

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 03/12/2020

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (6,00 điểm):

a) Giải các phương trình: 1/ $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$. 2/ $\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x - 4 \sin 2x = 1$.

b) Một bài thi Đánh giá năng lực theo hình thức trắc nghiệm có 100 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án đúng và 3 phương án sai. Với mỗi câu hỏi, người làm bài thi chỉ được chọn một phương án, nếu chọn đúng được 1,0 điểm, chọn sai bị trừ 0,25 điểm. Một học sinh làm bài đủ 100 câu bằng cách: với mỗi câu hỏi, học sinh đó chọn ngẫu nhiên một phương án. Tính xác suất để học sinh đó được 60 điểm.

Câu 2 (4,00 điểm): Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + m^2$ có đồ thị là (C_m) và đường thẳng (Δ) có phương trình $y = 2x + m^2$ (m là tham số).

a) Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) cắt (Δ) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm của AC .

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C_m) cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ tại hai điểm E, F sao cho $EF = 2\sqrt{3}$.

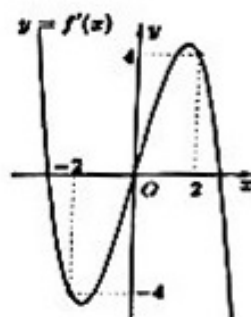
Câu 3 (4,00 điểm):

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

a) Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

b) Xét chiều biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(2x+1) - 4x^2 - 4x$ trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$.



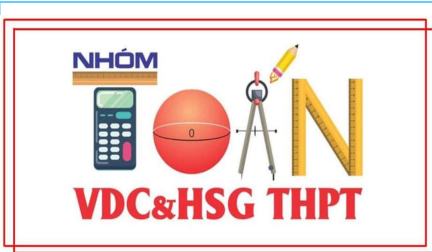
Câu 4 (4,00 điểm):

a) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HA = 2HC$; góc tạo bởi SB và mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

b) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AC và $A'B'$; G là trọng tâm của tam giác BCC' . Tính thể tích của khối tứ diện $BIKG$ theo V .

Câu 5 (2,00 điểm): Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $\sqrt{1+xy}(2+xy) = (x+y)(x^2+y^2+2xy+1)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y}$.



ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI - SỞ KHÁNH HÒA
NĂM HỌC 2020 – 2021
 Môn: Toán 12

HỌC HỎI - CHỈ DẪN KIẾN THỨC

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)

LINK NHÓM: <https://www.facebook.com/groups/1916660125164699>

Câu 1. (6,0 điểm)

a) Giải các phương trình

1) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

2) $\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x - 4 \sin 2x = 1$.

b) Một bài thi Đánh giá năng lực theo hình thức trắc nghiệm có 100 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án đúng và 3 phương án sai. Với mỗi câu hỏi, người làm bài thi chỉ được chọn một phương án, nếu chọn đúng được 1,0 điểm, chọn sai bị trừ 0,25 điểm. Một học sinh làm bài đủ 100 câu bằng cách: với mỗi câu hỏi, học sinh đó chọn ngẫu nhiên một phương án. Tính xác suất để học sinh đó được 60 điểm.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + m^2$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $(\Delta) y = 2x + m^2$ (m là tham số)

a) Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) cắt (Δ) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm của AC .

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C_m) cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ tại 2 điểm E, F : $EF = 2\sqrt{3}$.

Câu 3. (4,0 điểm) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới.

a. Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$

b. xét chiều biến thiên của hàm số $g(x) = f(2x+1) - 4x^2 - 4x$ trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu của S lên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HA = 2HC$, góc tạo bởi SB và mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ A đến (SBC) theo a .

b) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AC và $A'B'$; G là trọng tâm của tam giác BCC' . Tính thể tích của khối tứ diện $BIKG$ theo V

Câu 5. (2,0 điểm) Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $\sqrt{1+xy}(2+xy) = (x+y)(x^2+y^2+2xy+1)$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y}$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (6,0 điểm)

a) Giải các phương trình

1) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

2) $\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x - 4 \sin 2x = 1$.

b) Một bài thi Đánh giá năng lực theo hình thức trắc nghiệm có 100 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án đúng và 3 phương án sai. Với mỗi câu hỏi, người làm bài thi chỉ được chọn một phương án, nếu chọn đúng được 1,0 điểm, chọn sai bị trừ 0,25 điểm. Một học sinh làm bài đủ 100 câu bằng cách: với mỗi câu hỏi, học sinh đó chọn ngẫu nhiên một phương án. Tính xác suất để học sinh đó được 60 điểm.

Lời giải

GVSB: Nguyễn Minh Thành ; GVPB: Vân Vũ

a) Giải các phương trình

1) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

♦ Điều kiện: $x \geq 1$.

♦ Đặt $t = \sqrt{x-1}$ ($t \geq 0$), khi đó $x = t^2 + 1$.

♦ Phương trình trở thành $\sqrt[3]{2-(t^2+1)} + t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-t^2} + t - 1 = 0$.

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(1-t)(1+t)} + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1-t} \left[\sqrt[3]{1+t} - \sqrt[3]{(1-t)^2} \right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{1-t} = 0 \\ \sqrt[3]{1+t} = \sqrt[3]{(1-t)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 1+t = (1-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 0 \\ t = 3 \end{cases} \text{ thỏa mãn điều kiện } t \geq 0.$$

♦ Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

♦ Với $t = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).

♦ Với $t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 10$ (thỏa mãn).

♦ Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1; 2; 10\}$.

2) $\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x - 4 \sin 2x = 1$.

♦ Phương trình đã cho tương đương

$$2\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x + 1 - 2 \sin^2 2x - 4 \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x (\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x - 2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

♦ Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{12} + k'\pi, k, k' \in \mathbb{Z} \right\}$.

b)

♦ Gọi x là số câu trả lời đúng, y là số câu trả lời sai (với $0 \leq x, y \leq 100$ và $x, y \in \mathbb{N}$).

♦ Vì có tất cả 100 câu hỏi, nếu chọn đúng được 1,0 điểm, chọn sai bị trừ 0,25 điểm và học sinh đó đạt 60 điểm nên ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x - 0,25y = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 68 \\ y = 32 \end{cases}.$$

♦ Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án đúng và 3 phương án sai nên xác suất để chọn được phương án đúng là $\frac{1}{4}$ và xác suất để chọn được phương án sai là $\frac{3}{4}$.

- ♦ Vậy để học sinh đó đạt được 60 điểm chọn 32 câu sai và 68 câu đúng nên có xác suất là $C_{100}^{32} \left(\frac{1}{4}\right)^{68} \left(\frac{3}{4}\right)^{32}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + m^2$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $(\Delta) y = 2x + m^2$ (m là tham số)

- Tìm tất cả các giá trị của m để (C_m) cắt (Δ) tại 3 điểm phân biệt A, B, C sao cho B là trung điểm của AC .
- Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C_m) cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ tại 2 điểm E, F : $EF = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (Δ) là: $2x^3 - 3mx^2 + m^2 = 2x + m^2$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3mx^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 - 3mx - 2) = 0 (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 - 3mx - 2 = 0 (1) \end{cases}$$

- ♦ Vì (1) có 2 nghiệm trái dấu nên (*) luôn có 3 nghiệm phân biệt $\forall m$.

Ta có: $x_B = 0$ nên x_A, x_C là nghiệm của (1) nên theo định lý vi-et ta có: $\begin{cases} x_A + x_C = \frac{3m}{2} \\ x_A \cdot x_C = -1 \end{cases}$.

- ♦ Theo giả thiết B là trung điểm của AC nên $\frac{x_A + x_C}{2} = x_B = 0 \Rightarrow m = 0$.

- Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C_m) cắt đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ tại 2 điểm E, F : $EF = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

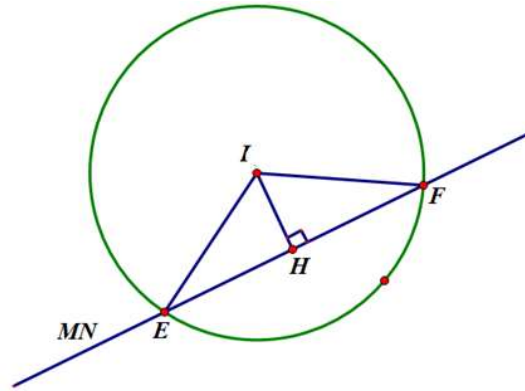
- ♦ Ta có $y' = 6x^2 - 6mx = 6x(x - m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$.

- ♦ Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì $m \neq 0$.

- ♦ Khi đó hai điểm cực trị của (C_m) là: $M(0; m^2)$ và $N(m; -m^3 + m^2)$.

- ♦ Phương trình đường thẳng MN có dạng: $\frac{x}{m} = \frac{y - m^2}{-m^3} \Leftrightarrow -m^2x = y - m^2 \Leftrightarrow m^2x + y - m^2 = 0$.

- ♦ Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 2$.



- ♦ Gọi H trung điểm của EF ta có tam giác IHE vuông tại H nên

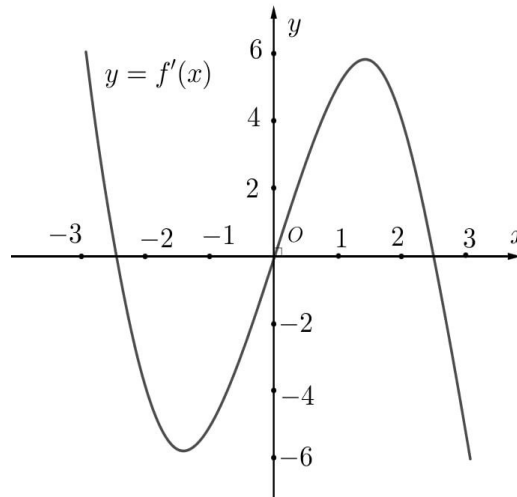
$$IH = d(I, MN) = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1.$$

- ♦ Vậy $d(I, MN) = \frac{|m^2 \cdot 1 - 2 - m^2|}{\sqrt{m^4 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{m^4 + 1} = 2 \Leftrightarrow m^4 + 1 = 4 \Leftrightarrow m^4 = 3 \Rightarrow m = \pm \sqrt[4]{3}.$

- ♦ Vậy $m = \pm \sqrt[4]{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới.



- a) Tìm số điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$
- b) Xét chiều biến thiên của hàm số $g(x) = f(2x+1) - 4x^2 - 4x$ trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(1; +\infty)$

Lời giải

- a) Từ đồ thị ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

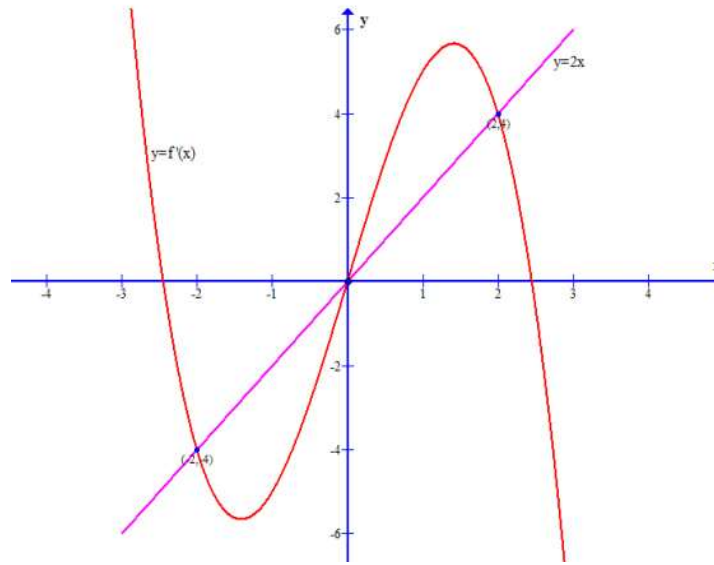
x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-

Vậy $f(x)$ có 3 điểm cực trị (2 điểm cực đại, 1 điểm cực tiểu)

- b) Ta có $g'(x) = 2f'(2x+1) - 8x - 4 = 2[f'(2x+1) - 2(2x+1)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x+1) = 2(2x+1)$$

- ♦ Đặt $t = 2x + 1$, phương trình trở thành $f'(t) = 2t$
- ♦ Ta có đồ thị sau :



- ♦ Từ đồ thị ta có $f'(t) = 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$. Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

- ♦ Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$

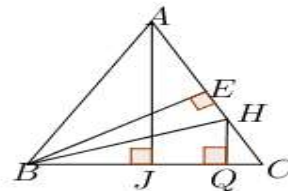
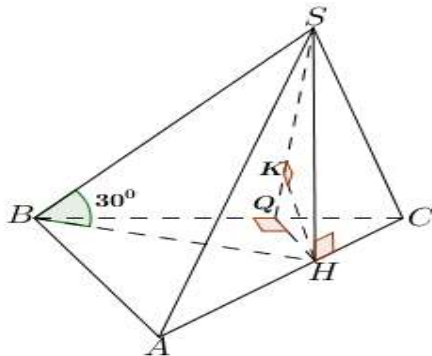
x	$-\infty$	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	-	

- ♦ Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 4. (4,0 điểm)

- a) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu của S lên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AC sao cho $HA = 2HC$, góc tạo bởi SB và mặt phẳng (ABC) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ A đến (SBC) theo a .

Lời giải



- ♦ Vì $SH \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SB, (ABC))} = \widehat{SBH} = 30^\circ$.
- ♦ Gọi E là trung điểm AC . Khi đó ta có:

$$EC = a \Rightarrow BE = \sqrt{BC^2 - EC^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BH = \sqrt{BE^2 + EH^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{3}.$$

$$\diamond \text{ Xét } \triangle SBH \text{ ta có: } \tan 30^\circ = \frac{SH}{BH} \Rightarrow SH = \tan 30^\circ \cdot BH = \frac{2a\sqrt{21}}{9}.$$

$$\diamond \text{ Vậy thể tích } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{9} \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^3\sqrt{7}}{9}.$$

$\diamond$ Gọi Q là hình chiếu của H lên cạnh BC . Khi đó ta có

$$\begin{cases} SH \perp BC \\ HQ \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHQ) \Rightarrow BC \perp SQ$$

$$\diamond \text{ Khi đó, nếu kẻ } HK \perp SQ \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HK.$$

$$\text{Ta có, } d(A, SBC) = 3 \cdot d(H, SBC) = 3HK.$$

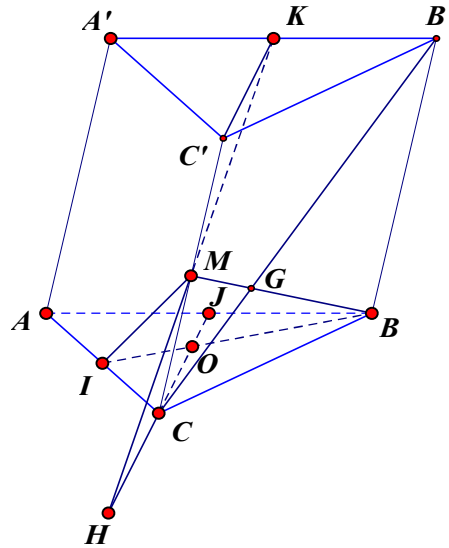
$$\diamond \text{ Kẻ } AJ \perp BC \Rightarrow HQ = \frac{1}{3}AJ = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Ta có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HQ^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{111}{28a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{777}}{111}$$

$$\text{Suy ra } d(A, SBC) = 3HK = \frac{6a\sqrt{777}}{111}.$$

b) Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AC và $A'B'$; G là trọng tâm của tam giác BCC' . Tính thể tích của khối tứ diện $BIKG$ theo V

Lời giải

GVSB: Nguyễn Thị Phương Hiền; GVPB: Bùi Văn Cảnh



$\diamond$ Gọi H là giao điểm của KM với CO , (O là trọng tâm tam giác ABC).

$$\diamond \text{ Ta có } V_{KBIG} = \frac{1}{3} d(K, (BIG)) \cdot S_{BIG} = \frac{1}{3} d(H, (BIM)) \cdot \frac{2}{3} S_{BIM}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot d(C, (BIM)) \cdot S_{BIM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot V_{CBIM}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot d(M, (BIC)) \cdot S_{BIC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} d(C', (ABC)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{5}{36} V.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số $x, y > 0$ thỏa mãn $\sqrt{1+xy}(2+xy) = (x+y)(x^2+y^2+2xy+1)$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{xy}{x+y}$.

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+xy}(2+xy) &= (x+y)(x^2+y^2+2xy+1) \Leftrightarrow (1+xy)\sqrt{1+xy} + \sqrt{1+xy} = (x+y)^3 + (x+y) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{1+xy})^3 + \sqrt{1+xy} &= (x+y)^3 + (x+y).\end{aligned}$$

Xét hàm số đặc trưng $f(t) = t^3 + t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đơn điệu tăng với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $f(\sqrt{1+xy}) = f(x+y) \Leftrightarrow x+y = \sqrt{1+xy}$.

Theo bất đẳng thức AM-GM cho bộ số (x, y) dương ta có $x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{1+xy} \geq 2\sqrt{xy}$

$$\Leftrightarrow 1+xy \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{xy}{x+y} \Leftrightarrow P \leq \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2}\sqrt{xy} \Leftrightarrow P \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow P \leq \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi $x = y = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

-----HẾT-----