

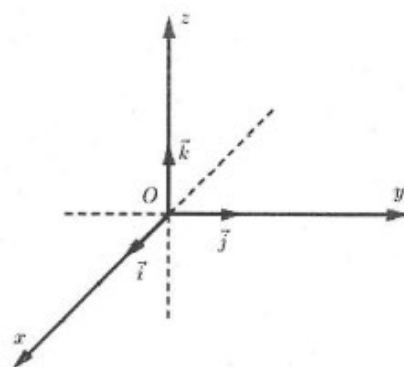
CHỦ ĐỀ 11: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VEC TƠ

I. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox ; Oy ; Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox ; Oy ; Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.

Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng (Oxy) ; (Oyz) ; (Oxz) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.



Chú ý: $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ là các vectơ đơn vị đôi một vuông góc nên $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

II. Tọa độ, vectơ

1) Định nghĩa: Nếu $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

2) Các công thức về vectơ

Cho 2 vectơ: $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ và $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$ ta có:

• Tổng và hiệu của hai vectơ: $\vec{u} \pm \vec{v} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

• Tích của một vectơ với một số: $k\vec{u} = (kx_1; ky_1; kz_1)$ ($k \in \mathbb{R}$).

• Hai vectơ bằng nhau: $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$

Chú ý: $\vec{0} = (0; 0; 0)$; $\vec{i} = (1; 0; 0)$; $\vec{j} = (0; 1; 0)$; $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

• Hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ cùng phương với nhau $\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$ ($k \neq 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = kx_2 \\ y_1 = ky_2 \\ z_1 = kz_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

(Với $k > 0$ thì $\vec{u}; \vec{v}$ cùng hướng; ngược lại $k < 0$ thì $\vec{u}; \vec{v}$ ngược hướng)

• Tích vô hướng của 2 vectơ kí hiệu: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = \text{hằng số}$.

$\Rightarrow$ Hai vectơ $\vec{u}; \vec{v}$ vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

• Độ dài vectơ: $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

• Điều kiện để 3 điểm A, B, C thẳng hàng $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k.(x_C - x_A) \\ y_B - y_A = k.(y_C - y_A) \\ z_B - z_A = k.(z_C - z_A) \end{cases}$

▪ Góc giữa 2 vector: $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ (với $\vec{u}; \vec{v} \neq \vec{0}$).

Chú ý: Khi $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ thì $\cos(\vec{u}; \vec{v}) > 0 \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v})$ là góc nhọn, ngược lại nếu $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$ thì $\cos(\vec{u}; \vec{v}) < 0 \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v})$ là góc tù.

III. Tọa độ của điểm

1) Định nghĩa:

Điểm $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ).

2) Tính chất:

Cho 2 điểm $A(x_1; y_1; z_1); B(x_2; y_2; z_2)$ ta có:

Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$; vector $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

Độ dài đoạn thẳng AB bằng độ dài vector AB và: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Trung điểm của đoạn AB là M có tọa độ là:
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ z_M = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{cases}.$$

Khi đó: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Nếu $C(x_3; y_3; z_3)$ và ABC tạo thành một tam giác có trọng tâm là G thì:
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{cases}.$$

Ví dụ 1: Trong không gian tọa độ Oxyz cho 3 vector $\vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b} = (0; -1; 1); \vec{c} = (1; 5; 2)$.

a) Tìm tọa độ các vector $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ và $\vec{v} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$.

b) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}; \vec{b} \cdot \vec{c}$ và $\vec{a} \cdot \vec{c}$.

c) Tính $\cos(\vec{a}; \vec{b})$ và $\cos(\vec{b}; \vec{c})$.

Lời giải:

a) Ta có: $\vec{u} = (1; 2; 3) + (0; -1; 1) - (1; 5; 2) = (0; -4; 2)$

$$\vec{v} = 2(1; 2; 3) + 3(0; -1; 1) + (1; 5; 2) = (2; 4; 6) + (0; -3; 3) + (1; 5; 2) = (3; 6; 11).$$

b) Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 - 2 + 3 = 1$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = -3$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = 17$.

$$\text{c) } \cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{0+1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}; \cos(\vec{b}; \vec{c}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-3}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{30}} = \frac{-3}{2\sqrt{15}}.$$

Ví dụ 2: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(0; 1; -2)$; $B(2; 1; 0)$; $C(1; 4; 5)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

c) Tính cosin góc $\widehat{ABC}$.

d) Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $MB = MC$.

Lời giải:

$$\text{a) Gọi } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ ta có: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2 \Rightarrow G(1; 2; 1). \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 1 \end{cases}$$

b) Để $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (2; 0; 2) = (1 - x_D; 4 - y_D; 5 - z_D) \Rightarrow D(-1; 4; 3)$.

c) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-2; 0; -2)$; $\overrightarrow{BC} = (-1; 3; 5)$

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 - 10}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{1+9+25}} = \frac{-4}{\sqrt{70}}.$$

d) Do điểm $M \in Ox$ nên ta gọi $M(x; 0; 0)$ ta có $MB = MC \Leftrightarrow MB^2 = MC^2$.

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + 1^2 + 0^2 = (x-1)^2 + 4^2 + 5^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = x^2 - 2x + 42 \Leftrightarrow x = \frac{-37}{2}.$$

$$\text{Vậy } M\left(-\frac{37}{2}; 0; 0\right).$$

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$; $\vec{b} = (0; 2; -1)$; $\vec{c} = (1; 7; 2)$; $\vec{d} = (0; -17; -2)$

a) Tìm $\vec{u} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Tìm $m; n; p$ biết rằng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

Lời giải:

a) Ta có: $\vec{u} = (2; -5; 3) - 4(0; 2; -1) - 2(1; 7; 2) = (2; -5; 3) - (0; 8; -4) - (2; 14; 4) = (0; -27; 3)$.

b) Ta có: $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \Leftrightarrow (0; -17; -2) = m(2; -5; 3) + n(0; 2; -1) + p(1; 7; 2)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + p = 0 \\ -5m + 2n + 7p = -17 \\ 3m - n + 2p = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ p = -2 \end{cases}.$$

Ví dụ 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 vector $\vec{u} = (x; 2x - 3; 2)$ và $\vec{v} = (y; -4; 8)$. Tìm x và y để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải:

Để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương thì $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (x; 2x - 3; 2) = k(y; -4; 8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = ky \\ 2x - 3 = -4k \\ 2 = 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4}y \\ 2x - 3 = -1 \\ k = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ x = 1 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy $x = 1; y = 4$.

Ví dụ 5: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(2; 5; 3); B(3; 7; 4); C(x; y; 6)$, tìm x, y để A, B, C thẳng hàng.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1); \overrightarrow{AC} = (x - 2; y - 5; 3)$.

$$\text{Để } A, B, C \text{ thẳng hàng thì } \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k \\ y - 5 = 2k \\ 3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ x = 5 \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy $x = 5; y = 11$.

Ví dụ 6: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 vector $\vec{a} = (1; \log_3 5; m)$ và $\vec{b} = (3; \log_5 3; 4)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải:

$$\text{Để } \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 3 + \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 4m = 0 \Leftrightarrow 3 + 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Ví dụ 7: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho vector $\vec{a} = (2\sqrt{2}; -1; 4)$.

a) Tìm vector $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $|\vec{b}| = 10$.

b) Tìm vector $\vec{c}$ cùng phương với $\vec{a}$, biết rằng $\vec{a} \cdot \vec{c} = 100$.

Lời giải:

a) Vì $\vec{b}$ cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{b} = k \cdot \vec{a} = (2\sqrt{2}k; -k; 4k)$

Lại có: $|\vec{b}| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(2k\sqrt{2})^2 + (-k)^2 + 16k^2} = \sqrt{25k^2} = 10 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2$.

Do đó $\vec{b} = 2\vec{a} = (4\sqrt{2}; -2; 8)$ hoặc $\vec{b} = -2\vec{a} = (-4\sqrt{2}; 2; -8)$

b) Vì $\vec{c}$ cùng phương với $\vec{a}$ nên $\vec{c} = k \cdot \vec{a} = (2\sqrt{2}k; -k; 4k)$

Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8k + k + 16k = 25k = 100 \Leftrightarrow k = 4 \Rightarrow \vec{c} = (8\sqrt{2}; -4; 16)$.

Ví dụ 8: Trong không gian tọa độ với hệ trục $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $(\vec{a}; \vec{b}) = 120^\circ$, biết $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

Lời giải:

Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 9 = 13 + 12 \cos 120^\circ = 7$

Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$.

Lại có: $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 4 \cdot 9 = 40 - 24 \cos 120^\circ = 52$.

Do đó: $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{52}$

Ví dụ 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = \vec{i} + (m+1)\vec{j} + 2\vec{k}$. Tìm giá trị m để $|\vec{u}| = \sqrt{6}$.

Khi đó giá trị m bằng:

A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$.

Lời giải:

Ta có: $\vec{u} = (1; m+1; 2)$ suy ra $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (m+1)^2 + 2^2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow (m+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với trọng tâm G . Biết $A(1; -1; -2)$, $B(2; 1; -3)$, $G(1; -2; -3)$. Khi đó tọa độ điểm C là :

A. $\left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$

B. $(0; -6; -4)$

C. $(4; -2; -8)$

D. $(-1; -4; -1)$

Lời giải:

Giả sử $C(x_C; y_C; z_C)$. Khi đó:
$$\begin{cases} x_C = 3.1 - 1 - 2 = 0 \\ y_C = 3.(-2) + 1 - 1 = -6 \\ z_C = 3.(-3) + 2 + 3 = -4 \end{cases} \Rightarrow C(0; -6; -4). \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -1; 10)$, biết $\vec{b}$ cùng chiều với $\vec{a}$ và có $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 10$. Chọn phương án đúng

A. $\vec{b} = (-6; 3; 0)$.

B. $\vec{b} = (-4; 2; 0)$.

C. $\vec{b} = (6; -3; 0)$.

D. $\vec{b} = (4; -2; 0)$.

Lời giải:

Ta có: $\vec{b} = k\vec{a} = (2k; -k; 0) (k > 0) \Rightarrow |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |4k + k| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases} (L) \Rightarrow \vec{b} = (4; -2; 0). \text{ Chọn D.}$

Ví dụ 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; -1); B(2; -1; 3); C(-3; 5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4; 8; -3)$.

B. $D(-2; 2; 5)$.

C. $D(-2; 8; -3)$.

D. $D(-4; 8; -5)$.

Lời giải:

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1; -3; 4) = (-3 - x_D; 5 - y_D; 1 - z_D)$.

$\Rightarrow D(-4; 8; -3). \text{ Chọn A.}$

Ví dụ 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; -1; 0); \vec{b} = (1; 2; 3); \vec{c} = (4; 2; -1)$ và các mệnh đề sau:

(1) $\vec{a} \perp \vec{b}$

(2) $\vec{b} \cdot \vec{c} = 5$.

(3) $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{c}$.

(4) $|\vec{b}| = \sqrt{14}$.

Trong bốn mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề **đúng**?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải:

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \quad (1) \text{ đúng.}$

$\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 4 + 4 - 3 = 5 \Rightarrow (2) \text{ đúng.}$

+) $\frac{2}{4} \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{a}$ không cùng phương với $\vec{c}$ (3) sai.

+) $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \Rightarrow (4)$ đúng. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(-1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM}$.

- A. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$. B. $M(1;3;4)$. C. $M(-4;3;5)$. D. $M(5;0;-1)$.

Lời giải:

Giả sử $M(a;b;c)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow (a-2; b-1; c-1) = 2(a+1; b-2; c-3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = 2(a+1) \\ b-1 = 2(b-2) \\ c-1 = 2(c-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow M(-4;3;5). \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $M(-1;1;2)$; $N(1;4;3)$; $P(5;10;5)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $MN = \sqrt{14}$.
B. Các điểm O, M, N, P cùng thuộc một mặt phẳng.
C. Trung điểm của NP là $I(3;7;4)$.
D. M, N, P là ba đỉnh của một tam giác.

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{MN}(2;3;1)$; $\overrightarrow{MP}(6;9;3)$ suy ra $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ nên M, N, P thẳng hàng suy ra khẳng định **D** sai. Các khẳng định còn lại đều đúng. **Chọn D.**

Ví dụ 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(3;0;3)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $G(2;2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC .

- A. $C(2;4;4)$ B. $C(0;2;2)$ C. $C(8;10;10)$ D. $C(-2;-4;-4)$

Lời giải:

$$\text{Giả sử } C(a;b;c). \text{ Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} a = 3.2 - 1 - 3 = 2 \\ b = 3.2 - 2 - 0 = 4 \\ c = 3.2 - (-1) - 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow G(2;4;4). \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$ và $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ là:

- A. $(1;1;-2)$. B. $(2;1;-1)$. C. $(1;2;-1)$. D. $(2;1;-2)$.

Lời giải:

Từ giả thiết ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'}(0;0;-3) \Rightarrow A'(0;0;-3) \\ \overrightarrow{AB}(3;0;0) = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow B'(3;0;-3) \\ \overrightarrow{AD}(0;3;0) = \overrightarrow{A'D'} \Rightarrow D'(0;3;-3) \end{cases} \longrightarrow G(2;1;-2). \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hãy tính góc giữa hai vector $\vec{a}(1;2;-2)$ và $\vec{b}(-1;-1;0)$.

- A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

Lời giải:

Gọi α là góc giữa hai vector. Ta có:

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;3)$, $B(2;-3;5)$, $C(-1;-2;6)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, tính $T = a - b + c$.

- A. $T = 3$ B. $T = 5$ C. $T = 11$ D. $T = 10$

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{CB} = 2(-3;1;1) \Rightarrow M(7;-3;1)$

Suy ra $T = a - b + c = 11$. **Chọn C.**

Ví dụ 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = -6$ B. $m = 0$ C. $m = -4$ D. $m = 2$

Lời giải:

Ta có: $\overrightarrow{NM}(3;2;-2)$, $\overrightarrow{NP}(2;m-2;1)$. Để tam giác MNP vuông tại N thì

$$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 2(m-2) + (-2) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 21: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 điểm A và B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$ và $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 2\vec{j}$. Trung điểm I của AB có tọa độ là.

- A. $I(2; -2; -2)$ B. $I(-2; 2; 2)$ C. $I\left(\frac{7}{2}; -3; -4\right)$ D. $I(7; -3; -4)$

Lời giải:

Ta có: $A(3; -2; -4)$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ suy ra $B(4; -4; -4)$.

Do đó trung điểm của AB là: $I\left(\frac{7}{2}; -3; -4\right)$. **Chọn C.**

Ví dụ 22: Vector $\vec{u} = (a; b; c)$ có độ dài bằng 2, tạo với vector $\vec{a} = (1; 1; 1)$ góc 30° , tạo với vector $\vec{b} = (1; 1; 0)$ góc 45° . Tìm tất cả các giá trị của a .

- A. $a = 1$. B. $a = 2 \pm \sqrt{2}$. C. $a = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$. D. $a = 2 \pm \sqrt{3}$.

Lời giải:

Ta có: $\cos(\vec{u}; \vec{a}) = \frac{a+b+c}{2\sqrt{3}} = \cos 30^\circ \Rightarrow a+b+c = 3$.

Lại có: $\cos(\vec{u}; \vec{b}) = \frac{a+b}{2\sqrt{2}} = \cos 45^\circ \Rightarrow a+b = 2 \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a+b = 2 \end{cases}$

Mặt khác $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 + (2-a)^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 23: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° . Biết rằng $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$, giá trị của biểu thức $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}|$ là.

- A. $A = \sqrt{50}$. B. $A = 50$. C. $A = 2\sqrt{6}$. D. $A = \sqrt{37} + \sqrt{13}$.

Lời giải:

Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 9 = 37$

Tương tự $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 120^\circ + 9 = 13$

Do đó $A = |\vec{a} - \vec{b}| + |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{37} + \sqrt{13}$. **Chọn D.**

Ví dụ 24: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D'(3; 5; 4)$. Tọa độ điểm A' là:

- A. $A'(-3;3;1)$. B. $A'(-3;-3;3)$. C. $A'(-3;-3;-3)$. D. $A'(-3;3;3)$.

Lời giải:

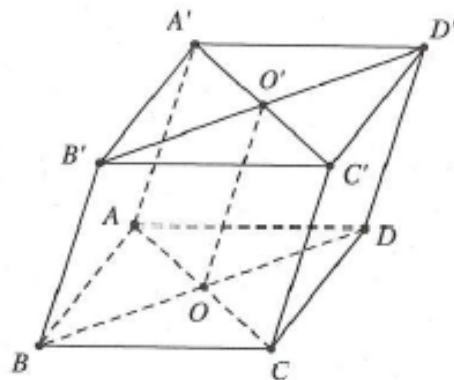
Trung điểm của AC là $O\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{1}{2}\right)$.

Trung điểm của $B'D'$ là $O'\left(\frac{1}{2}; 3; \frac{5}{2}\right)$.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'}$

$$\Leftrightarrow (x_{A'} + 3; y_{A'} - 2; z_{A'} - 1) = (0; 1; 2)$$

$$\Leftrightarrow A'(-3; 3; 3). \text{ Chọn D.}$$



Ví dụ 25: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}$ vuông góc với 2 vectơ $\vec{a} = (1; 1; 1)$ và $\vec{b} = (1; -1; 3)$, $\vec{u}$ tạo với tia Oz một góc tù và $|\vec{u}| = 2\sqrt{6}$. Tọa độ vectơ $\vec{u}$ là:

- A. $(2; -1; -1)$. B. $(-4; 2; 2)$. C. $(4; -2; -2)$. D. $(2; 2; -4)$.

Lời giải:

$$\text{Gọi } \vec{u} = (x; y; z) \text{ ta có } \begin{cases} x + y + z = 0 & (1) \\ x - y + 3z = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24 & (3) \end{cases}$$

Do $\vec{u}$ tạo với tia Oz một góc tù nên $\vec{u} \cdot \vec{k} < 0 \Leftrightarrow z < 0$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \begin{cases} x + y = -z \\ x - y = -3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases} \text{ thế vào (3) ta được: } 4z^2 + z^2 + z^2 = 24$$

Với điều kiện $z < 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow \vec{u} = (4; -2; -2)$. **Chọn C.**

Ví dụ 26: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 2; -1)$; $B(2; -1; 3)$; $C(-4; 7; 5)$. Gọi điểm $D(a; b; c)$ là chân đường phân giác hạ từ đỉnh B xuống cạnh AC . Tính $a + b + c$.

- A. 4. B. $\frac{22}{3}$. C. 3. D. 5.

Lời giải:

Ta có: $AB = \sqrt{26}$; $BC = 2\sqrt{26}$.

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} \Leftrightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Do } D \text{ nằm giữa 2 điểm } A \text{ và } C \text{ nên } \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-a) = a+4 \\ 2(2-b) = b-7 \\ 2(-1-c) = c-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{11}{3} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 4. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 27: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 điểm $A(1;2;3)$; $B(5;-2;-1)$. Tìm tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB}$. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ là.

- A. 2. B. -2. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow MA^2 \cdot \overrightarrow{MA}^2 = 16MB^2 \cdot \overrightarrow{MB}^2 \Leftrightarrow MA^4 = 16MB^4 \Rightarrow MA = 2MB.$$

Theo đề thì ta dễ thấy hai vectơ $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{MB}$ cùng chiều nhau.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} 1-x_M = 2(5-x_M) \\ 2-y_M = 2(-2-y_M) \\ 3-z_M = 2(-1-z_M) \end{cases} \Rightarrow M(9;-6;-5) \Rightarrow a+b+c = -2. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 28: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;3;4)$ và $C(3;5;-2)$. Tìm tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $I\left(\frac{5}{2}; 4; 1\right)$. B. $I\left(\frac{37}{2}; -7; 0\right)$. C. $I\left(-\frac{27}{2}; 15; 2\right)$. D. $I\left(2; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải:

Nhận thấy $\overrightarrow{AB}(1;1;5)$; $\overrightarrow{AC}(2;3;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên tam giác ABC vuông tại A khi đó trung điểm

$I\left(\frac{5}{2}; 4; 1\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC . **Chọn A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Trong các cặp véc tơ sau, cặp véc tơ đối nhau là

- A. $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (-1; -2; 1)$. B. $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$.
C. $\vec{a} = (-1; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; -2; 1)$. D. $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (-1; -2; 0)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điều kiện để $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$ là

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. D. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điều kiện để hai véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau là

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. D. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điều kiện để hai véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ đối nhau là

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. B. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. D. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 3; -1)$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

- A. $(-1; 5; 2)$. B. $(3; -1; 4)$. C. $(1; 5; 2)$. D. $(1; -5; -2)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 3; -1)$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 5; 2)$. B. $\vec{a} - \vec{b} = (3; -1; -4)$. C. $\vec{b} - \vec{a} = (3; -1; 4)$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

Câu 7: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; 4)$, $B(-2; 2; 6)$, $C(6; 0; -1)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. -67 . B. 27 . C. 67 . D. -27 .

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 véc tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; -4; 2)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(3; -1; 4)$. Khi đó trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $G\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{7}{3}\right)$. B. $G(3; -9; 21)$. C. $G\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{7}{2}\right)$. D. $G\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{7}{5}\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a}$ thỏa mãn hệ thức $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$. Bộ số nào dưới đây là tọa độ của véc tơ $\vec{a}$?

- A. $(2; 0; -3)$. B. $(2; 0; 3)$. C. $(2; -3; 0)$. D. $(2; 3; 0)$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{k}$. Bộ số nào dưới đây là tọa độ của điểm M ?

- A. $(0; 2; 1)$. B. $(2; 0; 1)$. C. $(2; 1; 0)$. D. $(0; 1; 2)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-2)$ và $B(4;-5;2)$. Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(-3;8;-4)$. B. $(3;-8;4)$. C. $(3;2;4)$. D. $(-3;2;4)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;2;-3)$, $B(3;-2;1)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(2;0;-1)$. B. $I(4;0;-2)$. C. $I(2;0;-4)$. D. $I(2;-2;-1)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(-1;3;2)$, $C(2;4;-3)$. Giá trị của tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. 10. B. -6. C. -2. D. 2.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên trục Oz ?

- A. $A(1;0;0)$. B. $A(0;1;0)$. C. $A(0;0;2)$. D. $A(2;1;0)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng Oxy ?

- A. $A(1;2;3)$. B. $A(0;1;2)$. C. $A(0;0;2)$. D. $A(2;0;0)$.

Câu 17: Điểm $M(-4;0;7)$ nằm trên

- A. mp (Oxz). B. trục Oy . C. mp (Oxy). D. mp (Oyz).

Câu 18: Điểm $M(-1;2;0)$ nằm trên

- A. mp (Oxz). B. trục Oz . C. mp (Oxy). D. mp (Oyz).

Câu 19: Điểm $M(0;1;7)$ nằm trên

- A. mp (Oxz). B. trục Ox . C. mp (Oxy). D. mp (Oyz).

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu A' của điểm $A(3;2;1)$ lên trục Ox có tọa độ là

- A. $(3;2;0)$. B. $(3;0;0)$. C. $(0;0;1)$. D. $(0;2;0)$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm A' đối xứng với điểm $A(3;5;-7)$ qua trục Ox . Tọa độ của điểm A' là

- A. $(3;0;0)$. B. $(-3;5;7)$. C. $(3;-5;-7)$. D. $(3;-5;7)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với M là trung điểm của cạnh BC và $A(1;-2;3)$, $B(3;0;2)$, $C(-1;4;-2)$. Tọa độ của véc tơ $\overrightarrow{AM}$ là

- A. $(2;-2;2)$. B. $(0;-4;3)$. C. $(0;4;-3)$. D. $(0;8;-6)$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$ và $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + (m+1)\vec{k}$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị và $m \in \mathbb{R}$. Để hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì m bằng

A. 2.

B. -4.

C. -2.

D. 4.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = (m^2 - 3; 6; m)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị và $m \in \mathbb{R}$. Để hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì

A. $m = 3$ B. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 3 \end{cases}$.C. $m = -3$.D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -3; 4)$ và $\vec{b} = 2\vec{i} + m\vec{j} + p\vec{k}$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị và $m, p \in \mathbb{R}$. Để hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì

A. $m = 6, p = -8$.B. $m = -6, p = -8$.C. $m = 1, p = 8$.D. $m = -6, p = 8$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a} = (m; 1; m)$ và $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + m\vec{k}$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị và $m \in \mathbb{R}$. Để hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc thì

A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$.B. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$.C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$.D. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -1 \end{cases}$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo thành với nhau một góc 120° . Biết $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$. Khi đó $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - \vec{b}|$ lần lượt bằng

A. 19 và 49.

B. 49 và 19.

C. 7 và $\sqrt{19}$.D. $\sqrt{19}$ và 7.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba véc tơ $\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0), \vec{c} = (1; 1; 1)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.B. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.C. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3; -4; 0), B(0; 2; 4), C(4; 2; 1)$. Tọa độ điểm $D \in Ox$ thỏa mãn $AD = BC$ là

A. $(0; 0; 0), (6; 0; 0)$.B. $(2; 0; 0), (6; 0; 0)$.C. $(-3; 0; 0), (3; 0; 0)$.D. $(0; 0; 0), (-6; 0; 0)$.

Câu 30: Cho điểm $M(1; -1; 1)$ và $H(0; 1; 4)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho đoạn thẳng MN nhận H làm trung điểm.

A. $N(-1; 3; 3)$.B. $N(-1; 3; 4)$.C. $N(-1; 3; 6)$.D. $N(-1; 3; 7)$.

Câu 31: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài lần lượt là 1 và 2. Biết góc $(\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$ thì $|\vec{a} + \vec{b}|$ bằng

A. 1.

B. $\sqrt{7}$.C. $\frac{3}{2}$.D. $\frac{\sqrt{22}}{2}$.

Câu 32: Cho $A(3; 1; 0), B(-2; 4; \sqrt{2})$. Tọa độ M là điểm trên trục tung và cách đều A và B là

A. $M(2; 0; 0)$.B. $M(0; -2; 0)$.C. $M(0; 2; 0)$.D. $M(0; 0; 2)$.

Câu 33: Cho $A(-1;2;3)$, $B(0;1;-3)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BA}$ là

- A. $M(3;4;9)$. B. $M(-3;4;15)$. C. $M(1;0;-9)$. D. $M(-1;0;9)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;2;4)$, $N(2;-1;0)$, $P(-2;3;-1)$. Tìm tọa độ điểm Q biết rằng $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$.

- A. $Q(-3;6;3)$. B. $Q(3;-6;-3)$. C. $Q(-1;2;1)$. D. $Q\left(-\frac{3}{2};2;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-4;3;5)$, $B(-3;2;5)$ và $C(5;-3;8)$. Tính $\cos \widehat{ABC}$.

- A. $-\frac{13}{14}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{14}$. C. $\frac{13}{14}$. D. $-\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$, $C(1;1;2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $AB \perp AC$. B. $AB \perp BC$. C. $BC \perp AC$. D. $AB = AC$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 véc tơ $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (2;-1;2)$, $\vec{c} = (-2;1;-1)$. Tọa độ của véc tơ $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ là

- A. $(-3;9;4)$. B. $(5;5;12)$. C. $(-3;-9;4)$. D. $(-3;9;-4)$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{a}(4;-2;-4)$, $\vec{b}(6;-3;2)$ thì $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$ có giá trị bằng

- A. 200. B. $\sqrt{200}$. C. 200^2 . D. ± 200 .

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (x;2;1)$, $\vec{b} = (2;1;2)$. Tìm x biết $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}$.

- A. $x = \frac{1}{2}$. B. $x = \frac{1}{3}$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = \frac{1}{4}$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc tạo bởi hai véc tơ $\vec{a}(-4;2;4)$ và $\vec{b}(2\sqrt{2};-2\sqrt{2};0)$ là

- A. 45° . B. 90° . C. 135° . D. 60° .

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$, $C(1;1;2)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng khi nói về tam giác ABC ?

- A. $\triangle ABC$ vuông tại A . B. $\triangle ABC$ vuông tại B .
C. $\triangle ABC$ vuông tại C . D. $\triangle ABC$ đều.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;1)$, $B(0;3;-1)$ và điểm C nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Điểm C có tọa độ là

- A. $(1;2;3)$. B. $(1;2;1)$. C. $(1;2;0)$. D. $(1;1;0)$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $M(2;-3;5)$, $N(4;7;-9)$, $P(3;2;1)$, $Q(1;-8;12)$.

Bộ 3 điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A. M, N, Q . B. M, N, P . C. M, P, Q . D. N, P, Q .

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $P(x;-1;-1)$, $Q(3;-3;1)$, biết $PQ=3$, giá trị của x là:

- A. 2 hoặc 4. B. -2 hoặc -4. C. 2 hoặc -4. D. 4 hoặc -2.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;3)$, $B(-1;3;-3)$, và điểm $C(0;-2;4)$.

Điểm D thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC}$ có tọa độ là?

- A. $D\left(2;0;\frac{3}{4}\right)$. B. $D\left(-2;0;\frac{3}{4}\right)$. C. $D\left(2;0;-\frac{3}{4}\right)$. D. $D\left(-2;0;-\frac{3}{4}\right)$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-3;4;-2)$, $B(-5;6;2)$ và $C(-4;7;-1)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$ là:

- A. $M(4;-11;3)$. B. $M(-4;11;-3)$. C. $M(4;11;-3)$. D. $M(-4;-11;3)$.

Câu 47: Cho ba điểm $A(-2;0;2)$, $B(1;2;3)$, $C(x;y-3;7)$. Biết x,y là giá trị để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Khi đó tổng $x+y$ bằng

- A. 13. B. 26. C. 0. D. 24.

Câu 48: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Với giá trị nào của m thì tam giác MNP vuông tại N ?

- A. $m=3$. B. $m=2$. C. $m=1$. D. $m=0$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Cho $OABC$ là hình bình hành thỏa mãn $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Khi đó diện tích hình bình hành $OABC$ bằng:

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. 1. D. 4.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$ thì $ABCD$ là hình bình hành khi tọa độ D là

- A. $D(1;1;2)$. B. $D(3;1;0)$. C. $D(3;-1;0)$. D. $D(-1;1;2)$.

Câu 51: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1, điểm A trùng với gốc tọa độ O , B nằm trên tia Ox , D nằm trên tia Oy và A' nằm trên tia Oz . Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $A(0;0;0)$.

B. $D'(0;1;1)$.

C. $C'(1;1;1)$.

D. $A'(1;-1;-1)$.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (3; -2; 1)$ và $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Biết rằng $\vec{u} = m\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = 3\vec{a} + m\vec{b}$ ($m \in \mathbb{R}$). Giá trị của m để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc là

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -9 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 9 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 9 \end{cases}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Ta có $(1; 2; -1) = -(-1; -2; 1) \Rightarrow \vec{a} = (1; 2; -1), \vec{b} = (-1; -2; 1)$ đối nhau. **Chọn A.**

Câu 2: Để $\vec{a}$ vuông góc với $\vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **Chọn A.**

Câu 3: Để hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$. **Chọn D.**

Câu 4: Để hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ đối nhau thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. **Chọn C.**

Câu 5: $\vec{a} + \vec{b} = (1; 2; 3) + (-2; 3; -1) = (-1; 5; 2)$. **Chọn A.**

Câu 6: $\vec{a} + \vec{b} = (1; 2; 3) + (-2; 3; -1) = (-1; 5; 2)$. **Chọn A.**

Câu 7: $\overrightarrow{AB} = (-4; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (4; -1; -5) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-5) = -27$. **Chọn D.**

Câu 8: Ta có $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \neq 4 \Rightarrow \vec{b}, \vec{c}$ không vuông góc với nhau. **Chọn D.**

Câu 9: Ta có $G\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{7}{3}\right)$. **Chọn A.**

Câu 10: $\vec{a} = (2; 0; -3)$. **Chọn A.**

Câu 11: $M(0; 2; 1)$. **Chọn A.**

Câu 12: $\overrightarrow{AB} = (3; -8; 4)$. **Chọn B.**

Câu 13: $I(2; 0; -1)$. **Chọn A.**

Câu 14: $\overrightarrow{AB} = (-4; 1; 1), \overrightarrow{AC} = (-1; 2; -4) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$. **Chọn D.**

Câu 15: $C(0; 0; 2) \in Oz$. **Chọn C.**

Câu 16: $D(2; 0; 0) \in (Oxy)$. **Chọn D.**

Câu 17: $M(-4; 0; 7) \in (Oxz)$. **Chọn A.**

Câu 18: $M(-1; 2; 0) \in (Oxy)$. **Chọn C.**

Câu 19: $M(0; 1; 7) \in (Oyz)$. **Chọn D.**

Câu 20: $A'(3; 0; 0)$. **Chọn B.**

Câu 21: Ta có
$$\begin{cases} x_{A'} = x_A \\ y_{A'} = -y_A \\ z_{A'} = -z_A \end{cases} \Rightarrow A'(3; -5; 7)$$
. **Chọn D.**

Câu 22: $M(1; 2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0; 4; -3)$. **Chọn C.**

Câu 23: Ta có
$$\begin{cases} \vec{a} = (4; 6; 6) \\ \vec{b} = (2; 3; m+1) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{m+1}{6} \Rightarrow m = 2$$
. **Chọn A.**

Câu 24: Ta có $\vec{b} = (2; 2; 1) \Rightarrow \frac{m^2 - 3}{2} = \frac{6}{2} = \frac{m}{1} \Rightarrow m = 3$. **Chọn A.**

Câu 25: Ta có $\vec{b} = (2; m; p) \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{m}{-3} = \frac{p}{4} \Rightarrow m = -6; p = 8$. **Chọn D.**

Câu 26: $\vec{b} = (4; 3; m) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3 + m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 27: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ = 19 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ = 49 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{7}$. **Chọn D.**

Câu 28: $\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{c}|}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 29: Giả sử $D(a; 0; 0)$.

Ta có $AD = BC \Leftrightarrow (a - 3)^2 + 4^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \Rightarrow D(6; 0; 0) \\ a = 0 \Rightarrow D(0; 0; 0) \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 30: Ta có $\begin{cases} x_N = 2x_H - x_M = -1 \\ y_N = 2y_H - y_M = 3 \\ z_N = 2z_H - z_M = 7 \end{cases} \Rightarrow N(-1; 3; 7)$. **Chọn D.**

Câu 31: Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ + |\vec{b}|^2 = 7 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$. **Chọn B.**

Câu 32: Giả sử $M(0; b; 0)$.

Ta có $MA = MB \Leftrightarrow 3^2 + (b - 1)^2 = 2^2 + (b - 4)^2 + 2 \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow M(0; 2; 0)$. **Chọn C.**

Câu 33: Giả sử $M(x; y; z)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2(-1 - 0) \\ y - 2 = 2(2 - 1) \\ z - 3 = 2(3 - (-3)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = 15 \end{cases} \Rightarrow M(-3; 4; 15)$. **Chọn B.**

Câu 34: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MQ} = (x_Q - 1; y_Q - 2; z_Q - 4) \\ \overrightarrow{NP} = (-4; 4; -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_Q - 1 = -4 \\ y_Q - 2 = 4 \\ z_Q - 4 = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(-3; 6; 3)$. **Chọn A.**

Câu 35: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -1; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (9; -6; 3) \\ \overrightarrow{BC} = (8; -5; 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{2} \\ AC = 3\sqrt{14} \\ BC = 7\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \cos ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = -\frac{13}{14}$. **Chọn A.**

Câu 36: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC$. **Chọn A.**

Câu 37: $\vec{m} = (3; 6; 9) + (-4; 2; -4) + (-2; 1; -1) = (3 - 4 - 2; 6 + 2 + 1; 9 - 4 - 1) = (-3; 9; 4)$. **Chọn A.**

Câu 38: $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right| = \left| 2a^2 - 6b^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \right| = \left| 2 \cdot 36 - 6 \cdot 49 + (24 + 6 - 8) \right| = 200$. **Chọn A.**

Câu 39: Ta có: $\frac{2}{3} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2x + 2 + 2}{\sqrt{x^2 + 5} \cdot 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 5 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$. **Chọn D.**

Câu 40: Ta có: $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-8\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{6 \cdot 4} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 135^\circ$. **Chọn C.**

Câu 41: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1; -2; 3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2\sqrt{3} \\ AC = \sqrt{2} \\ BC = \sqrt{14} \end{cases} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB \perp AC$. **Chọn A.**

Câu 42: $C(a; b; 0) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (a - 2; b - 1; -1) \\ \overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2) \end{cases}$

$\longrightarrow AC = kAB \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = -2k \\ b - 1 = 2k \\ -1 = -2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow C(1; 2; 0)$. **Chọn C.**

Câu 43: Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (2; 10; -14) \\ \overrightarrow{MQ} = (-1; -5; 7) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MQ} \Rightarrow M, N, Q \text{ thẳng hàng.}$ **Chọn A.**

Câu 44: $\overrightarrow{PQ} = (3 - x; -2; 2) \Rightarrow PQ = \sqrt{(3 - x)^2 + 8} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 45: Gọi $D(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = (2 - x; -y; 3 - z); \overrightarrow{DB} = (-1 - x; 3 - y; -3 - z)$

Và $\overrightarrow{DC} = (-x; -2 - y; 4 - z)$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = 2 \cdot (-1 - x) + 3 \cdot (-x) \\ -y = 2 \cdot (3 - y) + 3 \cdot (-2 - y) \\ 3 - z = 2 \cdot (3 - z) + 3 \cdot (4 - z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 0 \\ z = \frac{3}{4} \end{cases}$

Vậy $D\left(2; 0; \frac{3}{4}\right)$. **Chọn A.**

Câu 46: $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 4), \overrightarrow{BC} = (1; 1; -3) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = (-1; 7; -1)$.

Lại có $\overrightarrow{AM} = (x + 3; y - 4; z + 2) \longrightarrow \begin{cases} x + 3 = -1 \\ y - 4 = 7 \\ z + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 11 \\ z = -3 \end{cases}$. Vậy $M(-4; 11; -3)$. **Chọn B.**

Câu 47: $\overrightarrow{AB} = (3; 2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (x + 2; y - 3; 5)$

Để A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 13 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 48: $\overrightarrow{MN} = (-3; -2; 2)$, $\overrightarrow{PN} = (-2; 2 - m; -1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow 6 - 2(2 - m) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn D.**

Câu 49: $\overrightarrow{OA} = (-1; 1; 0)$, $\overrightarrow{OB} = (1; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

Suy ra diện tích tam giác OAB là $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 1$. **Chọn A.**

Câu 50: Để $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (-1; 0; 1) \Rightarrow D(3; 1; 0)$. **Chọn B.**

Câu 51: Do $AA' = 1$ và $A \equiv O(0; 0; 0)$, điểm A' nằm trên tia $Oz \Rightarrow A'(0; 0; 1)$.

Tương tự ta có: $B(0; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$; $D(0; 1; 0)$.

Mặt khác $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = (0; 0; 1) \Rightarrow D'(0; 1; 1)$ và $C'(1; 1; 1)$.

Khẳng định sai là **D**. **Chọn D.**

Câu 52: $|\vec{a}| = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{6}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 - 2 - 1 = 3$.

Để hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc thì $\vec{u} \cdot \vec{v} = (m\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + m\vec{b}) = 0$

$\Leftrightarrow 3m\vec{a}^2 + (m^2 - 9)\vec{a} \cdot \vec{b} - 3m\vec{b}^2 = 0 \Leftrightarrow 42m + 3(m^2 - 9) - 18m = 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 24m - 27 = 0$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$. **Chọn B.**