

I-DẠNG 1: DẤU HIỆU ĐỒ THỊ TƯƠNG GIAO TRỤC HOÀNH	1
ĐỊNH LÝ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K	1
ĐỊNH LÝ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$	3
II-DẠNG 2: TÍNH TIẾN ĐỒ THỊ	5
1. Tính tiến theo phương hoành	5
2. Tính tiến theo phương tung	5
3. Tính tiến theo phương hoành và tung	6
III-DẠNG 3: HÀM HỢP:	9
IV-DẠNG 4: ĐỒ THỊ $y = f'(x)$ TƯƠNG GIAO VỚI MỘT ĐƯỜNG CONG KHÁC $y = h(x)$	13
V-DẠNG 5: SO SÁNH GIÁ TRỊ $f(a); f(b); f(c)$	18
VI-DẠNG 6: BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ	22

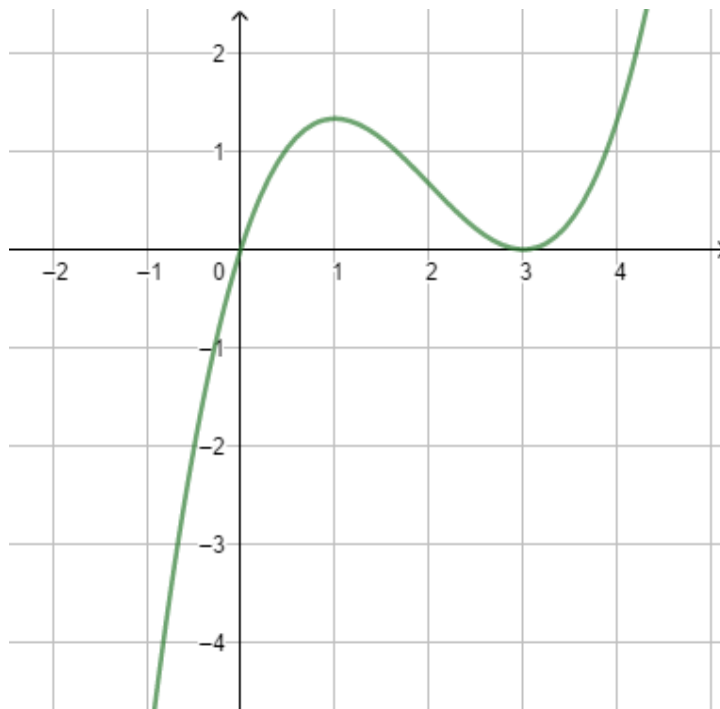
CO SỞ LÝ THUYẾT HÀM ẨN

I-DẠNG 1: DẤU HIỆU ĐỒ THỊ TƯƠNG GIAO TRỤC HOÀNH

ĐỊNH LÝ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K

- a. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K
- b. Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K

Chú ý: Xét đồ thị hàm số $y = f'(x)$ sau đây

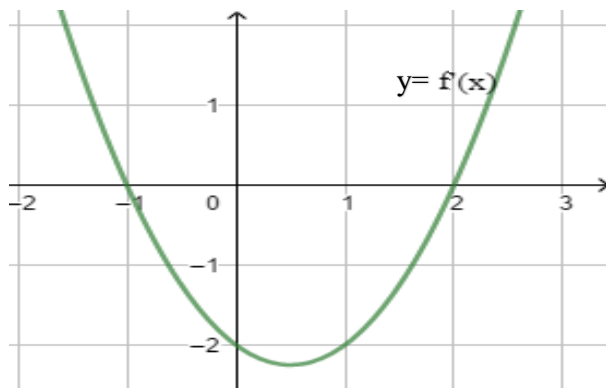


$f'(x) = 0$ khi đồ thị của nó có điểm chung với trục hoành suy ra nghiệm $x =$ nghiệm đơn, kép(bội chẵn)

$f'(x) > 0$ khi đồ thị của nó nằm trên trục hoành suy ra khoảng đồng biến tương ứng với phần đồ thị đó

$f'(x) < 0$ khi đồ thị của nó nằm dưới trục hoành suy ra khoảng nghịch biến tương ứng với phần đồ thị đó

Ví dụ: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ dưới đây ta nhận thấy:



1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$ là các giao điểm của đồ thị với trục Ox

2. $f'(x) > 0$ khi x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $g = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Khi $x < -1 \vee x > 2$

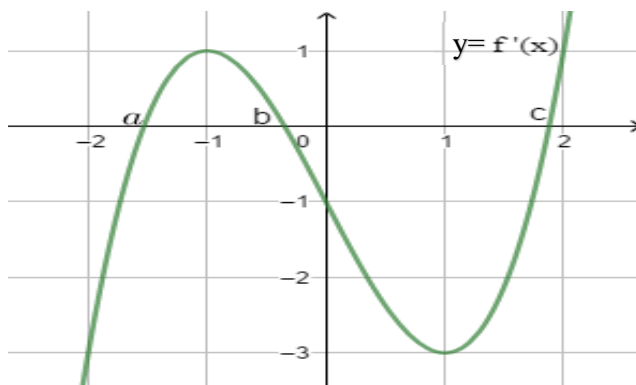
3. $f'(x) < 0$ khi x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $g = f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành.

Khi $-1 < x < 2$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Ví dụ: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ dưới đây ta nhận thấy:



1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \vee x = b \vee x = c$ là các giao điểm của đồ thị với trục Ox là các nghiệm đơn

2. $f'(x) > 0$ khi x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $g = f'(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Khi $a < x < b; x > c$

3. $f'(x) < 0$ khi x thuộc khoảng tương ứng với phần đồ thị hàm số $g = f'(x)$ nằm phía dưới trục hoành.

Khi $x < a; b < x < c$

Bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

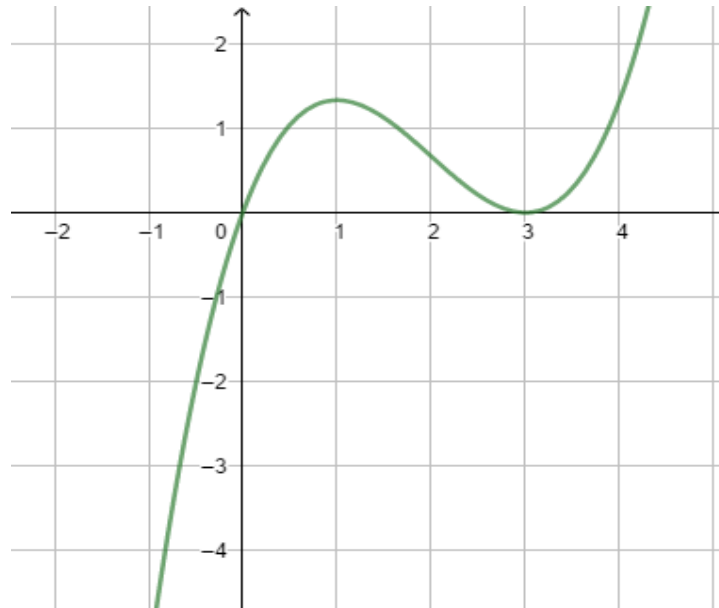
ĐỊNH LÝ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_0

Từ định lý trên ta có:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua x_0
- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua x_0

Chú ý: Xét đồ thị hàm số $y = f(x)$ sau đây



Chú ý:

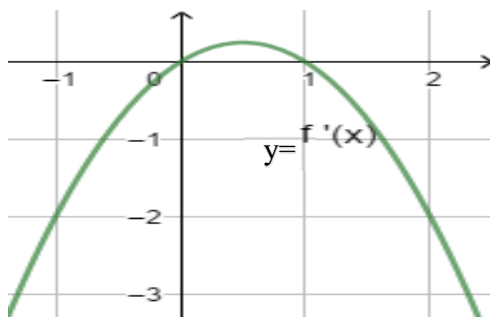
- Đồ thị cắt trục hoành gọi đó là nghiệm đơn
- Đồ thị tiếp xúc trục hoành gọi đó là nghiệm kép (nghiệm bội chẵn)
- Qua nghiệm đơn thì $f'(x)$ đổi dấu, còn qua nghiệm kép thì không đổi dấu
- Nghiệm đơn xác định cực trị. Nghiệm kép (bội chẵn) không là cực trị

$f'(x) = 0$ khi đồ thị của nó có điểm chung với trục hoành suy ra nghiệm $x = \dots$

$f'(x) > 0$ khi đồ thị của nó nằm trên trục hoành suy ra khoảng đồng biến

$f'(x) < 0$ khi đồ thị của nó nằm dưới trục hoành suy ra khoảng nghịch biến

Ví dụ: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ dưới đây ta nhận thấy:



1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ là các nghiệm đơn
2. $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua $x_0 = 0$
2. $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua $x_0 = 1$

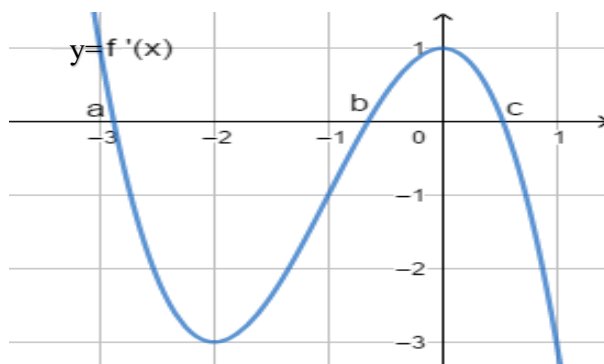
Từ đó ta có kết luận:

- ✓ Cụ thể $x = 0$ là điểm cực tiểu và $x = 1$ là điểm cực đại của hàm số

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						
							$-\infty$

Ví dụ: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ dưới đây ta nhận thấy:



1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \vee x = b \vee x = c$ là 3 nghiệm đơn
2. $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua $x_0 = b$
2. $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi tại hai chỗ x qua $x_0 = a; x_0 = c$

Từ đó ta có kết luận:

- ✓ Cụ thể $x = b$ là điểm cực tiểu và $x = a; x = c$ là hai điểm cực đại của hàm số

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

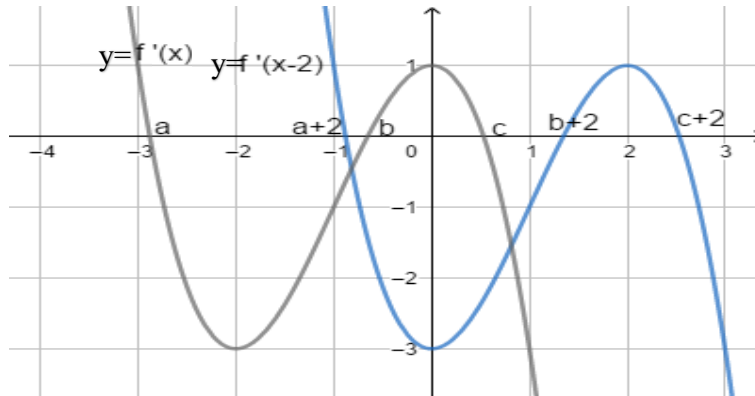
x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$				$-\infty$

II-DẠNG 2: TỊNH TIẾN ĐỒ THỊ

1. Tịnh tiến theo phương hoành

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) thì hàm số $y = f'(x+a)$ có đồ thị là (C') bằng cách tịnh tiến theo phương trục hoành một đoạn bằng $|a|$. Nếu a âm tịnh tiến qua phải $|a|$ đơn vị và ngược lại.

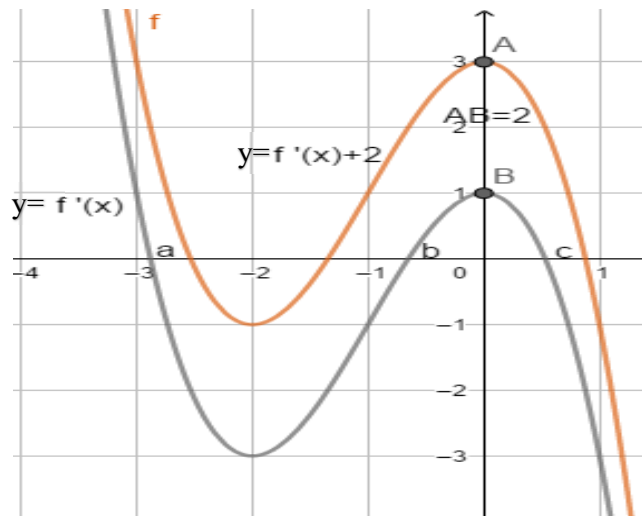
Ví dụ: Tịnh tiến đồ thị sang phải 2 đơn vị



2. Tịnh tiến theo phương tung

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) thì hàm số $y = f'(x) + b$ có đồ thị là (C') bằng cách tịnh tiến theo phương trục tung một đoạn bằng $|b|$. Nếu b âm tịnh tiến xuống dưới $|b|$ đơn vị và ngược lại.

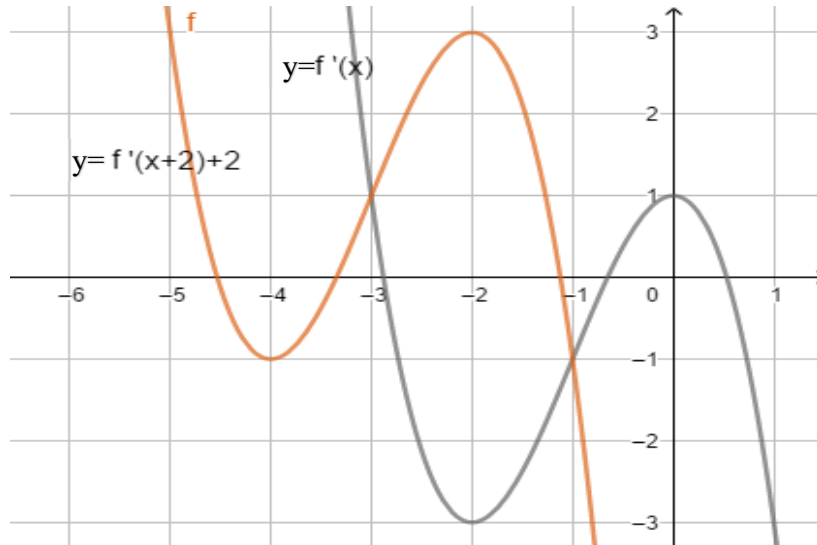
Ví dụ: Tịnh tiến lên theo phương trục tung hai đơn vị



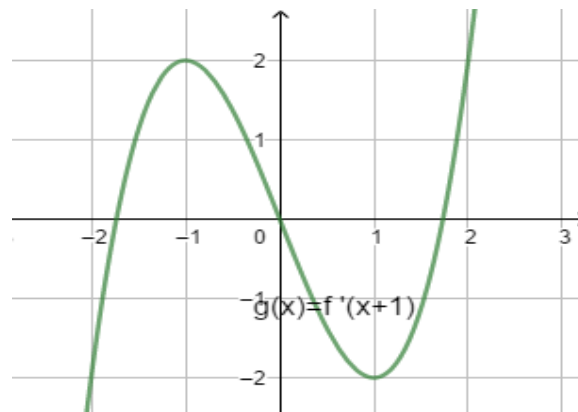
3. Tịnh tiến theo phương hoành và tung

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) thì hàm số $y = f'(x+a) + b$ có đồ thị là (C') bằng cách tịnh tiến theo phương trục hoành $|a|$ đơn vị và theo phương trục tung $|b|$ đơn vị

Ví dụ : Tịnh tiến đồ thị theo phương hoành và tung 2 đơn vị



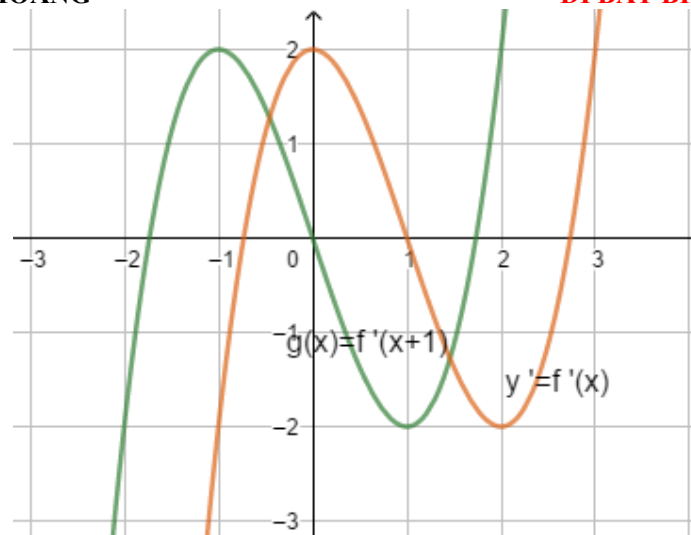
Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ biết rằng hàm số $g(x) = f'(x+1)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$

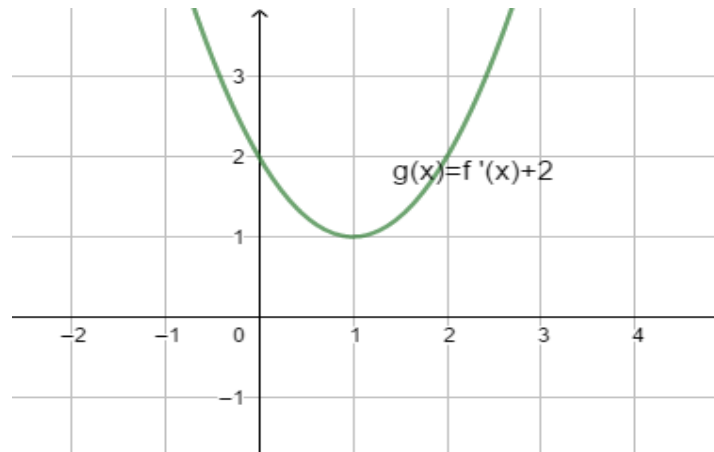
Giải

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $y' = f'(x)$ ta nhận thấy $g(x) = f'(x+1)$ là hàm số có đồ thị là đường cong khi ta tịnh tiến đồ thị $y' = f'(x)$ theo chiều âm của trục hoành một đoạn bằng 1 từ đó suy ra đồ thị $y' = f'(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $g(x) = f'(x+1)$ theo chiều dương của trục hoành 1 đơn vị



Từ đồ thị $y' = f'(x)$ ta thấy ngay điểm cực đại của hàm số là $y = f(x)$ là $x = 1$

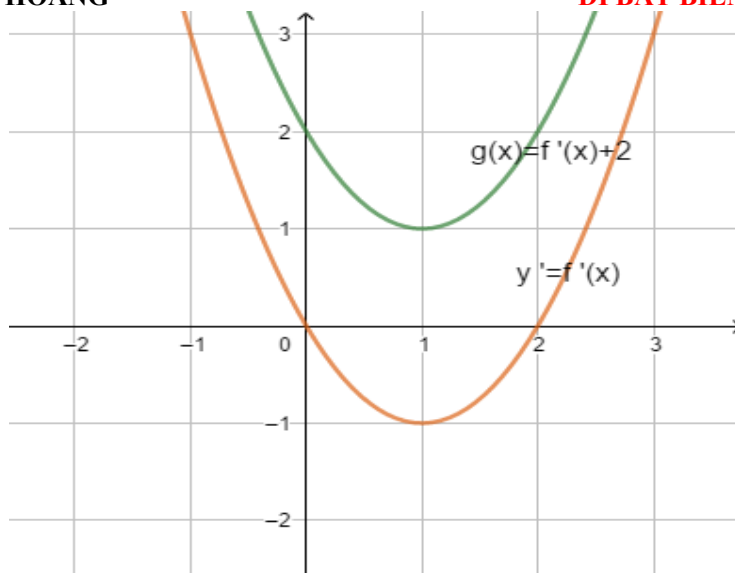
Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ biết rằng hàm số $g(x) = f'(x) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm các khoảng đồng biến của của hàm số $y = f(x)$

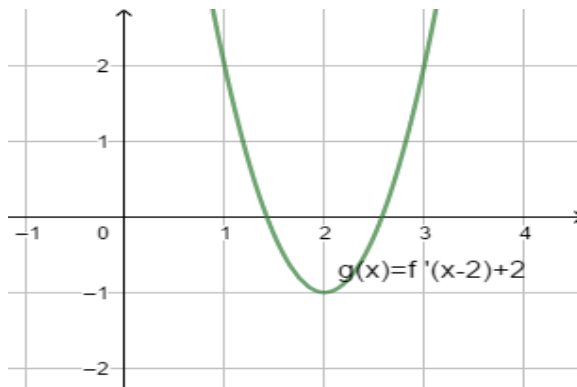
Giải

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $y' = f'(x)$ ta nhận thấy $g(x) = f'(x) + 2$ là hàm số có đồ thị là đường cong khi ta tịnh tiến đồ thị $y' = f'(x)$ theo chiều dương của trục tung một đoạn bằng 2 từ đó suy ra đồ thị $y' = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; 0); (2; +\infty)$

Ví dụ: (Trích đề thi thử lần 1 lớp 12 trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2018 – 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ biết rằng hàm số $g(x) = f'(x - 2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

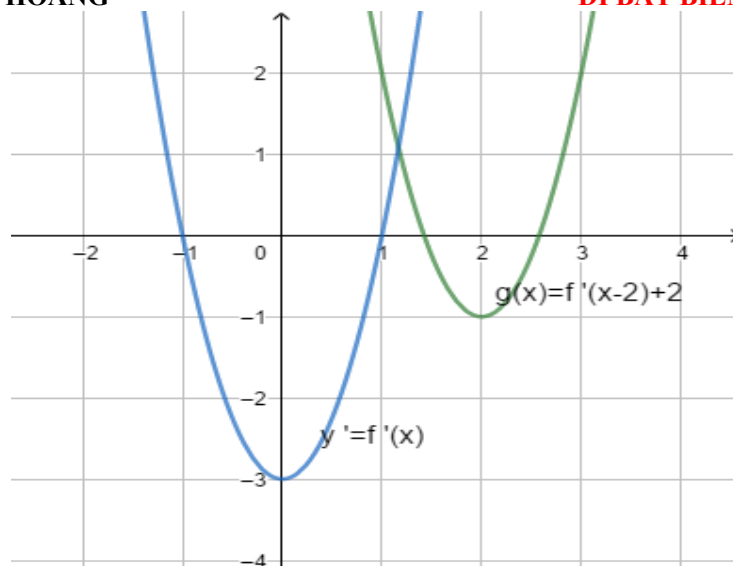


Hỏi hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-1; 1)$

Giải

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $y' = f'(x)$ ta nhận thấy $g(x) = f'(x - 2) + 2$ là hàm số có đồ thị là đường cong khi ta tịnh tiến đồ thị $y' = f'(x)$ theo chiều dương của trục hoành, tung một đoạn bằng 2 từ đó suy ra đồ thị $y' = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới

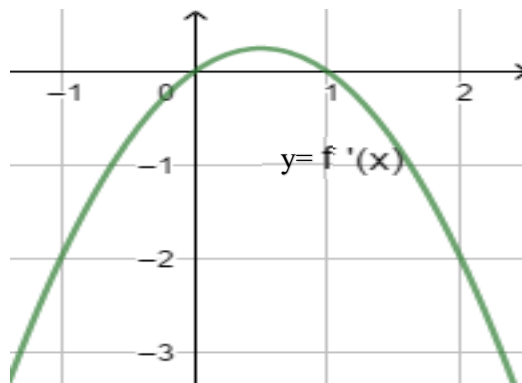


Từ đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ ta thấy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. Chọn đáp án D

III-DẠNG 3: HÀM HỢP:

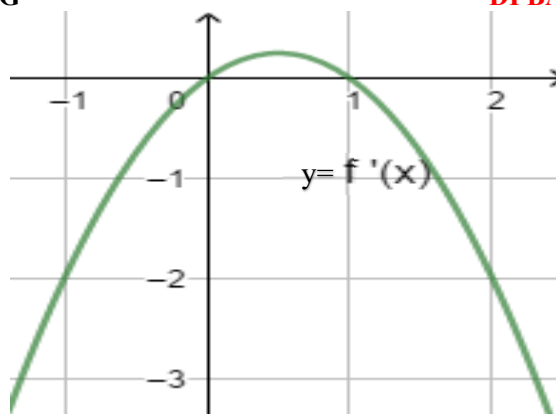
Từ tính chất về đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra tính chất về hàm số $y = f'(u(x))$

Ví dụ: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ dưới đây ta suy ra tính chất của hàm số $h = f'(u(x))$:



- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ suy ra $f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0 \vee u(x) = 1 \Rightarrow x = \dots$
- $f'(x) > 0$ khi $0 < x < 1$ suy ra $f'(u(x)) > 0$ khi $0 < u(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \\ u(x) < 1 \end{cases}$. Giải ra $x = \dots$
- $f'(x) < 0$ khi $x < 0 \vee x > 1$ suy ra $f'(u(x)) < 0$ khi $u(x) > 0 \vee u(x) < 1$. Giải ra $x = \dots$
- Xác định nghiệm đơn, nghiệm bội của $u(x)$ nếu cần thiết
- Lập bảng biến thiên

Ví dụ: Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Lập bảng biến thiên hàm số $y = f(x+2) - 3$



Giải

Ta tính đạo hàm $y = f(x+2) - 3$; $y' = (x+2)' f'(x+2) = f'(x+2)$ sự biến thiên của hàm số $y = f(x+2) - 3$ phụ thuộc vào dấu của $f'(x+2)$

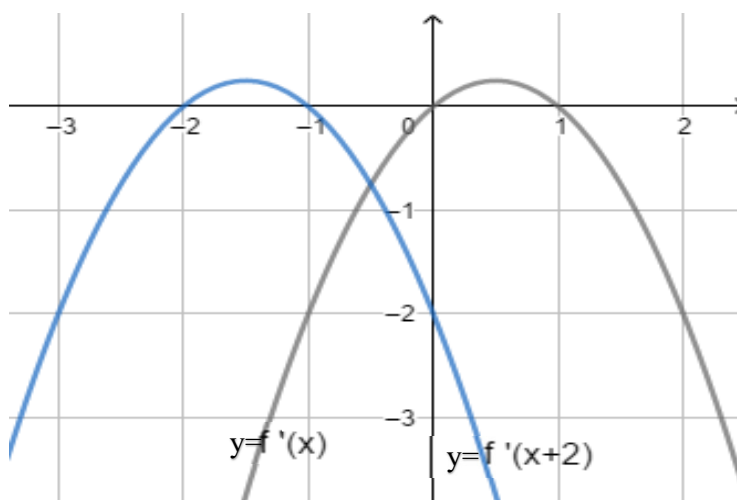
$$1. f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \text{ suy ra } f'(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ x+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases} \text{ là các nghiệm đơn}$$

$$2. f'(x) > 0 \text{ khi } 0 < x < 1 \text{ suy ra } f'(x+2) > 0 \text{ khi } 0 < x+2 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < -2$$

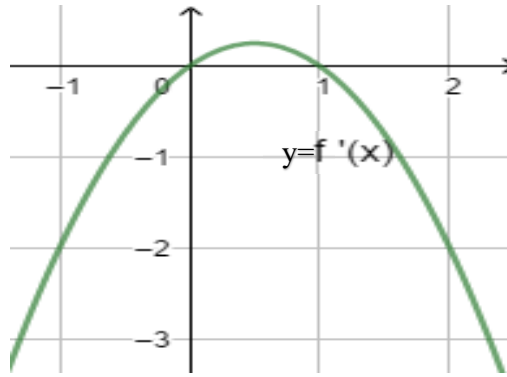
3. $f'(x) < 0$ khi $x < 0 \vee x > 1$ suy ra $f'(x+2) < 0$. Trên các khoảng còn lại

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				1		$-\infty$
				0			

Đồ thị minh họa hàm số $y = f'(x)$; $y = f'(x+2)$



Ví dụ: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ dưới đây ta suy ra tính chất của hàm số $h = f(x^2 - 1) + 2$:



Tính đạo hàm của hàm số $h = f(x^2 - 1) + 2$; $h' = 2xf'(x^2 - 1)$.

Sự biến thiên của hàm số $h = f(x^2 - 1) + 2$ phụ thuộc vào dấu của giá trị của hai hàm số $y = x$; $y = f'(x^2 - 1)$

$$\text{Ta có } h' = 2xf'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$1. f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \text{ suy ra } f'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ là các nghiệm đơn và}$$

không trùng với nghiệm $x = 0$ (có thể kết luận ngay là hàm số $h = f(x^2 - 1) + 2$ có 5 cực trị)

$$2. f'(x) < 0 \text{ khi } x < 0 \vee x > 1 \text{ suy ra } f'(x^2 - 1) < 0 \text{ khi } \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$3. f'(x) > 0 \text{ các khoảng còn lại}$$

4. Giá trị của hàm số $y = x$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua $x = 0$

Bảng dấu của $h' = 2xf'(x^2 - 1)$

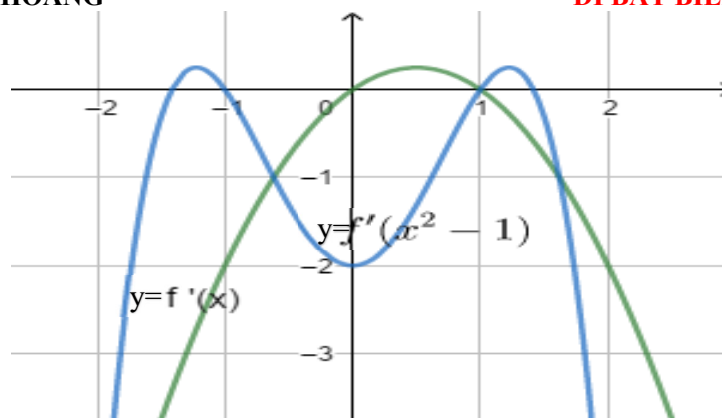
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
h'	+	0	-	0	+	0	-

Từ đó ta có kết luận:

Hàm số $h = f(x^2 - 1) + 2$ có 5 cực trị tại $x = -\sqrt{2}$; $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$; $x = \sqrt{2}$. Cụ thể $x = -1$; $x = 1$

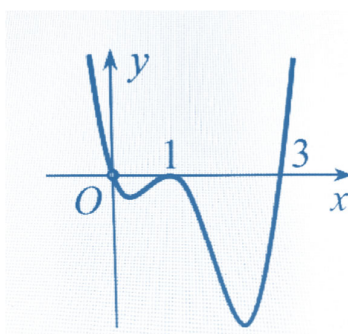
là điểm cực tiểu và $x = -\sqrt{2}$; $x = 0$; $x = \sqrt{2}$ là điểm cực đại của hàm số

Đồ thị minh họa hàm số $y = f'(x)$; $y = f'(x^2 - 1)$



Hàm số $f'(x^2 - 1) < 0$ âm trên các khoảng đã tính trên

Ví dụ: (Trích đề thi thử lần 1 lớp 12 trường chuyên Vĩnh Phúc năm 2018 – 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 cực trị

A. $m \in (-\infty; 2)$.

B. $m \in [0; 3]$.

C. $m \in [0; 3)$.

D. $m \in (-\infty; 0)$

Giải

Hàm số $y = f(x^2 + m)$ có đạo hàm $y' = 2x \cdot f'(x^2 + m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot f'(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \text{ (nó bị chặn)} \text{ vì tại } x = 1 \text{ thì đồ thị } y = f'(x) \text{ tiếp xúc trục } Ox \\ x^2 + m = 3 \end{cases}$$

Ta chỉ cần xét số nghiệm hai phương trình $\begin{cases} x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$

Để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 cực trị khi hai phương trình $\begin{cases} x^2 = -m & (1) \\ x^2 = 3 - m & (2) \end{cases}$ có thêm đúng hai nghiệm đơn

khác 0

TH 1: $\begin{cases} -m \leq 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$ phương trình (1) vô nghiệm hoặc nghiệm kép $x = 0$, phương

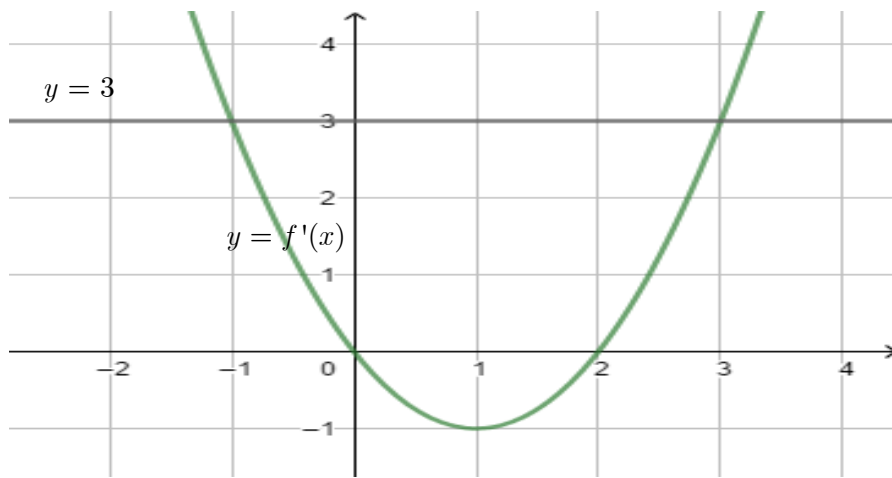
trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác không khi đó $2x.f'(x^2 + m) = 0$ có 3 nghiệm đơn nên có 3 cực trị

TH 2: $\begin{cases} -m > 0 \\ 3 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 3 \end{cases}$ không có m thỏa yêu cầu bài toán

Vậy chọn C

IV-DẠNG 4: ĐỒ THỊ $y = f'(x)$ TƯƠNG GIAO VỚI MỘT ĐƯỜNG CONG KHÁC $y = h(x)$

1. Xét đồ thị như hình bên dưới của hai hàm $y = f'(x); y = 3$



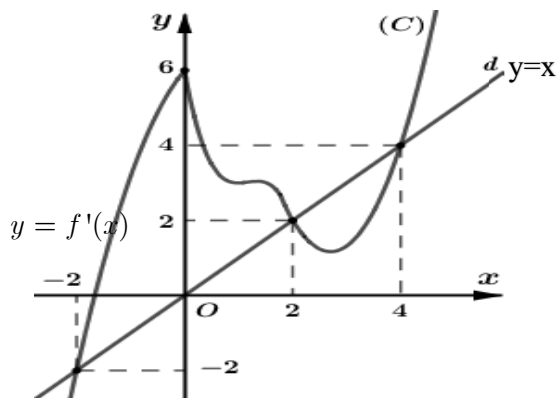
Từ đồ thị ta nhận xét về dấu của $g = f'(x) - 3$

- $f'(x) - 3 > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên đồ thị $y = 3$ nghĩa là $x < -1 \vee x > 3$
- $f'(x) - 3 < 0$ thì ngược lại
- $f'(x) - 3 = 0$ tại các giao điểm của $y = f'(x); y = 3$ nghĩa là tại $x = -1 \vee x = 3$

Chú ý: nếu bài toán cho yêu cầu là $g = 3 - f'(x)$ thì biện luận ngược lại

- $3 - f'(x) < 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên đồ thị $y = 3$ nghĩa là $x < -1 \vee x > 3$
- $3 - f'(x) > 0$ thì ngược lại
- $3 - f'(x) = 0$ tại các giao điểm của $y = f'(x); y = 3$ nghĩa là tại $x = -1 \vee x = 3$

2. Xét đồ thị như hình bên dưới của hai hàm $y = f'(x); y = x$

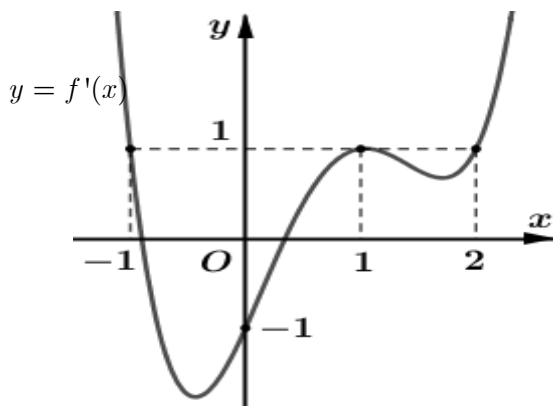


Từ đồ thị ta nhận xét về dấu của $g = f'(x) - x$

- $f'(x) - x > 0$ khi đồ thị $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị $y = x$ nghĩa là $-2 < x < 2 \vee x > 4$
- $f'(x) - x < 0$ thì ngược lại
- $f'(x) - x = 0$ tại $x = -2 \vee x = 2 \vee x = 4$ là các giao điểm của hai đồ thị $y = f'(x); y = x$

Chú ý: nếu bài toán cho yêu cầu là $g = h(x) - f'(x)$ thì biện luận ngược lại giống phần trên

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

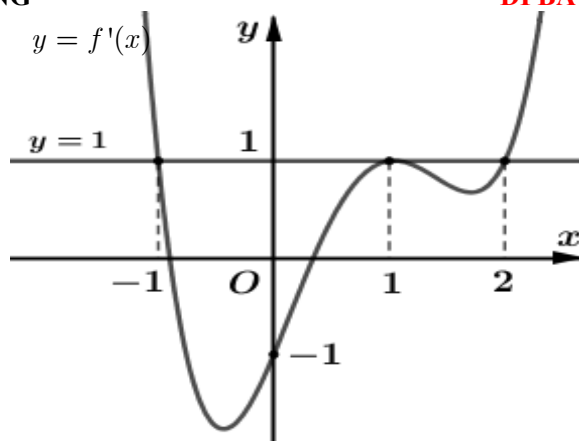


lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x) - x$,

Giải

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$

Vẽ thêm đường thẳng $y = 1$ ta có đồ thị bên dưới



Dựa vào đồ thị ta có:

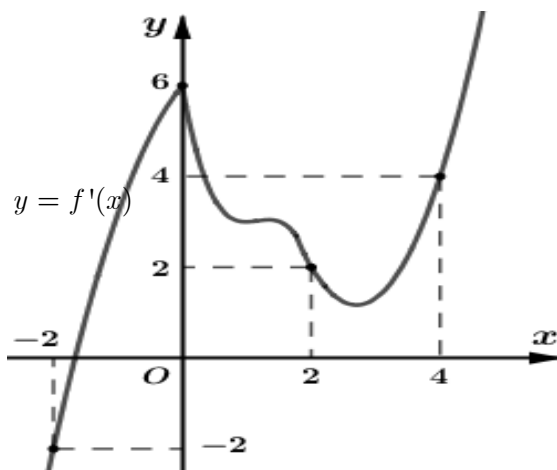
$$g' = f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$$

$g' = f'(x) - 1$ âm khi $-1 < x < 1$; $1 < x < 2$ và dương với $x < -1$; $x > 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
g'	+	0	-	0	-	0	+
g							

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

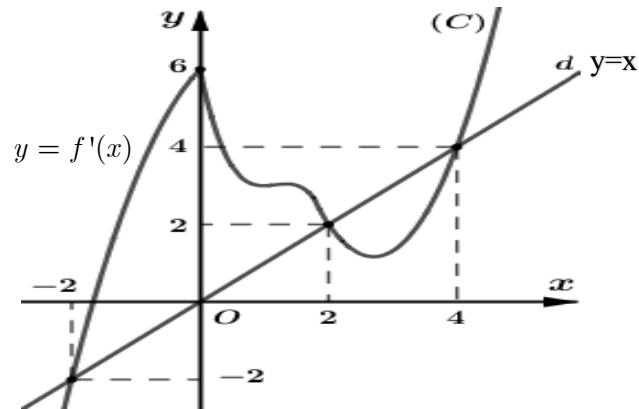


Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$

Giải

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$.

Vẽ thêm đường thẳng $y = x$ ta được đồ thị như hình bên dưới



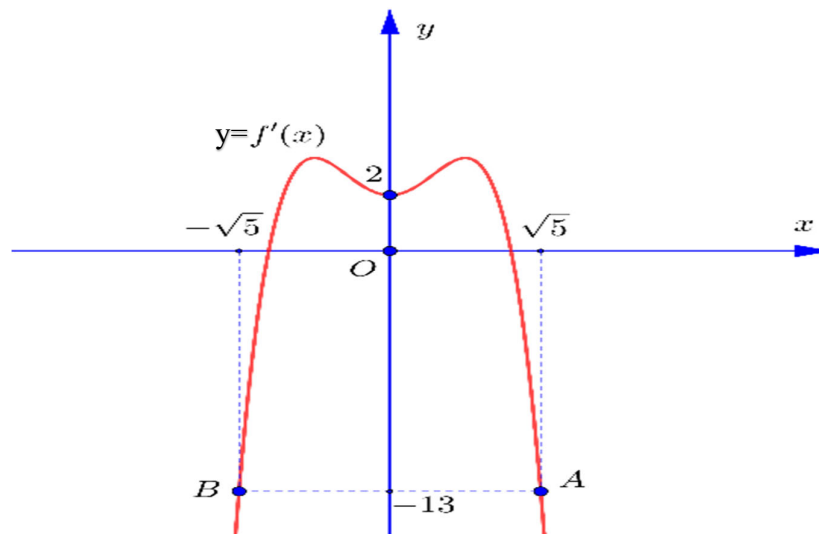
Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

$g'(x) = 2f'(x) - 2x$ dương khi $-2 < x < 2$; $x > 4$ và âm khi $x < -2$; $2 < x < 4$

Bảng biến thiên

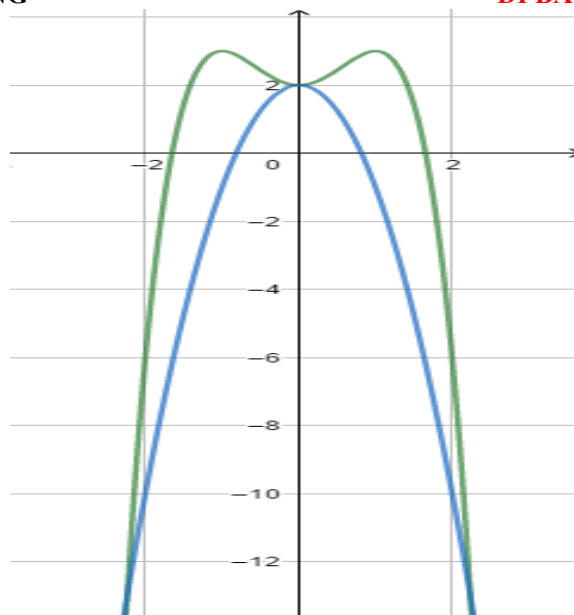
x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
g	$+\infty$					$+\infty$

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ:



Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3$. Trên $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

Giải



Tính $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$

Ta có : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - (-6x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - (-3x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3x^2 + 2$

Vẽ thêm đồ thị hàm số $y = -3x^2 + 2$

Từ đồ thị bên trên ta thấy đồ thị $y = f'(x)$; $y = -3x^2 + 2$. Có điểm chung tại $x = 0$ (nghiệm bội chẵn) và

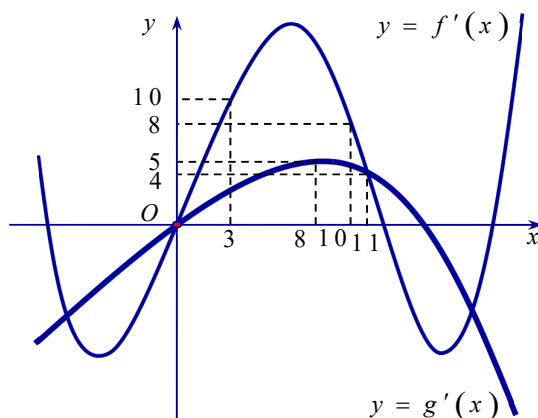
đồ thị $y = -3x^2 + 2$ nằm dưới đồ thị $y = f'(x)$, $\forall x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ nên ta có:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - (6x^2 + 4) = 0$ tại $x = 0$ thuộc khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$

$g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ có bảng biến thiên

x	$-\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$
g'	$+$	0	$+$
g			

Ví dụ: ĐỀ CHÍNH THỨC 2018 – ĐỀ 103 Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$.

B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$.

D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Giải

Tính $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$

Để $h'(x) \geq 0$ **khi giá trị** $f'(x+4)$ **phải lớn hơn hoặc bằng hai lần giá trị** $g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$

Từ đồ thị ta nhận thấy hàm số $y = g'(x)$ luôn có giá trị nhỏ hơn bằng 5, vì vậy hàm số $y = f'(x)$ cần có giá trị lớn hơn bằng 10 khi đó ta làm như sau

Kẻ đường thẳng $y = 10$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại $A(3;10); B(a;10)$, $a \in (8;10)$.

Khi đó ta có
$$\begin{cases} f(x+4) \geq 10, \text{ khi } 3 \leq x+4 \leq a \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } 0 \leq 2x - \frac{3}{2} \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4) \geq 10, \text{ khi } -1 \leq x < 6; \text{ với } 3 < a < 10 \\ g\left(2x - \frac{3}{2}\right) \leq 5, \text{ khi } \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{25}{4} \end{cases}.$$

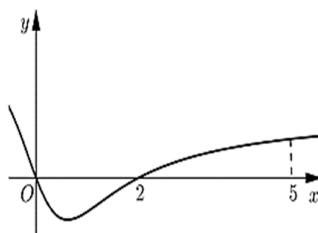
Do đó $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) > 0$ khi $\frac{3}{4} \leq x < 6$.

Vì vậy ta loại được đáp án A, C, D. Chỉ còn đáp án B thỏa mãn $\frac{3}{4} \leq x < 6$ bài toán

V-DẠNG 5: SO SÁNH GIÁ TRỊ $f(a); f(b); f(c); \dots$

Dựa vào bảng biến thiên dòng cuối là miền giá trị. Ta xét các giá trị cực đại, cực tiểu và dựa vào điều kiện đề bài để so sánh

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. So sánh các giá trị $f(0); f(2); f(5)$



Giải

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên trên $[0;5]$

x	0	2	3	5
y'	0	-	0	+
y				

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(2)$ nhỏ nhất trong ba giá trị cần so sánh.

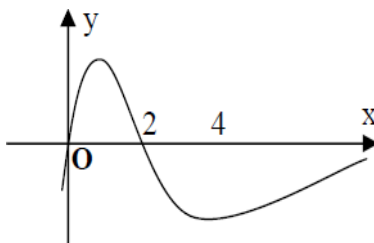
Mà đề cho $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(0) - f(5) = f(2) - f(3) < 0 \Rightarrow f(0) < f(5)$.

Từ đây ta có kết quả: $f(2) < f(0) < f(5)$

Chú ý: muốn so sánh hai giá trị nào thì ta dồn hai giá trị đó về cùng một vế để so sánh.

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng

$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. So sánh giá trị $f(0); f(2); f(4)$



Giải

Từ đồ thị trên suy ra bảng biến thiên trên $[0; 4]$

x	0	1	2	3	4
y'	0	+	0	-	-
y					

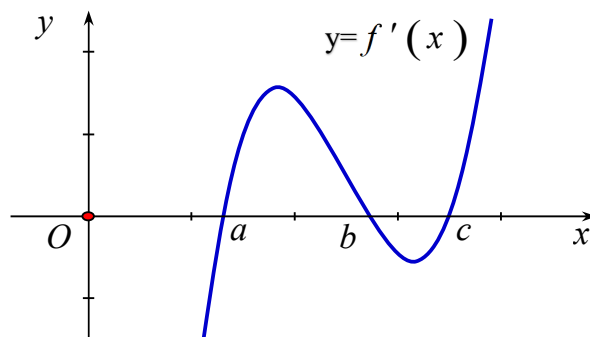
Dựa vào BBT ta có $f(2)$ lớn nhất trong ba giá trị cần so sánh

Ta lại có: $f(1) < f(2); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) > 0$

$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow f(0) - f(4) = 2f(2) - f(3) - f(1) > 0 \Rightarrow f(0) > f(4)$.

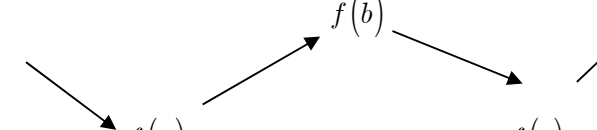
Từ đây ta có kết quả: $f(4) < f(0) < f(2)$

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên dưới. So sánh giá trị $f(a); f(b); f(c)$.



Giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+
y							

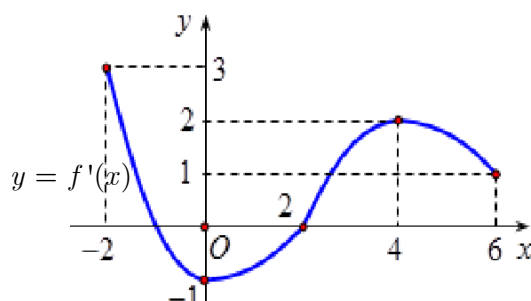
Dựa vào bảng biến thiên thì $f(b)$ lớn nhất trong 3 giá trị đề bài yêu cầu so sánh. Bây giờ ta cần so sánh hai giá trị còn lại. **Trong bài này không so sánh được như hai ví dụ trên** vì vậy ta phải dựa vào dấu hiệu diện tích hình phẳng.

Theo quan sát hình vẽ thì $\int_a^b f'(x)dx > 0$; $\int_b^c f'(x)dx < 0$ và diện tích hình phẳng giới hạn trên $[a; b]$ lớn hơn hình phẳng giới hạn trên $[b; c]$ nên

$$\text{Ta có } f(c) - f(a) = \int_a^c f'(x)dx = \int_a^b f'(x)dx + \int_b^c f'(x)dx > 0 \Rightarrow f(c) > f(a)$$

$$\text{Vậy } f(a) < f(c) < f(b)$$

Ví dụ : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. So sánh các giá trị $f(-1); f(2); f(6)$



Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

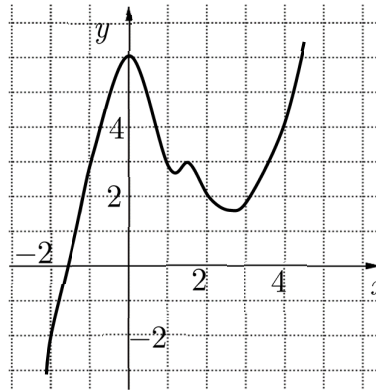
x	-2	-1	2	6	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$f(-1)$ $f(2)$ $f(6)$				

Ta có: $f(2)$ nhỏ nhất trong 3 giá trị trên nên chỉ cần so sánh hai giá trị còn lại

$$\text{Ta có: } f(6) - f(-1) = \int_{-1}^6 f'(x) dx = \int_{-1}^2 f'(x) dx + \int_2^6 f'(x) dx > 0 \Rightarrow f(6) > f(-1).$$

$$\text{Vậy } f(2) < f(-1) < f(6)$$

Ví dụ. Trích đề thi quốc gia 2017 Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $h(x) = 2f(x) - x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $h(4) = h(-2) > h(2)$

B. $h(4) = h(-2) < h(2)$

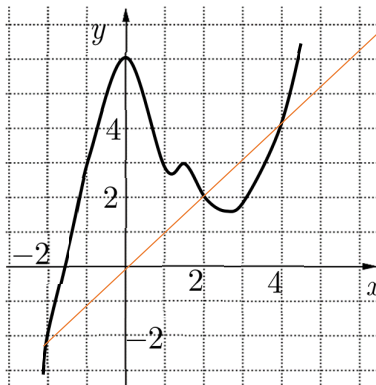
C. $h(2) > h(4) > h(-2)$

D. $h(2) > h(-2) > h(4)$

Giải

Tính đạo hàm $h'(x) = 2f'(x) - 2x$ khi đó

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$ vẽ thêm đường thẳng $y = x$ vào đồ thị như hình bên dưới



$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 2; x = 4$ tại các giao điểm của đường cong và đường thẳng trên hình

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2x > 0$ trên các khoảng $(-2; 2); (4; +\infty)$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2x < 0$ các khoảng còn lại

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$h(-2)$	$h(2)$	$h(4)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy $h(2)$ lớn nhất trong 3 giá trị cực trị

Chỉ cần so sánh hai giá trị cực tiểu còn lại.

Ta có: $h(4) - h(-2) = \int_{-2}^4 h'(x)dx = \int_{-2}^2 h'(x)dx + \int_2^4 h'(x)dx > 0$

$$\Leftrightarrow h(4) > h(-2)$$

Vậy thứ tự đúng là: $h(2) > h(4) > h(-2)$ đáp án C

VI-DẠNG 6: BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

✎ Hàm số $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x > 0 \\ f(-x) & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy và bỏ phần (C) nằm bên trái Oy .

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy qua Oy .

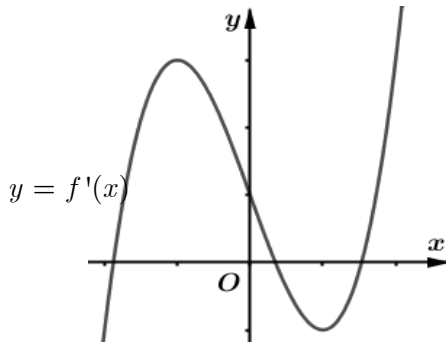
✎ Hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) \leq 0 \end{cases}$ có đồ thị (C') bằng cách:

+ Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox .

+ Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox .

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $y = f'(x)$.

Hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Giải

Ta có $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm thực $x = a < 0; x = b > 0; x = c > 0$

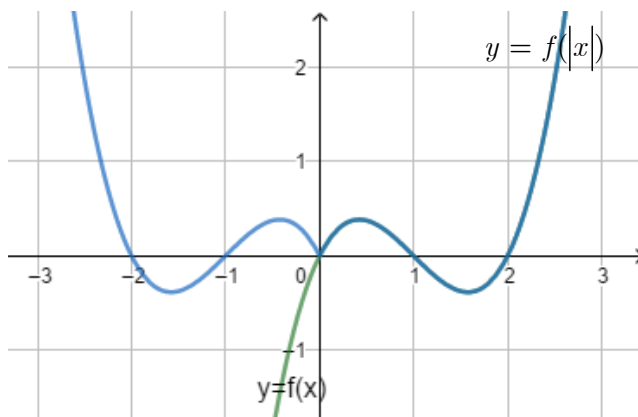
$f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; b)$ và $(c; +\infty)$

$f'(x) < 0$ trên khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; c)$ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$				$+\infty$

Vì vậy hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị trong đó có 2 cực trị có hoành độ dương

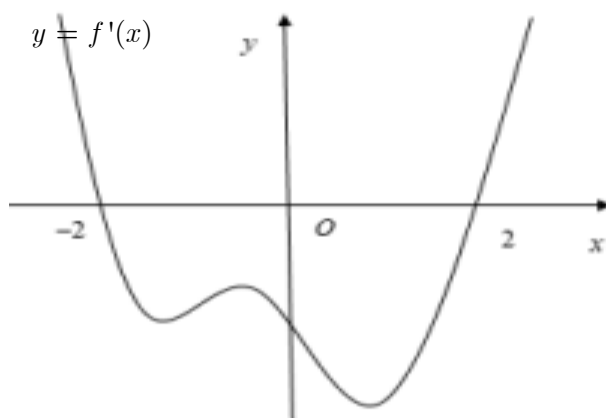
Thực hiện biến đổi đồ thị hàm số dạng $y = f(|x|)$. **Bỏ phần đồ thị phía bên trái trục tung**, lấy đối xứng phần đồ thị bên phải trục tung qua trục tung (hình vẽ dưới đây) được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



Ta thấy đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị vậy suy ra đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|) + m$ có 5 cực trị với mọi giá trị m

Vậy hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ có 5 cực trị

Ví dụ: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có bao nhiêu cực trị.



Giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $f'(x) = 0$ có hai nghiệm là: $x = -2; x = 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

$$f'(x) > 0 \text{ khi } x < -2; x > 2$$

$$f'(x) < 0 \text{ khoảng còn lại}$$

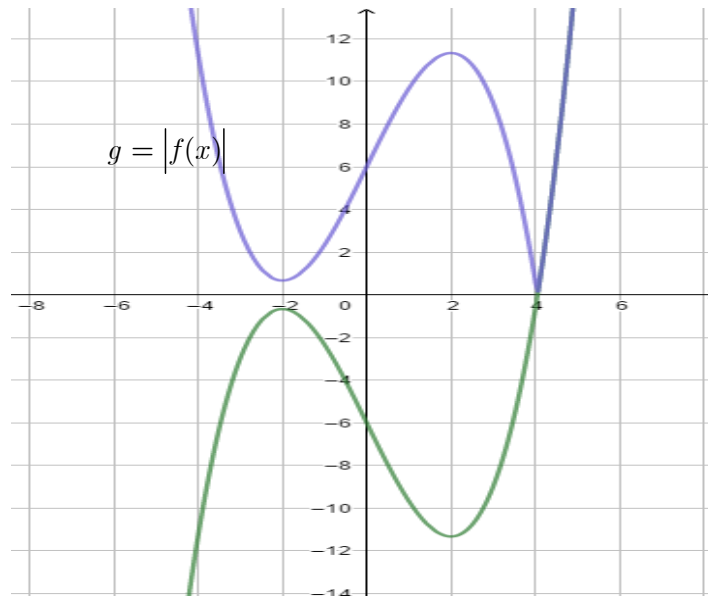
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-2) < 0$			$+\infty$

Từ đây suy ra giá trị cả hai cực trị hàm số $y = f(x)$ đều âm

Biến đổi đồ thị dạng $g(x) = |f(x)|$. Lấy đối xứng phần đồ thị bên dưới trục hoành qua trục hoành và **Bỏ**

phần đồ thị phía dưới trục hoành ta được đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$



Ta thấy ngay hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 3 cực trị (phần đồ thị trên trục hoành)

ĐẾN ĐÂY CẦN BẢN VỀ LÝ THUYẾT GIẢI QUYẾT TẤT CẢ CÁC DẠNG TOÁN ĐÃ HOÀN THÀNH.

Lưu Ý:

- Để giải được một bài tập dạng này ta cần phải tìm được bảng biến thiên của hàm số mà bài toán yêu cầu tìm các tính chất
- Bài tập cũng có thể cho dạng đồ thị hàm số $f(x)$, hoặc dạng bảng biến thiên. loại này cũng suy ra bảng biến thiên của hàm số cần tìm cách tương tự.
- Bài toán sắp xếp đồ thị $f-f'-f''$ xuất phát từ duy nhất 1 hàm số rồi đạo hàm lên để có các đồ thị tiếp theo nên dựa vào các kiến thức trên ta sẽ lần ra được đồ thị f'' và f' ...