



Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề có 10 câu và 01 trang

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + 1 + \frac{2x+7}{x-1}$ trên đoạn $[2;5]$

Câu 3 (1,0 điểm).

1. Cho $3\cos 2\alpha + \cos \alpha + 1 = 0$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1}$

2. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0$. Tính $A = |z_1^2| + |z_2^2|$

Câu 4 (1,0 điểm).

1. Giải bất phương trình $3^x - 3^{1-x} - 2 \leq 0$.

2. Minh và Hùng cùng tham gia một kỳ thi, trong đó có hai môn thi trắc nghiệm . Đề thi của mỗi môn gồm 8 mã đề khác nhau và các môn khác nhau có mã đề khác nhau . Đề thi được sắp xếp và phát cho các thí sinh một cách ngẫu nhiên . Tính xác suất để trong hai môn thi đó Minh và Hùng có ít nhất một môn chung mã đề thi.

Câu 5 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^1 2x[x + \ln(1+x)]dx$

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° , $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ với M là trung điểm của BC .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(1;-1;2)$, đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$.Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với d . Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ và

$(C_2): x^2 + y^2 - 6x = 0$. Gọi $A(3;3)$ là một trong hai giao điểm của (C_1) và (C_2) . Đường thẳng Δ đi qua A cắt hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại điểm thứ hai lần lượt là B và C . Biết rằng đường thẳng Δ cắt đường thẳng $d : x - y - 4 = 0$ tại điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD}$. Viết phương trình đường thẳng Δ .

Câu 9 (1,0 điểm) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y} + 2y = \sqrt[3]{8y^3 + 4} + (x^2 + 2y - 1)\sqrt{6x + 4} \\ \sqrt{y^2 + 1} + \sqrt{x - y} = 2xy - x^2 + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 + 1} + \sqrt{y} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

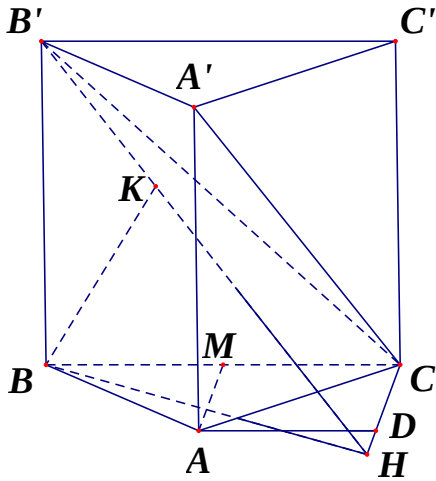
Câu 10 (1,0 điểm). Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (a - b)(b - c)(a - c)(ab + bc + ca)$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
*Kết quả thi được đăng tải trên trang web : quangxuong1.edu.vn vào ngày 20/06/2016



Câu	Nội dung	Điểm
1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số. HS tự làm.	1.0
2	Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Hàm số $y = x + 1 + \frac{2x+7}{x-1}$ liên tục trên đoạn $[2;5]$ Ta có : $y' = 1 - \frac{9}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 & (tm) \\ x = -2 & (loai) \end{cases}$	0,5
	Khi đó $y(2) = 14$; $y(5) = \frac{41}{4}$; $y(4) = 10$	0,25
	Vậy $\max_{[2;5]} y = y(2) = 14$; $\min_{[2;5]} y = y(4) = 10$	0,25
3	3.1 Theo giả thiết $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$ Ta có : $3\cos 2\alpha + \cos \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{2}{3} & (tm) \\ \cos \alpha = \frac{1}{2} & (loai) \end{cases}$	0,25
	Khi đó $A = \frac{\sin 2\alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = \sin \alpha$. Với $\cos \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ (vì $\sin \alpha > 0$) Vậy $A = \frac{\sqrt{5}}{3}$	0,25
	3.2 Phương trình $z^2 - 2z + 10 = 0(1)$ có $\Delta' = 1 - 10 = -9 < 0$ nên (1) có hai nghiệm phức là $z_1 = 1 + 3i$ và $z_2 = 1 - 3i$.	0,25
	Ta có $A = (1 - 3i)^2 + (1 + 3i)^2 = -8 - 6i + -8 + 6i = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} + \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 20$. Vậy $A = 20$	0,25
4	4.1 Ta có : $3^x - 3^{1-x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 3^x - \frac{3}{3^x} - 2 \leq 0$. Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$) ta được bất phương trình : $t - \frac{3}{t} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3$. Kết hợp điều kiện ta có $0 < t \leq 3$	0,25
	$\Rightarrow 0 < 3^x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\infty; 1]$	0,25
	4.2 Số cách nhận mã đề hai môn của Minh là $C_8^1.C_8^1 = 64$ Số cách nhận mã đề hai môn của Hùng là $C_8^1.C_8^1 = 64$ Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $ \Omega = 64.64 = 4096$	0,25
	Gọi A là biến cố : ”Minh và Hùng có ít nhất một môn cùng mã đề”. Xét các trường hợp sau: Trường hợp 1 : Minh và Hùng có chung mã đề môn thứ nhất . Số cách nhận mã đề thi của Minh và Hùng là $C_8^1.1.C_8^1.C_7^1 = 448$ Trường hợp 2 : Minh và Hùng có chung mã đề môn thứ hai .	

		Số cách nhận mã đề thi của Minh và Hùng là $C_8^1.C_7^1.C_8^1.1 = 448$ Trường hợp 3: Minh và Hùng có chung mã đề cả hai môn : Số cách nhận mã đề thi của Minh và Hùng là $C_8^1.1.C_8^1.1 = 64$ Suy ra $\Omega_A = 448 + 448 + 64 = 960$ Vậy xác suất $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{960}{4096} = \frac{15}{64}$	0,25
5		Ta có : $I = \int_0^1 2x[x + \ln(1+x)]dx = \int_0^1 2x^2 dx + \int_0^1 2x \ln(1+x) dx = I_1 + I_2$	0,25
		Tính $I_1 = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big _0^1 = \frac{2}{3}$	0,25
		Tính $I_2 = \int_0^1 2x \ln(1+x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x^2 \end{cases}$. Do đó $I_2 = x^2 \ln(1+x) \Big _0^1 - \int_0^1 dt = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln 2 - \int_0^1 (x-1 + \frac{1}{x+1}) dx$ $= \ln 2 - \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \ln(1+x) \right] \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	0,25
		Vậy $I = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$	0,25
6		Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là A nên: $\widehat{(A'C, (ABC))} = \widehat{(A'C, AC)} = \widehat{A'CA} = 60^\circ$. Do đó $A'A = AC \cdot \tan 60^\circ = 2a\sqrt{3}$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên thể tích của hình lăng trụ là : $V = A'A \cdot S_{\triangle ABC} = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 3a^3$	0,25
			0,25
		Trong (ABC) dựng hình bình hành $AMCD$. Khi đó $AM \parallel (B'CD)$. Ta có $d(AM, B'C) = d(AM, (B'CD)) = d(M, (B'CD)) = \frac{1}{2} d(B, (B'CD))$	0,25
		Trong (ABC) kẻ $BH \perp CD$ mà $BB' \perp CD$ nên $(B'BH) \perp (B'CD)$ Trong $(B'BH)$ kẻ $BK \perp B'H \Rightarrow BK \perp (B'CD)$. Vậy $d(B, (B'CD)) = BK$ Ta có $BH = 2d(B, AM) = \frac{4S_{\triangle ABM}}{AM} = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AM}$; vì AM là đường trung tuyến trong tam giác ABC nên $AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{5a^2}{2} - \frac{7a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = 2a$ Trong tam giác vuông $B'BH$ có $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{B'B^2} + \frac{1}{BH^2} \Rightarrow BK = a\sqrt{3}$ Vậy $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	0,25

7	Mặt phẳng (Q) đi qua A (1;-1;2) và vuông góc với d nên (Q) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = \vec{u}_d = (2;1;1)$.	0,25
	Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là : $2(x-1) + (y+1) + (z-2) = 0 \Rightarrow (Q): 2x + y + z - 3 = 0$	0,25
	Ta có $M = \Delta \cap d \Rightarrow M(-1+2t; t; 2+t)$. Vì A là trung điểm của MN nên $N(3-2t; -2-t; 2-t)$. Vì $N \in (P)$ nên $3-2t-2-t-2(2-t)+5=0 \Rightarrow t=2 \Rightarrow M(3;2;4); N(-1;-4;0)$	0,25
	Δ đi qua M,N nên có vec tơ chỉ phương là $\vec{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = (2;3;2)$ Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{2}$	0,25
8	(C_1) có tâm $I_1 = (1; 2)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{5}$, (C_2) có tâm $I_2 = (3; 0)$ và bán kính $R_2 = 3$ Gọi H_1, H_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của I_1 và I_2 trên Δ. Ta có : $H_1H_2 = AD = \frac{1}{2}BC$ Qua A kẻ đường thẳng a song song với I_1I_2 và lấy trên đường thẳng a điểm D_0 sao cho $\overrightarrow{AD_0} = \overrightarrow{I_1I_2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I_1 trên I_2H_2. Ta có : $\Delta HI_1I_2 = \Delta DAD_0$ (c.g.c) $\Rightarrow DD_0 \perp AD$	0,25
	Suy ra D thuộc đường tròn (C) đường kính AD_0 Phương trình $I_1I_2 : x + y - 3 = 0$ và phương trình đường thẳng a : $x + y - 6 = 0$ $\overrightarrow{AD_0} = \overrightarrow{I_1I_2} \Rightarrow D_0 = (5;1)$.	0,25
	Phương trình đường tròn (C) : $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 2$ Ta có $D \in d \cap (C)$ nên toạ độ của D là nghiệm của hệ: $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = 0 \\ y = x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow D(5;1) \equiv D_0$	0,25
	Vậy phương trình đường thẳng Δ là : $x + y - 6 = 0$	0,25
9	$\begin{cases} \sqrt{x^2+2y}+2y = \sqrt[3]{8y^3+4} + (x^2+2y-1)\sqrt{6x+4} & (1) \\ \sqrt{y^2+1}+\sqrt{x-y} = 2xy-x^2+\sqrt{x^2-2xy+y^2+1}+\sqrt{y} & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq y \geq 0$ PT(2) $\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2 = \sqrt{x^2-2xy+y^2+1}-\sqrt{x-y}-(x^2-2xy+y^2)$ $\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}-\sqrt{y}-y^2 = \sqrt{(x-y)^2+1}-\sqrt{x-y}-(x-y)^2 \Leftrightarrow f(y) = f(x-y)$ Xét hàm số : $f(t) = \sqrt{t^2+1}-\sqrt{t}-t^2$ trên $[0;+\infty)$ có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t$ hay $f'(x) = t(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2) - \frac{1}{2\sqrt{t}} \leq 0, \forall t > 0$ nên hàm $f(t)$ nghịch biến trên $[0;+\infty)$. Suy ra: $f(y) = f(x-y) \Leftrightarrow y = x-y \Leftrightarrow x = 2y$	0,25

10	Thế vào phương trình (1) ta được : $\sqrt{x^2 + x + x} = \sqrt[3]{x^3 + 4} + (x^2 + x - 1)\sqrt{6x + 4}$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + x} - 1) + [(x + 1) - \sqrt[3]{x^3 + 4}] - (x^2 + x - 1)\sqrt{6x + 4} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{3(x^2 + x - 1)}{(x + 1)^2 + (x + 1)\sqrt[3]{x^3 + 4} + \sqrt[3]{(x^3 + 4)^2}} - (x^2 + x - 1)\sqrt{6x + 4} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} (tm)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{3}{(x + 1)^2 + (x + 1)\sqrt[3]{x^3 + 4} + \sqrt[3]{(x^3 + 4)^2}} = \sqrt{6x + 4} \quad (4)$	0,25
	$VT_{(4)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{3}{(x + 1 + \frac{\sqrt[3]{x^3 + 4}}{2})^2 + \frac{3\sqrt[3]{(x^3 + 4)^2}}{4}} \leq 1 + \frac{3}{(1 + \frac{\sqrt[3]{4}}{2})^2 + \frac{3\sqrt[3]{16}}{4}} < 2$ $VP_{(4)} = \sqrt{6x + 4} \geq \sqrt{4} = 2, \forall x \geq 0. \text{ Do đó phương trình (4) vô nghiệm}$	0,25
	Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x; y) = (\frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \frac{\sqrt{5} - 1}{4})$	0,25
	Do $a \geq b \geq c$ nên nếu $ab + bc + ca < 0$ thì $P \leq 0 < 4$ Nếu $ab + bc + ca \geq 0$ thì đặt $ab + bc + ca = x \geq 0$ Áp dụng BĐT Côsi : $(a - b)(b - c) \leq \frac{(a - c)^2}{4} \Rightarrow (a - b)(b - c)(a - c) \leq \frac{(a - c)^3}{4} \quad (1)$	0,25
	Áp dụng BĐT Bunhiacopski: $2[(a - b)^2 + (b - c)^2] \geq (a - c)^2$ và $4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2 + 2(a - c)^2$ $\Rightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq (a - c)^2 + 2(a - c)^2$ $\Leftrightarrow 4(5 - x) \geq 3(a - c)^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \text{ và } a - c \leq \frac{2\sqrt{5 - x}}{\sqrt{3}} \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có: $P \leq \frac{(a - c)^3}{4} \cdot x \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} x \sqrt{(5 - x)^3}$	0,25
	Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{(5 - x)^3}$; $x \in [0; 5]$ $f'(x) = \sqrt{5 - x}(5 - \frac{5}{2}x)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$ Ta có: $f(0) = 0$; $f(2) = 6\sqrt{3}$; $f(5) = 0$ $\underset{[0;5]}{Max} f(x) = 6\sqrt{3} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{(5 - x)^3} \leq 6\sqrt{3}; \forall x \in [0; 5]$ $\Rightarrow P \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 6\sqrt{3} \Leftrightarrow P \leq 4$	0,25
	Vậy $Max P = 4$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ a - b = b - c \\ a - c = 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + bc + ca = 2 \\ b = a - 1 \\ c = a - 2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$	0,25

Chú ý: Học sinh làm cách khác đáp án mà đúng vẫn được điểm tối đa.