



LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: TRUNG TÂM MASTER EDUCATIPM- 25 THẠCH HẪN

CS 2: TRUNG TÂM 133 XUÂN 68

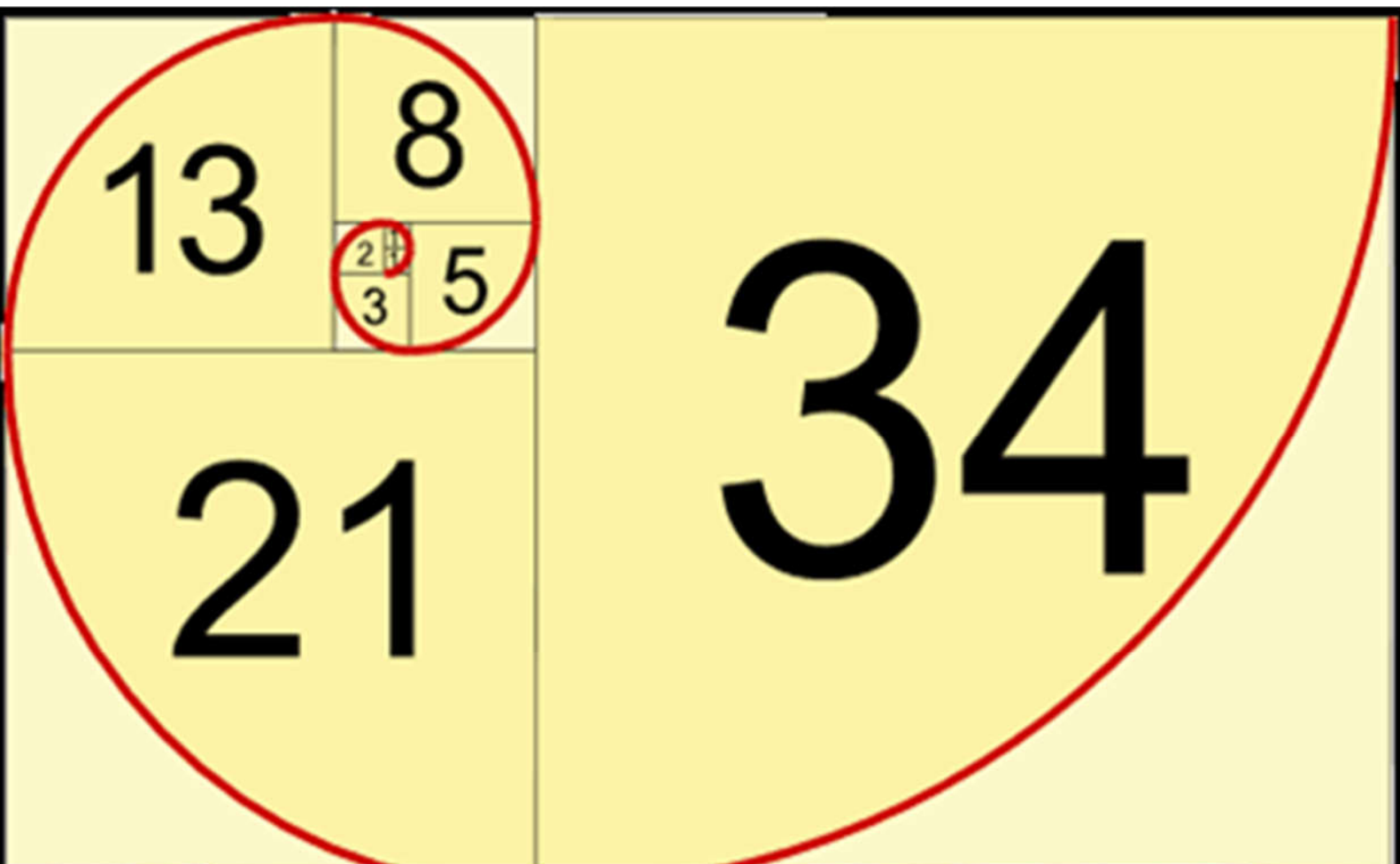
CS 3: TRUNG TÂM 168 MAI THỨC LOAN

CS 4: TRUNG TÂM TRƯỜNG NGUYỄN TRƯỜNG TỌ

BÀI GIẢNG CHƯƠNG 2

ĐÃY SỐ VÀ CẤP SỐ

TOÁN 11- CÁNH DIỀU



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

Mục lục

BÀI 1: DÃY SỐ	3
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	3
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....	4
Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số.....	4
1. Phương pháp	4
2. Các ví dụ	4
Dạng 2. Tính tăng giảm của dãy số	5
1. Phương pháp	5
2. Các ví dụ	5
Dạng 3. Dãy số bị chặn.....	9
1. Phương pháp	9
2. Các ví dụ	9
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	16
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	19
BÀI 2: CẤP SỐ CỘNG.....	35
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	35
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....	35
Dạng 1. Nhận dạng 1 dãy số là cấp số cộng.....	35
1. Phương pháp	35
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	35
Dạng 2. Xác định số hạng , công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng.....	36
1. Phương pháp	36
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	36
Dạng 3. Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng	37
1. Phương pháp	37
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	37
Dạng 4: Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)	38
1. Phương pháp	38
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng.....	38

Dạng 5. Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng lập thành cấp số cộng, bài toán có sử dụng yếu tố cấp số cộng	39
1. Phương pháp	39
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	39
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	41
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	45
BÀI 3: CẤP SỐ NHÂN	55
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	55
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP.....	56
Dạng 1. Chứng minh một dãy số là cấp số nhân.....	56
1. Phương pháp	56
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	56
Dạng 2. Xác định các số hạng của cấp số nhân, tổng của cấp số nhân	58
1. Phương pháp	58
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng	58
Dạng 3. Các bài toán thực tế	70
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	72
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	75
ÔN TẬP CHƯƠNG 2	92
PHẦN 1: GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.....	92
PHẦN 2: BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 2.....	100

CHƯƠNG II: Dãy số. Cấp số cộng và cấp số nhân

BÀI 1: Dãy số

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

I. Khái niệm

Ta có khái niệm sau:

- Mỗi hàm số $u: \{1; 2; 3; \dots; m\} \rightarrow \mathbb{R} (m \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Do mỗi số nguyên dương $k (1 \leq k \leq m)$ tương ứng với đúng một số u_k nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$.

- Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối của dãy số đó.

Ta có khái niệm về dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số) như sau:

- Mỗi hàm số $u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số vô hạn.

Do mỗi số nguyên dương n tương ứng với đúng một số u_n nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$

- Dãy số đó còn được viết tắt là (u_n) .

- Số u_1 gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), số u_2 gọi là số hạng thứ hai, ..., số u_n gọi là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số đó.

Chú ý:

Dãy số không đổi là dãy số có tất cả các số hạng đều bằng nhau.

II. CÁCH CHỌN MỘT DÃY SỐ

Ta có thể cho dãy số bằng một trong những cách sau:

- Liệt kê các số hạng của dãy số đó (với những dãy số hữu hạn và có ít số hạng).
- Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số đó.
- Cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số đó.
- Cho bằng phương pháp truy hồi.

III. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý:

Không phải mọi dãy số đều là dãy số tăng hay dãy số giảm. Chẳng hạn, dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ có dạng khai triển: $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$ không là dãy số tăng, cũng không là dãy số giảm.

IV. DÃY SỐ BỊ CHẶN

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tức là tồn tại các số m và M sao cho $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

1. Phương pháp

Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);
- Công thức của số hạng tổng quát;
- Phương pháp mô tả;
- Phương pháp truy hồi.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}$. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1} \Rightarrow u_1 = 0; u_2 = \frac{3}{5}; u_3 = \frac{2}{7}; u_4 = \frac{5}{9}; u_5 = \frac{4}{11}.$$

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) , từ đó dự đoán u_n

$$\text{a) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}; \quad \text{b) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$u_1 = 5$$

$$u_2 = 5 + 1.3$$

$$u_3 = 5 + 2.3$$

$$u_4 = 5 + 3.3$$

...

$$u_n = 5 + (n-1).3 (*)$$

b) Ta có

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = 3.4$$

$$u_3 = 3.4^2$$

$$u_4 = 3.4^3$$

...

$$u_n = 3.4^{n-1} (*)$$

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) , từ đó dự đoán u_n

$$\text{a) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}; \quad \text{b) } (u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$$

Lời giải

Vậy $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy số giảm.

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$

$$\text{b) } u_n = \frac{\sqrt{n+1} - n}{n}$$

Lời giải

a) Ta có: $u_n = \frac{n}{n^2+1}; u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \\ &= \frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{-n^2-n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0 \forall n \geq 1 \Rightarrow (u_n) \text{ là dãy số giảm.} \end{aligned}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{\sqrt{n+1} - n}{n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1$$

Khi đó ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - 1 \right) - \left(\frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 \right) = \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} - \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \frac{n\sqrt{n+2} - (n+1)\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Giả sử: } u_{n+1} - u_n > 0 &\Leftrightarrow n\sqrt{n+2} - (n+1)\sqrt{n+1} > 0 \Leftrightarrow n\sqrt{n+2} > (n+1)\sqrt{n+1} \\ &\Leftrightarrow n^2(n+2) > (n+1)^3 \Leftrightarrow n^3 + 2n^2 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 3n + 1 < 0 \Rightarrow \text{vô lý.} \end{aligned}$$

Vậy $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n} - 2$$

b) $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

Lời giải

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{n} - 2 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} - 2 \right) - \left(\frac{1}{n} - 2 \right) = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

$$\text{b) } u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$$

Khi đó: $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$

b) $u_n = 2n^2 + 5$

Lời giải

a) $u_n = \frac{2n+1}{5n+2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+2)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+7)}$

Khi đó: $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+7)} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5(5n+2)} \right) = -\frac{1}{(5n+2)(5n+7)} > 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

b) $u_n = 2n^2 + 5 \Rightarrow u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 5$

Khi đó $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 + 5 - (2n^2 + 5) = 4n + 2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng

Ví dụ 5. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$

b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Lời giải

a) $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} = 2 - \frac{3}{n^2 + 1} \Rightarrow u_{n+1} = 2 - \frac{3}{(n+1)^2 + 1}$

Với $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (n+1)^2 > n^2 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2 + 1} < \frac{1}{n^2 + 1} \Leftrightarrow 2 - \frac{3}{(n+1)^2 + 1} > 2 - \frac{3}{n^2 + 1} \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm.

Ví dụ 6. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n + 1}$

b) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$

Lời giải

a) $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n + 1} = 3n - 5 + \frac{6}{n + 1} \Rightarrow u_{n+1} = 3n - 2 + \frac{6}{n + 1}$

Khi đó: $u_{n+1} - u_n = 3n - 2 + \frac{6}{n + 1} - \left(3n - 5 + \frac{6}{n + 1} \right) = 3 - \frac{6}{(n + 1)(n + 2)}$

Với $\begin{cases} n \geq 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow (n+1)(n+2) \geq 6 \Leftrightarrow \frac{6}{(n+1)(n+2)} \leq 1 \Leftrightarrow 3 - \frac{6}{(n+1)(n+2)} \geq 2 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$
 $\Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng.

b) Ta có: $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n} = \frac{n}{n(\sqrt{n+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Khi n tăng thì tử số tăng, mẫu số giảm nên dãy số đã cho là dãy số giảm.

Ví dụ 7. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{2} > 1$

Do $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ tăng.

Ví dụ 8. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$

Với $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \sqrt{2} < 1$

Mà $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ giảm.

Ví dụ 9. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$

Khi đó: $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow n < \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ mà $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 1$.

$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ mà $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 2$.

Hơn nữa $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\begin{cases} u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow n = 1 \\ u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow n \geq 2 \end{cases}$

Do đó $u_1 > u_2$ và $u_2 < u_3 < \dots < u_n < u_{n+1} < \dots \Rightarrow (u_n)$ không tăng và cũng không giảm.

Ví dụ 10. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.

Lại có: $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2 - (2\sqrt{n})^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1} - 4n = 2(\sqrt{n^2-1} - n) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ giảm.

Ví dụ 11. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$

a) là dãy số tăng.

b) là dãy số giảm

Lời giải

Ta có: $u_n = \frac{na+2}{n+1} = a + \frac{2-a}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = 2 + \frac{2-a}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{a-2}{(n+1)(n+2)}$.

a) Để (u_n) là dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n = \frac{a-2}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow a > 2$.

b) Để (u_n) là dãy số giảm thì $u_{n+1} - u_n = \frac{a-2}{(n+1)(n+2)} < 0 \Leftrightarrow a < 2$

Dạng 3. Dãy số bị chặn

1. Phương pháp

- (u_n) là dãy số bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}: u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}: u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (u_n) là dãy số bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}: m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý:

+) Trong các điều kiện về bị chặn ở trên thì không nhất thiết phải xuất hiện dấu '='

+) Nếu một dãy số tăng thì luôn bị chặn dưới bởi u_1 ; còn dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{n^2+1}{2n^2-3}$

b) $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$

Lời giải

a) Viết lại u_n dưới dạng: $u_n = \frac{n^2 - \frac{3}{2}}{2n^2 - 3} + \frac{5}{2(2n^2 - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2 - 3)}$

$$\text{Với } \begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = -\frac{1}{3} \\ n=1 \Rightarrow u_1 = -2 \\ \forall n \geq 2 \Rightarrow 2n^2 - 3 > 0 \Rightarrow u_n > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n \geq -2$$

$$\text{Xét: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)^2 - 3} \cdot \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1}$$

$$\text{Nhận thấy } \forall u_n > 0 \text{ thì } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow (n^2 + 2n + 2)(2n^2 - 3) < (n^2 + 1)(2n^2 + 4n - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4n^4 - 3n^2 + 4n^3 - 6n + 4n^2 - 6 < 4n^4 + 4n^3 - n^2 + 2n^2 + 4n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 6 < n^2 + 4n - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 10n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Do đó: } u_{n+1} < u_n < \dots < u_2 = 1$$

$$\text{Vậy } -2 < u_n < 1 \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn.}$$

$$\text{b) Viết lại } u_n \text{ dưới dạng } u_n = \frac{7n+5}{5n+7} = \frac{\frac{7}{5}(5n+7) - \frac{24}{5}}{5n+7} = \frac{7}{5} - \frac{24}{5(5n+7)} < \frac{7}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > \frac{5}{7}$$

$$\text{Do đó, } \frac{5}{7} < u_n < \frac{7}{5} \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn}$$

Ví dụ 2. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

$$\text{a) } u_n = \frac{1}{2n^2 - 3}$$

$$\text{b) } u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Lời giải

$$\text{a) Với } \begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = -\frac{1}{3} \\ n=1 \Rightarrow u_1 = -1 \\ \forall n \geq 2 \Rightarrow 2n^2 - 3 > 0, \Rightarrow u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \geq -1$$

$$\text{Xét } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^2 - 3}{2(n+1)^2 - 3} < 1 \Leftrightarrow n < n+1$$

$$\text{Do đó, suy ra: } u_n < u_{n-1} < \dots < u_2 = \frac{1}{5}. \text{ Vậy } -1 \leq u_n < \frac{1}{5} \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn.}$$

b) Ta dễ dàng thấy:

- $u_n > 0$ do đó nó bị chặn dưới.
- Vì $n(n+1) \geq 2 \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{2}$ do đó nó bị chặn trên.

Vậy ta được $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$, do đó nó bị chặn.

Ví dụ 3. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{1}{2n^2 - 1}$

b) $u_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

Lời giải

a) Với $n=0 \Rightarrow u_0 = -1 \forall n \in N^* : 2n^2 - 1 \geq 0$ nên $u_n > 0$

do đó: $u_n \geq -1 \quad \forall n$

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n^2 - 1}{2(n+1)^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow n < n+1$

Do đó, suy ra $u_n < u_{n-1} < \dots < u_2 < u_1 = 1$

Vậy $-1 < u_n < 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

b) Với $n=0 \Rightarrow u_0 = -1 \quad \forall n \in N^* : n-1 \geq 0$ và $\sqrt{n^2+1} > 0$ nên $u_n \geq 0$

do đó $u_n \geq -1 \quad \forall n$

Và $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1$, vậy $-1 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{2n^2}{n^2+1}$.

b) $u_n = \frac{2n^2+2n+1}{n^2+n+4}$.

Lời giải

a) Vì $\begin{cases} 2n^2 \geq 0 \\ n^2+1 > 0 \end{cases} \forall n \in N \Rightarrow u_n \geq 0$

Mặt khác, $u_n = \frac{2(n^2+1)-2}{n^2+1} = 2 - \frac{2}{n^2+1} < 2$. Vậy $0 \leq u_n < 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

b) Vì $\begin{cases} 2n^2+2n+1 = 2(n^2+1)+1 > 0 \\ n^2+n+4 = n(n+1)+4 > 0 \end{cases} \forall n \in N \Rightarrow u_n > 0$

Mặt khác, $u_n = \frac{2n^2+2n+1}{n^2+n+4} = \frac{2(n^2+n+4)-7}{n^2+n+4} = 2 - \frac{7}{n^2+n+4} < 2$

Vậy $0 < u_n < 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{3n+(-1)^n}{4n+(-1)^{n+1}}$

a) Tính 6 số hạng đầu tiên của dãy, nêu nhận xét về tính đơn điệu của dãy số.

b) Tính u_{2n} và u_{2n+1} . Chứng minh rằng $0 < u_n \leq \frac{3n+4}{4n-1}$.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = \frac{2}{5}; u_2 = 1; u_3 = \frac{8}{13}; u_4 = \frac{13}{15}; u_5 = \frac{16}{21}; u_6 = \frac{19}{23}$, nhận xét thấy dãy số không tăng cũng không giảm.

$$b) \text{ Ta có } \begin{cases} u_{2n} = \frac{6n+1}{8n-1} \\ u_{2n+1} = \frac{6n+2}{8n+5} \end{cases}$$

$$\text{Tổng quát, với } n = 2k (k \geq 1, k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow u_n = \frac{3n+1}{4n-1} \Rightarrow 0 < u_n \leq \frac{3n+1}{4n-1}$$

$$\text{Với } n = 2k+1 (k \geq 0, k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow u_n = \frac{3n-1}{4n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_n > 0 \\ u_n = \frac{3n-1}{4n+1} < \frac{3n+4}{4n+1} < \frac{3n+4}{4n-1} \Rightarrow 0 < u_n \leq \frac{3n+4}{4n+1} \end{cases}$$

$$\text{Vậy với mọi } n \text{ thì } 0 < u_n \leq \frac{3n+4}{4n-1}$$

Ví dụ 6. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

$$a) u_n = \frac{2n+3}{n+2}$$

$$b) u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Lời giải

$$a) u_{n+1} - u_n = \frac{2n+5}{n+3} - \frac{2n+3}{n+2} = \frac{1}{(n+3)(n+2)} > 0 \text{ nên dãy là dãy tăng.}$$

$$\text{Hơn nữa } u_n = \frac{2n+3}{n+2} = \frac{2(n+2)-1}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2} < 1 \Rightarrow u_n \text{ bị chặn trên bởi 2, chặn dưới bởi } u_1 = \frac{5}{3}.$$

Vậy dãy đã cho bị chặn.

$$b) \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} < 1 \Rightarrow \text{dãy là dãy giảm và bị chặn trên bởi } u_1 = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 7. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

$$a) u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$$

$$b) u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$$

Lời giải

$$a) u_{n+1} - u_n = \frac{n^2+2n+1+2n+2}{n^2+2n+1+n+1+1} - \frac{n^2+2n}{n^2+n+1} = \frac{n^2+4n+3}{n^2+3n+3} - \frac{n^2+2n}{n^2+n+1} > 0 \text{ và}$$

$$u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1} = \frac{n^2+n+1+n}{n^2+n+1} = 1 + \frac{n}{n^2+n+1} > 1$$

Nên dãy đã cho là dãy tăng, bị chặn dưới bởi 1.

b) Ta có $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{n(\sqrt{n^2 + 2n} - n)}{2n} = \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n}{2} > 0$. Lại có

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 3} - n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 4n + 3} > \sqrt{n^2 + 2n} + 1$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 3 > n^2 + 2n + 1 + 2\sqrt{n^2 + 2n} \Leftrightarrow n + 1 > \sqrt{n^2 + 2n} \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n \quad (*)$$

Do (*) hiển nhiên đúng nên ta có dãy đã cho là dãy tăng, và bị chặn dưới bởi $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$.

Hơn nữa $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} < \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow u_n$ bị chặn trên bởi 1. Vậy dãy đã cho bị chặn.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng dãy số $u_n = \frac{n+3}{n+1}$ giảm và bị chặn.

Lời giải

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ Xét: } u_{n+1} - u_n &= \frac{n+4}{n+2} - \frac{n+3}{n+1} = \frac{(n+4)(n+1) - (n+2)(n+3)}{(n+2)(n+1)} = \\ &= \frac{n^2 + 5n + 4 - n^2 - 5n - 6}{(n+2)(n+1)} = -\frac{2}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Nhận thấy $u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$, do đó, dãy số u_n giảm

$$\blacksquare \text{ Viết lại } u_n \text{ dưới dạng } u_n = 1 + \frac{2}{n+1} > 1 \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn dưới}$$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng dãy số $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ tăng và bị chặn trên.

Lời giải

Viết lại u_n dưới dạng

$$u_n = \frac{2-1}{1.2} + \frac{3-2}{2.3} + \frac{4-3}{3.4} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Xét hiệu: } u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{1}{n+2} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ tăng}$$

$$\text{Nhận thấy } u_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1 \Rightarrow (u_n) \text{ bị chặn trên.}$$

Ví dụ 10. Chứng minh rằng dãy số $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải

Viết lại u_n dưới dạng $u_n = \frac{n^2 - \frac{3}{2}}{2n^2 - 3} + \frac{5}{2(2n^2 - 3)} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2n^2 - 3)}$

$$\text{Với } \begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = -\frac{1}{3} \\ n=1 \Rightarrow u_1 = -2 \\ \forall n \geq 2 \Rightarrow 2n^2 - 3 > 0 \Rightarrow u_n > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n \geq -2$$

$$\text{Xét } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)^2 - 3} \cdot \frac{2n^2 - 3}{n^2 + 1}$$

Nhận thấy: với $\forall u_n > 0$ thì $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow (n^2 + 2n + 2)(2n^2 - 3) < (n^2 + 1)(2n^2 + 4n - 1)$

$$\Leftrightarrow 4n^4 - 3n^2 + 4n^3 - 6n + 4n^2 - 6 < 4n^4 + 4n^3 - n^2 + 2n^2 + 4n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 6 < n^2 + 4n - 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < 10n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Do đó, $u_{n+1} < u_n < \dots < u_2 = 1$. Vậy $-2 < u_n < 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn

Ví dụ 11. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_n < 8$.

a) Giả sử tồn tại $u_n \geq 8 \Rightarrow u_{n-1} = 2(u_n - 4) = 8$

Lời giải

Như vậy nếu tồn tại $u_n \geq 8$ thì $u_{n-1} \geq 8$, cũng suy ra $u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_2, u_1 \geq 8$ Vô lí do $u_1 = 0 < 8$. Nên điều giả sử là sai. Suy ra $u_n < 8$

$$\text{b) Xét } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 4 - u_n = 4 - \frac{u_n}{2} = \frac{8 - u_n}{2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

Suy ra dãy tăng. Mà $u_n < 8$ và $u_1 \geq 0 \Rightarrow u_n > 0$. Suy ra dãy bị chặn dưới.

Vậy dãy tăng và bị chặn.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$

a) Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số

b) Chứng minh rằng dãy số bị chặn dưới bởi 1 và bị chặn trên bởi $\frac{3}{2}$

Lời giải

$$a) u_1 = 1; u_2 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}; u_4 = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}; u_5 = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29}$$

$$b) u_1 = 1 > 0 \Rightarrow u_n > 0 \text{ suy ra } u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1} > 1$$

$$\text{Đặt } u_n = v_n + \sqrt{2}, \text{ ta có } \begin{cases} v_1 = 1 - \sqrt{2} \\ v_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{v_n + \sqrt{2} + 2}{v_n + \sqrt{2} + 1} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{v_n(1 - \sqrt{2})}{v_n + 1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 + \sqrt{2}}{v_n} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x_n = \frac{1}{v_n} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2} \\ x_{n+1} = -1 - \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})x_n \end{cases}$$

$$\text{Đặt } y_n = x_n + \frac{-1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{(1 + \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \\ y_{n+1} = (1 + \sqrt{2})y_n \end{cases}$$

$$\text{Do } y_n \text{ là cấp số nhân công bội } 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y_n = -\frac{(1 + \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \cdot (1 + \sqrt{2})^{n-1} = -\frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } x_n = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_n = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})^{n+1}} \Rightarrow u_n = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})^{n+1}}$$

Vậy ta có đpcm.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ tăng và bị chặn trên bởi 2.

Lời giải

Ta có $u_n > 1$

$$\text{Giả sử tồn tại } u_n \geq 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n-1} + 2} \geq 2 \Rightarrow u_{n-1} \geq 2$$

Như vậy, nếu tồn tại $u_n \geq 2$ thì suy ra $u_{n-1} \geq 2$, từ đó cũng suy ra được $u_{n-2}, u_{n-3} \dots u_2, u_1 \geq 2$ vô lý

Do $u_1 = \sqrt{2} < 2$. Nên điều giả sử là sai.

Suy ra $u_n < 2$

$$\text{Xét } u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} > 0$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n$, nên đây là dãy tăng.

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức sau:

a) $u_n = 2n^2 + 1$ b) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ c) $u_n = \frac{2^n}{n}$ d) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Lời giải

a) Ta có: 5 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) là: $u_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3; u_2 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9;$
 $u_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19; u_4 = 2 \cdot 4^2 + 1 = 33; u_5 = 2 \cdot 5^2 + 1 = 51.$

b) Ta có 5 số hạng đầu của dãy $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ là:

$$u_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$u_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5};$$

$$u_5 = \frac{(-1)^5}{2 \cdot 5 - 1} = -\frac{1}{9};$$

$$u_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3};$$

$$u_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7};$$

c) Ta có 5 số hạng đầu của dãy $u_n = \frac{2^n}{n}$ là:

$$u_1 = \frac{2^1}{1} = 2;$$

$$u_3 = \frac{2^3}{1} = 8;$$

$$u_5 = \frac{2^5}{1} = 32$$

$$u_2 = \frac{2^2}{1} = 4;$$

$$u_4 = \frac{2^4}{1} = 16;$$

d) Ta có 5 số hạng đầu của dãy $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là:

$$u_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2;$$

$$u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27};$$

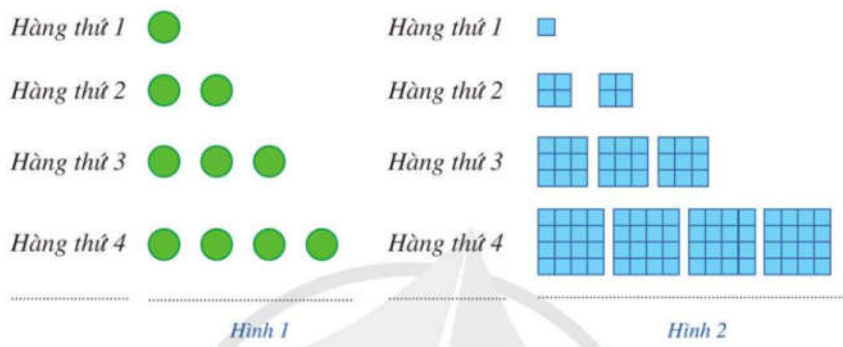
$$u_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125}$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4};$$

$$u_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256};$$

Bài 2.a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ n trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .

b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .



Lời giải

a) Số chấm ở hàng thứ nhất là: $u_1 = 1$;

Số chấm ở hàng thứ hai là: $u_2 = 2$;

Số chấm ở hàng thứ ba là: $u_3 = 3$;

Số chấm ở hàng thứ tư là: $u_4 = 4$;

Vậy số chấm ở hàng thứ n là: $u_n = n$.

b) Diện tích của các ô màu ở hàng thứ nhất là: $v_1 = 1 = 1^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ hai là: $v_2 = 4 = 2^2$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ ba là: $v_3 = 9 = 3^2$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ tư là: $v_4 = 16 = 4^2$;

Vậy diện tích của các ô màu ở hàng thứ n là: $v_n = n^2$.

Bài 3. Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n) , biết:

a) $u_n = \frac{n-3}{n+2}$

b) $u_n = \frac{3^n}{2^n \cdot n!}$

c) $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$

Lời giải

a) Ta có: $u_{n+1} = \frac{n+1-3}{n+1+2} = \frac{n-2}{n+3}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{n-2}{n+3} - \frac{n-3}{n+2} = \frac{n^2 - 4 - n^2 + 9}{(n+3)(n+2)} = \frac{5}{(n+3)(n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_{n+1} > u_n$

Vì vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

b) Ta có: $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{3 \cdot 3^n}{2(n+1) \cdot 2^n \cdot n!} = \frac{3}{2(n+1)} \cdot u_n$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $\frac{3}{2(n+1)} < \frac{3}{2}$ suy ra $u_{n+1} < u_n$.

Vì vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

c) Ta có: $u_{n+1} = (-1)^{n+1} \cdot (2^{n+1} + 1)$

+) Nếu n chẵn thì $u_{n+1} = -(2 \cdot 2^n + 1)$ và $u_n = 2^n + 1$. Do đó $u_{n+1} < u_n$.

Vì vậy với n chẵn thì dãy số đã cho là dãy giảm.

+) Nếu n lẻ thì $u_{n+1} = 2 \cdot 2^n + 1$ và $u_n = -(2^n + 1)$. Do đó $u_{n+1} > u_n$.

Vì vậy với n chẵn thì dãy số đã cho là dãy tăng.

Bài 4. Trong các dãy số (u_n) được xác định như sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 2$

b) $u_n = -2n + 1$

c) $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$.

Lời giải

a) Ta có: $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n \geq 1$ suy ra $n^2 + 2 \geq 3$

Do đó $u_n \geq 3$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi 3.

b) Ta có: $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n \geq 1$ suy ra $u_n = -2n + 1 \leq -1$

Do đó $u_n \leq -1$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn trên bởi -1 .

c) Ta có: $u_n = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n \geq 1$ suy ra $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$

Ta lại có: $\frac{1}{n} \leq 1$ và $-\frac{1}{n+1} \leq -\frac{1}{2}$ suy ra $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Do đó $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

Vậy dãy số u_n bị chặn.

Bài 5. Cho dãy số thực dương (u_n) . Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng khi và chỉ khi

$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải

+) Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $u_{n+1} > u_n$. Do đó dãy số (u_n) là dãy số tăng.

+) Nếu (u_n) là dãy số tăng thì $u_{n+1} > u_n$ do đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Bài 6. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

Lời giải

a) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 1 tháng là:

$$P_1 = 100 + 100 \cdot 0,5\% + 6 = 100,5 + 6 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$$P_2 = 100,5 + 6 + (100,5 + 6) \cdot 0,5\% + 6 = (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 = 100,5(1 + 0,5\%) + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền chi có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$$\begin{aligned} P_3 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^2 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}. \end{aligned}$$

c) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 4 tháng là:

$$\begin{aligned} P_4 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6]0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \end{aligned}$$

Số tiền chi có trong ngân hàng sau n tháng là:

$$P_n = 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-2} + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-3} + \dots + 6 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}$.

B. $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}.$$

Nhận xét: (i) Dùng MTCT chức năng CALC để kiểm tra (tính) nhanh.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có

$$u_1 = \frac{1}{2}; u_2 = \frac{2}{3^2-1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}; u_3 = \frac{3}{3^3-1} = \frac{3}{26}.$$

Câu 3: Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

- A. -1;2;5. B. 1;4;7. C. 4;7;10. D. -1;3;7.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_1 = -1$; $u_2 = u_1 + 3 = 2$; $u_3 = u_2 + 3 = 5$.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}$. Tìm số hạng u_5 .

- A. $u_5 = \frac{1}{4}$. B. $u_5 = \frac{17}{12}$. C. $u_5 = \frac{7}{4}$. D. $u_5 = \frac{71}{39}$.

Lời giải

Chọn C

Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5 = \frac{2 \cdot 5^2 - 1}{5^2 + 3} = \frac{49}{28} = \frac{7}{4}$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $u_1 = -2$. B. $u_2 = 4$. C. $u_3 = -6$. D. $u_4 = -8$.

Lời giải

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_1 = -2 \cdot 1 = -2; u_2 = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 2 = 4; u_3 = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 = -6; u_4 = (-1)^4 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án D sai.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

- A. $u_3 = \frac{8}{3}$. B. $u_3 = 2$. C. $u_3 = -2$. D. $u_3 = -\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_3 = (-1)^3 \cdot \frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

A. $u_4 = \frac{5}{9}$.

B. $u_4 = 1$.

C. $u_4 = \frac{2}{3}$.

D. $u_4 = \frac{14}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$u_2 = \frac{1}{3}(u_1 + 1) = \frac{1}{3}(2 + 1) = 1; u_3 = \frac{1}{3}(u_2 + 1) = \frac{2}{3}; u_4 = \frac{1}{3}(u_3 + 1) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{5}{9}.$$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng “lặp” trong MTCT để tính nhanh.

Câu 8: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_2 = \frac{5}{2}$.

B. $u_3 = \frac{15}{4}$.

C. $u_4 = \frac{31}{8}$.

D. $u_5 = \frac{63}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 = \frac{u_1}{2} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}; u_3 = \frac{u_2}{2} + 2 = \frac{7}{4} + 2 = \frac{15}{4} \\ u_4 = \frac{u_3}{2} + 2 = \frac{15}{8} + 2 = \frac{31}{8}; u_5 = \frac{u_4}{2} + 2 = \frac{31}{16} + 2 = \frac{63}{16}. \end{cases}$$

Nhận xét: Dùng chức năng “lặp” trong MTCT để tính nhanh.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta cần tìm } n \text{ sao cho } u_n = \frac{n+1}{2n+1} = \frac{8}{15} \Leftrightarrow 15n + 15 = 16n + 8 \Leftrightarrow n = 7.$$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8.

B. 6.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Dùng chức năng “lập” để kiểm tra đáp án. Hoặc giải cụ thể như sau:

$$u_n = \frac{2n+5}{5n-4} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow 24n+60 = 35n-28 \Leftrightarrow 11n = 88 \Leftrightarrow n = 8.$$

Câu 11: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. B. $u_{n+1} = 2^n + 1$. C. $u_{n+1} = 2(n+1)$. D. $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Lời giải

Chọn A

Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1} .

- A. $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$. B. $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$. C. $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$. D. $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n = 3^n \xrightarrow{n \leftrightarrow 2n-1} u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1} .

- A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. B. $u_{n-1} = 5^n$. C. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$. D. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Lời giải

Chọn B

$u_n = 5^{n+1} \xrightarrow{n \leftrightarrow n-1} u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. B. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.
C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. D. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải

Chọn D

$$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \xrightarrow{n \leftrightarrow n+1} u_{n+1} = \left(\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}.$$

Câu 15: Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $u_n = \frac{n-1}{n}$.

D. $u_n = \frac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $u_1 = 0$ nên loại các đáp án A và BTa kiểm tra $u_2 = \frac{1}{2}$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n-1}{n} \rightarrow u_2 = \frac{1}{2}$

Xét đáp án D: $u_n = \frac{n^2-n}{n+1} \rightarrow u_2 = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} \rightarrow$ loại

Nhận xét: $u_1 = 0 = \frac{1-1}{1}$; $u_2 = \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2}$; $u_3 = \frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$,... nên đoán $u_n = \frac{n-1}{n}$.**Câu 16:** Dãy số có các số hạng cho bởi: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 1$.

B. $u_n = -1$.

C. $u_n = (-1)^n$.

D. $u_n = (-1)^{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Vì dãy số đã cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án A và B

Ta kiểm tra $u_1 = -1$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n = (-1)^n \rightarrow u_1 = -1$

Xét đáp án D: $u_n = (-1)^{n+1} \rightarrow u_1 = (-1)^2 = 1 \neq -1 \rightarrow$ loại D

Câu 17: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2n$.

B. $u_n = n - 2$.

C. $u_n = -2(n+1)$.

D. $u_n = 2n - 4$.

Lời giải

Chọn D

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án B, CTa kiểm tra $u_2 = 0$ ở các đáp án A, D:

Xét đáp án A: $u_n = 2n \Rightarrow u_2 = 4 \neq 0 \rightarrow$ loại A

Xét đáp án D: $u_n = 2n - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

Nhận xét: Dãy $2; 4; 6; \dots$ có công thức là $2n (n \in \mathbb{N}^*)$ nên dãy $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$ có được bằng cách “tính tiến” $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n - 4$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = n^{n-1}$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n+1}$.

D. $u_n = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ công thức } \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 = 2 \cdot 2 = 4. \\ u_3 = 2u_2 = 2 \cdot 4 = 8 \end{cases}$$

Xét đáp án A với $n=1 \longrightarrow u_1 = 1^{1-1} = 1^0 = 1 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n=1 \longrightarrow u_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4 \longrightarrow$ C loại.

Để thấy đáp án D không thỏa mãn.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$.

B. $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

C. $u_n = \frac{1}{2} - 2n$.

D. $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ công thức } \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ u_3 = u_2 - 2 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Xét đáp án A với $n=2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} + 2(2-1) = \frac{5}{2} \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n=2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} - 2 \cdot 2 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2} \longrightarrow$ C loại.

Xét đáp án D với $n=1 \longrightarrow u_1 = \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 = \frac{5}{2} \longrightarrow$ D loại.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. B. $u_n = 2 + n^2$. C. $u_n = 2 + (n+1)^2$. D. $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải

Chọn A

Kiểm tra $u_1 = 2$ ta loại các đáp án B và C

Ta có $u_2 = u_1 + 2.1 - 1 = 3$.

Xét đáp án A: $u_n = 2 + (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 3$

Hoặc kiểm tra: $u_{n+1} - u_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Xét đáp án D: $u_n = 2 - (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 1 \longrightarrow$ loại D

Hoặc kiểm tra:

$$u_{n+1} - u_n = (n-1)^2 - n^2 = -2n + 1 \neq 2n - 1.$$

Câu 21: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A

Ta có $u_2 = u_1 + 1^2 = 2$.

Xét đáp án B: $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.6}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ B loại.

Xét đáp án C: $u_n = u_1 = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.3}{6} = 2$

Xét đáp án D: $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.3.2}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ D loại.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án A, B

Ta có $u_2 = -2 - \frac{1}{u_1} = -\frac{3}{2}$.

Xét đáp án C: $u_n = -\frac{n+1}{n} \longrightarrow u_2 = -\frac{3}{2}$

Xét đáp án D: $u_n = -\frac{n}{n+1} \longrightarrow u_2 = -\frac{2}{3} \longrightarrow$ D loại.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n$.

B. $u_n = 1 - n$.

C. $u_n = 1 + (-1)^{2n}$.

D. $u_n = n$.

Lời giải

Chọn D

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A, B và C

Câu 24: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2(3^n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Vì $u_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$ nên ta loại các đáp án C và D

Ta có $u_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Xét đáp án A: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 6u_1 = 6 \cdot 6 = 36 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 3u_1 = 3 \cdot 6 = 18$

Câu 25: Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$.

B. $a_{10} = \frac{3}{512}$.

C. $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$.

D. $a_n = \frac{3}{2^n}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a_1 = 3; a_2 = \frac{u_1}{2}; a_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{u_1}{2^2}; a_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{u_1}{2^3}, \dots \longrightarrow u_n = \frac{u_1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án D sai.

Xét đáp án A:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} \right) = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \longrightarrow \text{A đúng.}$$

Xét đáp án B: $a_{10} = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512} \longrightarrow \text{B đúng.}$

Xét đáp án C

$$a_{n+1} + a_n = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3+3 \cdot 2}{2^n} = \frac{9}{2^n} \longrightarrow \text{C đúng.}$$

Câu 26: Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. 1; 1; 1; 1; 1; 1; ... **B.** 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...

C. 1; 3; 5; 7; 9; ... **D.** 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ...

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án A: 1; 1; 1; 1; 1; 1; ... đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án B: 1; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... $\longrightarrow u_1 > u_2 < u_3 \longrightarrow$ loại B

Xét đáp án C: 1; 3; 5; 7; 9; ... $\longrightarrow u_n < u_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$

Xét đáp án D: 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{16}$; ... $\longrightarrow u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots \longrightarrow$ loại D

Câu 27: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại A, B

$$\text{Xét đáp án C: } u_n = \frac{n+5}{3n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2 \longrightarrow \text{loại C}$$

$$\text{Xét đáp án D: } u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) > 0$$

Câu 28: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$.

B. $u_n = \frac{3}{n}$.

C. $u_n = 2^n$.

D. $u_n = (-2)^n$.

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án C: $u_n = 2^n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0 \longrightarrow$

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B

Xét đáp án D: $u_n = (-2)^n \longrightarrow \begin{cases} u_2 = 4 \\ u_3 = -8 \end{cases} \longrightarrow u_2 > u_3 \longrightarrow$ loại D

Câu 29: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

C. $u_n = n^2$.

D. $u_n = \sqrt{n+2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$ là dãy giảm $\longrightarrow$

Xét B: $u_n = \frac{3n-1}{n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow$ loại B

Hoặc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét C: $u_n = n^2 \longrightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0 \longrightarrow$ loại C

Xét D: $u_n = \sqrt{n+2} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+2} = \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} > 0 \longrightarrow$ loại D

Câu 30: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n$.

B. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

D. $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

Lời giải

Chọn C

A. $u_n = \sin n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2 \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin \frac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án A sai. Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

- B. $u_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n^2+n-1}{n(n+1)} > 0$ nên dãy đã cho tăng nên B sai.
- C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, dãy $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.
- D. $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách trắc nghiệm.

- A. $u_n = \sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.
- B. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases} n=1 \rightarrow u_1=2 \\ n=2 \rightarrow u_2=\frac{5}{2} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow u_n = \frac{n^2+1}{n}$ không giảm.
- C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases} n=1 \rightarrow u_1=1 \\ n=2 \rightarrow u_2=\sqrt{2}-1 \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.
- D. $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

- Các dãy $\sin n; (-1)^n(2^n + 1)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án A, D
- Còn lại các đáp án B, C ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án B, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X) = \frac{X^2+1}{X}$ với thiết lập Start = 1, End = 10, Step = 1.

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại B và chọn C, nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thì chọn B và loại C

Câu 31: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.
- B. Dãy số $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy giảm.
- C. Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.
- D. Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải

Chọn D

Xét đáp án A: $u_n = \frac{1}{n} - 2 \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0 \longrightarrow$ loại A

Xét đáp án B: $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại B

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0 \longrightarrow$ loại C

Xét đáp án D: $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \left(2 - \cos \frac{1}{n+1}\right) + \cos \frac{1}{n+2} > 0$ nên

Câu 32: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải

Chọn C

Xét A: $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên C đúng.

Xét đáp án B: $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên B đúng. Hoặc

$$u_{n+1} - u_n = 2(2n+1) > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét đáp án C: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 0 \longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n}\right)^n > 1 \longrightarrow (u_n)$ là dãy tăng nên

Xét đáp án D: $u_n = n + \sin^2 n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = (1 - \sin^2(n+1)) + \sin^2 n > 0$ nên D đúng.

Câu 33: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1} < 1$. Mặt khác: $u_2 = \frac{5}{7} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 34: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = \frac{1}{n}$.

D. $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Các dãy số $n^2; 2^n; n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra).

Nhận xét: $u_n = \frac{1}{n} \leq 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Câu 35: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. Không bị chặn trên.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n \xrightarrow{MTCT} u_1 = \sin 1 + \cos 1 > 1 > 0$ nên loại các đáp án A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạng nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi α .)

$$\text{Ta có } u_n = \cos n + \sin n = \sqrt{2} \sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

Câu 36: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

- A.** 0. **B.** -1. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn C

$u_n \xrightarrow{MTCT} u_5 = \sin 5 - \cos 5 < -1 < 0 \longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số α .)

$$\text{Ta có } u_n = \sqrt{2} \sin\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2}$$

Câu 37: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sqrt{3} \cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

- A.** $m = -2$; $M = 2$. **B.** $m = -\frac{1}{2}$; $M = \sqrt{3} + 1$.
C. $m = -\sqrt{3} + 1$; $M = \sqrt{3} - 1$. **D.** $m = -\frac{1}{2}$; $M = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_1 = \sqrt{3} - 1 > \frac{1}{2} \longrightarrow \text{loại C và D}$$

$$u_n \xrightarrow{MTCT(TABLE)} u_4 = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{loại B}$$

Vậy

$$\text{Nhận xét: } u_n = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin n - \frac{1}{2} \cos n \right) = 2 \sin\left(n - \frac{\pi}{6}\right) \longrightarrow -2 \leq u_n \leq 2.$$

Câu 38: Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Chọn D

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn.

Câu 39: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1; 2; 3 \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} (k \in \mathbb{N}^*)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 40: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2; 3; 4; \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2$) nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 41: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

- A.** $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. **B.** $u_n = n + \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn D

Các dãy số $n^2; n; 2^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2 + 1}; n + \frac{1}{n}; 2^n + 1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

Câu 42: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- A.** $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = 3^n$. **C.** $u_n = \sqrt{n+1}$. **D.** $u_n = n^2$.

Lời giải

Chọn A

Các dãy số $n^2; n; 3^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên các dãy $n^2; \sqrt{n+1}; 3^n$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0 < u_n = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$.

Câu 43: Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\sqrt{6} \leq u_n < \frac{5}{2}$. **B.** $\sqrt{6} \leq u_n < 3$. **C.** $\sqrt{6} \leq u_n < 2$. **D.** $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_2 = \sqrt{12} > 3 > \frac{5}{2} > 2$ nên loại các đáp án A, B, C

Nhận xét: Ta có

$$\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} \geq 0 \end{cases} \longrightarrow u_n \geq 0 \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \geq \sqrt{6} \end{cases} \longrightarrow u_n \geq \sqrt{6}.$$

Ta chứng minh quy nạp $u_n \leq 2\sqrt{3}$.

$$u_1 \leq 2\sqrt{3}; u_k \leq 2\sqrt{3} \longrightarrow u_{k+1} = \sqrt{6+u_k} \leq \sqrt{6+2\sqrt{3}} < \sqrt{6+6} = 2\sqrt{3}.$$

Câu 44: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải

Chọn B

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{(n+1)+1} = \sin \frac{\pi}{n+2} \longrightarrow \text{A sai.}$$

$$u_n = \sin \frac{\pi}{n+1} \longrightarrow -1 \leq u_n \leq 1 \longrightarrow \text{B đúng.}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sin \frac{\pi}{n+2} - \sin \frac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \frac{\pi}{n+2} < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2} \right) \longrightarrow \text{C, D sai.}$$

Câu 45: Cho dãy số (u_n) , với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải

Chọn C

$$u_n = (-1)^n \text{ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm } \longrightarrow \text{A, B sai.}$$

$$\text{Tập giá trị của dãy } u_n = (-1)^n \text{ là } \{-1; 1\} \longrightarrow -1 \leq u_n \leq 1 \longrightarrow \text{C đúng.}$$

BÀI 2: CẤP SỐ CỘNG

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d , tức là: $u_n = u_{n-1} + d$ ($n \geq 2$).

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai d thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có: $u_n - u_{n-1} = d$.

Chú ý:

Khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 2.$$

Nhận xét:

Từ công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$, ta có: $n = \frac{u_n - u_1}{d} + 1$ với $n \geq 2$.

III. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi

$$\text{đó: } S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

Nhận xét:

$$\text{Do } u_n = u_1 + (n-1)d \text{ nên } u_1 + u_n = 2u_1 + (n-1)d. \text{ Suy ra } S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng 1 dãy số là cấp số cộng

1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa (u_n) là một cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một hằng số.

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $d = u_{n+1} - u_n$

- Nếu d là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai d .
- Nếu d phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số sau là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Hướng dẫn giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2020(n+1) - 2021 - (2020n - 2021) = 2020$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2020$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 5 - (-2n + 5) = -2$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -2$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau không phải là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Hướng dẫn giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$ phụ thuộc vào n .

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 3(n+1) - [(-1)^n + 3n] = -(-1)^n + 3 - (-1)^n = 3 - 2(-1)^n$ phụ thuộc vào n .

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Dạng 2. Xác định số hạng, công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 15 = u_3 = u_1 + 2d \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 19 \\ d = -2 \end{cases} \rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -2n + 21.$$

Ví dụ 2: Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 = 5 \\ 40 = u_8 = u_1 + 7d \end{cases} \rightarrow d = 5$$

Ví dụ 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17} .

Lời giải.

Ta có công sai của cấp số cộng là $d = \frac{u_3 - u_{15}}{3 - 15} = \frac{84}{-12} = -7$.

Suy ra $u_{17} = u_1 + (17 - 1)d = 11$.

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17} .

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Lời giải

Ta có $u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0$.

$$S_4 = 14 \Leftrightarrow \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$.

Dạng 3. Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng

1. Phương pháp

Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức: $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \longrightarrow S_{100} = 100u_1 + \frac{100 \cdot 99}{2}d = -24350$$

Ví dụ 2: Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tính tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên

Lời giải

Số nguyên dương chia hết cho 3 có dạng $3n (n \in \mathbb{N}^*)$ nên chúng lập thành cấp số cộng

$$u_n = 3n \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{50} = 150 \end{cases} \longrightarrow S_{50} = \frac{50}{2}(u_1 + u_{50}) = 3825$$

Chú ý: $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Ví dụ 3: Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + (2n-1) - 2n$ với $n \geq 1$ và $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $(2n-1) - 2n = -1$.

Ta có $S = (1-2) + (3-4) + (5-6) + \dots + ((2n-1)-2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S = -n$.

Nhận xét: Ta có $1; 3; 5; \dots; 2n-1$ và $2; 4; 6; \dots; 2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$\begin{aligned} S &= (1+3+5+\dots+2n-1) - (2+4+6+\dots+2n) \\ &= \frac{n}{2}(1+2n-1) - \frac{n}{2}(2+2n) = n^2 - (n^2 + n) = -n. \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

Lời giải

$$\text{Ta có } u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100 \Leftrightarrow 4u_1 + 30d = 100 \Leftrightarrow 2u_1 + 15d = 50.$$

$$\text{Khi đó } S_{16} = \frac{16}{2}(u_1 + u_{16}) = 8(2u_1 + 15d) = 8.50 = 400$$

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải

Đặt $a = u_1$ thì

$$u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = (a+d)^2 + (a+2d)^2 + (a+3d)^2 = 3a^2 - 36a + 126 = 3(a-6)^2 + 18 \geq 18 \text{ với mọi } a. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a-6=0 \Leftrightarrow a=6. \text{ Suy ra } u_1=6.$$

$$\text{Ta có } S_{100} = \frac{100 \cdot [2u_1 + (100-1)d]}{2} = -14250.$$

Ví dụ 5. Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính S_{19} .

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 11d + u_1 + 15d = 224 \Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 56.$$

$$\text{Ta có } S_{19} = \frac{19}{2}(2u_1 + 18d) = 19(u_1 + 9d) = 19.56 = 1064.$$

Dạng 4: Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)

1. Phương pháp

Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

Lời giải.

Vì các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \longrightarrow x - 6 = 6 - 1 \Leftrightarrow x = 11$$

Ví dụ 2: Nếu các số $5+m$; $7+2m$; $17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Ba số $5+m$; $7+2m$; $17+m$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1 + u_3 = 2u_2 \Leftrightarrow (5+m) + (17+m) = 2(7+2m) \Leftrightarrow m = 4$$

Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3 - u_2 = u_2 - u_1$.

Ví dụ 3: Với giá trị nào của x và y thì các số -7 ; x ; 11 ; y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?

Lời giải.

Bốn số -7 ; x ; 11 ; y theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{cases} u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \\ u_4 - u_3 = u_2 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 11 = 11 - x \\ y - 11 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 20 \end{cases}$$

Dạng 5. Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng lập thành cấp số cộng, bài toán có sử dụng yếu tố cấp số cộng

1. Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}.$$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ

khi các số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bằng phép biến đổi tương đương.

Ba số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) = (\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{b})$$

$$\Leftrightarrow b - a = c - b \Leftrightarrow a, b, c \text{ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.}$$

Ví dụ 2. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$. b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$.

a) Ta có $a^2 - 2ab = (2b - c)^2 - 2(2b - c).b = 4b^2 - 4bc + c^2 - 4b^2 + 2bc$
 $= c^2 - 2bc$.

Vậy $a^2 - 2ab = c^2 - 2bc \Leftrightarrow a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

b) Ta có $a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc = 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc$
 $= 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b + c)^2$.

Ví dụ 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$ và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, z theo thứ tự là độ dài ba cạnh của tam giác ($x < y < z$).

Chu vi của tam giác là $x + y + z = 3a$. (1)

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x + z = 2y$. (2)

Tam giác đã cho vuông nên $x^2 + y^2 = z^2$. (3)

Thay (2) và (1), ta được $3y = 3a \Leftrightarrow y = a$.

Thay $y = a$ vào (2), ta được $x + z = 2a \Rightarrow x = 2a - z$.

Thay $x = 2a - z$ và $y = a$ vào (3), ta được

$$(2a - z)^2 + a^2 = z^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 4az = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5a}{4} \Rightarrow x = \frac{3a}{4}.$$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m - 4)x + 9m^2 - m = 0$.

Lời giải

- **Điều kiện cần:** Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng. Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 3m$. Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1 + x_3 = 2x_2$. Suy ra $3x_2 = 3m \Leftrightarrow x_2 = m$. Thay $x_2 = m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3 - 3m.m^2 + 2m(m - 4).m + 9m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- **Điều kiện đủ:**

+ Với $m = 0$ thì ta có phương trình $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m = 0$ không phải giá trị cần tìm.

Vì vậy đây là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = -2$.

b) Ta có: $u_{n+1} = \frac{3(n+1)+7}{5} = \frac{3n+10}{5}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{3n+10}{5} - \frac{3n+7}{5} = \frac{3}{5}$.

Vì vậy đây là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = \frac{3}{5}$.

c) Ta có: $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 3 \cdot 3^n - 3^n = 2 \cdot 3^n$. với $n \in \mathbb{N}^*$

Vì vậy đây không là một cấp số cộng.

Bài 3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$, công sai $d = 5$.

a) Viết công thức của số hạng tổng quát u_n .

b) Số 492 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 300 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Lời giải

a) Ta có công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng u_n là: $u_1 = -3 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 8$.

b) Xét $u_n = 492$

$$\Leftrightarrow 5n - 8 = 492$$

$$\Leftrightarrow n = 100.$$

Vậy số 492 là số hạng thứ 100 của cấp số cộng trên.

c) Xét $u_n = 300$

$$\Leftrightarrow 5n - 8 = 300$$

$$\Leftrightarrow n = 61,6 \notin \mathbb{N}^*$$

Vậy không tồn tại số hạng trong cấp số cộng bằng 300.

Bài 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4, u_2 = 1$. Tính u_{10} .

Lời giải

Công sai của cấp số cộng (u_n) là $d = u_2 - u_1 = 1 - 4 = -3$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số cộng là: $u_n = u_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot (-3)$

$$\text{Suy ra } u_{10} = 4 + (10-1) \cdot (-3) = 31.$$

Bài 5. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_1 + u_2 + u_3 = -1$.

a) Tìm công sai d và viết công thức của số hạng tổng quát u_n .

b) Số -67 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 7 có phải là một số hạng của cấp số cộng trên không?

Lời giải

a) Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = -1$

$$\Rightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = -1$$

$$\Rightarrow 3u_1 + 3d = -1$$

$$\text{Mà } u_1 = \frac{1}{3} \text{ nên } d = -\frac{2}{3}$$

Khi đó công thức tổng quát của cấp số cộng là: $u_n = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(n-1) = -\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Xét $u_n = -\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} = -67$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}n = \frac{-202}{3}$$

$$\Leftrightarrow n = 101$$

Vậy số -67 là số hạng thứ 101 của dãy.

c) Xét $u_n = 7$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}n + \frac{1}{3} = 7$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}n = \frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow n = -10 \notin \mathbb{N}^*$$

Vậy số 7 không phải là một số hạng trong cấp số cộng.

Bài 6. Tính tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n = 0,3n + 5$ với mọi $n \geq 1$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = 0,3 \cdot (n+1) + 5 = 0,3n + 5,3$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 0,3n + 5,3 - 0,3n - 5 = 0,3$.

Do đó (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 5,3$ và công sai $d = 0,3$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số cộng u_n là: $u_n = 5,3 + (n-1) \cdot 0,3$

Suy ra $u_{100} = 5,3 + (100-1) \cdot 0,3 = 35$.

Vậy tổng của 100 số hạng đầu của dãy số là: $S_{100} = \frac{100(5,3+35)}{2} = 2015$.

Bài 7. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n-1).$$

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) Chiều cao 3 năm tuổi của một đứa trẻ phát triển bình thường là:

$$x_3 = 75 + 5(3-1) = 85 \text{ (cm)}$$

b) Ta có: $x_{n+1} = 75 + 5(n+1-1) = 75 + 5n$

Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = 75 + 5n - [75 + 5(n-1)] = 5$

Do đó (x_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $x_1 = 75$ và công sai $d = 5$

Bài 8. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án

trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được

tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm.

Dãy số u_n lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý.

Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n-1)1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12-1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10-1) \cdot 18 = 282$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là: $S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010$ (triệu đồng).

+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40-1) \cdot 1,8 = 94,2$ (triệu đồng).

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là: $S_{12} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364$ (triệu đồng).

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$

B. $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$

C. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$

Lời giải

Chọn C

Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1} - u_m \neq u_{k+1} - u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án A: $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots \longrightarrow \frac{1}{3} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots \longrightarrow$ loại A

Xét đáp án B:

$$15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots \longrightarrow -3\sqrt{2} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots \longrightarrow$$
 loại B

Xét đáp án C: $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots \longrightarrow \frac{1}{5} = u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2 = \frac{2}{5} \longrightarrow$ **Chọn C**

Xét đáp án D: $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 \longrightarrow$ loại D

Câu 2: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1.$

B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}.$

C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}.$

D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta dùng công thức tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d = -\frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = -1 + \frac{n}{2}$, hoặc

$u_{n+1} = u_n + d = u_n + \frac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

$$\text{Ta có } u_1 = -\frac{1}{2}; d = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 + d = 0 \\ u_3 - u_2 + d = \frac{1}{2} \\ u_4 = u_3 + d = 1 \\ u_5 = u_4 + d = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Dùng chức năng “lập” của MTCT để tính:

Nhập: $X = X + \frac{1}{2}$ (nhập $X = X + d$).

Bấm CALC: nhập $-\frac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu “=” liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!

Câu 3: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

- A.** 7; 12; 17, **B.** 6; 10; 14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

Lời giải

Chọn A

Giữa 2 và 22 có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1 = 2; u_5 = 22$; ta cần tìm u_2, u_3, u_4 .

$$\text{Ta có } u_5 = u_1 + 4d \Leftrightarrow d = \frac{u_5 - u_1}{4} = \frac{22 - 2}{4} = 5 \longrightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + d = 7 \\ u_3 = u_1 + 2d = 12 \\ u_4 = u_1 + 3d = 17 \end{cases}$$

Câu 4: Cho hai số -3 và 23. Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

- A.** $n = 12$. **B.** $n = 13$. **C.** $n = 14$. **D.** $n = 15$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n + 2$ số hạng với $u_1 = -3, u_{n+2} = 23$.

$$\text{Khi đó } u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Leftrightarrow n+1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23 - (-3)}{2} = 13 \Leftrightarrow n = 12 \longrightarrow A$$

Câu 5: Biết các số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

- A.** $n = 5$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 9$. **D.** $n = 11$.

Lời giải

Chọn B

Ba số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{aligned} u_1 + u_3 = 2u_2 &\Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2 \quad (n \geq 3) \Leftrightarrow n + \frac{(n-2)(n-1)n}{6} = 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{n^2 - 3n + 2}{6} = n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7 \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Nhận xét: Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; ... Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

- A.** $u_n = 5n + 1$. **B.** $u_n = 5n - 1$. **C.** $u_n = 4n + 1$. **D.** $u_n = 4n - 1$.

Lời giải

Chọn C

Các số 5; 9; 13; 17; ... theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ d = u_2 - u_1 = 4 \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$$

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$.

B. $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.

C. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$.

D. $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 = -3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$

Câu 8: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 7 - 3n$.

B. $u_n = 7 - 3^n$.

C. $u_n = \frac{7}{3n}$.

D. $u_n = 7.3^n$.

Lời giải

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = an + b$ (a, b là hằng số).

Câu 9: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = (-1)^n (2n+1)$.

B. $u_n = \sin \frac{\pi}{n}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Dãy (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + d$ (d là hằng số).

Câu 10: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n = -4n + 9$.

B. $u_n = -2n + 19$.

C. $u_n = -2n - 21$.

D. $u_n = -2^n + 15$.

Lời giải

Chọn D

Dãy số $u_n = -2^n + 15$ không có dạng $an + b$ nên nó không phải là cấp số cộng.

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15} = 34$.

B. $u_{15} = 45$.

C. $u_{13} = 31$.

D. $u_{10} = 35$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases} \longrightarrow u_n = 3n - 8 \longrightarrow \begin{cases} u_{15} = 37 \\ u_{13} = 31 \\ u_{10} = 22 \end{cases}$$

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{4}$ và $d = -\frac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S_5 = -\frac{5}{4}$. B. $S_5 = \frac{4}{5}$. C. $S_5 = \frac{5}{4}$. D. $S_5 = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ d = -\frac{1}{4} \end{cases} \longrightarrow S_5 = 5u_1 + \frac{5 \cdot 4}{2}d = 5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) có $d = -2$ và $S_8 = 72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 .

- A. $u_1 = 16$. B. $u_1 = -16$. C. $u_1 = \frac{1}{16}$. D. $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} d = -2 \\ 72 = S_8 = 8u_1 + \frac{8 \cdot 7}{2}d \end{cases} \longrightarrow 72 = 8u_1 + 28 \cdot (-2) \Leftrightarrow u_1 = 16$$

Câu 14: Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

- A. $u_n = 57$. B. $u_n = 61$. C. $u_n = 65$. D. $u_n = 69$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} u_1 = 1, d = 4 \\ 561 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \end{cases} \longrightarrow 561 = n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 4 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 561 = 0 \Leftrightarrow n = 17.$$

$$u_n = u_{17} = u_1 + 16d = 1 + 16 \cdot 4 = 65 \longrightarrow C$$

Câu 15: Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

- A. $d = 2$. B. $d = 3$. C. $d = 4$. D. $d = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u_{12} = 23 \\ S_{12} = 144 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 + 11d = 23 \\ \frac{12}{2}(u_1 + u_{12}) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = \frac{23 - u_1}{11} = 2 \end{cases}$$

Câu 16: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \frac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1 = 2; d = -\frac{1}{2}$. **B.** $u_1 = -4; d = \frac{3}{2}$. **C.** $u_1 = -\frac{3}{2}; d = -2$. **D.** $u_1 = \frac{5}{2}; d = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{3n^2 - 19n}{4} &= \frac{3}{4}n^2 - \frac{19}{4}n = S_n = nu_1 + \frac{n^2 - n}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \frac{d}{2}\right)n \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} &= \frac{3}{4} \\ u_1 - \frac{d}{2} &= -\frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= -4 \\ d &= \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 17: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

A. $u_n = 2n + 3$. **B.** $u_n = 3n + 2$. **C.** $u_n = 5 \cdot 3^{n-1}$. **D.** $u_n = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } n^2 + 4n = S_n &= \frac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \frac{d}{2}\right)n \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} &= 1 \\ u_1 - \frac{d}{2} &= 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= 5 \\ d &= 2 \end{cases} \longrightarrow u_n &= 2n + 3 \end{aligned}$$

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. $u_{1001} = 4005$. **B.** $u_{1001} = 4003$. **C.** $u_{1001} = 3$. **D.** $u_{1001} = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} 2001 = u_2 = u_1 + d \\ 1995 = u_5 = u_1 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 &= 2003 \\ d &= -2 \end{cases} \longrightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 3$$

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n) , biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d của cấp số cộng đó.

A. $d = -9$. **B.** $d = 7$. **C.** $d = -7$. **D.** $d = 9$.

Lời giải

Chọn D

$$d = u_{n+1} - u_n = 8 - (-1) = 9$$

Câu 20: Cho cấp số cộng (u_n) . Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\frac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$. B. $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$. C. $u_{10} \cdot u_{30} = u_{20}$. D. $\frac{u_{10} \cdot u_{30}}{2} = u_{20}$.

Lời giải

Chọn B

Xét đáp án A: $\begin{cases} \frac{u_{10} + u_{30}}{2} = \frac{u_1 + 9d + u_1 + 29d}{2} = u_1 + 19d \longrightarrow \text{loại} \\ u_5 + u_{10} = u_1 + 4d + u_1 + 9d = 2u_1 + 13d \end{cases}$

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_{90} + u_{210} = 2u_2 + 298d = 2(u_1 + 149d) \\ 2u_{150} = 2(u_1 + 159d) \end{cases}$

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số cộng cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Câu 21: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24} = 60$. B. $S_{24} = 120$. C. $S_{24} = 720$. D. $S_{24} = 1440$.

Lời giải

Chọn C

$$u_2 + u_{23} = 60 \Leftrightarrow (u_1 + d) + (u_1 + 22d) = 60 \Leftrightarrow 2u_1 + 23d = 60.$$

$$\text{Khi đó } S_{24} = \frac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(u_1 + (u_1 + 23d)) = 12(2u_1 + 23d) = 12 \cdot 60 = 720.$$

Câu 22: Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d = 2$. B. $d = -3$. C. $d = 4$. D. $d = 5$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} u_1 + u_6 = 17 \\ u_2 + u_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 17 \\ 2u_1 + 6d = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d = \frac{1}{2}$. B. $d = \frac{1}{3}$. C. $d = 2$. D. $d = 3$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 6d) - (u_1 + 2d) = 8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \end{cases}$$

Câu 24: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} u_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 26 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 5d)^2 = 466 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 13 - 3d \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 5d)^2 = 466 \end{cases} \quad (1)$

Thay (1) và (2) ta được: $(13 - 2d)^2 + (13 + 2d)^2 = 466 \Leftrightarrow 8d^2 + 338 = 466$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 4 \Rightarrow u_1 = 1 \\ d = -4 \Rightarrow u_1 = 25 \end{cases}$$

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 15 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

A. $d = 3$. B. $d = 4$. C. $d = 5$. D. $d = 6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 36 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$. Từ (1) suy ra $u_1 = 12 - 3d$. Thay vào (2), ta được

$(12 - 2d)(12 - d) = 54 \Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ hoặc $d = 15$.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2 .

A. $u_2 = 3$.

B. $u_2 = 6$.

C. $u_2 = 9$.

D. $u_2 = 12$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 27 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d = 9 & (1) \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 275 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $d = 9 - u_1$. Thay vào (2), ta được

$$u_1^2 + (u_1 + 9 - u_1)^2 + [u_1 + 2(9 - u_1)]^2 = 275 \Leftrightarrow u_1^2 - 18u_1 + 65 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 13 \text{ hoặc } u_1 = 5.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 4 \end{cases} \longrightarrow u_2 = u_1 + d = 9$$

Câu 28: Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$.

A. $T = 5651265$.

B. $T = 5651256$.

C. $T = 5651625$.

D. $T = 5651526$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 5$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n = 7515$

$$\Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 7515 \Leftrightarrow 15 + (n-1)5 = 7515 \Leftrightarrow n = 1501.$$

$$\text{Vậy } T = S_{1501} = \frac{(2u_1 + 1500d) \cdot 1501}{2} = \frac{(2 \cdot 15 + 1500 \cdot 5) \cdot 1501}{2} = 5651265$$

Câu 29: Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

A. $T = 500500$.

B. $T = 500005$.

C. $T = 505000$.

D. $T = 500050$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } T = 1 \cdot (1000 + 999) + 1 \cdot (998 + 997) + \dots + 1 \cdot (2 + 1) = 1999 + 1995 + \dots + 3.$$

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1999$ và công sai $d = -4$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì

$$u_n = 3 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 3 \Leftrightarrow 1999 + (n-1)(-4) = 3 \Leftrightarrow n = 500.$$

$$\text{Vậy } T = S_{500} = \frac{(u_1 + u_{500}) \cdot 500}{2} = \frac{(1999 + 3) \cdot 500}{2} = 500500$$

Câu 30: Cho cấp số cộng $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n$ có công sai d , các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0. Với giá trị nào của d thì dãy số $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots; \frac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

- A. $d = -1$. B. $d = 0$. C. $d = 1$. D. $d = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 - u_1 = d \\ u_3 - u_2 = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = -\frac{d}{u_1 u_2} \\ \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} = -\frac{d}{u_2 u_3} \end{cases}.$$

Theo yêu cầu bài toán thì ta phải có $\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ \frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ u_1 = u_3 = u_1 + 2d \end{cases} \Leftrightarrow d = 0$$

Câu 31: Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

- A. 20° và 70° . B. 45° và 45° . C. 20° và 45° . D. 30° và 60° .

Lời giải

Chọn D

Ba góc A, B, C của một tam giác vuông theo thứ tự đó ($A < B < C$) lập thành cấp số cộng nên $C = 90$, $C + A = 2B$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A + B + C = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B = 180 \\ A + C = 2B \\ C = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 60 \\ A = 30 \\ C = 90 \end{cases}$$

Câu 32: Ba góc A, B, C ($A < B < C$) của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

- A. 40° . B. 45° . C. 60° . D. 80° .

Lời giải

Chọn A

Ba góc A, B, C của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C = 2A$, $C + A = 2B$. Ta có

$$\begin{cases} A + B + C = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B = 180^\circ \\ A + C = 2B \\ C = 2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 60^\circ \\ A + C = 120^\circ \\ C = 2A \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = 40^\circ \\ B = 60^\circ \\ C = 80^\circ \end{cases} \longrightarrow C - A = 40^\circ.$$

Câu 33: Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$.

C. $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$.

D. $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ba cạnh a, b, c ($a < b < c$) của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa

$$\text{yêu cầu thì } \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ a + b + c = 3 \\ a + c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ 3b = 3 \\ a + c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 \\ b = 1 \\ a = 2b - c - 2 - c \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 = c^2 \xrightarrow[b=1]{a=2-c} (2-c)^2 + 1 = c^2 \Leftrightarrow -4c + 5 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 1 \\ c = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Câu 34: Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế.

Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635.

B. 1792.

C. 2055.

D. 3125.

Lời giải

Chọn C

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d = 3$ và $u_1 = 25$.

$$\text{Tổng số ghế là } S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = 30u_1 + \frac{30 \cdot 29}{2}d = 2055$$

Câu 35: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,...Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73.

B. 75.

C. 77.

D. 79.

Lời giải.

Chọn C

Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1, d = 1$. Giả sử có n hàng cây thì $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 3003 = S_n$.

$$\text{Ta có } 3003 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow n = 77$$

Câu 36: Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78.

B. 156.

C. 300.

D. 48.

Lời giải

Chọn C

Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giờ) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$. Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là:

$$S = S_{24} = \frac{24}{2}(u_1 + u_{24}) = 12(1 + 24) = 300$$

Câu 37: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

- A.** 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.

Lời giải

Chọn B

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 7, d = 5$. Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 25450 = S_n$. Ta có

$$25450 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 50900 = 0 \Leftrightarrow n = 100$$

Câu 38: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

- A.** 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng. **C.** 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Giá tiền khoan mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 80000, d = 5000$. Do cần khoan 50 mét nên tổng số tiền cần trả là

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{50} = S_{50} = 50u_1 + \frac{50 \cdot 49}{2}d = 50 \cdot 80000 + 1225 \cdot 5000 = 10125000$$

BÀI 3: CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một dãy số, trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q , tức là: $u_n = u_{n-1} \cdot q$ ($n \geq 2$).

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q và $u_n \neq 0$ với mọi $n \geq 1$ thì với số tự nhiên $n \geq 2$, ta có: $\frac{u_n}{u_{n-1}} = q$.

Chú ý:

Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi.

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

III. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 1$.

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó: $S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$.

Chú ý: Nếu $q = 1$ thì $S_n = nu_1$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh một dãy số là cấp số nhân

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số nhân là xác định số hạng đầu u_1 và công bội q
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và q rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \quad (n \geq 1) \end{cases}$.

- Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 3$, $n \geq 1$ là một cấp số nhân.
- Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

a) Ta có $v_n = u_n + 3$, suy ra $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = (4u_n + 9) + 3$. Do đó $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(4u_n + 9) + 3}{u_n + 3} = \frac{4(u_n + 3)}{u_n + 3} = 4$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$ và công bội $q = 4$.

b) Do (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = 5 \\ q = 4 \end{cases}$ nên số hạng tổng quát của $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 4^{n-1}$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = v_n - 3 = 5 \cdot 4^{n-1} - 3$.

Ví dụ 2: Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bội của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$

b). $u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2}$

c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$

Lời giải

a). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b). Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n \cdot 5^{3n+2}} = -1 \cdot 5^3 = -125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -125$.

c). Ta có $u_2 = u_1^2 = 4$, $u_3 = u_2^2 = 16$, $u_4 = u_3^2 = 256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ và $\frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16$
 $\Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{u_n}}{u_n} = \frac{9}{u_n^2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{9}{u_n^2}, \forall n \geq 2$. Do đó có:

$$u_1 = u_3 = u_5 = \dots = u_{2n+1} \dots \quad (1)$$

$$\text{Và } u_2 = u_4 = u_6 = \dots = u_{2n} = \dots \quad (2)$$

$$\text{Theo đề bài có } u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = \dots = u_{2n} = u_{2n+1} \dots$. Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

$$\text{Vì có } v_n = u_n + 3 \quad (1) \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \quad (2).$$

$$\text{Theo đề } u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3) \quad (3).$$

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$.

Ví dụ 4: Cho $x, 3, y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4 = y\sqrt{3}$. Tìm x, y .

Lời giải

$$\text{Ta có: } x.y = 9 \Rightarrow y = \frac{9}{x}$$

$$\text{Thay vào } x^4 = y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 = \frac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = (\sqrt{3})^4 \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = (\sqrt{3})^5 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}. \text{ Kết luận } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Dạng 2. Xác định các số hạng của cấp số nhân, tổng của cấp số nhân

1. Phương pháp

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1 , giải hệ phương trình này tìm được q và u_1 .

Để xác định số hạng thứ k , ta sử dụng công thức: $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì

$$u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n, \text{ do đó } S_n = nu_1.$$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases} \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a). } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q(1 + q^4)}{u_1(1 + q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1 + q^4} = \frac{51}{17} = 3.$$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

$$\text{b)} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 135 \\ u_1 \cdot q^3 + u_1 q^4 + u_1 q^5 = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=135 & (*) \\ u_1q^3(1+q+q^2)=40 & (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q^3(1+q+q^2)}{u_1(1+q+q^2)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{135}{1+q+q^2} = \frac{1215}{19}.$$

Kết luận có công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1215}{19}$.

$$c) \begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 43 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 & (*) \\ u_1(1+q+q^2) = 43 & (**) \end{cases} \cdot \text{Lấy } \frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{u_1q}{u_1(1+q+q^2)} = \frac{6}{43}$$

$$\Leftrightarrow 43q = 6(1+q+q^2) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6 \vee q = \frac{1}{6}$$

Với $q = 6 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $q = \frac{1}{6} \Rightarrow u_1 = 36$.

$$\text{Kết luận } \begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} q = \frac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

- Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.
- Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?
- Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

$$a). \text{ Ta có } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 & (*) \\ u_1q(1+q^4) = 102 & (**) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3.$$

- b). Có $S_n = 3069 \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 3069 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 3069 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.
- c). Có $u_k = 12288 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 = 2^{12} \Rightarrow k-1 = 12 \Leftrightarrow k = 13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

Ví dụ 3: Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm u_1 và q , biết rằng:

$$1) \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i = 1, \dots, 5) \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases}$$

$$4) u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60. \quad 5) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} \quad 7) \begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} u_1 u_2 u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \quad 9) \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases}$$

Lời giải

$$1) \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2} \\ u_1 u_5 = 25 \\ u_i > 0 (i = 1, \dots, 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^3 = \frac{35}{2} & (1) \\ u_1 \cdot u_1 \cdot q^4 = 25 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (u_1 \cdot q^2) = 5^2 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^2 = 5 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{q^2} \text{ thay vào (1) được:}$$

$$\frac{5}{q^2} (q + q^2 + q^3) = \frac{35}{2} \Leftrightarrow 2(1 + q + q^2) = 79 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{5}{4}. \text{ Với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 20.$$

$$2) \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 - q^2 + q^4) = 65 & (1) \\ u_1 (1 + q^6) = 325 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy: } \frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow \frac{(1+q^2)(1-q^2+q^4)}{1-q^2+q^4} = 5 \left(\text{vì } 1+q^6 = 1+(q^2)^3 \right)$$

$$\Leftrightarrow 1+q^2 = 5 \Leftrightarrow q^2 = 4 \Leftrightarrow q = \pm 2.$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1-2^2+2^4} = 5. \text{ Với } q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{65}{1-(-2)^2+(-2)^4} = 5.$$

$$3). \begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^5 = -42. \\ u_1 \cdot q^2 + u_1 \cdot q^4 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q(1+q^2+q^4) = -42 & (1) \\ u_1 \cdot q(1+q^2) = 20 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy: } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q^2+q^4}{q(1+q^2)} = -\frac{21}{10} \Leftrightarrow 10+10q^2+10q^4 = -21q-21q^3$$

$$\Leftrightarrow 10q^4 + 21q^3 + 10q^2 + 21q + 10 = 0 \Leftrightarrow 10q^2 + 21q + 10 + \frac{21}{q} + \frac{10}{q^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow 10\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) + 21\left(1 + \frac{1}{q}\right) + 10 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Leftrightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \text{ Điều kiện } |t| \geq 2$$

$$(*) \Leftrightarrow 10(t^2 - 2) + 21t + 10 = 0 \Leftrightarrow 10t^2 + 21t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{2} \vee t = \frac{2}{5} \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } t = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = -\frac{1}{2} \vee q = -2$$

$$\bullet \text{ Nếu } q = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4} = 64$$

$$\bullet \text{ Nếu } q = -2 \Rightarrow u_1 = \frac{20}{q^2 + q^4} = \frac{20}{2^2 + 2^4} = 1.$$

$$4). u_1 + u_6 = 165; u_3 + u_4 = 60.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^5 = 165 \\ u_1 q^2 + u_1 q^3 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^5) = 165 & (1) \\ u_1 q^2(1+q) = 60 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q^5}{q^2(1+q)} = \frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{(1+q)(1-q+q^2-q^3+q^4)}{q^2(1+q)} = \frac{11}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(1-q+q^2-q^3+q^4) = 11q^2 \Leftrightarrow 4q^4 - 4q^3 - 7q^2 - 4q + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4q^4}{q^2} - \frac{4q^3}{q^2} - \frac{7q^2}{q^2} - \frac{4q}{q^2} + \frac{4}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 4\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 4\left(q + \frac{1}{q}\right) - 7 = 0 \quad (*)$$

Đặt: $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$.

$$(*) \Leftrightarrow 4(t^2 - 2) - 4t - 7 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)}.$$

Với $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$

• với $q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^5} = \frac{165}{1^2+2^5} = 5$ • với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{165}{1+q^2} = \frac{165}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 160$.

$$5). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 = 15 \\ u_1^2 + u_1^2q^2 + u_1^2q^4 + u_1q^6 = 85. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3) = 15 \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2+q^3)^2 = 15^2 & (1) \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 85 & (2). \end{cases}$$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1+q+q^2+q^3)^2}{1+q^2+q^4+q^6} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{[(1+q)+q^2(1+q)]^2}{(1+q^2)+q^4(1+q^2)} = \frac{45}{17}$

$$\Leftrightarrow \frac{[(1+q)(1+q^2)]^2}{(1+q^2)+(1+q^4)} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+2q+q^2)(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17}$$

$$\Leftrightarrow 17(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4) = 45(1+q^4)$$

$$\Leftrightarrow 28q^4 - 34q^3 - 34q^2 - 34q + 28 = 0 \Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{34q^3}{q^2} - \frac{34q^2}{q^2} - \frac{34q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0 \text{ (vì dễ dàng}$$

thấy $q \neq 0$)

$$\Leftrightarrow 28q^2 - 34q - 34 - \frac{34}{q} + 28 = 0 \Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2$. Điều kiện: $|t| \geq 2$.

$$(*) \Leftrightarrow 14(t^2 - 2) - 17t - 17 = 0 \Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7} \text{ (loại)}$$

Với $t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$

• với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 1$. • với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{15}{1+q+q^2+q^3} = 8$.

$$6). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 13 & (*) \\ u_1q^3(1+q+q^2) = 351 & (**) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3 = 27 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow u_1 = \frac{13}{1+q+q^2} = \frac{13}{1+3+9} = 1$.

$$7). \begin{cases} 8u_2 + 5\sqrt{5}u_5 = 0 \\ u_1^3 + u_3^3 = 189 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1q - 5\sqrt{5}u_1q^4 = 0 \\ u_1^3 + (u_1q^2)^3 = 189 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 5\sqrt{5}q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1^3(1+q^6) = 189 \Rightarrow u_1^3 = \frac{189}{1+q^6} = 125 \Rightarrow u_1 = 5 \end{cases}$$

$$8). \begin{cases} u_1u_2u_3 = 1728 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot u_1 \cdot q \cdot u_1 \cdot q^2 = 1728 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1q)^3 = 12^3 \\ u_1(1+q+q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 12 \\ u_1(1+q+q^2) = 63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ \frac{12}{q}(1+q+q^2) = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{12}{q} \\ 12q^2 - 51q + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 4 \Rightarrow u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{4} \Rightarrow u_1 = 48 \end{cases}$$

$$9). \begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 + u_3^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^2) = 3 \\ u_2(1+q^4) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q^2)^2 = 9 & (*) \\ u_1^2(1+q^4) = 5 & (**) \end{cases}$$

Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{(1+q^2)^2}{1+q^4} = \frac{9}{5}$. Đặt: $t = q^2, t \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 5(1+t)^2 = 9(1+t^2) \Leftrightarrow 4t^2 - 10t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{1}{2}$$

Với $t = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$

• $q = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 1$ • $q = -\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 1$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\bullet q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 2 \quad \bullet q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3}{1+q^2} = 2.$$

$$10). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 7 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 7 \\ u_1^2 + (u_1 q)^2 + (u_1 q^2)^2 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 7 \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q+q^2)^2 = 49 \quad (*) \\ u_1^2(1+q^2+q^4) = 21 \quad (**) \end{cases}. \text{ Lấy } \frac{(*)}{(**)} \text{ được:}$$

$$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4} = \frac{49}{21} \Leftrightarrow 21(1+q^2+q^4+2q+2q^2+2q^3) = 49(1+q^2+q^4)$$

$$\Leftrightarrow 21(1+2q+3q^2+2q^3+q^4) = 49(1+q^2+q^4) \Leftrightarrow 28q^4 - 42q^3 - 14q^2 - 42q + 28 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2} - \frac{42q^3}{q^2} - \frac{14q^2}{q^2} - \frac{42q}{q^2} + \frac{28}{q^2} = 0 \Leftrightarrow 28q^2 - 42q - 14 - \frac{42}{q} + \frac{28}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 28\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 42\left(q + \frac{1}{q}\right) - 14 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt: } t = q + \frac{1}{q} \Rightarrow t^2 = \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2 + \frac{1}{q^2} = t^2 - 2. \text{ Điều kiện: } |t| \geq 2$$

$$(2) \Leftrightarrow 28(t^2 - 2) - 42t - 14 = 0 \Leftrightarrow 28t^2 - 42t - 70 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -1 (\text{loại})$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\bullet q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 1 \quad \bullet q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{7}{1+q+q^2} = 4$$

Ví dụ 3: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

$$a) \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 u_2 u_3 = 64 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$$

Lời giải

$$a) \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 72 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 72 \quad (1) \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 144 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (2):(1) được: $q = 2$, thay $q = 2$ vào (1) được $u_1 = 12$

$$c) \begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 + u_1 q^4 = 90 \\ u_1 q - u_1 q^5 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^2 (1 + q^2) = 90 \quad (1) \\ u_1 q (1 - q^4) = 240 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \frac{u_1 q (1 - q^4)}{u_1 q^2 (1 + q^2)} = \frac{240}{90} \Leftrightarrow \frac{(1 - q^2)(1 + q^2)}{q(1 + q^2)} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{1 - q^2}{q} = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3q^2 + 8q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \vee q = -3$$

Với $q = \frac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1 = 729$.

Với $q = -3$ thay vào (1) được $u_1 = 1$.

$$d) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 u_2 u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 14 \\ u_1 u_1 q u_1 q^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 14 \quad (1) \\ (u_1 q)^3 = 64 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow u_1 q = 4 \Rightarrow u_1 = \frac{4}{q}, \text{ thay vào (1) được } \frac{4}{q} (1 + q + q^2) = 14$$

$$\Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 2$. Với $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 8$.

$$e) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_1 q} + \frac{1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 (1 + q + q^2) = 21 \quad (1) \\ \frac{q^2 + q + 1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow 1 + q + q^2 = \frac{21}{u_1}, \text{ thay vào (2): } \frac{21}{u_1} \cdot \frac{1}{u_1 q^2} = \frac{7}{12} \Leftrightarrow (u_1 q)^2 = 36 \Leftrightarrow u_1 q = \pm 6$$

$$\text{Với } u_1 = \frac{6}{q} \text{ thay vào (1): } \frac{6}{q} (1 + q + q^2) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

Nếu $q = 2 \Rightarrow u_1 = 3$. Nếu $q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 12$

Với $u_1 = -\frac{6}{q}$ thay vào (1):

$$-\frac{6}{q} (1 + q + q^2) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 + 9q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{-9 + \sqrt{65}}{4} \vee q = \frac{-9 - \sqrt{65}}{4}$$

$$\text{Nếu } q = \frac{-9+\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \frac{27+3\sqrt{65}}{2}. \text{ Nếu } q = \frac{-9-\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \frac{27-3\sqrt{65}}{2}$$

$$f) \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 = 30 \\ u_1^2 + u_1^2q^2 + u_1^2q^4 + u_1^2q^6 = 340 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2+q^3) = 30 \\ u_1^2(1+q^2+q^4+q^6) = 340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q)(1+q^2) = 30 \\ u_1^2(1+q^4)(1+q^2) = 340 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1+q)^2(1+q^2)^2 = 900 & (1) \\ u_1^2(1+q^4)(1+q^2) = 340 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2(1+q^2)}{1+q^4} = \frac{45}{17}, \text{ quy đồng rút gọn được: } 14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14q^2 - 17q - 17 - \frac{17}{q} + \frac{14}{q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 14\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 17\left(q + \frac{1}{q}\right) - 17 = 0. \text{ Đặt } t = q + \frac{1}{q}, \text{ điều kiện } |t| \geq 2$$

$$\Leftrightarrow 14t^2 - 17t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \vee t = -\frac{9}{7} \text{ (loại)}.$$

$$\text{Với } t = \frac{5}{2} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } q = 2 \Rightarrow u_1 = 2. \text{ Với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 16$$

Ví dụ 4: Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

$$\text{Theo đề bài ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 1+b=2a \\ b^2=a^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b=2a(1) \\ b=\pm a^2 \end{cases}$$

$$\text{Với } b=a^2 \text{ thay vào (1) được } 1+a^2=2a \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=1$$

$$\text{Với } b=-a^2 \text{ thay vào (1) được } 1-a^2=2a \Leftrightarrow a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow a=-1+\sqrt{2} \vee a=-1-\sqrt{2}$$

$$\bullet a=-1+\sqrt{2} \Rightarrow b=-(-1+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow b=-3+2\sqrt{2}$$

$$\bullet a=-1-\sqrt{2} \Rightarrow b=-(-1-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow b=-3-2\sqrt{2}$$

$$\text{Kết luận } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1+\sqrt{2} \\ b=-3+2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=-1-\sqrt{2} \\ b=-3-2\sqrt{2} \end{cases} \text{ thỏa yêu cầu đề bài.}$$

Ví dụ 5: Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

Lời giải

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} S_n = 728 \\ u_n = 486 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = 728 \\ u_1q^{n-1} = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q^n = 728(1-q) \\ u_1q^n = 486q \end{cases} \Rightarrow u_1 - 486q = 728(1-q) \Leftrightarrow u_1 = 2$$

Ví dụ 6: Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1, u_2, u_3 thành lập cấp số cộng.

Theo đề bài: $u_1 + 2; u_2 + 3; u_3 + 9$ là ba số liên tiếp tạo thành cấp số nhân.

$$\text{Theo đề bài: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \\ (u_1 + 2)(u_3 + 9) = (u_2 + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 21 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \\ (u_1 + 2)(u_3 + 9) = (u_2 + 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2 = 7 \\ u_1 = 14 - u_3 \\ (14 - u_3 + 2)(u_3 + 9) = 100 \quad (*) \end{cases}$$

$$\text{Giải } (*): (16 - u_3)(u_3 + 9) = 100 \Leftrightarrow -u_3^2 + 7u_3 + 44 = 0 \Leftrightarrow u_3 = 11 \vee u_3 = -4$$

Với $u_3 = 11 \Rightarrow u_1 = 3$. Với $u_3 = -4 \Rightarrow u_1 = 18$.

Ví dụ 7: Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1, u_2, u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1 - 1; u_3 - 19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 1 + u_3 - 19 = 2u_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 65 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 65 \\ u_1 - 2u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 65 \quad (1) \\ u_1(1 - 2q + q^2) = 20 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy } \frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = \frac{65}{20} = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 4(1+q+q^2) = 13(1-2q+q^2)$$

$$\Leftrightarrow 9q^2 - 30q + 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \quad \vee \quad q = \frac{1}{3}$$

Vì u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q = 3 \Rightarrow u_1 = 5$

Vậy $u_1 = 5; u_2 = 15; u_3 = 45$.

Ví dụ 8: Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1, u_2, u_3 với công bội là q . Theo đề bài ta có

$$\text{hệ phương trình: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 19 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 19 \\ (u_1 q)^3 = 6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 19 \quad (*) \\ u_1 q = 6 \Rightarrow u_1 = \frac{6}{q} \end{cases}$$

Thay $u_1 = \frac{6}{q}$ vào (*) được: $6q^2 - 13q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{3}{2}$ hoặc $q = \frac{2}{3}$.

Với $q = \frac{3}{2} \Rightarrow u_1 = 4, u_2 = 6, u_3 = 9$.

Với $q = \frac{2}{3} \Rightarrow u_1 = 9, u_2 = 6, u_3 = 4$.

Ví dụ 9: Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Lời giải

$$\text{Theo đề bài ta có } \begin{cases} S_n = 889 \\ u_n = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = 889 \\ u_1 q^{n-1} = 448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^n - u_1 = 889(q - 1) \quad (1) \\ u_1 q^n = 448q \quad (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) được: $448q - 7 = 889q - 889 \Leftrightarrow q = 2$

Ví dụ 10: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 - u_2 = 35 \\ u_3 - u_4 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q = 35 \\ u_1 q^2 - u_1 q^3 = 560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q) = 35 \quad (1) \\ u_1 q^2(1 - q) = 560 \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 4$

Với $q = 4$ thay vào (1) được $u_1 = -\frac{35}{3}, u_2 = u_1 q = -\frac{140}{3}, u_3 = -\frac{560}{3}, u_4 = -\frac{2240}{3}$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 11: Tìm các số dương a và b sao cho $a, a + 2b, 2a + b$ lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2, ab + 5, (a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo tính chất của CSC ta có: $a + (2a + b) = 2(a + 2b)$ (1)

Theo tính chất của CSN ta có: $(b + 1)^2(a + 1)^2 = (ab + 5)^2$ (2)

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a = 3b$, thay vào (2):

$$(b + 1)^2(3b + 1)^2 = (3b^2 + 5)^2 \Leftrightarrow (b + 1)(3b + 1) = \pm(3b^2 + 5)$$

Với $(b + 1)(3b + 1) = 3b^2 + 5 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$

Với $(b + 1)(3b + 1) = -3b^2 - 5 \Leftrightarrow 6b^2 + 4b + 6 = 0$ (vô nghiệm).

Kết luận $a = 3, b = 1$

Ví dụ 12: Tính các tổng sau:

a). $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

b). $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

c). $S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots6}_{n \text{ số } 6}$

Lời giải

a). Ta có dãy số $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu

$u_1 = 2$ và công bội $q = \frac{2^2}{2} = 2$. Do đó $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2(2^n - 1)$.

b). Ta có dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu

$u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. Do đó $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

$$\begin{aligned} \text{c). } S_n &= \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2 \\ &= 3^2 + 2 + \frac{1}{3^2} + 3^4 + 2 + \frac{1}{3^4} + \dots + 3^{2n} + 2 + \frac{1}{3^{2n}} \\ &= (3^2 + 3^4 + \dots + 3^{2n}) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}\right) + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_n \end{aligned}$$

• Có dãy số $3^2, 3^4, \dots, 3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 3^2$ và công bội $q = \frac{3^4}{3^2} = 9$. Do đó $S_1 = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 9 \cdot \frac{1-9^n}{1-9} = \frac{9}{8}(9^n - 1)$.

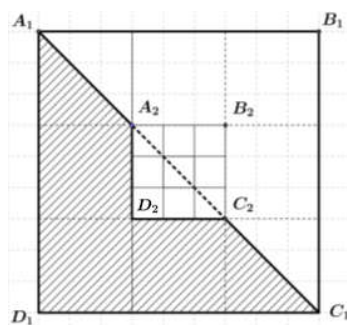
• Có dãy số $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^4}, \dots, \frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3^2}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$. Do đó $S_1 = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1-\frac{1}{9^n}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{9^n}\right) = \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n}$.

$$\text{Vậy } S_n = \frac{9}{8}(9^n - 1) + \frac{9^n - 1}{8 \cdot 9^n} + 2n = \frac{(9^n - 1)(9^{n+1} + 1)}{8 \cdot 9^n} + 2n.$$

$$\begin{aligned} \text{d). } S_n &= 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots6}_{n \text{ số } 6} = \frac{6}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_n \right) \\ &= \frac{2}{3} \left[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots + (10^n - 1) \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n \right] = \frac{2}{3} \left[10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n \right] = \frac{20}{27} (10^n - 1) - \frac{2n}{3} \end{aligned}$$

Dạng 3. Các bài toán thực tế

Câu 1. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu “đẹp”. Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



Bước 1: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu “đẹp” cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm 49,99%.

Lời giải

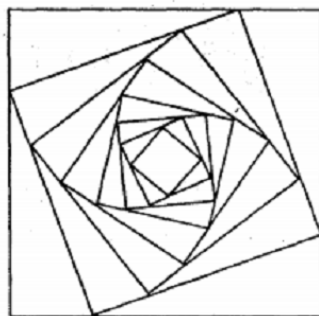
Gọi diện tích được tô màu ở mỗi bước là u_n , $n \in \mathbb{N}^*$. Để thấy dãy các giá trị u_n là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{4}{9}$ và công bội $q = \frac{1}{9}$.

Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu trong cấp số nhân đang xét thì $S_k = \frac{u_1(q^k - 1)}{q - 1}$.

Để tổng diện tích phần được tô màu chiếm 49,99% thì $\frac{u_1(q^k - 1)}{q - 1} \geq 0,4999 \Leftrightarrow k \geq 3,8$.

Vậy cần ít nhất 4 bước.

Câu 2. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2) (Hình vẽ).



Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1, 2, 3, \dots\}$). Đặt

$T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$. Biết $T = \frac{32}{3}$, tính a ?

Lời giải

Cạnh của hình vuông (C_2) là: $a_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó diện tích $S_2 = \frac{5}{8}a^2 = \frac{5}{8}S_1$.

Cạnh của hình vuông (C_3) là: $a_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a_2\right)^2} = \frac{a_2\sqrt{10}}{4} = a\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$. Do đó diện

tích $S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 a^2 = \frac{5}{8}S_2$. Lý luận tương tự ta có các $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ tạo thành một dãy

cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = S_1$ và công bội $q = \frac{5}{8}$.

$$T = \frac{S_1}{1-q} = \frac{8a^2}{3}. \text{ Với } T = \frac{32}{3} \text{ ta có } a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Vì sao?

a) $5; -0,5; 0,05; -0,005; 0,0005$

b) $-9, 3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9};$

c) $2, 8, 32, 64, 256.$

Lời giải

a) Từ số hạng thứ hai của dãy số ta thấy số hạng sau gấp $-\frac{1}{10}$ lần số hạng trước của dãy.

Vì vậy dãy trên là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -0,5$.

b) Từ số hạng thứ hai của dãy số ta thấy số hạng sau gấp $-\frac{1}{3}$ số hạng trước của dãy.

Vì vậy dãy trên là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -9$ và công bội $q = -\frac{1}{3}$.

c) Ta có: $\frac{8}{2} = \frac{32}{8} = \frac{256}{64} \neq \frac{64}{32}$

Vì vậy dãy trên không là cấp số nhân.

Bài 2. Chứng minh mỗi dãy số (u_n) với số hạng tổng quát như sau là cấp số nhân:

a) $u_n = \frac{-3}{4} \cdot 2^n$

b) $u_n = \frac{5}{3^n}$

c)

$u_n = (-0,75)^n$

Lời giải

a) Ta có: $u_{n+1} = -\frac{3}{4} \cdot 2^{n+1}$

$$\text{Xét } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(-\frac{3}{4} \cdot 2^{n+1}\right) : \left(-\frac{3}{4} \cdot 2^n\right) = 2$$

Vì vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân.

b) Ta có: $u_{n+1} = \frac{5}{3^{n+1}}$

$$\text{Xét } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5}{3^{n+1}} : \frac{5}{3^n} = \frac{1}{3}.$$

Vì vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân.

c) Ta có: $u_{n+1} = (-0,75)^{n+1}.$

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = (-0,75)^{n+1} : (-0,75)^n = -0,75$.

Vì vậy dãy số đã cho là một cấp số nhân.

Bài 3. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) Tìm u_9 .

b) Số -320 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân trên?

c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

Lời giải

a) Ta có u_n là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công bội $q = 2$ có số hạng tổng quát là:

$$u_n = -5 \cdot 2^{n-1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

b) Xét $u_n = -5 \cdot 2^{n-1} = -320$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 64$$

$$\Leftrightarrow n-1 = 6$$

$$\Leftrightarrow n = 7.$$

Vậy số -320 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

c) Xét $u_n = -5 \cdot 2^{n-1} = 160$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = -32$$

$$\Leftrightarrow n-1 = -5$$

$$\Leftrightarrow n = -4 \notin \mathbb{N}^*$$

Vậy số 160 không phải là một số hạng của cấp số nhân.

Bài 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, u_3 = \frac{27}{4}$.

a) Tìm công bội q và viết năm số hạng đầu của cấp số nhân trên.

b) Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân trên.

Lời giải

a) Ta có $u_3 = u_1 \cdot q^2$

$$\text{Xét } q^2 = \frac{u_3}{u_1} = \frac{27}{3} = \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} q = -\frac{3}{2} \\ q = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

+) Với $q = -\frac{3}{2}$ ta có năm số hạng đầu của cấp số nhân là:

$$u_1 = 3; \quad u_3 = \frac{27}{4}; \quad u_5 = 3 \left(-\frac{3}{2} \right)^4 = \frac{243}{16}$$

$$u_2 = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{9}{2}; \quad u_4 = 3 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right)^3 = -\frac{81}{8};$$

+) Với $q = \frac{3}{2}$ ta có năm số hạng đầu của cấp số nhân là:

$$u_1 = 3; \quad u_3 = \frac{27}{4}; \quad u_5 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{243}{16}.$$

$$u_2 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}; \quad u_4 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{81}{8};$$

b) Tổng của 10 số hạng đầu của cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = -\frac{3}{2}$ là:

$$S_{10} = \frac{3 \left(1 - \left(-\frac{3}{2} \right)^{10} \right)}{1 - \left(-\frac{3}{2} \right)} \approx -68.$$

Tổng của 10 số hạng đầu của cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = \frac{3}{2}$ là:

$$S_{10} = \frac{3 \left(1 - \left(\frac{3}{2} \right)^{10} \right)}{1 - \left(\frac{3}{2} \right)} \approx 340.$$

Bài 5. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1% / năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Ta có dãy u_n lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_0 = 2$ triệu dân và công sai $q = 1\%$.

Khi đó số hạng tổng quát của $u_n = 2 \cdot (1 + 1\%)^{n-1}$ (triệu dân).

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là:

$$u_{10} = 2 \cdot (1 + 1\%)^{10-1} \approx 2,19 \text{ (triệu dân)}.$$

Bài 6. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

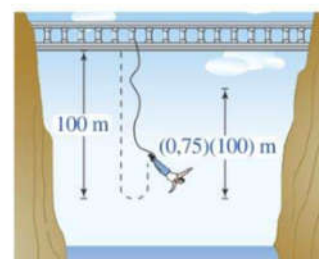
a) Sau 1 năm giá trị của ô tô còn lại là: $u_1 = 800 - 800 \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%) = 768$ (triệu đồng).

Sau 2 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_2 = 800 \cdot (1 - 4\%) - 800 \cdot (1 - 4\%) \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%)^2 = 737,28 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Gọi u_n là giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

Dãy số u_n tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là giá trị đầu của ô tô là $u_0 = 800$ triệu đồng và công bội $q = 1 - 4\%$.



Hình 3

Khi đó công thức tổng quát để tính $u_n = 800 \cdot (1 - 4\%)^n$.

c) Sau 10 năm sử dụng giá trị của ô tô còn lại là: $u_{10} = 800 \cdot (1 - 4\%)^{10} \approx 531,87$ (triệu đồng).

Bài 7. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.

Lời giải

Gọi u_n là độ dài dây kéo sau n lần rơi xuống ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có: $u_0 = 100$ (m).

Sau lần rơi đầu tiên độ dài dây kéo còn lại là: $u_1 = 100 \cdot 75\%$ (m).

Sau cú nhảy tiếp theo độ dài dây kéo còn lại là: $u_2 = 100 \cdot 75\% \cdot 75\% = 100 \cdot (75\%)^2$ (m).

...

Dãy số này lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là 100 và công bội $q = 0,75\%$, có công thức tổng quát $u_n = 100 \cdot (0,75\%)^{n-1}$ (m).

Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống là:

$$S_{10} = \frac{100(1 - (75\%)^{10})}{1 - 75\%} \approx 377,5 \text{ (m)}.$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

A. 2; 4; 8; 16; ...

B. 1; -1; 1; -1; ...

C. 1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2 ; ...

D. a ; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$).

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án C: 1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2 ; ... $\longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{9}{4} = \frac{u_3}{u_2}$

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

Nhận xét: Dãy (u_n) với $u_n \neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = a \cdot q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ

2; 4; 8; 16; ... $\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = 2^n$.

1; -1; 1; -1; ... $\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = (-1)^n$.

a ; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$) $\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = a^{2n-1} = \frac{1}{a} \cdot (a^2)^n$.

Câu 2: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. 1; 2; 4; 8; ... B. 3; 3²; 3³; 3⁴; ... C. 4; 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... D. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ...

Lời giải

Chọn D

Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là 2; 3; $\frac{1}{2}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ... $\longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} = \frac{u_3}{u_2}$

Câu 3: Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với:

- A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.
B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.
D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân: 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... $\longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \frac{u_2}{u_1} = 2 \end{cases}$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- A. -2; 10; 50; -250. B. -2; 10; -50; 250.
C. -2; -10; -50; -250. D. -2; 10; 50; 250.

Lời giải.

Chọn B

$\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250 \end{cases}$

Câu 5: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

- A. 720. B. 81. C. 64. D. 56.

Lời giải

Chọn B

Ta có cấp số nhân (u_n) có:

$$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4} \longrightarrow u_{k+2} = u_{k+1} q = 81$$

Câu 6: Tìm x để các số 2; 8; x ; 128 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14$.

B. $x = 32$.

C. $x = 64$.

D. $x = 68$.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân 2; 8; x ; 128 theo thứ tự đó sẽ là $u_1; u_2; u_3; u_4$, ta có

$$\begin{cases} \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \\ \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8}{2} = \frac{x}{8} \\ \frac{128}{x} = \frac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x^2 = 1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x = 32 \\ x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow x = 32$$

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1$; x ; $2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $x = \pm \frac{1}{3}$.

C. $x = \pm \sqrt{3}$.

D. $x = \pm 3$.

Lời giải

Chọn A

Cấp số nhân $2x-1$; x ; $2x+1 \longrightarrow (2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 8: Tìm x để ba số $1+x$; $9+x$; $33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 1$.

B. $x = 3$.

C. $x = 7$.

D. $x = 3$; $x = 7$.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân $1+x$; $9+x$; $33+x \longrightarrow (1+x)(33+x) = (9+x)^2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 9: Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là -2 ; x ; -18 ; y theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x = 6 \\ y = -54 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -10 \\ y = -26 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -6 \\ y = -54 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -6 \\ y = 54 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Cấp số nhân: -2 ; x ; -18 ; $y \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{-18}{x} \\ \frac{-18}{x} = \frac{y}{-18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 6 \\ y = \frac{324}{x} = \pm 54 \end{cases}$. Vậy

$(x; y) = (6; 54)$ hoặc $(x; y) = (-6; -54)$

Câu 10: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là x ; 12; y ; 192. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x = 1$; $y = 144$.

B. $x = 2$; $y = 72$.

C. $x = 3$; $y = 48$.

D. $x = 4$; $y = 36$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Cấp số nhân: } x; 12; y; 192 \longrightarrow \begin{cases} \frac{12}{x} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{12} = \frac{192}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{144}{y} \\ y^2 = 2304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 48 \end{cases}.$$

Câu 11: Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số 5; x ; y ; 320 theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\begin{cases} x = 25 \\ y = 125 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 15 \\ y = 45 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 30 \\ y = 90 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Cấp số nhân: } 5; x; y; 320 \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ q = \frac{x}{5} \\ y = u_3 = u_1 q^2 = \frac{x^2}{5} \\ 320 = u_4 = u_1 q^3 = \frac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 80 \end{cases}.$$

Câu 12: Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6$; x và y . Tìm y , biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

- A. $y = 216$. B. $y = \frac{324}{5}$. C. $y = \frac{1296}{5}$. D. $y = 12$.

Lời giải

Chọn C

Cấp số nhân $x-6$; x và y có công bội $q=6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1 = x-6, q = 6 \\ x = u_2 = u_1 q = 6(x-6) \\ y = u_3 = u_2 q^2 = 36x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{5} \\ y = 36 \cdot \frac{36}{5} = \frac{1296}{5} \end{cases}$$

Câu 13: Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

- A. $2x-1$. B. $2x+1$. C. $8x^3-4x^2-2x+1$. D. $8x^3+4x^2-2x-1$.

Lời giải

Chọn C

Công bội của cấp số nhân là: $q = \frac{4x^2-1}{2x+1} = 2x-1$. Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

$$(4x^2-1)(2x-1) = 8x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$

Câu 14: Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = qu_n$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Lời giải

Chọn C

$u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$ là cấp số nhân công bội $q = 5$ và $u_1 = \frac{15}{2}$

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$

B. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$

C. $u_n = n + \frac{1}{3}$

D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn A

Dãy $u_n = \frac{1}{3^{n-2}} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$

B. $u_n = 7 - 3^n$

C. $u_n = \frac{7}{3n}$

D. $u_n = 7 \cdot 3^n$

Lời giải

Chọn D

Dãy $u_n = 7 \cdot 3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 = 21 \\ q = 3 \end{cases}$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. $u_1; u_3; u_5; \dots$ B. $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$
C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ D. $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$

Lời giải

Chọn D

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q , thì

Dãy $u_1; u_3; u_5; \dots$ là cấp số nhân công bội q^2 .

Dãy $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$ là cấp số nhân công bội $2q$.

Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$ không phải là cấp số nhân.

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số nhân cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = 2^n$.

Câu 19: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 3; 9; 27; 81; Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

- A. $u_n = 3^{n-1}$. B. $u_n = 3^n$. C. $u_n = 3^{n+1}$. D. $u_n = 3 + 3^n$.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân 3; 9; 27; 81; ... $\longrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \frac{9}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Câu 20: Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

- A. $q = 3$. B. $q = -3$. C. $q = 2$. D. $q = -2$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_6 = 486 \end{cases} \longrightarrow 486 = u_6 = u_1 q^5 = 2q^5 \Leftrightarrow q^5 = 243 \Leftrightarrow q = 3$.

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $u_5 = -\frac{27}{16}$. B. $u_5 = -\frac{16}{27}$. C. $u_5 = \frac{16}{27}$. D. $u_5 = \frac{27}{16}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = \frac{2}{3} \end{cases} \longrightarrow u_5 = u_1 q^4 = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = -3 \cdot \frac{16}{81} = -\frac{16}{27}.$$

Câu 22: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$ và $u_2 = -8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $S_6 = 130$. **B.** $u_5 = 256$. **C.** $S_5 = 256$. **D.** $q = -4$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = -8 = u_1 q = 2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -4 \\ S_5 = u_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-(-4)^5}{1+4} = 410 \\ S_6 = 2 \cdot \frac{1-(-4)^6}{1+4} = -1638 \\ u_5 = u_1 q^4 = 2 \cdot (-4)^4 = 512. \end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A.** Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.
C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải

Chọn C

$$192 = u_n = u_1 q^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 64 = (-1)^6 \cdot 2^6 \Leftrightarrow n = 7.$$

Câu 24: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A.** Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.
C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{1}{10^{103}} = u_n = u_1 q^{n-1} = -1 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ chẵn} \\ n-1 = 103 \end{cases} \Leftrightarrow n = 104.$$

Câu 25: Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

- A.** 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$32805 = u_n = u_1 q^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Leftrightarrow n = 9$. Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $q = \frac{1}{9}$. B. $q = 9$. C. $q = -9$. D. $q = -\frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Công bội $q = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$

Câu 27: Một dãy số được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}$, $n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

- A. $u_n = 2^{n-1}$. B. $u_n = (-2)^{n-1}$. C. $u_n = -4(2^{-n+1})$. D. $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} u_1 = -4 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

- A. $S_{10} = -511$. B. $S_{10} = -1025$. C. $S_{10} = 1025$. D. $S_{10} = 1023$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ q = -2 \end{cases} \longrightarrow S_{10} = u_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = -3 \cdot \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = 1023.$$

Câu 29: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ... Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S_n = 4^{n-1}$. B. $S_n = \frac{n(1+4^{n-1})}{2}$. C. $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$. D. $S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 4 \end{cases} \longrightarrow S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n-1}{3}$.

Câu 30: Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

- A. $u_6 = 32$. B. $u_6 = 104$. C. $u_6 = 48$. D. $u_6 = 96$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết: $\begin{cases} q = 2 \\ S_6 = 189 = u_1 \frac{1-q^6}{1-q} = u_1 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow u_6 = u_1 q^5 = 3 \cdot 2^5 = 96$.

Câu 31: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n .

- A. $n = 9$. B. $n = 10$. C. $n = 11$. D. $n = 12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2046 = S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = -6 \cdot \frac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 2((-2)^n - 1) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10$.

Câu 32: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

- A. $u_4 = 100$. B. $u_4 = 124$. C. $u_4 = 500$. D. $u_4 = 624$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_1}{q-1}(q^n - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q-1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5 \end{cases}$. Khi đó

$$u_4 = u_1 q^3 = 4 \cdot 5^3 = 500$$

Câu 33: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

- A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$. B. $u_5 = \frac{1}{3^5}$. C. $u_5 = 3^5$. D. $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{3^n - 1}{3^{n-1}} = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) = S_n = \frac{u_1}{1-q} (1-q^n) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3(1-q) \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó

$$u_5 = u_1 q^4 = \frac{2}{3^4}$$

Câu 34: Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

- A. 4096. B. 2048. C. 1024. D. $\frac{1}{512}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} q = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} = u_7 = u_1 q^6 = \frac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \frac{4^6}{2} = 2048$$

Câu 35: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.

- A. $q = -3$. B. $q = -\frac{1}{3}$. C. $q = \frac{1}{3}$. D. $q = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} -6 = u_2 = u_1 q \\ -486 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q \cdot q^4 = -6 \cdot q^4 \end{cases} \Rightarrow q^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow q = 3.$$

Câu 36: Cho cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; \dots$ với $u_1 = 1$. Tìm công bội q để $4u_2 + 5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $q = -\frac{2}{5}$. B. $q = 0$. C. $q = \frac{2}{5}$. D. $q = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 4u_2 + 5u_3 = 4u_1 q + 5u_1 q^2 = 5q^2 + 4q = 5\left(q + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} \geq -\frac{4}{5}. \text{ Vậy}$$

$$\min(4u_2 + 5u_3) = -\frac{4}{5} \text{ khi } q = -\frac{2}{5}$$

Câu 37: Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = 2^{n-1}$. B. $u_n = 2^n$ C. $u_n = 2^{n+1}$. D. $u_n = 2n$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} 4 = u_2 = u_1 q \\ 64 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q \cdot q^4 = 4q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Câu 38: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$. **B.** $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$. **C.** $u_k = \sqrt{u_{k+1} \cdot u_{k+2}}$. **D.** $u_k = u_1 + (k-1)q$.

Lời giải

Chọn A

Câu 39: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7 = u_4 \cdot q^3$. **B.** $u_7 = u_4 \cdot q^4$. **C.** $u_7 = u_4 \cdot q^5$. **D.** $u_7 = u_4 \cdot q^6$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u_4 = u_1 q^3 \\ u_7 = u_1 q^6 \end{cases} \longrightarrow u_7 = (u_1 q^3) \cdot q^3 = u_4 q^3$$

Câu 40: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Với $1 < k < m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m = u_k \cdot q^k$. **B.** $u_m = u_k \cdot q^m$. **C.** $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$. **D.** $u_m = u_k \cdot q^{m+k}$.

Lời giải

Chọn C

$$u_k = u_1 q^{k-1} \longrightarrow u_m = u_1 q^{m-1} = (u_1 q^{k-1}) \cdot q^{m-k} = u_k q^{m-k}$$

Câu 41: Cho một cấp số nhân có n số hạng ($n > k > 55$). Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $u_1 \cdot u_n = u_2 \cdot u_{n-1}$. **B.** $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-4}$. **C.** $u_1 \cdot u_n = u_{55} \cdot u_{n-55}$. **D.** $u_1 \cdot u_n = u_k \cdot u_{n-k+1}$.

Lời giải

Chọn C

$$u_1 u_n = u_1 u_1 q^{n-1} = (u_1 q^{k-1}) \cdot (u_1 q^{m-1}) = u_k u_m \text{ với } k+m=n+1.$$

Câu 42: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) , biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} 192 = u_6 = u_1 q^5 \\ 384 = u_7 = u_1 q^6 = (u_1 q^5) q = 192q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{192}{q^5} = 6 \end{cases}$$

Câu 43: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} 36 = u_4 - u_2 = u_1 q (q^2 - 1) \\ 72 = u_5 - u_3 = u_1 q^2 (q^2 - 1) = [u_1 q (q^2 - 1)] q = 36q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \frac{36}{q(q^2 - 1)} = 6 \end{cases}$$

Câu 44: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$.

B. $q = -4$.

C. $q = 4$.

D. $q = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1 (1 + q^4) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 = \frac{272}{1 + q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}$$

Câu 45: Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$.

Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} u_1, \\ u_2 > 0 \\ u_1 u_3 = 1 \\ u_3 u_5 = \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0, \\ q > 0 \\ u_1^2 q^2 = 1 \\ \frac{1}{16} = u_1^2 q^6 = (u_1^2 q^2) q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ u_1 = \frac{1}{q} = 2 \end{cases}$$

Câu 46: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} \right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$.

A. $P = 24$.

B. $P = 29$.

C. $P = 34$.

D. $P = 39$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Nếu u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là một cấp số nhân với công bội q thì $\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}, \frac{1}{u_4}, \frac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\frac{1}{q}$.

$$\text{Do đó từ giả thiết ta có } \begin{cases} u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = 49 \left(\frac{1}{u_1} \cdot \frac{\frac{1}{q^5} - 1}{\frac{1}{q} - 1} \right) & (1) \\ u_1 + u_1 q^2 = 35 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow u_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1} = \frac{49}{u_1} \left(\frac{q^5 - 1}{q^4 (q - 1)} \right) \Leftrightarrow u_1^2 q^4 = 49 \Leftrightarrow u_1 q^2 = \pm 7.$$

Với $u_1 q^2 = -7$. Thay vào (2), ta được $u_1 - 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 42$. Suy ra $q^2 = -\frac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1 q^2 = 7$. Thay vào (2), ta được $u_1 + 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 28$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $u_1 + 4q^2 = 29$.

Câu 47: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

A. $q = \frac{5}{4}$.

B. $q = 4$.

C. $q = \frac{4}{3}$.

D. $q = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2) = 26 \\ u_1^2(1 + q^2 + q^4) = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2(1 + q + q^2)^2 = 26^2 & (1) \\ u_1^2(1 + q^2 + q^4) = 364 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2), ta

$$\text{được } \frac{(1 + q + q^2)^2}{1 + q^2 + q^4} = \frac{26^2}{364} \Leftrightarrow 3q^4 - 7q^3 - 4q^2 - 7q + 3 = 0 \Leftrightarrow 3\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 7\left(q + \frac{1}{q}\right) - 4 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = q + \frac{1}{q}, |t| \geq 2. \text{ Phương trình trở thành } 3t^2 - 7t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = -\frac{10}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = -\frac{10}{3}, \text{ suy ra } q + \frac{1}{q} = -\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \text{ hoặc } q = \frac{1}{3}. \text{ Vì } q > 1 \text{ nên } q = 3.$$

Câu 48: Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1, y + 2, x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

A. $x^2 + y^2 = 40$.

B. $x^2 + y^2 = 25$.

C. $x^2 + y^2 = 100$.

D. $x^2 + y^2 = 10$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có
$$\begin{cases} (x+6y) + (8x+y) = 2(5x+2y) \\ (x-1)(x-3y) = (y+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ (3y-1)(3y-3y) = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 0 = (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Suy ra $x^2 + y^2 = 40$.

Câu 49: Ba số $x; y; z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x; 2y; 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q .

A. $q = \frac{1}{3}$.

B. $q = \frac{1}{9}$.

C. $q = -\frac{1}{3}$.

D. $q = -3$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} y = xq; z = xq^2 \\ x + 3z = 2(2y) \end{cases} \Rightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Rightarrow x(3q^2 - 4q + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3q^2 - 4q + 1 = 0 \end{cases}.$$

Nếu $x = 0 \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: $x; 2y; 3z$ bằng 0 (vô lí).

$$\text{Nếu } 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow q = \frac{1}{3} \quad (q \neq 1).$$

Câu 50: Cho dãy số tăng a, b, c ($c \in \mathbb{Z}$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a, b+8, c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a, b+8, c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P = a - b + 2c$.

A. $P = \frac{184}{9}$.

B. $P = 64$.

C. $P = \frac{92}{9}$.

D. $P = 32$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} ac = b^2 \\ a + c = 2(b+8) \\ a(c+64) = (b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = b^2 & (1) \\ a - 2b = 16 - c & (2) \\ ac + 64a = (b+8)^2 & (3) \end{cases}.$$

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2 + 64a = b^2 + 16b + 64 \Leftrightarrow 4a - b = 4$ (4).

Kết hợp (2) với (4) ta được:
$$\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{c-8}{7} \\ b=\frac{4c-60}{7} \end{cases} \quad (5)$$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c = (4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2 - 424c + 3600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=36 \\ c=\frac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow c=36 \quad (c \in \mathbb{Z}).$$

Với $c=36 \Rightarrow a=4, b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64$.

Câu 51: Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q . Tìm q .

- A. $q=2$. B. $q=-2$. C. $q=-\frac{3}{2}$. D. $q=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử ba số hạng $a; b; c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b; a; c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q . Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq; c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ q^2+q-2=0 \end{cases}.$$

Nếu $b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ nên $a; b; c$ là cấp số cộng công sai $d=0$ (vô lí).

Nếu $q^2+q-2=0 \Leftrightarrow q=1$ hoặc $q=-2$. Nếu $q=1 \Rightarrow a=b=c$ (vô lí), do đó $q=-2$.

Câu 52: Cho bốn số a, b, c, d biết rằng a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q > 1$; còn b, c, d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12$.

- A. $q=\frac{18+\sqrt{73}}{24}$. B. $q=\frac{19+\sqrt{73}}{24}$. C. $q=\frac{20+\sqrt{73}}{24}$. D. $q=\frac{21+\sqrt{73}}{24}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử a, b, c lập thành cấp số cộng công bội q . Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b=aq, c=aq^2 \\ b+d=2c \\ a+d=14 \\ b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq+d=2aq^2 & (1) \\ a+d=14 & (2) \\ a(q+q^2)=12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q=0 \Rightarrow b=c=0=d$ (vô lí)

Nếu $q=-1 \Rightarrow b=-a; c=a \Rightarrow b+c=0$ (vô lí).

Vậy $q \neq 0, q \neq -1$, từ (2) và (3) ta có: $d = 14 - a$ và $a = \frac{12}{q + q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{12q}{q + q^2} + \frac{14q^2 + 14q - 12}{q + q^2} = \frac{24q^3}{q + q^2} \Leftrightarrow 12q^3 - 7q^2 - 13q + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (q + 1)(12q^2 - 19q + 6) = 0 \Leftrightarrow q = \frac{19 \pm \sqrt{73}}{24}$$

Vì $q > 1$ nên $q = \frac{19 + \sqrt{73}}{24}$.

Câu 53: Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \frac{10^n - 1}{81}$.

B. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right)$.

C. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right) - n$.

D. $S = \frac{1}{9} \left[10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S = \frac{1}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots 9}_{\text{n số 9}} \right) = \frac{1}{9} \left[10 \cdot \frac{1 - 10^n}{1 - 10} - n \right]$.

Câu 54: Biết rằng $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 3$.

D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3S = 3 + 2.3^2 + 3.3^3 + \dots + 11.3^{11}$. Do đó

$$-2S = S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} - 10.3^{11} = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} - 10.3^{11} = -\frac{1}{2} - \frac{21.3^{11}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{21}{4}.3^{11}.$$

Vì $S = \frac{1}{4} + \frac{21.3^{11}}{4} = a + \frac{21.3^b}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 11 \longrightarrow P = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} = 3$.

Câu 55: Một cấp số nhân có ba số hạng là a, b, c (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{bc}$.

B. $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$.

C. $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ba}$.

D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $ac = b^2 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$

Câu 56: Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. 56° .

B. 102° .

C. 252° .

D. 168° .

Lời giải

Chọn C

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A < B < C < D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q . Ta có

$$\begin{cases} A+B+C+D=360 \\ D=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(1+q+q^2+q^3)=360 \\ Aq^3=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=3 \\ A=9 \\ D=Aq^3=243 \end{cases} \Rightarrow A+D=252.$$

Câu 57: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288\,m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$.

B. $8m^2$.

C. $10m^2$.

D. $12m^2$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$

và $u_1 = \frac{12288}{2} = 6144$. Khi đó diện tích mặt trên cùng là

$$u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6144}{2^{10}} = 6$$

Câu 58: Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn.

B. Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng.

D. Thua 40000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1-p^9)}{1-p} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot p^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20 000.

ÔN TẬP CHƯƠNG 2

PHẦN 1: GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_n = 3u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Số hạng thứ năm của dãy số (u_n) là:

- A. 27. B. 9. C. 81. D. 243.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 3$. Do đó dãy số (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$ và công

bội $q = 3$ nên ta có số hạng tổng quát là: $u_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1} = 3^{n-2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó số hạng thứ năm của dãy số (u_n) là: $u_5 = 3^{5-2} = 27$.

Bài 2: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. 21, -3, -27, -51, -75. B. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}$.
C. $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$. D. $\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{40}, \frac{1}{50}, \frac{1}{60}$.

Lời giải

Chọn A

Dãy số 21; -3; -27; -51; -75 lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 21$ và công sai $d = -24$.

Bài 3: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$, công sai $d = 4$. Công thức của số hạng tổng quát u_n là:

- A. $u_n = -5 + 4n$. B. $u_n = -1 - 4n$.
C. $u_n = -5 + 4n^2$. D. $u_n = -9 + 4n$.

Lời giải

Chọn D

Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng $u_n = -5 + (n-1)4 = 4n - 9$.

Bài 4: Tổng 100 số tự nhiên lẻ đầu tiên tính từ 1 là:

A. 10000.

B. 10100.

C. 20000.

D. 20200.

Lời giải

Chọn A

Các số tự nhiên lẻ lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$.

Do đó tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là:

$$S_{100} = \frac{100 \cdot (1 + 1 + 99 \cdot 2)}{2} = 10000.$$

Bài 5: Trong các dãy số (u_n) cho bằng phương pháp truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}(n-1)$ với mọi $n \geq 2$.

B. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = 2u_{n-1} + 1$ với mọi $n \geq 2$.

C. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_n = u_{n-1}^2$ với mọi $n \geq 2$.

D. Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Lời giải

Chọn D

Dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 3$ và $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 3$ và $q = \frac{1}{3}$.

Bài 6: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$, công bội $q = -\frac{1}{10}$. Khi đó $\frac{1}{10^{2017}}$ là số hạng thứ:

A. 2016.

B. 2017.

C. 2018.

D. 2019

Lời giải

Chọn C

Số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

$$\text{Xét } u_n = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{1}{10^{2017}}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{10}\right)^{2017}$$

$$\Leftrightarrow n-1 = 2017$$

$$\Leftrightarrow n = 2018.$$

Bài 7: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \sin n$.B. $u_n = n(-1)^n$.C. $u_n = \frac{1}{n}$.D. $u_n = 2^{n+1}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $u_{n+1} = 2^{n+1+1} = 2^{n+2}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} - 2^n = 3 \cdot 2^n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

Bài 8: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của mỗi dãy số (u_n) sau, biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$; b) $u_n = \frac{2}{5^n}$ c) $u_n = (-1)^n \cdot n^2$

Lời giải

a) Ta có: $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{n+1+1} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$

Xét hiệu

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 - n^2(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - 2n^2}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 3n + 1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Vì vậy dãy số đã cho là dãy số tăng.

b) Ta có: $u_{n+1} = \frac{2}{5^{n+1}}$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5^{n+1}} - \frac{2}{5^n} = -\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{5^n} = -\frac{8}{5^{n+1}} < 0$

Vì vậy dãy số đã cho là dãy số giảm.

Bài 9: Cho cấp số cộng (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công sai d trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_2 + u_5 = 42$ và $u_4 + u_9 = 66$; b) $u_2 + u_4 = 22$ và $u_1 \cdot u_5 = 21$.

Lời giải

a) Ta có: $u_2 + u_5 = u_1 + d + u_1 + 3d = 42$

$\Leftrightarrow 2u_1 + 4d = 42$

Ta lại có: $u_4 + u_9 = u_1 + 3d + u_1 + 8d = 2u_1 + 11d = 66$

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2u_1 + 4d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{99}{7} \\ d = \frac{24}{7} \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu của cấp số cộng là: $u_1 = \frac{99}{7}$ và công sai $d = \frac{24}{7}$.

b) Ta có: $u_2 + u_4 = u_1 + d + u_1 + 3d = 22$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 4d = 22$$

$$\Leftrightarrow u_1 + 2d = 11$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 11 - 2d$$

Ta lại có: $u_1 \cdot u_5 = u_1(u_1 + 4d) = 21$.

Thay $u_1 = 11 - 2d$ vào biểu thức trên ra được:

$$(11 - 2d)(11 - 2d + 4d) = 21$$

$$\Leftrightarrow (11 - 2d)(11 + 2d) = 21$$

$$\Leftrightarrow 121 - 4d^2 = 21$$

$$\Leftrightarrow d = 5 \text{ hoặc } d = -5.$$

Với $d = 5$ thì $u_1 = 1$.

Với $d = -5$ thì $u_1 = 21$.

Bài 10: Cho cấp số nhân (u_n) . Tìm số hạng đầu u_1 , công bội q trong mỗi trường hợp sau:

a) $u_6 = 192$ và $u_7 = 384$ b) $u_1 + u_2 + u_3 = 7$ và $u_5 - u_2 = 14$.

Lời giải

a) Ta có $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 192$ và $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 384$

$$\text{Xét: } \frac{u_6}{u_7} = \frac{u_1 q^5}{u_1 \cdot q^6} = \frac{1}{q} = \frac{192}{384} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } u_1 = 192 : \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6144.$$

Vậy cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 6144$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

b) Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 = u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 7$

$$\Leftrightarrow u_1(1 + q + q^2) = 7$$

Và $u_5 - u_2 = u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q = 14$

$$\Leftrightarrow u_1 q(q^3 - 1) = 14$$

$$\text{Suy ra: } \frac{u_1(1 + q + q^2)}{u_1 q(q^3 - 1)} = \frac{7}{14}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1(1 + q + q^2)}{u_1 q(q - 1)(1 + q + q^2)} = \frac{7}{14}$$

$$\Leftrightarrow 2 = q(q-1)$$

$$\Leftrightarrow q^2 - q - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q = -1 \end{cases}$$

$$q = 2 \text{ thì } u_1 = 1$$

$$q = -1 \text{ thì } u_1 = 7$$

Bài 11: Tứ giác $ABCD$ có số đo bốn góc A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Biết số đo góc C gấp 5 lần số đo góc A . Tính số đo các góc của tứ giác $ABCD$ theo đơn vị độ.

Lời giải

Do A, B, C, D theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên ta có:

$$B = A + d; C = A + 2d; D = A + 3d$$

Mặt khác:

$$A + B + C + D = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow A + A + d + A + 2d + A + 3d = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 4A + 6d = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2A + 3d = 180^\circ$$

Ta lại có:

$$A + 2d = 5A \Leftrightarrow d = 2A$$

$$\Rightarrow 8A = 180^\circ$$

$$\Rightarrow A = 22,5^\circ \text{ và } d = 45^\circ$$

$$\Rightarrow B = 67,5^\circ, C = 112,5^\circ, D = 157,5^\circ$$

Bài 12: Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Giải sử người ta đã trồng được n hàng.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Tổng số cây ở n hàng cây là:

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = 4950$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 9900 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 99 & (\text{thỏa mãn}) \\ n = -100 & (\text{không thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy có 99 hàng cây được trồng theo cách trên.

Bài 13: Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là 12288 m^2 . Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Lời giải

Diện tích mặt đáy tháp là $u_1 = 12288 (\text{m}^2)$.

Diện tích mặt sàn tầng 2 là: $u_2 = 12288 \cdot \frac{1}{2} = 6144 (\text{m}^2)$.

.

Gọi diện tích mặt sàn tầng n là u_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy u_n lập thành một cấp số nhân là $u_1 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$, có số hạng tổng

quát là: $u_n = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Diện tích mặt tháp trên cùng chính là mặt tháp thứ 11 nên ta có:

$$u_{11} = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = 12 (\text{m}^2).$$

Bài 14: Một khay nước có nhiệt độ 23°C được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C.

Lời giải

Gọi u_n là nhiệt độ của khay nước đó sau n giờ (đơn vị độ C) với $n \in \mathbb{N}^*$.

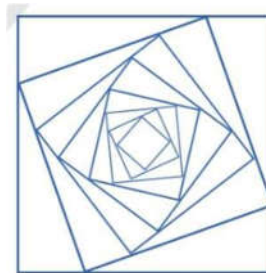
Ta có: $u_1 = 23; u_2 = 23 - 23 \cdot 20\% = 23 \cdot (1 - 20\%) = 23 \cdot 80\%; u_3 = 23 \cdot 80\% \cdot 80\% = 23 \cdot (80\%)^2; \dots$

Suy ra dãy u_n lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 23$ và công bội

$q = 80\%$ có số hạng tổng quát $u_n = 23 \cdot (80\%)^{n-1}$ độ C

Vậy sau 6 giờ thì nhiệt độ của khay là $u_6 = 23 \cdot (80\%)^5 \approx 7,5^\circ\text{C}$.

Bài 15: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Lời giải

Độ dài cạnh của hình vuông đầu tiên là: $a_1 = 4$.

Độ dài cạnh của hình vuông thứ n là: a_n .

Độ dài cạnh của hình vuông thứ $n+1$ là: $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right) \cdot a_n$.

Suy ra: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Vậy (a_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Bài 16: Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Lời giải

Gọi u_n là số tiền sau mỗi tháng ông An còn nợ ngân hàng.

Lãi suất mỗi tháng là 1%.

Ta có:

$$u_1 = 1000000000 \text{ đồng.}$$

$$u_2 = u_1 + u_1 \cdot 1\% - a = u_1(1+1\%) - a \text{ (đồng)}$$

$$u_3 = u_1(1+1\%) - a + [u_1(1+1\%) - a] \cdot 1\% - a$$

$$= u_1(1+1\%)^2 - a(1+1\%) - a$$

...

$$u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - a(1+1\%)^{n-2} - a(1+1\%)^{n-3} - a(1+1\%)^{n-4} - \dots - a.$$

Ta thấy dãy $a(1+1\%)^{n-2}; a(1+1\%)^{n-3}; a(1+1\%)^{n-4}; \dots; a$ lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = a$ và công bội $q = 1+1\% = 99\%$ có tổng $n-2$ số hạng đầu là:

$$S_{n-2} = \frac{a(1-(99\%)^{n-2})}{1-99\%} = 100a[1-(99\%)^{n-2}].$$

$$\text{Suy ra } u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - 100a[1-(99\%)^{n-2}]$$

Vì sau 2 năm = 24 tháng thì ông An trả xong số tiền nên $n = 24$ và $u_{24} = 0$. Do đó ta có:

$$u_{24} = u_1(1+1\%)^{23} - 100a[1-(99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1000000000 \cdot (99\%)^{23} - 100a[1-(99\%)^{22}] = 0.$$

$$\Leftrightarrow a = 40006888,25$$

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 40006888,25 đồng.

PHẦN 2: BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 2

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là *sai*?

A. Dãy số có $u_{n+1} = a.3^{n+1}$.

B. Hiệu số $u_{n+1} - u_n = 3.a$.

C. Với $a > 0$ thì dãy số tăng.

D. Với $a < 0$ thì dãy số giảm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1} - u_n = a.3^{n+1} - a.3^n = a.3^n(3-1) = 2a.3^n$.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n-1$. Dãy số (u_n) là dãy số

A. Bị chặn trên bởi 1. B. Giảm.

C. Bị chặn dưới bởi 2.

D. Tăng.

Lời giải

Chọn D

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2 > 0$ nên $u_{n+1} > u_n$ vậy dãy số (u_n) tăng.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2018?

A. 287.

B. 289.

C. 288.

D. 286.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d = 3 + 7(n-1) = 7n-4$; $u_n > 2018 \Leftrightarrow 7n-4 > 2018 \Leftrightarrow n > \frac{2022}{7}$

Vậy $n = 289$.

Câu 4: Xác định số hàng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) có $u_9 = 5u_2$ và $u_{13} = 2u_6 + 5$.

A. $u_1 = 3$ và $d = 4$.

B. $u_1 = 3$ và $d = 5$.

C. $u_1 = 4$ và $d = 5$.

D. $u_1 = 4$ và $d = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d$. Theo đầu bài ta có hpt:
$$\begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$$

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$, $u_{14} = 18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

A. $S_{16} = -24$.

B. $S_{16} = 26$.

C. $S_{16} = -25$.

D. $S_{16} = 24$.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -21 \\ d = 3 \end{cases}$.

Khi đó, $S_{16} = \frac{(2u_1 + 15d) \cdot 16}{2} = 8(-42 + 45) = 24$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A. $u_1 = 2; d = 4$. B. $u_1 = 2; d = 3$. C. $u_1 = 2; d = 2$. D. $u_1 = 3; d = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_5 = 18 \Leftrightarrow u_1 + 4d = 18 \quad (1)$.

$$4S_n = S_{2n} \Leftrightarrow 4 \left[nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \right] = \left[2nu_1 + \frac{2n(2n-1)d}{2} \right] \Leftrightarrow 4u_1 + 2nd - 2d = 2u_1 + 2nd - d \\ \Leftrightarrow 2u_1 - d = 0 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $u_1 = 2; d = 4$.

Câu 7: Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tích của bốn số đó là :

A. 585. B. 161. C. 404. D. 276.

Lời giải

Chọn A

Gọi 4 số cần tìm là $a - 3r, a - r, a + r, a + 3r$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a - 3r + a - r + a + r + a + 3r = 28 \\ (a - 3r)^2 + (a - r)^2 + (a + r)^2 + (a + 3r)^2 = 276 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r = \pm 2 \end{cases}.$$

Bốn số cần tìm là 1, 5, 9, 13 có tích bằng 585.

Câu 8: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng là.

A. -244. B. -274. C. -253. D. -285.

Lời giải

Chọn D

Giả sử cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai là d .

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - (u_1 + d) = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 9d = -21 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } S_{15} = \frac{15}{2} \cdot [2 \cdot 2 + (15-1) \cdot (-3)] = -285.$$

Câu 9: Cho dãy số u_n biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

- A. $u_n = 3^n$. B. $u_n = 3^{n+1}$. C. $u_n = 3^{n-1}$. D. $u_n = n^{n+1}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3.$$

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 3$, công bội $q = 3$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân

(u_n) là

- A. $S_8 = 3280$. B. $S_8 = 9841$. C. $S_8 = 3820$. D. $S_8 = 1093$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có : } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 - u_1 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 13 \\ u_1(q^3-1) = 26 \end{cases} \Rightarrow \frac{(q^3-1)}{(1+q+q^2)} = \frac{26}{13} \Rightarrow q-1=2 \Rightarrow q=3$$

$$\Rightarrow u_1 = 1.$$

$$S_8 = \frac{1(1-3^8)}{1-3} = 3280.$$

PHẦN 2 : TỰ LUẬN

Câu 11: Tìm giá trị x dương nhỏ nhất thỏa mãn ba số $\sin x, \sin 2x, \sqrt{3} \cos x$ lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Theo bài ra, ba số $\sin x, \sin 2x, \sqrt{3} \cos x$ lập thành cấp số cộng nên suy ra

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm dương x nhỏ nhất sẽ ứng với $k = 0$. Vậy $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{2\pi}{9}$.

Câu 12: Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Ba số $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) = (\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{b})$$

$$\Leftrightarrow b - a = c - b \Leftrightarrow a, b, c \text{ lập thành cấp số cộng.}$$

Câu 13: Chu vi của một đa giác là 45 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3\text{cm}$. Biết cạnh lớn nhất là 15 cm, tính số cạnh của đa giác đó.

Lời giải

Gọi cạnh nhỏ nhất của đa giác là u_1 và số cạnh của đa giác là n .

$$\text{Ta có } 15 = u_1 + (n-1) \cdot 3 \text{ hay } u_1 = 18 - 3n > 0 \rightarrow n < 6.$$

Tổng các cạnh là 45 cm, ta có

$$45 = \frac{n(15 + 18 - 3n)}{2} \text{ hay } 3n^2 - 33n + 90 = 0.$$

Giải phương trình với $n \in \mathbb{N}^*; n < 6$, ta được $n = 5$.

Câu 14: Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

- Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105.
- Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 155.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $a, b, c \Rightarrow a + c = 2b(*)$.

a) Theo bài ra, ta có $\begin{cases} a+b+c=15 \\ abc=105 \end{cases}$, kết hợp với (*), ta được $\begin{cases} a+b+c=15 \\ a+c=2b \\ abc=105 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b=15 \\ a+c=2b \\ abc=105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=10-a \\ 5a(10-a)=105 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=7 \\ b=5 \\ c=3 \end{cases}.$$

b) Theo bài ra, ta có $\begin{cases} a+b+c=21 \\ a^2+b^2+c^2=155 \end{cases}$, kết hợp với (*), ta được $\begin{cases} a+b+c=21 \\ a+c=2b \\ a^2+b^2+c^2=155 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3b=21 \\ a+c=2b \\ a^2+b^2+c^2=155 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=7 \\ c=14-a \\ a^2+(14-a)^2+7^2=155 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=7 \\ c=9 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=9 \\ b=7 \\ c=5 \end{cases}.$$

Câu 15: Cho ba số a,b,c theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng $a^2+2bc=c^2+2ab$ và $a^2+8bc=(2b+c)^2$.

Lời giải

Vì a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng suy ra $a+c=2b$.

Ta có $a^2+2bc-c^2-2ab=(a-c)(a+c)+2b(c-a)=(a-c)(a+c-2b)=0$

Suy ra $a^2+2bc-c^2-2ab=0 \Leftrightarrow a^2+2bc=c^2+2ab \rightarrow$ điều phải chứng minh.

Lại có $a^2+8bc-(2b+c)^2=a^2+4(a+c)c-(a+2c)^2=a^2+4ac+4c^2-a^2-4ac-4c^2$

Suy ra $a^2+8bc-(2b+c)^2=0 \Leftrightarrow a^2+8bc=(2b+c)^2 \rightarrow$ điều phải chứng minh.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=4u_n+9, (n \geq 1) \end{cases}$.

a) Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n=u_n+3, n \geq 1$ là một cấp số nhân.

b) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

a) Ta có $v_n=u_n+3$, suy ra $v_{n+1}=u_{n+1}+3=(4u_n+9)+3$. Do đó

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(4u_n+9)+3}{u_n+3} = \frac{4(u_n+3)}{u_n+3} = 4.$$

Vậy (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1=u_1+3=2+3=5$ và công bội $q=4$.

b) Do (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1=5 \\ q=4 \end{cases}$ nên số hạng tổng quát của $v_n=v_1 \cdot q^{n-1}=5 \cdot 4^{n-1}$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = v_n - 3 = 5.4^{n-1} - 3$.

Câu 17: Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$.

- Tìm số hạng đầu tiên và công bội
- Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.
- Tổng của bao nhiêu số hạng đầu sẽ bằng 765.
- Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = 2 \end{cases}$$

- Vậy số hạng đầu $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$.
- Tổng của 10 số hạng đầu tiên $S_{10} = u_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 3069$.
- Ta có $S_n = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 765 \Leftrightarrow n = 8$. Vậy tổng của 8 số hạng đầu tiên bằng 765.
- Giả sử $u_n = 12288$. Theo công thức tổng quát của cấp số nhân, ta có

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow 12288 = 3 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow n = 13.$$

Vậy 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân.

Câu 18: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

- $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$
- $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 240 \end{cases}$
- $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$
- $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^4 - u_1 = 15 \\ u_1 q^3 - u_1 q = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(q^4 - 1) = 15 & (1) \\ u_1 q(q^2 - 1) = 6 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2), ta được $\frac{q^2+1}{q} = \frac{15}{6} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc

$$\begin{cases} u_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

b) Ta có $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^{19} = 8u_1 q^{16} \\ u_1 q^2 + u_1 q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 q^2 + u_1 q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = 2 \end{cases}.$

c) Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1 q^2 + u_1 q^4 = 65 \\ u_1 + u_1 q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 - q^2 + q^4) = 65 & (1) \\ u_1(1 + q^6) = 325 & (2) \end{cases}.$

Lấy (2) chia (1), ta được $\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow 1+q^2 = 5 \Leftrightarrow q = \pm 2$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = -2 \end{cases}.$

d) Ta có $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q - u_1 q^3 + u_1 q^4 = 10 \\ u_1 q^2 - u_1 q^4 + u_1 q^5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q(1 - q^2 + q^3) = 10 & (1) \\ u_1 q^2(1 - q^2 + q^3) = 20 & (2) \end{cases}.$

Lấy (2) chia (1), ta được $q = 2$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}.$

Câu 19: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases}$. b) $\begin{cases} S_4 = 40 \\ S_8 = 680 \end{cases}.$

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}.$

b) Ta có $\begin{cases} S_4 = 40 \\ S_8 = 680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} = 40 & (1) \\ u_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 680 & (2) \end{cases}.$

Lấy (2) chia cho (1), ta được $q^4 + 1 = 17 \Leftrightarrow q^4 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 2$. Vậy $\begin{cases} u_1 = \frac{8}{3} \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -8 \\ q = -2 \end{cases}.$

Câu 20: Tìm ba số khác nhau tạo thành cấp số cộng có tổng bằng 6, biết rằng nếu hoán đổi vị trí số hạng thứ nhất và số hạng thứ hai đồng thời giữ nguyên số hạng thứ ba ta được cấp số nhân.

Lời giải

Gọi ba số cần tìm là u_1, u_2, u_3 với $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1$.

- u_1, u_2, u_3 tạo thành cấp số cộng với công sai $d \neq 0$ nên $u_1, u_2 = u_1 + d, u_3 = u_1 + 2d$.

Hơn nữa, $u_1 + u_2 + u_3 = 6 \Leftrightarrow u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 6 \Leftrightarrow u_1 + d = 2$.

- u_2, u_1, u_3 tạo thành cấp số nhân hay $u_1 + d, u_1, u_1 + 2d$ tạo thành cấp số nhân
 $\Leftrightarrow (u_1 + d)(u_1 + 2d) = u_1^2$

$$\Leftrightarrow (u_1 + d)(u_1 + d + d) = u_1^2 \Leftrightarrow 2(2 + 2 - u_1) = u_1^2 \Leftrightarrow u_1^2 + 2u_1 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_1 = -4 \end{cases}.$$

Với $u_1 = 2$, suy ra $d = 0$: không thỏa mãn.

Với $u_1 = -4$, suy ra $d = 6$. Vậy ba số cần tìm là $-4, 2, 8$.