

Câu 1:(1,0 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) . Chứng minh rằng đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB .

Câu 2:(2,0 điểm)

1. Cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1, đặt $x = \log_a b + \log_b a, y = \log_b c + \log_c b$ và $z = \log_c a + \log_a c$. Tính giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$.

2. Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2023$ thỏa mãn:

$$(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)?$$

Câu 3:(2,0 điểm)

1. Giải phương trình: $4 \cos^2 x (1 + \sin x) + 2\sqrt{3} \cos x \cos 2x = 1 + 2 \sin x$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y \end{cases}$$

Câu 4:(2,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy

1. Chứng minh rằng: $SA \perp (SBC)$.

2. Biết góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm C đến (SBD)

Câu 5:(1,0 điểm)

Trong một hộp kín đựng 2024 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 2024. Lấy ngẫu nhiên ba tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được ba tấm thẻ mà ba số ghi trên ba tấm thẻ đó lập thành một cấp số cộng.

Câu 6:(1,0 điểm).

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ tâm I . Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AI, CD, BN . Biết phương trình đường thẳng MJ là $2y - 7 = 0$ và $N(5;6)$. Biết đỉnh C có hoành độ lớn hơn 3. Tìm tọa độ đỉnh C của hình vuông $ABCD$.

Câu 7:(1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

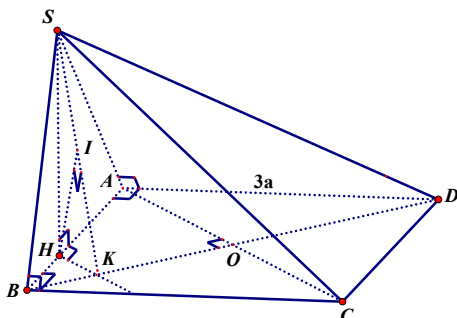
$$T = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}.$$

-----**HẾT**-----

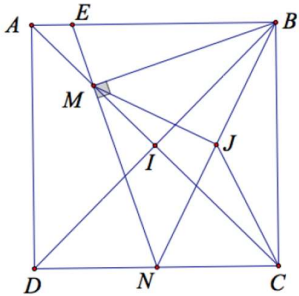
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN TOÁN
(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1	Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) . Chứng minh rằng đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng AB .	1,0
	Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là $\frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{2}x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx - 4m - 6 = 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 4m - 6 = 0 \quad (1)$ (Vì $x = -2$ không là nghiệm của phương trình (1) với mọi m).	0,25
	Ta có $\Delta' = m^2 + 4m + 6 = (m+2)^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m hay đường thẳng d luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm A, B phân biệt.	0,25
	Gọi $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1 - m\right), B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2 - m\right)$. Suy ra $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 - m - \frac{1}{2}x_1 + m\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} x_2 - x_1 $ $= \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{\Delta'}}{1} = \sqrt{5(m^2 + 4m + 6)}$	0,25
	$= \sqrt{5(m+2)^2 + 10} \geq \sqrt{10}, \forall m \in \mathbb{R}.$ Đẳng thức xảy ra khi $m = -2$. Vậy $\min AB = \sqrt{10}$.	0,25
2.1	Cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1, đặt $x = \log_a b + \log_b a, y = \log_b c + \log_c b$ và $z = \log_c a + \log_a c$. Tính giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$	1,0
	Ta có: $xyz = (\log_c b + \log_b c)(\log_a c + \log_c a)(\log_b a + \log_a b)$ $= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 2$	0,5
	$x^2 + y^2 + z^2 = (\log_c b + \log_b c)^2 + (\log_a c + \log_c a)^2 + (\log_b a + \log_a b)^2$ $= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 6$ Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4$.	0,5

2.2	Có bao nhiêu bộ $(x; y)$ với x, y nguyên và $1 \leq x, y \leq 2023$ thỏa mãn: $(xy + 2x + 4y + 8) \log_3 \left(\frac{2y}{y+2} \right) \leq (2x + 3y - xy - 6) \log_2 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)?$	1,0
	Điều kiện $\begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2023 \\ \frac{2x+1}{x-3} > 0, \frac{2y}{y+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{N}^* : x, y \leq 2023 \\ x > 3, y > 0 \end{cases}$.	0,25
	BPT cho có dạng $(x-3)(y-2) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + (x+4)(y+2) \log_3 \left(\frac{y-2}{y+2} + 1 \right) \leq 0 \quad (*).$	0,25
	TH1: Xét $y = 1$ thì (*) thành $-(x-3) \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) + 3(x+4) \log_3 \frac{2}{3} \leq 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x > 3$ vì $-(x-3) < 0, \log_2 \left(\frac{x+4}{x-3} + 1 \right) > \log_2 (0+1) = 0, 3(x+4) > 0, \log_3 \frac{2}{3} < 0$ Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2020 bộ $(x; y) = (x; 1)$ với $4 \leq x \leq 2023, x \in \mathbb{N}$.	0,25
	TH2: Xét $y = 2$ thì (*) thành $4(x+4) \log_3 1 \leq 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi x mà $4 \leq x \leq 2023, x \in \mathbb{N}$. Trường hợp này cho ta 2020 cặp $(x; y)$ nữa. TH3: Xét $y > 2, x > 3$ thì $VT(*) > 0$ nên (*) không xảy ra. Vậy có đúng 4040 bộ số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,25
3.1	Giải phương trình: $4 \cos^2 x (1 + \sin x) + 2\sqrt{3} \cos x \cos 2x = 1 + 2 \sin x$	1,0
	Phương trình tương đương với: ` $4 \cos^2 x + 4 \cos^2 x \cdot \sin x + 2\sqrt{3} \cos x \cos 2x = 1 + 2 \sin x.$ $\Leftrightarrow 2 \sin x (2 \cos^2 x - 1) + 2\sqrt{3} \cos x \cos 2x + 4 \cos^2 x - 1 = 0.$ $\Leftrightarrow 2 \sin x \cos 2x + 2\sqrt{3} \cos x \cos 2x + 3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0.$ $\Leftrightarrow 2 \cos 2x (\sin x + \sqrt{3} \cos x) + (\sqrt{3} \cos x + \sin x) (\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0.$ $\Leftrightarrow (\sqrt{3} \cos x + \sin x) (2 \cos 2x + \sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0.$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \cos x + \sin x = 0 \\ 2 \cos 2x + \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \end{cases}$	0,5
	+) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.	0,25

	$+) 2 \cos 2x + \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos \left(x - \frac{5\pi}{6} \right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ Vậy phương trình có nghiệm: $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,$ $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$	0,25
3.2	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y & (1) \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y & (2) \end{cases}$	1,0
	Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y$ $\Leftrightarrow (x+1-y) \left[(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 1 \right] = 0$ $\Leftrightarrow y = x+1$ (vì $(x+1)^2 + (x+1)y + y^2 + 1 = \left(x+1 + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 1 > 0 \quad \forall x, y$).	0,5
	Thay $y = x+1$ vào phương trình (2), ta được: $4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)(x+1)$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (\sqrt{x-1} + 3)^2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} + 3 = 2x \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x-1 = (2x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=3.$ Vậy hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (2; 3).$	0,25
4.1	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$, tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. 1. Chứng minh rằng: $SA \perp (SBC)$.	1,0
	 Gọi $H \in AB : SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BC$, mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$	0,5

	Ta lại có: $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \text{ (đpcm).}$	0,5
4.2	Biết góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm C đến (SBD) .	1,0
	Theo 1) ta có $BC \perp (SAB)$. Do $\begin{cases} AD // BC \\ BC \perp (SAB) \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$, do đó hình chiếu vuông góc của SD lên (SAB) là SA hay $\widehat{ASD} = 60^\circ$.	0,25
	Kẻ $HK \perp BD$ và $HI \perp SK$, khi đó $\begin{cases} BD \perp HK \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp HI$ và $\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp BD \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SBD)$. $\Rightarrow d(H, (SBD)) = HI$	0,25
	Xét tam giác vuông SAD ta có: $SA = \frac{AD}{\tan \widehat{ASD}} = a\sqrt{3}$ và $SD = \frac{AD}{\sin \widehat{ASD}} = 2a\sqrt{3}$. Và $SB = \sqrt{AB^2 - SA^2} = \sqrt{9a^2 - 3a^2} = a\sqrt{6}$. Ta tính $SH = \sqrt{\frac{SA^2 \cdot SB^2}{SA^2 + SB^2}} = \sqrt{2}a$ và $BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \sqrt{6a^2 - 2a^2} = 2a$. Vì vậy ta có tỉ lệ $\frac{HK}{AO} = \frac{HB}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}a}{2} = \sqrt{2}a$. Khi đó $HI = \sqrt{\frac{SH^2 \cdot HK^2}{SH^2 + HK^2}} = a$.	0,25
	Ta có $\frac{d(H, (SBD))}{d(A, (SBD))} = \frac{HB}{AB} = \frac{2}{3}$ Vậy $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = \frac{3}{2}d(H, (SBD)) = \frac{3}{2}HI = \frac{3a}{2}$	0,25
5	Trong một hộp kín đựng 2024 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 2024. Lấy ngẫu nhiên ba tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được ba tấm thẻ mà ba số ghi trên ba tấm thẻ đó lập thành một cấp số cộng.	1,0
	Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{2024}^3$.	0,25
	Biến cố A : “lấy được ba tấm thẻ mà ba số ghi trên ba tấm thẻ đó lập thành một cấp số cộng”. Gọi ba số lập thành cấp số cộng lần lượt là: u_1, u_2, u_3 . Khi đó u_1, u_3 phải cùng là hai số chẵn hoặc cùng là hai số lẻ.	0,25
	Từ 1 đến 2024 có 1012 số chẵn, 1012 số lẻ.	0,25

	+ Trường hợp 1: u_1, u_3 là hai số chẵn, có C_{1012}^2 cách chọn bộ $\{u_1; u_3\}$. + Trường hợp 2: u_1, u_3 là hai số lẻ, có C_{1012}^2 cách chọn bộ $\{u_1; u_3\}$. Với mỗi cách chọn bộ $\{u_1; u_3\}$ có duy nhất một cách chọn u_2 để u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng. Suy ra số cách lấy được 3 thẻ ghi ba số lập thành cấp số cộng là $n(A) = 2C_{1012}^2$.	
	Xác suất lấy được 3 thẻ ghi ba số lập thành cấp số cộng là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2C_{1012}^2}{C_{2024}^3} = \frac{3}{4046}.$	0,25
6	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình vuông $ABCD$ tâm I. Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AI, CD, BN. Biết phương trình đường thẳng MJ là $2y - 7 = 0$ và $N(5;6)$. Biết đỉnh C có hoành độ lớn hơn 3. Tìm tọa độ đỉnh C của hình vuông $ABCD$.	1,0
	 Gọi độ dài cạnh hình vuông là $4a$. Dùng định lý hàm số cosin cho các tam giác ABM, CMN, BCN tính được: $MB = MN = a\sqrt{10}, BN = 2a\sqrt{5} \Rightarrow BN^2 = MB^2 + MN^2$. Nên tam giác BMN vuông cân tại M và J là trung điểm của BN suy ra $MJ \perp NJ$.	0,25
	Đường thẳng NJ đi qua N và vuông góc với MJ có phương trình là $x - 5 = 0$ Toạ độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 5 = 0 \\ 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow J\left(5; \frac{7}{2}\right).$ Vì J là trung điểm BN nên $B(5;1)$.	0,25
	Gọi $C(x; y), x > 3$. Ta có: $BC = 2NC = \frac{2BN}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow NC = \sqrt{5}$. Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x-5)^2 + (y-1)^2 = 20 \\ (x-5)^2 + (y-6)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 + (y-1)^2 = 20 \\ 10y - 35 = 15 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5)^2 = 4 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, y = 5 \\ x = 3, y = 5 \end{cases}$	0,25
	Đối chiếu điều kiện ta có $C(7;5)$.	0,25
7	Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:	1,0

	$T = \frac{3(b+c)}{2a} + \frac{4a+3c}{3b} + \frac{12(b-c)}{2a+3c}$	
	$\text{Ta có } T + 5 = \left(\frac{3b}{2a} + \frac{2a}{3b} \right) + \left(\frac{2a}{3b} + \frac{2a}{2a} \right) + \left(\frac{3c}{2a} + \frac{3c}{3b} \right) + \left[\frac{12(b-c)}{2a+3c} + 4 \right]$ $= \left(\frac{3b}{2a} + \frac{2a}{3b} \right) + (2a+3c) \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \right) + \frac{4(2a+3b)}{2a+3c}.$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $\frac{3a}{2b} + \frac{2b}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{3a}{2b} \cdot \frac{2b}{3a}} = 2.$ Áp dụng BDT $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$ ta có $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \geq \frac{4}{2a+3b}.$	0,25
	Suy ra $T + 5 \geq 2 + 4 \left(\frac{2a+3c}{2a+3b} + \frac{2a+3b}{2a+3c} \right) \geq 2 + 4.2 = 10.$ Vậy $T \geq 5.$	0,25
	Dấu "=" xảy ra khi $2a = 3b = 3c.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 5	0,25

----- Hết -----

Lưu ý khi chấm bài:

- Đáp án chỉ trình bày một cách giải bao gồm các ý bắt buộc phải có trong bài làm của học sinh. Khi chấm nếu học sinh bỏ qua bước nào thì không cho điểm bước đó.
- Nếu học sinh giải cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong đáp án để cho điểm.
- Trong bài làm, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các phần sau có sử dụng kết quả sai đó không được điểm.
- Học sinh được sử dụng kết quả phần trước để làm phần sau.
- Trong lời giải bài hình, nếu học sinh không vẽ hình thì cho tối đa một nửa số điểm. Nếu học sinh vẽ sai hình thì không cho điểm.
- Điểm toàn bài tính lẻ đến 0,25 và không làm tròn.