac{22}{25} + \frac{4}{25}i$;

b) $-1 + i, \frac{1}{2}$;

c) $\frac{2}{3} + 4i$;

d) $0, -1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;

e) $0, i, -i$;

f) bi ($b \in \mathbb{R}$).

4.4. *Hướng dẫn.* a) $\overline{AB}$ biểu diễn $1 + 4i$, $\overline{AC}$ biểu diễn $2 + 2i$, nên A, B, C không thẳng hàng và trọng tâm G thoả mãn $\overline{OG} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ nên G biểu diễn số $\frac{1}{3}(6 + 3i)$.

$\overline{A'B'}$ biểu diễn $3 - 5i$, $\overline{A'C'}$ biểu diễn $3 - i$, nên A', B', C' không thẳng hàng và trọng tâm G' thoả mãn $\overline{OG'} = \frac{1}{3}(\overline{OA'} + \overline{OB'} + \overline{OC'})$ nên G' biểu diễn số $2 + i$.

Vậy G trùng G' .

b) $z_1 + z_2 - z_3, z_2 + z_3 - z_1, z_3 + z_1 - z_2$.

4.5. a) Hai đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ và $x = -\frac{7}{2}$.

b) Hai đường thẳng $y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ và $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

c) Đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

d) Đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số phức $1 + \frac{1}{2}i$, bán kính $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

e) Parabol $y = \frac{x^2}{4}$.

f) Hai hypebol $y = \frac{1}{x}$ và $y = -\frac{1}{x}$.

Hướng dẫn

Với $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì :

a) $|z + \bar{z} + 3| = 4 \Leftrightarrow |2x + 3| = 4.$

b) $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |1 + (2y - 1)i| = 2 \Leftrightarrow (2y - 1)^2 + 1 = 4$
 $\Leftrightarrow (2y - 1)^2 = 3.$

c) $(2 - z)(i + \bar{z})$ có phần ảo là $-2y - x + 2$.

d) $(2 - z)(i + \bar{z})$ có phần thực là

$$-x^2 - y^2 + 2x + y = -\left[(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right].$$

e) $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = 2|(y + 1)i|$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 = (y + 1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}.$$

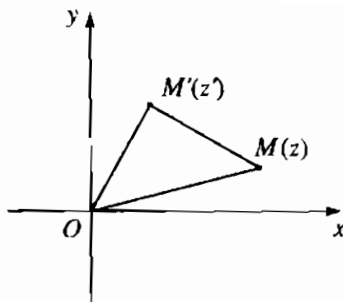
f) $|z^2 - (\bar{z})^2| = 4 \Leftrightarrow |4xyi| = 4 \Leftrightarrow |xy| = 1.$

4.6. Giải. Ta có $|\overline{OM}| = |z|$,

$$|\overline{OM'}| = \left| \frac{1+i}{2} \right| |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z|,$$

$$|\overline{MM'}| = |\overline{OM'} - \overline{OM}| = \left| \frac{-1+i}{2} \right| |z| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z|.$$

Do $|z| \neq 0$, suy ra tam giác OMM' là tam giác vuông cân đỉnh M' (h.4.5).



Hình 4.5

4.7. Giải. Ta có :

$$z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Rightarrow z_0(z_1 - z_0) = z_1^2 \Rightarrow |z_0||z_1 - z_0| = |z_1|^2.$$

$$z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Rightarrow z_1(z_0 - z_1) = z_0^2 \Rightarrow |z_1||z_1 - z_0| = |z_0|^2.$$

Vậy $|z_1 - z_0| = \frac{|z_1|^2}{|z_0|} = \frac{|z_0|^2}{|z_1|}$, suy ra $|z_0|^3 = |z_1|^3$.

Do đó $|z_0| = |z_1| = |z_1 - z_0|$ tức là $OA = OB = AB$ (khác 0). Vậy tam giác OAB là tam giác đều.

4.8. Giải. a) Viết $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$ ($x, y, x', y' \in \mathbb{R}$) thì

$$\overline{u} \cdot \overline{u'} = xx' + yy',$$

và $\overline{zz'} + z\overline{z'} = (x - yi)(x' + y'i) + (x + yi)(x' - y'i) = 2(xx' + yy'),$

nên $\overline{u} \cdot \overline{u'} = \frac{1}{2}(\overline{zz'} + z\overline{z'}).$

b) $\overline{u} \cdot \overline{u'} = 0 \Leftrightarrow \overline{zz'} + z\overline{z'} = 0$, chia cả hai vế cho $z\overline{z'} \neq 0$, được

$$\overline{u} \cdot \overline{u'} = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} + \overline{\left(\frac{z'}{z} \right)} = 0 \Leftrightarrow \frac{z'}{z} \text{ là số ảo.}$$

c) $|z + z'| = |z - z'| \Leftrightarrow (z + z')(\overline{z + z'}) = (z - z')(\overline{z - z'}) \Leftrightarrow \bar{z}z' + z\bar{z}' = 0$, nên theo câu a) nó tương đương với $\bar{u} \cdot \bar{u}' = 0$ (Chú ý : khi $\bar{u}, \bar{u}'$ không cùng phương, tính chất cuối này tương đương với tính chất : hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật).

4.9. Giải. (h.4.6) $\overline{AC}$ biểu diễn số phức $z_1 = 1 + i$,

$\overline{AD}$ biểu diễn số phức $z_2 = 3 - 3i$.

Do $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{3-3i} = \frac{i}{3}$ nên $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0$ (xem bài tập 4.8).

$\overline{BC}$ biểu diễn số phức $z_3 = 1 + 3i$, $\overline{BD}$ biểu diễn số phức $z_4 = 3 - i$.

Do $\frac{z_3}{z_4} = \frac{1+3i}{3-i} = i$ nên $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = 0$ (xem bài tập 4.8).

Vậy CD là một đường kính của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D ; Tâm đường tròn đó là trung điểm của CD nên nó biểu diễn số $\frac{2i + (2 - 2i)}{2} = 1$.

4.10. Giải. Viết $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì

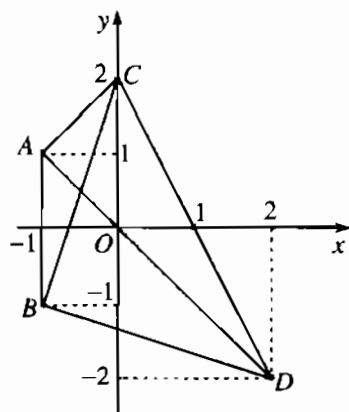
$$\left| \frac{z}{z-i} \right| = \left| \frac{x + yi}{x + (y-1)i} \right| = k \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{x^2 + (y-1)^2} = k^2.$$

• Nếu $k = 1$ thì đẳng thức cuối này tương đương với $y = \frac{1}{2}$. Tập hợp cần tìm là

đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ (đường trung trực của đoạn thẳng OI , I biểu diễn số i).

• Nếu $k \neq 1$ thì đẳng thức cuối đó tương đương với

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{k^2}{k^2 - 1} y + \frac{k^2}{k^2 - 1} = 0,$$



Hình 4.6

tức là tương đương với

$$x^2 + \left(y - \frac{k^2}{k^2 - 1} \right)^2 = \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2}.$$

Tập hợp cần tìm là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số $\frac{k^2}{k^2 - 1}i$, có bán kính bằng $\left| \frac{k}{k^2 - 1} \right|$.

4.11. Giải. a) $|z + \alpha|^2 - \alpha\bar{\alpha} = (z + \alpha)(\bar{z} + \bar{\alpha}) - \alpha\bar{\alpha} = z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z}.$

b) $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + k = 0 \Leftrightarrow |z + \alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha} - k.$

Vậy khi $\alpha\bar{\alpha} - k = R^2 > 0$, tập hợp cần tìm là đường tròn có tâm là điểm biểu diễn số $-\alpha$, có bán kính bằng $R > 0$; khi $k = \alpha\bar{\alpha}$, tập hợp cần tìm chỉ là một điểm (biểu diễn số $-\alpha$); khi $k > \alpha\bar{\alpha}$, tập hợp cần tìm là tập rỗng.

4.12. 1 + i.

Giải. Để thấy rằng tập hợp các điểm M của mặt phẳng phức biểu diễn các số z thoả mãn $\left| \frac{z - z_0}{z - z_1} \right| = 1$ (z_0, z_1 là hai số phức phân biệt cho trước) là đường trung trực của đoạn thẳng A_0A_1 (A_0, A_1 theo thứ tự biểu diễn z_0, z_1).

Vậy điều kiện $\left| \frac{z - 1}{z - i} \right| = 1$ chứng tỏ điểm M biểu diễn số z phải nằm trên đường phân giác $y = x$ (viết $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)). Còn điều kiện

$$\left| \frac{z - 3i}{z + i} \right| = 1 \text{ chứng tỏ phần ảo của } z \text{ phải bằng } 1. \text{ Vậy } z = 1 + i.$$

Chú ý. Có thể giải bài toán bằng cách viết $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) rồi tính toán.

4.13. 0, 1, -1.

Giải. $\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 - 1 \right] \left[\left(\frac{z+i}{z-i} \right)^2 + 1 \right] = 0.$

Dễ thấy :

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = \pm 1 \Leftrightarrow z = 0 ;$$

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i} - i\right)\left(\frac{z+i}{z-i} + i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \text{ hoặc } z = -1.$$

Vậy các số z cần tìm là $0, 1, -1$.

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

4.14. a) $\pm(\sqrt{3} + 2i)$; b) $\pm(3 + \sqrt{5}i)$; c) $\pm(\sqrt{2} - \sqrt{3}i)$.

Hướng dẫn. Đưa việc tìm căn bậc hai của số phức $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

về giải hệ phương trình với hai ẩn thực

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b. \end{cases}$$

4.15. $y = \frac{1}{2x}$.

Giải. Viết $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì

$$z^2 = a + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 1. \end{cases}$$

Phương trình $2xy = 1$ chứng tỏ điểm M biểu diễn z phải thuộc hypebol

$y = \frac{1}{2x}$. Vì với mỗi điểm (x, y) của hypebol này, tìm được $a = x^2 - y^2$

nên M vạch nên toàn bộ hai nhánh của hypebol đó.

4.16. a) $i, -i, \frac{\sqrt{3}-i}{2}, -\frac{\sqrt{3}+i}{2}$;

b) $1, -2, \frac{-1+\sqrt{23}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{23}i}{2}$.

4.17. a) $a = -4, b = 5$. Các nghiệm là $2+i, 2-i, \frac{1}{2}$.

b) $a = 2, b = 4$. Các nghiệm là $1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$.

4.18. a) $p^2 - 4q \geq 0, p \leq 0, q \geq 0$;

b) $p^2 - 4q < 0$ hoặc $p^2 - 4q \geq 0, p > 0, q > 0$;

c) $q < 0$ hoặc $q = 0, p > 0$.

4.19. a) $1+i, \frac{-1+i}{2}, 1-i, -\frac{1+i}{2}$;

b) $-3 \pm \sqrt{3}, -1 \pm \sqrt{5}i$.

Hướng dẫn. a) $z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2} + z + 1 = z^2 \left[\left(z - \frac{1}{z} \right)^2 - \left(z - \frac{1}{z} \right) + \frac{5}{2} \right]$.

Phương trình $w^2 - w + \frac{5}{2} = 0$ có hai nghiệm là $\frac{1+3i}{2}$ và $\frac{1-3i}{2}$.

b) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) = (z^2 + 3z + 6 + z)^2 - z^2$.

4.20. $(3-i; 1+2i)$ và $(1+2i; 3-i)$.

Hướng dẫn. $z_1 z_2 = \frac{1}{2}[(4+i)^2 - 5 + 2i] = 5(1+i)$ nên z_1, z_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0.$$

4.21. $(2-i, -1-3i), (-1-3i, 2-i), (-2+i, 1+3i), (1+3i, -2+i)$.

Hướng dẫn. $(z_1 + z_2)^2 = -5 + 2i + 2(-5 - 5i) = -(15 + 8i) = (1 - 4i)^2$, từ đó $z_1 + z_2$ bằng $1 - 4i$ hoặc bằng $-1 + 4i$.

4.22. Hướng dẫn. a) Tổng các hệ số vế trái phương trình bằng 0.

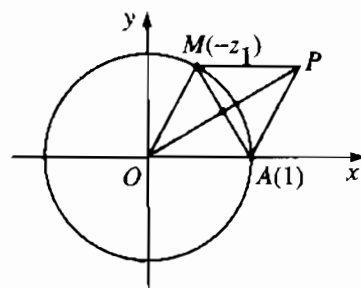
b) $\alpha = -1 - 2i$, $\beta = -1 + i$. Phương trình có ba nghiệm là 1, $1 + i$, i .

4.23. Giải. a) Viết $1 - z_1 = z_2 + z_3$.

Nếu $z_1 = 1$ thì $z_2 + z_3 = 0$.

Nếu $z_1 \neq 1$ thì $1 - z_1 \neq 0$, điểm P biểu diễn số $1 + (-z_1) = z_2 + z_3$ không trùng với O nên do $1 = |-z_1| = |z_2| = |z_3|$, đường trung trực của OP cắt đường tròn đơn vị tại hai điểm biểu diễn 1, $-z_1$ và cũng là hai điểm biểu diễn z_2, z_3 (h.4.7). Vậy hoặc $z_2 = 1, z_3 = -z_1$ hoặc $z_2 = -z_1, z_3 = 1$. Tóm lại hoặc $z_1 = 1$, hoặc $z_2 = 1$ hoặc $z_3 = 1$ (và tổng hai số z còn lại bằng 0).

b) Từ hai phương trình đầu của hệ, theo câu a), có thể coi $z_1 = 1, z_2 + z_3 = 0$. Khi đó điều kiện $z_1 z_2 z_3 = 1$ kéo theo hoặc $z_2 = i, z_3 = -i$ hoặc $z_2 = -i, z_3 = i$. Suy ra hệ có 6 nghiệm do đổi chỗ các phân tử của bộ ba (1, $i, -i$).



Hình 4.7

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC. ỨNG DỤNG

4.24. a) $\frac{2\pi}{3}$;

b) $-\frac{\pi}{4}$;

c) $-\frac{5\pi}{8}$;

d) $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$;

e) *Giải.* $(a + i)^3 + (a - i)^3 = 2a(a^2 - 3)$. Khi $a = \sqrt{3}$ hoặc $a = -\sqrt{3}$, hoặc $a = 0$ thì nó không có argumen xác định. Khi $-\sqrt{3} < a < 0$ hoặc $\sqrt{3} < a$ thì nó có một argumen bằng 0. Khi $a < -\sqrt{3}$ hoặc $0 < a < \sqrt{3}$, nó có một argumen bằng π .

f) *Giải.* z có một argumen bằng $\frac{\pi}{3}$ có nghĩa là $z = |z| \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$, vậy

$z - (1 + i\sqrt{3}) = (|z| - 2) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$. Từ đó khi $|z| > 2$, một argumen của

$z - (1 + i\sqrt{3})$ là $\frac{\pi}{3}$; Khi $0 < |z| < 2$, một argumen của $z - (1 + i\sqrt{3})$ là

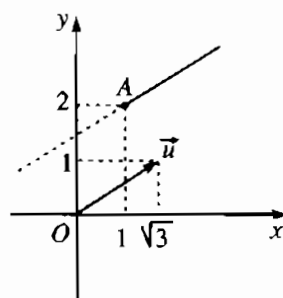
$\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$; Khi $|z| = 2$, số $z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$ nên không có argumen xác định.

4.25. $z = z'$ khi và chỉ khi

hoặc $r' = r$, $\varphi' = \varphi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

hoặc $r' = -r$, $\varphi' = \varphi + (2k + 1)\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4.26. *Hướng dẫn.* a) Tia có gốc A (là điểm biểu diễn số $1 + 2i$) với vectơ chỉ hướng $\vec{u}$ biểu diễn số $\sqrt{3} + i$ (tức $\vec{u}$ có một argumen là $\frac{\pi}{6}$) (không kể điểm A) (h.4.8).

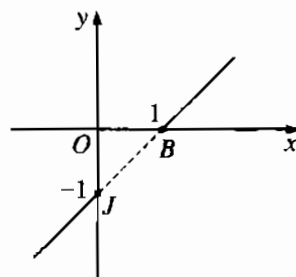


Hình 4.8

b) Các điểm B, J theo thứ tự biểu diễn số $1, -i$ thì tập hợp cần tìm là các điểm thuộc đường thẳng BJ nằm ngoài đoạn BJ (h.4.9).

4.27. a) 0 và 128; b) 256 và 0;

c) $-\frac{1}{16}$ và 0; d) -1 và 0.



Hình 4.9

Hướng dẫn. d) Trước hết hãy tìm dạng lượng giác của số phức z .

4.28. *Giải.* a) $\sin \varphi + 2i \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$, nên:

Khi $\sin \frac{\varphi}{2} = 0$, số đó có dạng lượng giác không xác định;

Khi $\sin \frac{\varphi}{2} > 0$, dạng viết trên là dạng lượng giác của số đã cho;

Khi $\sin \frac{\varphi}{2} < 0$, số đó có dạng lượng giác

$$-2 \sin \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \varphi + i(1 + \sin \varphi) &= \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i \left[1 - \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

nên theo câu a) ta có :

Khi $\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = 0$, số đã cho có dạng lượng giác không xác định ;

Khi $\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0$, số đã cho có dạng lượng giác

$$2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right] ;$$

Khi $\sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) < 0$, số đã cho có dạng lượng giác

$$-2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{5\pi}{4} \right) \right].$$

4.29. Cần tìm z sao cho $|z| = |z - 2|$ và $\frac{z-2}{z+2} = li$, l là số thực dương.

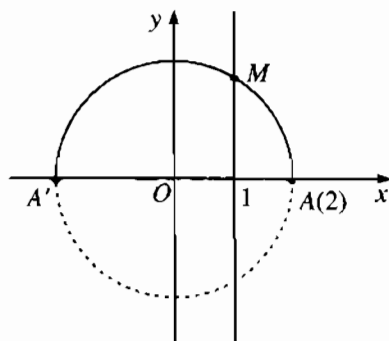
Cách 1. $|z| = |z - 2|$ chứng tỏ điểm M biểu diễn z cách đều O và điểm A biểu diễn số 2, tức là phần thực của z bằng 1.

$$\frac{z-2}{z+2} = \frac{(z-2)(\bar{z}+2)}{|z+2|^2} = \frac{z\bar{z} - 4 + 2(z - \bar{z})}{|z+2|^2} = li \quad (l > 0) \text{ khi và chỉ khi}$$

$z\bar{z} - 4 = 0$ (tức là $|z| = 2$) và phần ảo của z phải dương. Vậy điểm M biểu diễn z phải thuộc nửa đường tròn nằm phía trên trục thực, có tâm O , có bán kính bằng 2.

Giao của nửa đường tròn đó với đường thẳng $x = 1$ là điểm M biểu diễn số z cần tìm. Vậy số đó là $z = 1 + \sqrt{3}i$.

(Về hình học : điều kiện một argumen của $z - 2$ bằng một argumen của $z + 2$ cộng với $\frac{\pi}{2}$ có nghĩa là góc lượng giác tia đầu MA' , tia cuối MA (A', A theo thứ tự biểu diễn -2 và 2) bằng $\frac{\pi}{2}$) (h.4.10).



Hình 4.10

Cách 2. Nếu viết $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì $|z| = |z - 2| \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Khi đó } \frac{z-2}{z+2} = \frac{1+iy-2}{1+iy+2} = \frac{-1+iy}{3+iy} = \frac{-3+y^2+4iy}{9+y^2} = li \quad (l \text{ thực dương})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 3 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}.$$

Vậy $z = 1 + \sqrt{3}i$.

4.30. $\frac{z-2}{z+2} = \frac{z\bar{z}-4+2(z-\bar{z})}{|z+2|^2}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{3}$ khi và chỉ khi

$$z\bar{z} - 4 + 2(z - \bar{z}) = l(1 + i\sqrt{3}), \quad l \text{ là số thực dương.}$$

Nếu viết $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì

$$z\bar{z} - 4 + 2(z - \bar{z}) = x^2 + y^2 - 4 + 4yi = l + l\sqrt{3}i \quad (l > 0)$$

$$\Leftrightarrow 4y = (x^2 + y^2 - 4)\sqrt{3} > 0.$$

$$\text{Rõ ràng } 4y = (x^2 + y^2 - 4)\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{16}{3} = 0.$$

Vậy M chạy trên cung tròn có tâm là điểm biểu diễn $\frac{2}{\sqrt{3}}i$ và có bán kính

bằng $\frac{4}{\sqrt{3}}$ nằm ở phía trên trục thực.

4.32. Giải. a) $\frac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3i} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ nên với số n nguyên dương, ta có :

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-3i} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6}.$$

Số đó là số thực $\Leftrightarrow \sin \frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow n = 6k$ (k là số nguyên dương).

Số đó là số ảo $\Leftrightarrow \cos \frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = 6k + 3$ (k là số nguyên không âm).

b) $\frac{7+i}{4-3i} = 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ nên với số n nguyên dương, ta có :

$$\left(\frac{7+i}{4-3i} \right)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

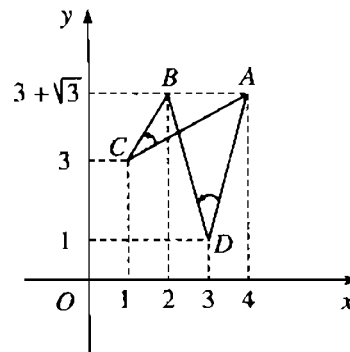
Số đó là số thực $\Leftrightarrow \sin \frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n = 4k$ (k nguyên dương)

Số đó là số ảo $\Leftrightarrow \cos \frac{n\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow n = 4k + 2$ (k là số nguyên không âm).

4.33. Giải. Chỉ cần chứng minh các góc lượng giác (CA, CB) , (DA, DB) có số đo bằng nhau (sai khác $k\pi, k \in \mathbb{Z}$) (h. 4.12).

Ta có $\overline{CA}$ biểu diễn số phức $3 + \sqrt{3}i$, $\overline{CB}$ biểu diễn số phức $1 + \sqrt{3}i$ nên số đo góc (CA, CB) là một argumen của $\frac{1 + \sqrt{3}i}{3 + \sqrt{3}i}$ cũng là một argumen của

$$(1 + \sqrt{3}i)(3 - \sqrt{3}i) = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + i).$$



Hình 4.12

Ta có $\overline{DA}$ biểu diễn số phức $1 + (2 + \sqrt{3})i$, $\overline{DB}$ biểu diễn số phức $-1 + (2 + \sqrt{3})i$ nên số đo góc (DA, DB) là một argumen của $\frac{-1 + (2 + \sqrt{3})i}{1 + (2 + \sqrt{3})i}$ cũng là một argumen của

$$[-1 + (2 + \sqrt{3})i][1 - (2 + \sqrt{3})i] = 2(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} + i).$$

Rõ ràng số này và số $2\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)$ có cùng argumen (sai khác $k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Chú ý. Có nhiều cách giải khác, chẳng hạn :

1) Vẽ các điểm A, B, C, D , có thể dự đoán tâm đường tròn cần tìm biểu diễn số $3 + 3i$ (xét các đường trung trực các đoạn AB, CD), kiểm nghiệm nó cách đều A, B, C, D .

2) Có thể đưa bài toán về bài toán hình học giải tích.

4.34. Giải. Điểm M biểu diễn số $5 + i$, điểm N biểu diễn số $239 + i$ thì $\tan(Ox, OM) = \frac{1}{5} = \tan a$, $\tan(Ox, ON) = \frac{1}{239} = \tan b$. Do M, N nằm trong

góc phần tư thứ nhất của hệ toạ độ Oxy , còn $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$ nên một argumen của $5 + i$ là a , một argumen của $239 + i$ là b . Từ đó một argumen của $\frac{(5+i)^4}{239+i}$ là $4a - b$.

Ta có $\frac{(5+i)^4}{239+i} = \frac{476 + 480i}{239+i}$, mà $(239+i)(1+i) = 238 + 240i$

nên $\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$.

Số $2(1+i)$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{4}$.

Vậy $4a - b = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Dễ thấy $0 < b < a < \frac{\pi}{4}$, suy ra $4a - b = \frac{\pi}{4}$.

4.35. Giải. Tam giác OAB là tam giác đều khi và chỉ khi $OA = OB$ và góc (OA, OB) bằng $\frac{\pi}{3}$ hoặc $-\frac{\pi}{3}$ tức là khi và chỉ khi $z_0 \neq 0$ và nếu đặt

$\frac{z_1}{z_0} = \alpha$ thì $|\alpha| = 1$ và một argumen của α là $\frac{\pi}{3}$ hoặc $-\frac{\pi}{3}$.

Mặt khác, khi $\frac{z_1}{z_0} = \alpha$ thì $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1 \Leftrightarrow z_0^2 + \alpha^2 z_0^2 = \alpha z_0^2 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2 = \alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \text{ và một argumen của } \alpha \text{ là}$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ hoặc } -\frac{\pi}{3}.$$

Vậy ta đã chứng minh : OAB là tam giác đều khi và chỉ khi $z_0^2 + z_1^2 = z_0 z_1$
($z_0 \neq 0$).

4.36. Giải. a) $z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, $\frac{1}{z^n} = \cos n\varphi - i \sin n\varphi$ nên

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\varphi, \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\varphi.$$

(Đặc biệt $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \varphi$, $z - \frac{1}{z} = 2i \sin \varphi$).

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos^4 \varphi &= \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]^4 = \frac{1}{2^4} \left[z^4 + \frac{1}{z^4} + C_4^1 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + C_4^2 \right] \\ &= \frac{1}{2^4} (2 \cos 4\varphi + 4.2 \cos 2\varphi + 6) = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^5 \varphi &= \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^5 \\ &= \frac{1}{2^5 i} \left[\left(z^5 - \frac{1}{z^5} \right) - C_5^1 \left(z^3 - \frac{1}{z^3} \right) + C_5^2 \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2^5} (2 \sin 5\varphi - 2C_5^1 \sin 3\varphi + 2C_5^2 \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{16} (\sin 5\varphi - 5 \sin 3\varphi + 10 \sin \varphi). \end{aligned}$$

- 4.37. a) $\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)$ và $\cos\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)$;
- b) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ và $\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$;
- c) $\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ và $\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

4.38. (C).

4.39. (B).

4.40. (A).

4.41. (C).

4.42. (B).

4.43. *Giải.* Vì $\alpha \neq 0$, $z' = \alpha z + \beta \Leftrightarrow z = \frac{z' - \beta}{\alpha}$, từ đó

$$|z - z_0| \leq R \Leftrightarrow \left| \frac{z' - \beta}{\alpha} - z_0 \right| \leq R \Leftrightarrow |z' - (\alpha z_0 + \beta)| \leq R|\alpha|.$$

Vậy tập hợp cần tìm là hình tròn (kể cả đường tròn biên) với tâm là điểm biểu diễn số $\alpha z_0 + \beta$, với bán kính bằng $R|\alpha|$.

4.44. *Giải.* $z_1 \neq z_2$ thì $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số ảo $\Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \overline{\left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}\right)} = 0$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2)\overline{(z_1 - z_2)} + (z_1 - z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2) = 0 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|.$$

4.45. *Hướng dẫn.* a) Từ $\alpha = a + ib$, $z = x + iy$ ($a, b, x, y \in \mathbb{R}$) nên

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} = k \Leftrightarrow ax + by = \frac{k}{2}.$$

b) Chọn $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ (tức $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$), $k = 2$ (không duy nhất).

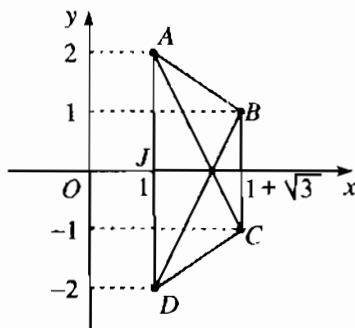
4.46. Giải. a) $|2i - 2\bar{z}| = |2z - 1| \Leftrightarrow |i - \bar{z}| = \left|z - \frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow |z + i| = \left|z - \frac{1}{2}\right|$.

Tập hợp cần tìm là đường trung trực của đoạn thẳng nối các điểm biểu diễn các số $-i$ và $\frac{1}{2}$.

b) $|2iz - 1| = 2|z + 3| \Leftrightarrow \left|iz - \frac{1}{2}\right| = |z + 3| \Leftrightarrow \left|z + \frac{i}{2}\right| = |z + 3|$. Tập hợp cần tìm

là đường trung trực của đoạn thẳng nối các điểm biểu diễn các số $-\frac{i}{2}$ và -3 .

4.47. Giải. Vì mỗi cặp số $1 + 2i, 1 - 2i$ và $1 + \sqrt{3} + i, 1 + \sqrt{3} - i$ là cặp số phức liên hợp nên hai điểm A, D , hai điểm B, C đối xứng qua Ox ; phần thực của hai số đầu khác phần thực của hai số sau nên $ABCD$ là một hình thang cân, do đó nó là một tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm J nằm trên trục đối xứng Ox ; J biểu diễn số thực x sao cho $|\overline{JA}| = |\overline{JB}| \Leftrightarrow |1 - x + 2i| = |1 - x + \sqrt{3} + i|$. Từ đó suy ra $x = 1$.



Hình 4.13

(Cách khác: $\overline{AB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} - i$, $\overline{DB}$ biểu diễn số phức $\sqrt{3} + 3i$ mà $\frac{\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} - i} = \sqrt{3}i$ nên $\overline{AB} \cdot \overline{DB} = 0$. Tương tự (hay vì lí do đối xứng qua Ox), $\overline{DC} \cdot \overline{AC} = 0$. Từ đó suy ra AD là một đường kính của đường tròn đi qua A, B, C, D) (h.4.13).

4.48. $z = 2 - 2i$.

Hướng dẫn. Nếu viết $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì $\left|\frac{z-1}{z-3}\right| = 1 \Leftrightarrow x = 2$. Khi đó

$$\left|\frac{z-2i}{z+i}\right| = \frac{\sqrt{4+(y-2)^2}}{\sqrt{4+(y+1)^2}} = 2 \Leftrightarrow y = -2.$$

Vậy $z = 2 - 2i$.

$$4.49. \text{Giải. Xét hệ phương trình } \begin{cases} z^3 + w^5 = 0 & (1) \\ z^2(\bar{w})^4 = 1. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $z^6(\bar{w})^{12} = 1$.

Từ (1) suy ra $z^6 = w^{10}$.

Vậy $w^{10}(\bar{w})^{12} = 1$. Từ đó $|w|^{22} = 1$ tức là $|w| = 1$; suy ra $|z^6| = |w|^{10} = 1$ tức là $|z| = 1$.

Từ $w = \frac{1}{\bar{w}}$ và $w^{10}(\bar{w})^{12} = 1$ suy ra $(\bar{w})^2 = 1$ nên w bằng 1 hoặc bằng -1 .

Từ $(\bar{w})^2 = 1$ và (2) suy ra $z^2 = 1$ tức z bằng 1 hoặc bằng -1 .

Để ý đến (1) suy ra hệ có hai nghiệm là $(1; -1)$ và $(-1; 1)$.

4.50. Với $z \neq i$ thì $\frac{z+i}{\bar{z}+i}$ là số thực khi và chỉ khi $\frac{z+i}{\bar{z}+i} = \frac{\bar{z}-i}{z-i}$ tức là khi và chỉ khi $z^2 = \bar{z}^2$ mà $z^2 - (\bar{z})^2 = (z + \bar{z})(z - \bar{z}) = 0$ khi và chỉ khi $z = \bar{z}$ hoặc $z = -\bar{z}$. Vậy tập hợp cần tìm là tập hợp các điểm thuộc Ox và các điểm thuộc Oy khác điểm I (biểu diễn số i).

(Cách khác : Viết $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), tìm phần ảo của $\frac{z+i}{\bar{z}+i}$ rồi cho phần ảo đó bằng 0).

4.51. a) $a = 2, b = 2$.

Các nghiệm là $i, -i, -1 + i, -1 - i$.

4.52. Giải. Phần ảo của số phức $(1 + i \tan a)(1 + i \tan b)(1 + i \tan c)$ bằng

$$\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c.$$

Vậy $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$ khi và chỉ khi phần ảo của số phức đang xét bằng 0, tức là acgumen của số phức đó là một bội nguyên của π .

Mặt khác, $1 + i \tan a = \frac{1}{\cos a} (\cos a + i \sin a)$ có argumen là $a + l\pi$ (l là số nguyên bất kì); tương tự cho $1 + i \tan b, 1 + i \tan c$. Vậy

$(1 + i \tan a)(1 + i \tan b)(1 + i \tan c)$ có argumen là $a + b + c + m\pi, m \in \mathbb{Z}$.

Kết luận: $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c \Leftrightarrow a + b + c = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

4.53. Giải. a) Do $\frac{1 - \cos \varphi - i \sin \varphi}{1 + \cos \varphi + i \sin \varphi} = -i \tan \frac{\varphi}{2}$ nên:

Khi $\tan \frac{\varphi}{2} = 0$, số đó không có dạng lượng giác xác định.

Khi $\tan \frac{\varphi}{2} > 0$, dạng lượng giác của nó là

$$\tan \frac{\varphi}{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Khi $\tan \frac{\varphi}{2} < 0$, dạng lượng giác của nó là

$$\left(-\tan \frac{\varphi}{2} \right) \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

b) $(1 - \cos \varphi - i \sin \varphi)(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi) = 2 \sin \varphi (\sin \varphi - i \cos \varphi)$

$$= 2 \sin \varphi \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Khi $\sin \varphi = 0$, nó không có dạng lượng giác xác định.

Khi $\sin \varphi > 0$, dạng trên là dạng lượng giác của nó.

Khi $\sin \varphi < 0$, dạng lượng giác của nó là:

$$(-2 \sin \varphi) \left[\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

4.54. Giải. a) Đặt $\alpha = \cos a + i \sin a$, $\beta = \cos b + i \sin b$ thì

$$\begin{aligned} S + iT &= [\cos b + i \sin b] + [\cos(a + b) + i \sin(a + b)] \\ &+ [\cos(2a + b) + i \sin(2a + b)] + \dots + [\cos(na + b) + i \sin(na + b)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta + \beta\alpha + \beta\alpha^2 + \dots + \beta\alpha^n \\
&= \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n) \\
&= \beta \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad (\text{để ý rằng } \alpha \neq 1 \text{ do } \sin \frac{a}{2} \neq 0) \\
&= \beta \frac{1 - \cos(n+1)a - i \sin(n+1)a}{1 - \cos a - i \sin a} \\
&= \beta \frac{\sin \frac{n+1}{2} a \left(\sin \frac{n+1}{2} a - i \cos \frac{n+1}{2} a \right)}{\sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} - i \cos \frac{a}{2} \right)} \\
&= \beta \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \left[\sin \frac{n+1}{2} a - i \cos \frac{n+1}{2} a \right] \left[\sin \frac{a}{2} + i \cos \frac{a}{2} \right] \\
&= \frac{\beta \sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \left(\cos \frac{na}{2} + i \sin \frac{na}{2} \right) \\
&= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \left(\cos \frac{na}{2} + i \sin \frac{na}{2} \right) (\cos b + i \sin b) \\
&= \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \left[\cos \left(\frac{na}{2} + b \right) + i \sin \left(\frac{na}{2} + b \right) \right].
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra :
$$S = \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \cos \left(\frac{na}{2} + b \right),$$

$$T = \frac{\sin \frac{n+1}{2} a}{\sin \frac{a}{2}} \sin \left(\frac{na}{2} + b \right).$$

Chú ý. Trong phần lượng giác ở lớp 11 đã có bài tập tương tự nhưng được giải bằng cách khác.

b) Giải bằng phương pháp tương tự như ở câu a).

$$4.55. a) z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, \quad z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5},$$

$$z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}, \quad z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}.$$

Từ đó theo công thức Moa-vơ, $1, z_1, z_2, z_3, z_4$ là các nghiệm của phương trình $z^5 - 1 = 0$ (đó là tất cả các nghiệm vì phương trình có bậc 5).

Rõ ràng

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_1 + \bar{z}_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{5}.$$

$$b) \text{ Với } z \neq 0, \quad z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = z^2 \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 \right)$$

$$= z^2 \left(\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 \right) = z^2 (w^2 + w - 1), \text{ trong đó } w = z + \frac{1}{z}.$$

Phương trình $w^2 + w - 1 = 0$ có hai nghiệm là $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

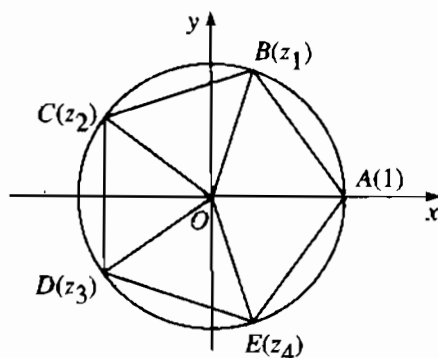
Vì z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ tức là nghiệm của phương trình

$$\left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 = 0$$

$$\text{và } z_4 = \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}, z_3 = \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2} \quad \text{nên}$$

$$z_1 + \frac{1}{z_1}, z_2 + \frac{1}{z_2} \text{ là hai nghiệm phân}$$

biệt của phương trình $w^2 + w - 1 = 0$.



Hình 4.14

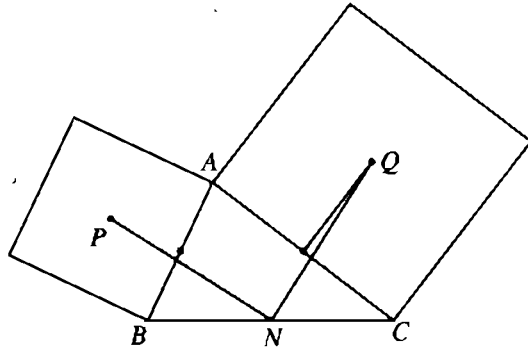
Từ đó dễ suy ra $2 \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (còn $2 \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$) để ý rằng $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$, $\cos \frac{4\pi}{5} < 0$ (h.4.14.).

4.56. Giải. a) M là điểm biểu diễn số phức z , M' là điểm biểu diễn số phức z' .

Khi M trùng với A tức $z = \omega$ thì $z' = \omega$ nên A biến thành chính nó. Khi M không trùng với A thì $|AM'| = |z' - \omega| = |i||z - \omega| = |z - \omega| = |AM|$ và một argumen của $\frac{z' - \omega}{z - \omega} = i$ là số đo góc lượng giác (AM, AM') nên góc này là $\frac{\pi}{2}$.

Từ đó phép biến đổi đang xét là phép quay tâm A , góc quay $\frac{\pi}{2}$.

b) (h.4.15) Giả sử ta đi dọc chu vi tam giác ABC theo ngược chiều quay kim đồng hồ. Khi đó, Q là ảnh của C qua phép quay tâm là trung điểm của CA góc quay $\frac{\pi}{2}$ nên nếu kí hiệu q là số phức biểu diễn bởi điểm Q thì theo câu a) ta có



Hình 4.15

$$q - \frac{\gamma + \alpha}{2} = i \left(\gamma - \frac{\gamma + \alpha}{2} \right),$$

từ đó

$$q = \frac{1}{2}[(1+i)\gamma + (1-i)\alpha].$$

Đổi α thành β , γ thành α , ta suy ra số p biểu diễn bởi P là

$$p = \frac{1}{2}[(1+i)\alpha + (1-i)\beta].$$

Vậy $\overline{NP}$ biểu diễn số phức $p - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}[(1+i)\alpha - i\beta - \gamma]$ và $\overline{NQ}$ biểu diễn số phức $q - \frac{1}{2}(\beta + \gamma) = \frac{1}{2}[(1-i)\alpha - \beta + i\gamma]$. Rõ ràng $i \cdot \frac{1}{2}[(1-i)\alpha - \beta + i\gamma] = \frac{1}{2}[(1+i)\alpha - i\beta - \gamma]$, nên suy ra $NQ = NP$ và $\overline{NQ}, \overline{NP}$ vuông góc (h.4.15).

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. ĐỀ BÀI

1. Cho hàm số

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x.$$

a) Chứng minh rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x < 0$.

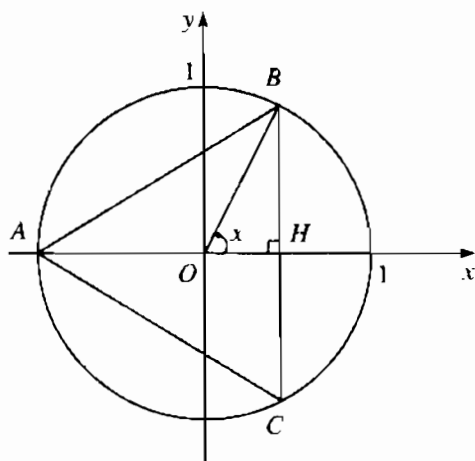
b) Chứng minh bất đẳng thức

$$1 + x < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ với mọi } x < 0.$$

c) Tính giá trị gần đúng của $e^{-0,01}$ với sai số không quá 10^{-4} .

2. Trong mặt phẳng tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$

cho tam giác cân ABC đỉnh $A(-1; 0)$, $AB = AC$, nội tiếp trong đường tròn đơn vị, đỉnh B nằm phía trên trục hoành. Gọi x là số đo bằng radian của góc $(\vec{i}, \vec{OB})$, $0 < x < \pi$. (h.1).



Hình 1

a) Tính diện tích S của tam giác ABC theo x .

b) Với giá trị nào của x , tam giác ABC có diện tích lớn nhất?

3. Cho hàm số $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

a) Chứng minh rằng $f(x) = -x + f(-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Từ đó suy ra rằng đường thẳng $y = -x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (khi $x \rightarrow -\infty$).

4. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{5}{3}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{G}$) của hàm số f .

b) Viết phương trình các tiếp tuyến của ($\mathcal{G}$) đi qua điểm $M\left(-\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

c) Chứng minh rằng ($\mathcal{G}$) nhận điểm $U(-1; -1)$ làm tâm đối xứng.

5. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số f .

b) Từ đồ thị ($\mathcal{C}$) suy ra cách vẽ đồ thị của hàm số

$$g(x) = \frac{x^2 - 2|x|}{|x| - 1}.$$

c) Với các giá trị nào của m thì phương trình

$$x^2 - 2|x| = m(|x| - 1)$$

có bốn nghiệm thực phân biệt?

6. So sánh : $\log_2 3$ và $\sqrt[3]{7}$.

7. Cho ba số $\ln a$, $\ln b$, $\ln c$ (a, b, c dương và khác 1) lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ba số $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$ (x dương và khác 1) theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số nhân.

8. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1}{5^x - 25}$;

b) $y = \log(\sin x + \cos x)$;

c) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_7 \frac{x^2 - 3}{x + 1} \right)}$.

9. Giải các phương trình sau :

a) $1 + 6 \cdot 2^x + 3 \cdot 5^x = 10^x$;

b) $\log_3 3x = 3\sqrt{\log_3 x} - 1$.

10. Giải các bất phương trình sau :

a) $\log_1 \frac{x+1}{2} < -\log_2 x$;

b) $0,3^{\frac{\log_1 \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}}{5}} > 1$.

11. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 5\log_2 x - \log_4 y^2 = 8 \\ 5\log_2 x^2 - \log_4 y = 19 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 64 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$.

12. Tìm nguyên hàm của các hàm số sau :

a) $f(x) = \frac{1}{3x+5}$;

b) $f(x) = \frac{\cos x}{(5\sin x + 2)^2}$;

c) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$;

d) $f(x) = x^2 \ln x$.

13. a) Tìm các hằng số $A, B, C \in \mathbb{R}$ thoả mãn

$$\frac{2}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

b) Áp dụng câu a) hãy tính

$$\int_1^2 \frac{2dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}.$$

14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng

a) $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x) dx$ với $a > 0$;

b) $\int_0^\pi xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$.

15. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = 2^x$, $y = 3 - x$, trục hoành và trục tung.

16. Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln x$, trục hoành, hai đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng đó quanh trục hoành.

17. Chứng minh rằng nếu số phức z không phải là số ảo thì $\frac{z}{z^2 + |z|^2}$ là số thực.

18. Tìm các số phức z, w thỏa mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} |z| = |w| = 1 \\ z + w = li \end{cases}$$

trong đó l là số thực cho trước.

19. Biết rằng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là một căn bậc hai của w , hãy tìm các căn bậc hai của các số $-w$, $\bar{w}$ và $i\bar{w}$.

20. a) Tìm các số thực a, b để có phân tích

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = (z - 3)(z^2 + az + b)$$

rồi giải phương trình sau với ẩn $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + 3z^2 + 3z - 63 = 0$$

b) Tìm các số thực a, b, c để có phân tích

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = (z - ai)(z^2 + bz + c),$$

rồi giải phương trình sau với ẩn $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 - 2(1+i)z^2 + 4(1+i)z - 8i = 0.$$

21. Giải hệ phương trình hai ẩn phức z, w sau :

$$\begin{cases} z + w = 3(1+i) \\ z^3 + w^3 = 9(-1+i). \end{cases}$$

22. Tìm số phức z sao cho $\left| \frac{z+3i}{z+i} \right| = 1$ và $z+1$ có một argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$.

23. Cho số phức $w = \bar{z} \frac{1-3i}{1+2i}$, trong đó $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ($\varphi \in \mathbb{R}$).

a) Hãy viết số phức w dưới dạng lượng giác.

b) Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức w nói trên khi φ thay đổi, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

B. ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

1. Hướng dẫn.

a) $f'(x) = 1 + x - e^x$; $f''(x) = 1 - e^x$.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$	0
$f''(x)$		+
$f'(x)$	$-\infty$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f'(x) < 0$ với mọi $x < 0$.

b) Từ a) suy ra f nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$. Do đó

$$f(x) > f(0) \text{ với mọi } x < 0,$$

hay $1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x > 0$ với mọi $x < 0$.

c) Từ b) suy ra

$$1 - 0,01 < e^{-0,01} < 1 - 0,01 + \frac{0,0001}{2}.$$

2. a) $S = \sin x(1 + \cos x)$;

b) $x = \frac{\pi}{3}$; $\max S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. Hướng dẫn

a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln[e^{-x}(1 + e^x)] = -x + \ln(1 + e^x) = -x + f(-x).$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0.$$

4. b) Có hai tiếp tuyến cùng đi qua M là đường thẳng $y = 3x + \frac{22}{3}$ và đường thẳng $y = -x - 2$.

5. b) *Hướng dẫn.* g là một hàm số chẵn nên đồ thị $(\mathcal{C}_1)$ của nó đối xứng qua trục tung. Với $x \geq 0$, ta có

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1} = f(x).$$

Do đó, muốn có đồ thị $(\mathcal{C}_1)$ của hàm số g ta bỏ đi phần của đường cong $(\mathcal{C})$ nằm bên trái trục tung, giữ lại phần của đường cong $(\mathcal{C})$ nằm bên phải trục tung (ứng với các giá trị $x \geq 0$ và $x \neq 1$), và bổ sung thêm hình đối xứng của phần đường cong này qua trục tung.

c) $m > 0$.

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\frac{x^2 - 2|x|}{|x| - 1} = m.$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của $(\mathcal{C}_1)$ và đường thẳng $y = m$.

$$6. \text{ Do } 3^3 < 2^5 \Leftrightarrow 3 \log_2 3 < 5 \Leftrightarrow \log_2 3 < \frac{5}{3}; \quad (1)$$

$$5^3 < 189 \Leftrightarrow 5 < 3\sqrt[3]{7} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < \sqrt[3]{7}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\log_2 3 < \sqrt[3]{7}$.

7. Từ giả thiết $\ln a, \ln b, \ln c$ lập thành một cấp số nhân, suy ra $\ln^2 b = \ln a \cdot \ln c$,

$$\frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln c} = \frac{\ln^2 x}{\ln^2 b}.$$

Dùng công thức đổi cơ số, ta có

$$\log_a x \cdot \log_c x = \log_b^2 x.$$

Từ đó suy ra $\log_a x, \log_b x, \log_c x$ lập thành một cấp số nhân.

8. a) $x \neq 2$.

$$b) -\frac{\pi}{4} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Hướng dẫn. ĐKXD : $\sin x + \cos x > 0$, hay $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

$$c) \frac{1 - \sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7 - \sqrt{89}}{2} \text{ hoặc } \frac{1 + \sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7 + \sqrt{89}}{2}.$$

Giải. Hàm số $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_7 \frac{x^2 - 3}{x + 1}\right)}$ xác định khi

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_7 \frac{x^2 - 3}{x + 1}\right) \geq 0. \quad (1)$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 0 < \log_7 \frac{x^2 - 3}{x + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{x^2 - 3}{x + 1} \leq 7 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 7x - 10}{x + 1} \leq 0 \\ \frac{x^2 - x - 4}{x + 1} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7 - \sqrt{89}}{2} & \text{hoặc} & -1 < x \leq \frac{7 + \sqrt{89}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{17}}{2} < x < -1 & \text{hoặc} & x > \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7 - \sqrt{89}}{2} \text{ hoặc } \frac{1 + \sqrt{17}}{2} < x \leq \frac{7 + \sqrt{89}}{2}.$$

9. a) $x = 2$.

Hướng dẫn. Chia hai vế của phương trình cho 10^x , ta được

$$\left(\frac{1}{10}\right)^x + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Vận dụng tính chất nghịch biến của hàm số $y = a^x$ ($0 < a < 1$) để chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

b) $x = 3$; $x = 81$.

Hướng dẫn. Đặt $\sqrt{\log_3 x} = t$ ($t \geq 0$) đưa về phương trình $t^2 - 3t + 2 = 0$.

10. a) $0 < x < 1$.

Hướng dẫn. Đưa về lôgarit cùng cơ số 2 (hoặc $\frac{1}{2}$) và sử dụng tính đồng

biến (hoặc nghịch biến) của hàm số lôgarit. Chú ý các điều kiện $\frac{x+1}{1-x} > 0$ và $x > 0$.

b) $0 < x < \frac{3}{2}$.

Giải. $0,3^{\frac{\log_1 \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2}}{5}} > 1 \Leftrightarrow \log_1 \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2} < 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x+4}{x^2+2} > 1 \Leftrightarrow \frac{3x+4}{x^2+2} > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x}{x^2+2} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}.$$

11. a) $(x; y) = (4; 4)$.

Hướng dẫn. Đặt $\log_2 x = u$ và $\log_4 y = v$, ta có hệ

$$\begin{cases} 5u - 2v = 8 \\ 10u - v = 19. \end{cases}$$

b) $(x; y) = (4; 1)$.

Hướng dẫn. Lôgarit hoá hai vế của phương trình thứ nhất để đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \end{cases}$$

thì đặt $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$ ($u \geq 0$, $v \geq 0$) dẫn đến hệ

$$\begin{cases} u^2 + 2v^2 - 6 = 0 \\ u + v = 3. \end{cases}$$

Tìm được $u = 2$; $v = 1$.

12. a) $\frac{1}{3} \ln|3x + 5| + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = 3x + 5$.

b) $-\frac{1}{5(5\sin x + 2)} + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = 5\sin x + 2$.

c) $\frac{1}{3} \tan^3 x + C.$

Hướng dẫn. Đặt $u = \tan x$.

d) $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C.$

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần, đặt $u = \ln x$ và $v' = x^2$.

13. a) $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$. b) $\ln \frac{32}{27}.$

14. a) *Hướng dẫn.* Đổi biến $u = x^2$.

b) *Giải.* Đổi biến $u = \pi - x$, ta có $du = -dx$ và

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = - \int_{\pi}^0 (\pi - u) f(\sin u) du \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - u) f(\sin u) du = \pi \int_0^{\pi} f(\sin u) du - I. \end{aligned}$$

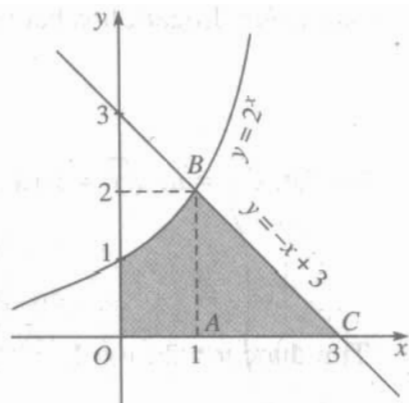
Suy ra $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$

15. $\frac{1}{\ln 2} + 2.$

Giải. Để thấy phương trình

$$2^x = -x + 3$$

có một nghiệm duy nhất là $x = 1$. Do đó đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm B có hoành độ $x = 1$. Vậy diện tích cần tính (phần tô đậm trong hình 2) là :



Hình 2

$$S = \int_0^1 2^x dx + S_{ABC} = \frac{1}{\ln 2} + 2.$$

16. $V = 2\pi(\ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1).$

Hướng dẫn. Sử dụng phương pháp tích phân từng phần bằng cách đặt $u = (\ln x)^2$, $v' = 1$. Kết quả là

$$V = \pi \int_1^2 (\ln x)^2 dx = \pi (x \ln^2 x) \Big|_1^2 - 2\pi \int_1^2 \ln x dx = 2\pi(\ln^2 2 - 2 \ln 2 + 1).$$

17. *Hướng dẫn.* z không phải là số ảo có nghĩa là nếu $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thì

$$x \neq 0. \text{ Hãy chứng minh } \frac{z}{z^2 + |z|^2} = \frac{1}{2x}.$$

18. *Giải.* Ta xét các trường hợp sau :

1) $l = 0$. Lúc này dễ thấy z là số phức tùy ý sao cho $|z| = 1$, còn $w = -z$.

2) $l \neq 0$. Gọi P , A và B là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức li , z và w .

Do $l \neq 0$ nên P khác O . Điều kiện $z + w = li$ tương đương với điều kiện

$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OP}$. Nhưng vì $|z| = |w| = 1$ nên A và B nằm trên đường tròn đơn vị.

Vậy A và B là giao điểm của đường tròn đơn vị (O) với đường trung trực (d) của đoạn OP . Từ đó suy ra các kết quả sau :

Khi $0 \neq |l| < 2$ thì (O) và (d) cắt nhau tại hai điểm ứng với hai số phức z và w thoả mãn điều kiện của đề bài. Đó là hai số $\pm \frac{1}{2} \sqrt{4-l^2} + \frac{l}{2}i$.

Khi $l = 2$ thì (O) và (d) tiếp xúc với nhau tại điểm biểu diễn số phức i . Vậy $z = w = i$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Khi $l = -2$ thì (O) và (d) tiếp xúc với nhau tại điểm biểu diễn số phức $-i$. Vậy $z = w = -i$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Khi $|l| > 2$ thì (O) và (d) không có điểm chung, nghĩa là không có hai số phức z, w nào thoả mãn các điều kiện đã cho.

19. Các căn bậc hai của $-w, \bar{w}$ và $i\bar{w}$ theo thứ tự là :

$$\pm iz, \pm \bar{z} \text{ và } \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\bar{z}.$$

20. a) $a = 6, b = 21$. Các nghiệm là $-3 + 2\sqrt{3}i ; -3 - 2\sqrt{3}i ; 3$.

b) $a = 2, b = -2, c = 4$. Các nghiệm là $2i ; 1 + \sqrt{3}i ; 1 - \sqrt{3}i$.

21. Hướng dẫn. Tính $zw = \frac{[3(1+i)]^3 - 9(-1+i)}{9(1+i)} = 5i$. Suy ra z, w là các nghiệm

của phương trình $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$; phương trình này có biệt thức

$\Delta = -2i = (1-i)^2$ nên có các nghiệm là $1 + 2i$ và $2 + i$. Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là

$$(1 + 2i ; 2 + i) \text{ và } (2 + i ; 1 + 2i).$$

22. Hướng dẫn. Điều kiện $\left| \frac{z+3i}{z+i} \right| = 1$ nói rằng phần ảo của z bằng -2 . Điều kiện

$z + 1$ có một argumen bằng $-\frac{\pi}{6}$ nói rằng $z + 1 = l(\sqrt{3} - i)$ với $l > 0$. Vậy

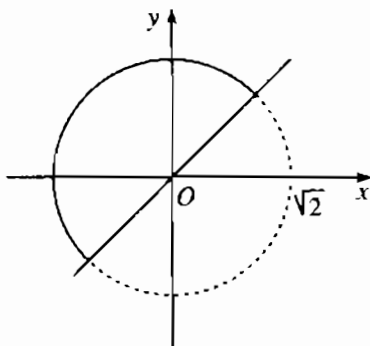
$$z + 1 = 2(\sqrt{3} - i), \text{ tức là } z = 2\sqrt{3} - 1 - 2i.$$

23. *Giải.* a) Ta có $\bar{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)$,

$$\frac{1-3i}{1+2i} = -(1+i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

$$\text{Vậy } w = \bar{z} \frac{1-3i}{1+2i} = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} - \varphi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} - \varphi \right) \right].$$

b) Do $0 \leq \varphi \leq \pi$ nên $\frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4} - \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$. Vậy tập hợp cần tìm là nửa đường tròn tâm O , bán kính bằng $\sqrt{2}$, nằm phía trên đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ tọa độ (h.3).



Hình 3

MỤC LỤC

Trang

Chương I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. Kiến thức cần nhớ	3	
B. Đề bài	10	
§1. Tính đơn điệu của hàm số	10	30
§2. Cực trị của hàm số	13	37
§3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	13	40
§4. Đồ thị của hàm số và phép tịnh tiến hệ tọa độ	16	45
§5. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số	17	46
§6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm đa thức	19	52
§7. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của một số hàm phân thức hữu tỉ	21	53
§8. Một số bài toán thường gặp về đồ thị	22	55
Ôn tập chương I	24	60
C. Đáp số - Hướng dẫn - Lời giải	30	

Chương II. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. Kiến thức cần nhớ	65	
B. Đề bài	70	
§1. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ	70	94
§2. Lũy thừa với số mũ thực	73	96
§3, §4. Lôgarit, Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên	76	97
§5, §6. Hàm số mũ, hàm số lôgarit và hàm số lũy thừa	81	104
§7. Phương trình mũ và lôgarit	84	110
§8. Hệ phương trình mũ và lôgarit	88	126
§9. Bất phương trình mũ và lôgarit	89	130
Ôn tập chương II	91	134
C. Đáp số - Hướng dẫn - Lời giải	94	

Chương III. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. Kiến thức cần nhớ	138	
B. Đề bài	141	
§1. Nguyên hàm	141	154
§2. Một số phương pháp tìm nguyên hàm	142	156
§3. Tích phân	144	159
§4. Một số phương pháp tính tích phân	146	161
§5, §6. Một số ứng dụng hình học của tích phân	147	163
Ôn tập chương III	150	168
C. Đáp số - Hướng dẫn - Lời giải	154	

Chương IV. SỐ PHỨC

A. Kiến thức cần nhớ	173	
B. Đề bài	176	
§1. Số phức	176	187
§2. Căn bậc hai của số phức. Phương trình bậc hai	179	192
§3. Dạng lượng giác của số phức. Ứng dụng	181	194
Ôn tập chương IV	183	202
C. Đáp số - Hướng dẫn - Lời giải	187	

BÀI ÔN TẬP CUỐI NĂM

A. Đề bài	209
B. Đáp số - Hướng dẫn - Lời giải	213

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **TRẦN HỮU NAM – NGUYỄN NGỌC TÚ**

Biên tập tái bản : **NGUYỄN NGỌC TÚ**

Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**

Biên tập kĩ thuật : **NGUYỄN THANH THUY**

Sửa bản in : **NGUYỄN NGỌC TÚ**

Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12 - NÂNG CAO

Mã số : NB203T0

In 10.000 cuốn (QĐ41BT), khổ 17 x 24 cm.

In tại Công ty Cổ phần In Công Đoàn Việt Nam, 167 Tây Sơn,
Đống Đa, Hà Nội. Số in: 871. Số XB: 01-2010/CXB/651-1485/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2010.



HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH



VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH BÀI TẬP LỚP 12

- | | |
|-------------------------|--|
| 1. BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12 | 6. BÀI TẬP TIN HỌC 12 |
| 2. BÀI TẬP HÌNH HỌC 12 | 7. BÀI TẬP NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai) |
| 3. BÀI TẬP VẬT LÝ 12 | 8. BÀI TẬP TIẾNG ANH 12 |
| 4. BÀI TẬP HOÁ HỌC 12 | 9. BÀI TẬP TIẾNG PHÁP 12 |
| 5. BÀI TẬP SINH HỌC 12 | 10. BÀI TẬP TIẾNG NGA 12 |

SÁCH BÀI TẬP LỚP 12 - NÂNG CAO

- | | |
|------------------------|---|
| • BÀI TẬP GIẢI TÍCH 12 | • BÀI TẬP NGỮ VĂN 12 (tập một, tập hai) |
| • BÀI TẬP HÌNH HỌC 12 | • BÀI TẬP ĐỊA LÝ 12 |
| • BÀI TẬP VẬT LÝ 12 | • BÀI TẬP LỊCH SỬ 12 |
| • BÀI TẬP HOÁ HỌC 12 | • BÀI TẬP TIẾNG ANH 12 |

Bạn đọc có thể mua sách tại :

- Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội, 187B Giảng Võ, TP. Hà Nội.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. HCM.
- Công ty CP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng, 15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng.

hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

- | | |
|-------------------------|--|
| – Tại TP. Hà Nội : | 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;
25 Hàn Thuyên ; 32E Kim Mã ; 14/3 Nguyễn Khánh Toàn. |
| – Tại TP. Đà Nẵng : | 78 Pasteur ; 247 Hải Phòng. |
| – Tại TP. Hồ Chí Minh : | 104 Mai Thị Lựu ; 2A Đinh Tiên Hoàng, Quận 1 ;
240 Trần Bình Trọng ; 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5 ;
5 Bình Thới, Quận 11. |
| – Tại TP. Cần Thơ : | 5/5 Đường 30/4. |

Website: www.nxbgd.com.vn



Giá: 12.700đ

