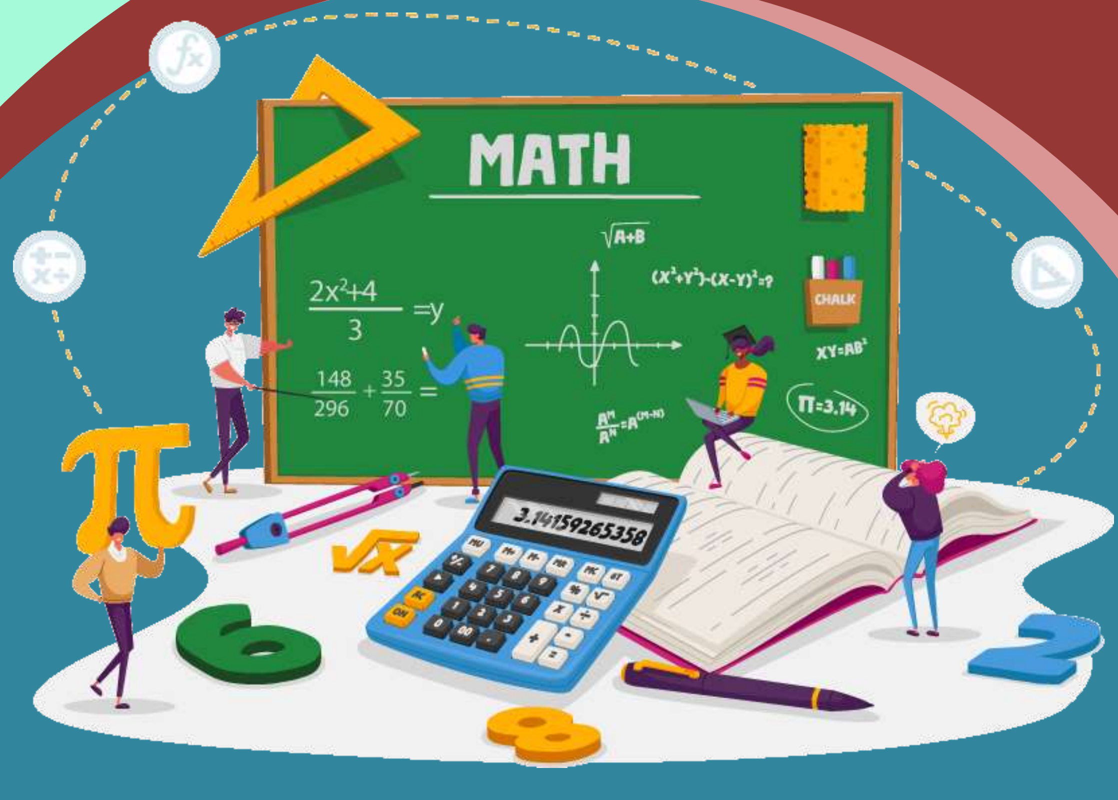
LÊ BÁ BẢO
TRƯỜNG THPT ĐẶNG HUY TRỨ - ADMIN CLB GIÁO VIÊN TRẺ TP HUẾ

NGÂN HÀNG CÂU HỎI

SỐ PHỨC

PHƯƠNG TRÌNH VỚI HỆ SỐ THỰC

- LUYỆN THI THPT QUỐC GIA
- CẬP NHẬT TỪ ĐỀ THI MỚI NHẤT



Ngân hàng câu hỏi:
PHƯƠNG TRÌNH VỚI HỆ SỐ THỰC
NỘI DUNG ĐỀ BÀI

Câu 1: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $(z-1-a)(z+1-a)=6z$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của a để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=42$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 2: Trên tập hợp số phức xét phương trình $z^2-2mz+m^2-2m+1=0$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm $z_1;z_2$ thoả mãn $|z_1|=2|z_2|$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3: Biết phương trình $z^2+2z+m=0$ (m là tham số thực) có một nghiệm là $z_1=-1+3i$. Gọi z_2 là nghiệm còn lại. Phần ảo của số phức $w=mz_1-2z_2$ bằng

A. -36. **B.** -24. **C.** 36. **D.** -8.

Câu 4: Cho phương trình $z^2-2mz+6m-8=0$. (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0+2|=6$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 6: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+3m+10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 không phải số thực thỏa mãn $|z_1|+|z_2|\le 8$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 7: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2(m-4)z+m^2-4m+1=0$, m là tham số thự **C.**
Có bao nhiêu giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa điều kiện $|z_1+z_2-2z_1z_2|=|z_1|$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 8: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0{}^2+(1-4m)z_0+4m^2-5m-3|=10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2+2mz+m+1=0$ (1) (m là tham số thực); z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình (1); A, B lần lượt là điểm biểu diễn của hai nghiệm phức đó trên mặt phẳng Oxy. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để ΔOAB vuông tại O?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 10: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-\sqrt{m+1}z-\frac{1}{4}(m^2-5m-6)=0$($m$ là tham số thực).

Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-10;10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|\le|z_1-z_2|$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 11: Trên tập số phức, cho phương trình $z^2+az+b=0\ (a,b\in\mathbb{R})$. Có bao nhiêu số phức w sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm là $z_1=(6-i)\cdot w-2i$ và $z_2=(\overline{w}-5+i)\cdot|w|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 12: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+8m-12=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$?

A. 5 **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $z^2+2mz+1=0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+3|=|z_2+3|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2-(a-3)z+a^2+a=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 15: Cho số phức w và hai số thực b, c. Biết rằng $w+2$ và $3w-4i$ là hai nghiệm của phương trình $2022z^2+bz+c=0$. Tính giá trị biểu thức $P=b+c$ bằng

A. $P=-4044$. **B.** $P=8088$. **C.** $P=4044$. **D.** $P=-8088$.

Câu 16: Trên tập các số phức, xét phương trình $z^2-mz+m+8=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1,z_2 phân biệt thỏa mãn $\left|z_1\left(z_1^2+mz_2\right)\right|=\left(m^2-m-8\right)|z_2|$?

A. 12. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 11.

Câu 17: Biết phương trình $z^2+az+b=0\ (a,b\in\mathbb{R})$ có một nghiệm là $z_1=3i$ và nghiệm còn lại là z_2. Mô đun của số phức $(a-b)z_2$ bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 18. **D.** 27.

Câu 18: Cho số phức w và hai số thực a,b. Biết $z_1=w+2i$ và $z_2=2w-3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+az+b=0$. Tính giá trị của $T=|z_1|+|z_2|$.

A. $T=2\sqrt{13}$. **B.** $T=4\sqrt{13}$. **C.** $T=\dfrac{2\sqrt{97}}{3}$. **D.** $T=\dfrac{2\sqrt{85}}{3}$.

Câu 19: Cho các số thực b,c sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức $z_1;z_2$ với phần thực là số nguyên và thỏa mãn $|z_1+3-2i|=1$ và $(z_1-2i)(z_2+2)$ là số thuần ảo. Khi đó, $b+c$ bằng

A. -1. **B.** 12. **C.** 4. **D.** -12.

Câu 20: Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4-m)z^2-4m=0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

A. $m=-1$. **B.** $m=\pm2$. **C.** $m=\pm3$ **D.** $m=\pm1$.

Câu 21: Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+az+b=0$, với $a,b\in\mathbb{R}$ có nghiệm $z_0=2-3i$. Biết rằng phương trình $z^2+bz+a=0$ cũng có hai nghiệm phức z_1,z_2. Tính $S=|z_1|+|z_2|$.

A. 4. **B.** 13. **C.** 25. **D.** $\sqrt{185}$.

Câu 22: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 23: Trên tập số phức, cho phương trình $z^2+2(m-1)z+m^2+2m=0$. Có bao nhiêu tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $z_1;z_2$ thõa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=5$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 24: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn điểm biểu diễn của z_0 thuộc đường E-lip có phương trình $\frac{x^2}{4}+y^2=1$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 25: Biết phương trình $z^2+mz+m^2-2=0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1,z_2. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1,z_2 và $z_0=i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6

Câu 26: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+8m-4=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1^2-2mz_1+8m|=|z_2^2-2mz_2+8m|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 27: Tìm tổng các giá trị của số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 28: Trên tập hợp các số phức, gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $mz^2+2(m+1)z-m+6=0$ có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=1$. Tính S.

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 29: Cho phương trình $z^2+az+2a^2=0$, với a là số thực dương. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình, trong đó z_1 có phần ảo dương. Biết rằng $(2z_1+z_2)\overline{z_1}=10+2\sqrt{7}i$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1<a<3$. **B.** $a<1$. **C.** $5<a<8$. **D.** $3<a<5$.

Câu 30: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 31: Cho số phức z,w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$ và $\frac{2}{z}+\frac{3}{w}=\frac{4}{z+w}$. Khi đó, $\left|\frac{z}{w}\right|$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của a sao cho phương trình $z^2 - az + 2a - a^2 = 0$ có hai nghiệm phức có môđun bằng 1.

A. $a = -1$. **B.** $a = 1$. **C.** $a = \pm 1$. **D.** $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Câu 33: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 + 2mz + n^2 + 5 = 0$ (với m, n là tham số thực). Có bao nhiêu cặp số $(m;n)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phức z_1, z_2 sao cho các điểm biểu diễn của $z_1, z_2, z_3 = 1, z_4 = 5$ là bốn đỉnh của một hình vuông?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 34: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 + 2mz - m + 12 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}|z_1 - z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 35: Cho phương trình $4z^4 + mz^2 + 4 = 0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2 + 4\right)\left(z_2^2 + 4\right)\left(z_3^2 + 4\right)\left(z_4^2 + 4\right) = 324$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -15 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 15 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -35 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 35 \end{array}\right.$.

Câu 36: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 4 + 3i| = 1$ và $|z_2 - 8 - 6i| = 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $5b + c = -12$. **B.** $5b + c = 4$. **C.** $5b + c = -4$. **D.** $5b + c = 12$.

Câu 37: Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$, có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 38: Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2 + (a-2)z + 2a - 3 = 0$ (a là tham số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết rằng có 2 giá trị của tham số a để tam giác OMN có một góc bằng 120°. Tổng các giá trị đó bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -6.

Câu 39: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2z - m + 2 = 0$ (m là tham số thực). Gọi T là tập hợp các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt được biểu diễn hình học bởi hai điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$, với $C(-1;1)$. Tổng các phần tử trong T bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 9. **D.** -1.

Câu 40: Biết rằng phương trình $z^2 + 2az + b = 0$ (a, b là các số thực dương) có hai nghiệm phức liên hợp z_1, z_2. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $w = 2, z_1, z_2$. Tính giá trị của $T = b - 4a$ biết rằng ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông có diện tích bằng 9.

A. 6. **B.** -8. **C.** 9. **D.** 14.

Câu 41: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 - 20 = 0 (1)$ với a, b là các tham số nguyên dương. Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn: $z_1 + 3iz_2 = 7 + 5i$

thì giá trị của biểu thức $7a+5b$ bằng

A. 19. **B.** 17. **C.** 32. **D.** 40.

Câu 42: Cho phương trình $x^2-4x+\frac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính $P=c+2d$.

A. $P=18$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=22$.

Câu 43: Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=324$.

A. $m=1;\ m=-35$. **B.** $m=-1;\ m=-35$. **C.** $m=-1;\ m=35$. **D.** $m=1;\ m=35$.

Câu 44: Tìm $m\in\mathbb{R}$ để các nghiệm của phương trình sau đều là số ảo: $(m-3)z^4+6z^2+m+3=0$.

A. $3\le m\le 3\sqrt{2}$. **B.** $3<m\le 3\sqrt{2}$. **C.** $\left[\begin{array}{l}-3\sqrt{2}\le m\le -3\\ 3<m\le 3\sqrt{2}\end{array}\right.$. **D.** $-3\sqrt{2}\le m\le -3$.

Câu 45: Gọi S là tổng các số thực m thỏa mãn $z^3-7z^2+16z-12-mz+3m=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0|=2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S=24$. **B.** $S=25$. **C.** $S=18$. **D.** $S=16$.

Câu 46: Trên tập hợp số phức cho phương trình $z^2+bz+c=0$, với $b,c\in\mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $z_1=w+3$ và $z_2=3w-8i+13$ với w là một số phức. Tính $b+c$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 47: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình: $z^2-2(m+1)z+m^2-3m+5=0$ (m là tham số thực). Tính tổng các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm z_0 thỏa mãn $\left|\overline{z_0}\right|^3-12=5|z_0|$.

A. 9. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 48: Cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=3-4i$. Gọi A,B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2-2bz+4c=0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. 20. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 49: Cho m là số thực, biết phương trình $z^2-2mz+9=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho $z_1\left|\overline{z_2}\right|+z_2\left|\overline{z_1}\right|<16$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 50: Gọi S là tập hợp tất cả các số thực a sao cho phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 và các điểm biểu diễn của z_1,z_2 cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Số phần tử của S là?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $(z-1-a)(z+1-a)=6z$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của a để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=42$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có: $(z-1-a)(z+1-a)=6z \Leftrightarrow z^2-2(a+3)z+a^2-1=0$ (1) có $\Delta'=6a+10$.

+ Trường hợp 1: $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow a\geq -\frac{5}{3}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm thực z_1, z_2.

Suy ra $|z_1|^2+|z_2|^2=42 \Leftrightarrow [2(a+3)]^2-2(a^2-1)=42 \Leftrightarrow 2a^2+24a-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-6+\sqrt{38} \\ a=-6-\sqrt{38}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $a\geq -\frac{5}{3}$, nhận $a=-6+\sqrt{38}$.

+ Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow a<-\frac{5}{3}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1=\overline{z_2}$.

Suy ra $|z_1|^2+|z_2|^2=42 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=42 \Leftrightarrow z_1z_2=21 \Leftrightarrow a^2-22=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{22} \\ a=-\sqrt{22}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $a<-\frac{5}{3}$, nhận $a=-\sqrt{22}$.

Vậy có 2 giá trị của a thỏa mãn.

Câu 2: Trên tập hợp số phức xét phương trình $z^2-2mz+m^2-2m+1=0$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm $z_1;z_2$ thoả mãn $|z_1|=2|z_2|$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải:

TH1. $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow m^2-(m^2-2m+1)\geq 0 \Leftrightarrow 2m-1\geq 0 \Leftrightarrow m\geq \frac{1}{2}$. Khi đó phương trình đã cho có 2 nghiệm thực.Theo định lý Vi-et ta có

$\begin{cases} z_1+z_2=2m \ (1) \\ z_1.z_2=m^2-2m+1 \ (2)\end{cases}$. Xét $|z_1|=2|z_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2z_2 \ (3) \\ z_1=-2_2 \ (4)\end{array}\right.$.

Từ (1) và (3) ta có hệ phương trình $\begin{cases} z_1+z_2=2m \\ z_1-2z_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=\frac{2m}{3} \ (6) \\ z_1=\frac{4m}{3} \ (7)\end{cases}$.

Thế (6) và (7) vào phương trình (2) ta được

$$\frac{2m}{3}.\frac{4m}{3}=m^2-2m+1 \Leftrightarrow m^2-18m+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=9+6\sqrt{2} \ (TM) \\ m=9-6\sqrt{2} \ (TM)\end{array}\right..$$

Từ (1) và (4) ta có hệ phương trình $\begin{cases} z_1+z_2=2m \\ z_1+2z_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=-2m\ (10) \\ z_1=4m\ (9) \end{cases}$. Thế (9) và (10) vào phương trình (2) ta được $(-2m)(4m)=m^2-2m+1 \Leftrightarrow 9m^2-2m+1=0\ (VN)$.

TH2. $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-(m^2-2m+1)<0 \Leftrightarrow 2m-1<0 \Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$. Khi đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phức phân biệt. Giả sử $z_1=a+bi \Rightarrow z_2=a-bi$. Khi đó

$|z_1|=2|z_2| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$. Suy ra $z_1=z_2=0+0i$ mẫu thuẫn với điều kiện đề bài là phương trình có 2 nghiệm phân biệt. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m+3=0$ (m là tham số thực).

Câu 3: Biết phương trình $z^2+2z+m=0$ (m là tham số thực) có một nghiệm là $z_1=-1+3i$. Gọi z_2 là nghiệm còn lại. Phần ảo của số phức $w=mz_1-2z_2$ bằng

A. -36. **B.** -24. **C.** 36. **D.** -8.

Lời giải:

Từ giả thiết $\Rightarrow z_2=-1-3i \Rightarrow z_1z_2=10 \Rightarrow m=10$.

Vậy phần ảo của số phức $w=10z_1-2z_2=10(-1+3i)-2(-1-3i)=-8+36i$ là 36.

Câu 4: Cho phương trình $z^2-2mz+6m-8=0$. (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải:

Ta có $\Delta'=m^2-6m+8$

Trường hợp 1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<2 \end{array}\right.$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt z_1,z_2 và $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1^2=z_2^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=z_2\,(loai) \\ z_1=-z_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow 2m=0 \Leftrightarrow m=0\,(tm)$

Trường hợp 2: $\Delta'<0 \Leftrightarrow 2<m<4$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1,z_2

$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2} \Leftrightarrow z_1.z_2=z_1.z_1$ (luôn đúng) mà $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{3\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0+2|=6$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải:

Xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m+3=0\ (1)$

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-m-3=m^2+m-2$..

Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2+m-2 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có nghiệm thực:

$|z_0+2|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=4 \\ z_0=-8 \end{array}\right.$

Với $z_0=4$: thay vào (1), được: $m=\frac{11}{7}$

Với $z_0=-8$: thay vào (1), được: $m=-\frac{83}{17}$

Nếu $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2+m-2<0 \Leftrightarrow -2<m<1$ thì phương trình (1) có nghiệm phức $\left[\begin{array}{l} z_0=m+1-i\sqrt{m^2+m-2} \\ z_0=m+1+i\sqrt{m^2+m-2} \end{array}\right.$

Khi đó $|z_0+2|=6 \Leftrightarrow (m+3)^2+\left(m^2+m-2\right)=36 \Leftrightarrow 2m^2+7m-29=0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy có 4 giá trị của tham số m để bài toán thỏa mãn.

Câu 6: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+3m+10=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 không phải số thực thỏa mãn $|z_1|+|z_2| \leq 8$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có $\Delta'=m^2-3m-10$.

Phương trình không có nghiệm thực khi $\Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-3m-10<0 \Leftrightarrow -2<m<5 (1)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1=m+\sqrt{-m^2+3m+10}.i$, $z_2=m-\sqrt{-m^2+3m+10}.i$

Vậy $|z_1|+|z_2| \leq 8 \Leftrightarrow 2\sqrt{3m+10} \leq 8 \Leftrightarrow \sqrt{3m+10} \leq 4 \Leftrightarrow 3m+10 \leq 16 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện ta có $-2<m \leq 2$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2(m-4)z+m^2-4m+1=0$, m là tham số thự **C.** Có bao nhiêu giá trị m để phương trình đã cho có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa điều kiện $|z_1+z_2-2z_1z_2|=|z_1|$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải:

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm phức phân biệt trong đó z_1 là nghiệm có phần ảo âm là: $\Delta'=(m-4)^2-\left(m^2-4m+1\right)<0 \Leftrightarrow -4m+15<0 \Leftrightarrow m>\frac{15}{4}$.

Khi đó: $z_1+z_2-2z_1z_2=2(m-4)-2\left(m^2-4m+1\right)=-2m^2+10m-10$

Và $z_1=-b'-i\sqrt{|\Delta'|}=m-4-i\sqrt{|-4m+15|}$

Ta có: $|z_1+z_2-2z_1z_2|=|z_1| \Leftrightarrow \left|-2m^2+10m-10\right|=(m-4)^2+(4m-15)$

$\Leftrightarrow \left|-2m^2+10m-10\right|=m^2-4m+1$

Vì $m>\frac{15}{4}$ nên $m^2-4m+1>0$, do đó:

$$(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2m^2+10m-10=m^2-4m+1 \\ -2m^2+10m-10=-m^2+4m-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m^2-14m+11=0 \\ m^2-6m+9=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1, m=\dfrac{11}{3} \\ m=3 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện $m>\dfrac{15}{4}$ suy ra không có giá trị nào của m thỏa điều kiện bài toán.

Câu 8: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $\left|z_0{}^2+(1-4m)z_0+4m^2-5m-3\right|=10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải:

Cách 1: Ta có $\Delta'=m+1$.

Trường hợp 1: $m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Khi đó theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm thực z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=7 \\ z_0=-13 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} 7^2-2(2m-1)7+4m^2-5m=0 \\ (-13)^2-2(2m-1)(-13)+4m^2-5m=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2-33m+63=0 \\ 4m^2-47m+143=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \quad (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} \quad (tm) \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức là z_0 và $\overline{z}_0$ và thoả mãn $|z_0+3|=10$

$$\Leftrightarrow (z_0+3)(\overline{z}_0+3)=100 \Leftrightarrow |z_0|^2+3(z_0+\overline{z}_0)+9=100 \Leftrightarrow 4m^2-5m+3.2(2m-1)-91=0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2+7m-97=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8} \quad (tm) \\ m=-\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8} \quad (ktm) \end{array}\right..$$

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Ta có $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0 \Leftrightarrow (z-2m+1)^2=m+1$ (1).

Trường hợp 1: $m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2m-1+\sqrt{m+1} \\ z=2m-1-\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} \left|2m+2+\sqrt{m+1}\right|=10 \\ \left|2m+2-\sqrt{m+1}\right|=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \quad (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} \quad (tm) \end{array}\right..$

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2m-1+i\sqrt{|m+1|} \\ z = 2m-1-i\sqrt{|m+1|} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3| = 10$.

Do đó $\left|2m+2+i\sqrt{|m+1|}\right| = 10 \Leftrightarrow 4m^2+8m+4-m-1 = 100 \Leftrightarrow 4m^2+7m-97 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8} \ (tm) \\ m = -\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8} \ (ktm) \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2+2mz+m+1=0$ (1) (m là tham số thực); z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình (1); A, B lần lượt là điểm biểu diễn của hai nghiệm phức đó trên mặt phẳng Oxy. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để ΔOAB vuông tại O?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Xét phương trình $z^2+2mz+m+1=0$ (1)

Phương trình có hai nghiệm phức khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2-m-1<0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(*)$

Ta có các nghiệm $z_1 = -m+i\sqrt{-m^2+m+1}$; $z_2 = -m-i\sqrt{-m^2+m+1}$

A, B lần lượt là điểm biểu diễn của hai nghiệm phức z_1, z_2 nên $A\left(-m\,;\sqrt{-m^2+m+1}\right)$; $B\left(-m\,;-\sqrt{-m^2+m+1}\right)$.

ΔOAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 2m^2-m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ $(thỏa\ mãn\ *)$.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên $m=1$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 10: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-\sqrt{m+1}z-\dfrac{1}{4}\left(m^2-5m-6\right)=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10;10]$ để phương trình trên có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2| \le |z_1-z_2|$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải:

Điều kiện $m+1 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -1$. $\Delta = m^2-4m-5$

+ Trường hợp 1: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m^2-4m-5 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 5 \\ m \le -1 \end{array}\right.$ phương trình có 2 nghiệm thực z_1, z_2

Theo định lý Viet $z_1.z_2 = -\dfrac{1}{4}\left(m^2-5m-6\right)$.

$|z_1+z_2| \le |z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 \le |z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow 4z_1.z_2 \le 0$

$-\left(m^2-5m-6\right) \le 0 \Leftrightarrow m^2-5m-6 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ m \le -1 \end{array}\right.$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $(10-6)+1+1=6$.

+ Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2-4m-5<0 \Leftrightarrow -1<m<5$.

phương trình có 2 nghiệm phức z_1, z_2

$|z_1+z_2| \le |z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 \le |z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow m+1 \le |m^2-4m-5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-5m-6 \ge 0 \\ m^2-3m-4 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ m \le -1 \\ -1 \le m \le 4 \end{array}\right.$

Do $m \in \mathbb{Z}, -1<m<5$ và $m \in [-10;10]$ nên số giá trị m thỏa mãn là $m=0, m=1, m=2, m=3$.

Vậy có 10 giá trị của m.

Câu 11: Trên tập số phức, cho phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b \in \mathbb{R})$. Có bao nhiêu số phức w sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm là $z_1=(6-i)\cdot w-2i$ và $z_2=(\bar{w}-5+i)\cdot|w|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải:

Trường hợp 1: $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

$z_1=(6-i)w-2i=(6-i)(x+yi)-2i$ là số thực nên $-x+6y-2=0$.

$z_2=(\bar{w}-5+i)|w|=\sqrt{x^2+y^2}[(x-5)+(1-y)i]$ là số thực nên $(1-y)\sqrt{x^2+y^2}=0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -x+6y-2=0 \\ (1-y)\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow w=4+i$.

Trường hợp 2: $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$. Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm là liên hợp với nhau.

$z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow (6-i)w-2i=(w-5-i)|w|=t.w-5t-t.i$ $(t=|w|)$

$\Leftrightarrow w[(t-6)+i]=5t+(t-2)i$. (1)

$\Rightarrow t^2\left[(t-6)^2+1\right]=25t^2+(t-2)^2$

$\Leftrightarrow t^4-12t^3+11t^2+4t-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t \approx 0,62079 \\ t \approx 10,967 \end{array}\right.$.

Thay mỗi giá trị của t vào (1), ta được một số phức w tương ứng.

Vậy có tất cả 4 số phức w thoả mãn.

Câu 12: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2mz+8m-12=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|$?

A. 5 **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có: $z^2-2mz+8m-12=0$ $(*)$ thì $\Delta'=m^2-8m+12$.

TH1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 2 \end{array}\right.$. Khi đó phương trình $(*)$ có 2 nghiệm thực phân biệt z_1, z_2 và theo yêu cầu bài toán: $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = z_2 \ (KTM) \\ z_1 = -z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \ (TM) \end{array}\right.$

TH2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 6$. Phương trình $(*)$ khi đó có 2 nghiệm $z_{1,2} = m \pm i\sqrt{|\Delta'|}$ luôn thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$. Nên: $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy các giá trị m thỏa mãn là: $m \in \{0; 3; 4; 5\}$.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $z^2 + 2mz + 1 = 0$ có hai nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 3| = |z_2 + 3|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

+) Với $\Delta' = m^2 - 1 < 0$, phương trình $z^2 + 2mz + 1 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $z_1 = a + bi, z_2 = a - bi$.

Khi đó, hiển nhiên $|z_1 + 3| = \sqrt{(a+3)^2 + b^2} = |z_2 + 3|$.

+) Với $\Delta' = m^2 - 1 > 0$, phương trình $z^2 + 2mz + 1 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt z_1, z_2.

Đẳng thức $|z_1 + 3| = |z_2 + 3|$ tương đương với $z_1 + z_2 + 6 = 0$, điều này nghĩa là $-2m + 6 = 0$ tức $m = 3$.

Tóm lại các số nguyên m cần tìm là $m = 0, m = 3$.

Câu 14: Có bao nhiêu số nguyên a để phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có $\Delta = [-(a-3)]^2 - 4(a^2 + a) = -3a^2 - 10a + 9$

Trường hợp 1: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow -3a^2 - 10a + 9 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-5 - 2\sqrt{13}}{3} \le a \le \dfrac{-5 + 2\sqrt{13}}{3}$ $(*)$

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1, z_2, thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 = a - 3 \\ |z_1 - z_2| = |\sqrt{\Delta}| \end{cases}$.

Suy ra $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |a - 3| = |\sqrt{\Delta}| \Leftrightarrow (a-3)^2 = \Delta$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 = -3a^2 - 10a + 9 \Leftrightarrow 4a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -1 \end{array}\right.$ đều thỏa mãn $(*)$.

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3a^2 - 10a + 9 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < \dfrac{-5 - 2\sqrt{13}}{3} \\ a > \dfrac{-5 + 2\sqrt{13}}{3} \end{array}\right.$ $(**)$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2, thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 = a - 3 \\ |z_1 - z_2| = \left|i\sqrt{|\Delta|}\right| \end{cases}$.

Suy ra $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |a-3| = \left|i\sqrt{|\Delta|}\right| \Leftrightarrow (a-3)^2 = -\Delta$

$\Leftrightarrow (a-3)^2 = 3a^2 + 10a - 9 \Leftrightarrow 2a^2 + 16a - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -9 \end{array}\right.$ đều thỏa mãn $(**)$.

Vậy có 4 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15: Cho số phức w và hai số thực b, c. Biết rằng $w + 2$ và $3w - 4i$ là hai nghiệm của phương trình $2022z^2 + bz + c = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = b + c$ bằng

A. $P = -4044$. **B.** $P = 8088$. **C.** $P = 4044$. **D.** $P = -8088$.

Lời giải:

Nhận xét: Trong tập số phức, phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 thì $z_1 = \overline{z}_2$.

Đặt $w = x + yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$. Vì $b,\ c \in \mathbb{R}$ và phương trình $2022z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = w + 2$, $z_2 = 3w - 4i$ nên 2 nghiệm z_1, z_2 là 2 nghiệm phức có phần ảo khác 0.

Do đó $z_1 = \overline{z}_2 \Leftrightarrow w + 2 = \overline{3w - 4i} \Leftrightarrow x + yi + 2 = \overline{3(x + yi) - 4i}$

$\Leftrightarrow x + 2 + yi = 3x + (4 - 3y)i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 3x \\ y = 4 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

$\Rightarrow w = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} z_1 = w + 2 = 3 + i \\ z_2 = 3w - 4i = 3 - i \end{cases}$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{2022} \\ z_2.z_2 = \dfrac{c}{2022} \end{cases}$, từ đó suy ra $\begin{cases} -\dfrac{b}{2022} = 6 \\ \dfrac{c}{2022} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6.2022 \\ c = 10.2022 \end{cases} \Rightarrow b + c = 8088$

Vậy $P = b + c = 8088$.

Câu 16: Trên tập các số phức, xét phương trình $z^2 - mz + m + 8 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 phân biệt thỏa mãn $\left|z_1\left(z_1^2 + mz_2\right)\right| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2|$?

A. 12. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 11.

Lời giải:

Ta có $\Delta = m^2 - 4m - 32$ là biệt thức của phương trình.

Trường hợp 1: Xét $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 32 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 8 \\ m < -4 \end{array}\right.$ khi đó phương trình có hai nghiệm thực phân biệt. Ta có $z_1^2 = mz_1 - m - 8$ suy ra $z_1^2 + mz_2 = m(z_1 + z_2) - m - 8 = m^2 - m - 8$ do đó $\left|z_1\left(z_1^2 + mz_2\right)\right| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2| \Leftrightarrow \left|m^2 - m - 8\right||z_1| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2|$ (*).

Nếu $z_1.z_2 = 0$ thì $m + 8 = 0 \Rightarrow m = -8$ không thỏa mãn. Khi đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ z_1 = -z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 8 > 0 \\ m = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Xét $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 8$ khi đó phương trình có hai nghiệm phức phân biệt và $|z_1| = |z_2|$, ta có $\left|z_1\left(z_1^2 + mz_2\right)\right| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2| \Leftrightarrow \left|m^2 - m - 8\right||z_1| = \left(m^2 - m - 8\right)|z_2|$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{33}}{2} \\ m \leq \dfrac{1-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện ta được $m \in \{-3;4;5;6;7\}$.

Vậy có tất cả là 5 số nguyên cần tìm.

Câu 17: Biết phương trình $z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có một nghiệm là $z_1 = 3i$ và nghiệm còn lại là z_2. Mô đun của số phức $(a-b)z_2$ bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 18. **D.** 27.

Lời giải:

Phương trình $z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có một nghiệm $z_1 = 3i$ thì nghiệm còn lại $z_2 = -3i$.

Theo Vi-et ta có. $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1.z_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 9 \end{cases}$.

Vậy $\left|(a-b)z_2\right| = \left|-9.(-3i)\right| = 27$.

Câu 18: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết $z_1 = w + 2i$ và $z_2 = 2w - 3$ là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tính giá trị của $T = |z_1| + |z_2|$.

A. $T = 2\sqrt{13}$. **B.** $T = 4\sqrt{13}$. **C.** $T = \dfrac{2\sqrt{97}}{3}$. **D.** $T = \dfrac{2\sqrt{85}}{3}$.

Lời giải:

Vì z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình đã cho nên $\begin{cases} \overline{z_1} = z_2 \\ \overline{z_2} = z_1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{w} - 2i = 2w - 3 \\ 2\overline{w} - 3 = w + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overline{w} - 4i = 4w - 6 \\ 2\overline{w} - 3 = w + 2i \end{cases} \Rightarrow w = 3 - \dfrac{2}{3}i \Rightarrow z_1 = 3 + \dfrac{4}{3}i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{97}}{3}$.

Mà z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình trên nên $|z_1| = |z_2| = \dfrac{\sqrt{97}}{3}$.

Vậy $T = \dfrac{2\sqrt{97}}{3}$.

Câu 19: Cho các số thực b, c sao cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ có hai nghiệm phức $z_1; z_2$ với phần thực là số nguyên và thỏa mãn $|z_1 + 3 - 2i| = 1$ và $(z_1 - 2i)(z_2 + 2)$ là số thuần ảo. Khi đó, $b + c$ bằng

A. -1. **B.** 12. **C.** 4. **D.** -12.

Lời giải:

Trường hợp 1: Nếu các nghiệm của phương trình là các số thực $x; y$ thì

$|z_1 + 3 - 2i| = |(x+3) - 2i| = \sqrt{(x+3)^2 + 4} = 2 > 1$ mâu thuẫn với giả thiết.

Trường hợp 2: Các nghiệm phức của phương trình không là các số thực **C.**

Giả sử $z_1 = x + yi \Rightarrow z_2 = \overline{z_1} = x - yi$.

Khi đó $|z_1 + 3 - 2i| = 1 \Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 1 \quad (1)$.

Lại có $(z_1 - 2i)(z_2 + 2) = [x + (y-2)i].[(x+2) - yi]$

$= x.(x+2) + y.(y-2) + [(x+2).(y-2) - xy].i$ là một số thuần ảo.

Suy ra $x.(x+2) + y.(y-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \quad (2)$.

Giải hệ gồm (1) và (2): $\begin{cases}(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1\\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = -2\\ y = 2\end{cases}$.

$\Rightarrow z_1 = -2 + 2i$; $z_2 = -2 - 2i$.

Vì vậy theo Viet ta có: $\begin{cases}z_1 + z_2 = -b = (-2+2i) + (-2-2i) = -4\\ z_1.z_2 = c = (-2+2i).(-2-2i) = 8\end{cases} \Rightarrow b + c = 4 + 8 = 12$.

Câu 20: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4 + (4-m)z^2 - 4m = 0$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6$.

A. $m = -1$. **B.** $m = \pm 2$. **C.** $m = \pm 3$ **D.** $m = \pm 1$.

Lời giải:

Ta có: $z^4 + (4-m)z^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} z^2 = -4 & (1)\\ z^2 = m & (2)\end{array}\right.$

Ta có: $|z^n| = |z|^n$.

$z_1; z_2$ là nghiệm của phương trình (1). Ta có: $|z_1| = |z_2| = \sqrt{|-4|} = 2$.

$z_3; z_4$ là nghiệm của phương trình (2). Ta có: $|z_3| = |z_4| = \sqrt{|m|}$.

Theo đề ra ta có: $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{|m|} + 4 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{|m|} = 1 \Leftrightarrow |m| = 1$.

Kết luận $m = \pm 1$.

Câu 21: Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2 + az + b = 0$, với $a, b \in \mathbb{R}$ có nghiệm $z_0 = 2 - 3i$. Biết rằng phương trình $z^2 + bz + a = 0$ cũng có hai nghiệm phức z_1, z_2. Tính $S = |z_1| + |z_2|$.

A. 4. **B.** 13. **C.** 25. **D.** $\sqrt{185}$.

Lời giải:

Phương trình $z^2 + az + b = 0$, với $a, b \in \mathbb{R}$ có nghiệm $z_0 = 2 - 3i$ khi và chỉ khi

$(2-3i)^2 + a(2-3i) + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b - 5 - 3(a+4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}2a + b = 5\\ a + 4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = -4\\ b = 13.\end{cases}$

Khi đó phương trình $z^2 + bz + a = 0$ trở thành $z^2 + 13z - 4 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt trái dấu $z_{1,2} = \dfrac{-13 \pm \sqrt{185}}{2}$.

Suy ra $S = |z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{-13 + \sqrt{185}}{2}\right| + \left|\dfrac{-13 - \sqrt{185}}{2}\right| = \dfrac{-13 + \sqrt{185}}{2} + \dfrac{13 + \sqrt{185}}{2} = \sqrt{185}$.

Câu 22: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$, (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Theo định lý Vi-ét, ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-4a \\ z_1z_2=b^2+2 \end{cases}$.

Theo yêu cầu bài toán, phương trình đã cho có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn

$z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow z_1+2iz_2-3-3i=0 \Leftrightarrow (z_1+2iz_2-3-3i)(z_2+2iz_1-3-3i)=0$

$\Leftrightarrow -3z_1z_2-(1+2i)(3+3i)(z_1+z_2)+18i+2i(z_1^2+z_2^2)=0$

$\Leftrightarrow -3(b^2+2)+(3-9i)(-4a)+18i+2i\left[(z_1+z_2)^2-2z_1z_2\right]=0$

$\Leftrightarrow -3(b^2+2)+(3-9i)(-4a)+18i+2i\left[16a^2-2(b^2+2)\right]=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(b^2+2)-12a=0 \\ 36a+18+32a^2-4(b^2+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+2=-4a \\ 36a+18+32a^2+16a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+2=-4a \\ 32a^2+52a+18=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2+2=-4a \\ \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{2} \\ a=-\frac{9}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{2}; b=0 \\ a=-\frac{9}{8}; b^2=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{2}; b=0 \\ a=-\frac{9}{8}; b=\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$.

Vậy có 3 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 23: Trên tập số phức, cho phương trình $z^2+2(m-1)z+m^2+2m=0$. Có bao nhiêu tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $z_1; z_2$ thõa mãn $|z_1|^2+|z_2|^2=5$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải:

Ta có: $\Delta'=(m-1)^2-(m^2+2m)=-4m+1$

TH1: YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ |z_1|^2+|z_2|^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{4} \\ (z_1+z_2)^2-2z_1z_2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{4} \\ 4(m-1)^2-2(m^2+2m)=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{4} \\ 2m^2-12m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\frac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m=\frac{6+\sqrt{38}}{2}\ (L) \\ m=\frac{6-\sqrt{38}}{2}\ (N) \end{array}\right. \end{cases}$

TH2: Khi $\Delta'<0 \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phức $z_1; z_2$ có dạng $z_1 = a + bi, z_2 = a - bi$ với $a = -m + 1; b = \sqrt{4m-1}$

Khi đó:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 5 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1-m)^2 + 4m - 1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\,(N) \\ m = \dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\,(L) \end{array}\right.$$

Câu 24: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn điểm biểu diễn của z_0 thuộc đường E-lip có phương trình $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải:

Xét phương trình $z^2 - 2z + m^2 = 0$ có $\Delta' = 1 - m^2$.

Trường hợp 1: $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow m \in [-1;1]$.

Phương trình có các nghiệm là $z_0 = 1 - \sqrt{1-m^2}$ hoặc $z_0 = 1 + \sqrt{1-m^2}$.

Với $z_0 = 1 - \sqrt{1-m^2}$ điểm biểu diễn thuộc E-lip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Do đó $\left(1 - \sqrt{1-m^2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{1-m^2} = 3 \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Với $z_0 = 1 + \sqrt{1-m^2}$ điểm biểu diễn thuộc E-lip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Do đó $\left(1 + \sqrt{1-m^2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{1-m^2} = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

Trường hợp này giá trị $m = 0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Phương trình có các nghiệm là $z_0 = 1 - i\sqrt{m^2-1}$ hoặc $z_0 = 1 + i\sqrt{m^2-1}$.

Điểm biểu diễn thuộc E-lip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

Do đó $\frac{1^2}{4} + \left(\pm\sqrt{m^2-1}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 - \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$ (thỏa mãn).

Trường hợp này giá trị $\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$ thỏa mãn.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: Biết phương trình $z^2 + mz + m^2 - 2 = 0$ (m là tham số thực) có hai nghiệm phức z_1, z_2. Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1, z_2 và $z_0 = i$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để diện tích tam giác ABC bằng 1?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6

Lời giải:

Ta có: $\Delta = m^2 - 4\left(m^2 - 2\right) = -3m^2 + 8$

Trường hợp 1: $\Delta > 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{6}}{3} < m < \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt là z_1, z_2.

Vì $A, B \in Ox$ nên $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{(z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2} = \sqrt{-3m^2 + 8}$.

Mặt khác, ta có $C(0;1) \Rightarrow d(C;AB) = 1$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C;AB) = \frac{\sqrt{-3m^2+8}}{2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{m = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}(n)$.

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ m < \frac{-2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức liên hợp là $z_{1,2} = \frac{-m + i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Ta có: $AB = |z_1 - z_2| = \left|i\sqrt{|\Delta|}\right| = \sqrt{\left|-3m^2 + 8\right|} = \sqrt{3m^2 - 8}$ và $C(0;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là $x + \frac{m}{2} = 0$ nên $d(C;AB) = \frac{|m|}{2}$.

Do đó, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C;AB) = \frac{|m|\sqrt{3m^2-8}}{4} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 4 \\ m^2 = -\frac{4}{3}(\text{VN}) \end{array}\right. \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Vậy có 4 giá trị thực của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 26: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + 8m - 4 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1^2 - 2mz_1 + 8m\right| = \left|z_2^2 - 2mz_2 + 8m\right|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

Ta có $\Delta' = m^2 - 6m + 5$

và $\left|z_1^2 - 2mz_1 + 8m\right| = \left|z_2^2 - 2mz_2 + 8m\right|$

$\Leftrightarrow \left|z_1^2 - 2(m+1)z_1 + 8m - 4 + 2z_1 + 4\right| = \left|z_2^2 - 2(m+1)z_2 + 8m - 4 + 2z_2 + 4\right|$

$\Leftrightarrow |2z_1 + 4| = |2z_2 + 4|$ (1)

* Xét $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 5 \\ m < 1 \end{array}\right.$. Khi đó PT có 2 nghiệm thực phân biệt

Nên $(1) \Leftrightarrow 2z_1 + 4 = -(2z_2 + 4) \Leftrightarrow z_1 + z_2 = -4 \Leftrightarrow 2(m+1) = -4 \Leftrightarrow m = -3$

* Xét $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$. Khi đó PT có 2 nghiệm phức phân biệt z_1, z_2 liên hợp của nhau

Nên $2z_1+1,\ 2z_2+1$ cũng là hai số phức liên hợp của nhau. Suy ra $|2z_1+1|=|2z_2+1|$ luôn thỏa

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 27: Tìm tổng các giá trị của số thực a sao cho phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 thỏa $|z_0|=2$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải:

Trường hợp 1: $z_0\in\mathbb{R}$. Khi đó $|z_0|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_0=2\\z_0=-2\end{array}\right.$.

Nếu $z_0=2$ thì $a^2-2a+10=0$ không có nghiệm thực a.

Nếu $z_0=-2$ thì $a^2-2a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1+\sqrt{3}\\a=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$ (1).

Trường hợp 2: $z_0\notin\mathbb{R}$. Khi đó phương trình $z^2+3z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 nên $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm phức của phương trình.

Vì $|z_0|=2$ nên $z_0.\overline{z_0}=|z_0|^2=4$.

Theo định lý Vi-ét, ta có: $z_0.\overline{z_0}=\dfrac{a^2-2a}{1}=a^2-2a$.

$\Rightarrow a^2-2a=4\Leftrightarrow a^2-2a-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1+\sqrt{5}\\a=1-\sqrt{5}\end{array}\right.$ (2).

Từ (1) và (2), ta có tổng các giá trị của số thực a thỏa yêu cầu bài toán là:

$1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}=4$.

Câu 28: Trên tập hợp các số phức, gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $mz^2+2(m+1)z-m+6=0$ có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=1$. Tính S.

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải:

Xét phương trình $mz^2+2(m+1)z-m+6=0$.

Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow$ Phương trình đã cho có dạng $2z+6=0\Leftrightarrow z=-3\Rightarrow|z|=3$ không thõa mãn.

Trường hợp 2: $m\neq0$

Ta có $\Delta'=(m+1)^2-m(-m+6)=2m^2-4m+1$.

Nếu: $\Delta'\geq0\Leftrightarrow 2m^2-4m+1\geq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\leq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\\m\geq\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm thực

$\Rightarrow z_0$ là số thực. Theo bài ra, ta có $|z_0|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_0=1\\z_0=-1\end{array}\right.$.

Với $z_0=1$, ta có $m+2m+2-m+6=0\Leftrightarrow m=-4$ (thỏa mãn).

Với $z_0=-1$, ta có $m-2m-2-m+6=0\Leftrightarrow m=2$ (thỏa mãn).

Nếu: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} < m < \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, thì phương trình đã cho có hai nghiệm phức.

z_0 là nghiệm của phương trình đã cho $\Rightarrow \overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Áp dụng hệ thức viét, ta có $z_0.\overline{z_0} = \dfrac{-m+6}{m}$ mà $z_0.\overline{z_0} = |z_0|^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{-m+6}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 3$ (không thõa mãn). Vậy $m = -4; m = 2 \Rightarrow S = -2$.

Câu 29: Cho phương trình $z^2 + az + 2a^2 = 0$, với a là số thực dương. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình, trong đó z_1 có phần ảo dương. Biết rằng $(2z_1 + z_2)\overline{z_1} = 10 + 2\sqrt{7}i$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1 < a < 3$. **B.** $a < 1$. **C.** $5 < a < 8$. **D.** $3 < a < 5$.

Lời giải:

Xét phương trình $z^2 + az + 2a^2 = 0$, với $a > 0$.

Ta có: $\Delta = a^2 - 8a^2 = -7a^2 < 0,\ \forall a > 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2 với $\overline{z_1} = z_2$ và $z_2 = \dfrac{-a - a\sqrt{7}i}{2}$.

Theo định lí Viét ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1.z_2 = 2a^2 \end{cases}$

Khi đó: $(2z_1 + z_2)\overline{z_1} = 10 + 2\sqrt{7}i$

$$\Leftrightarrow (z_1 - a)z_2 = 10 + 2\sqrt{7}i \Leftrightarrow 2a^2 - az_2 = 10 + 2\sqrt{7}i \Leftrightarrow 2a^2 - a.\frac{-a - a\sqrt{7}i}{2} = 10 + 2\sqrt{7}i$$

$$\Leftrightarrow \frac{5a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{7}i}{2} = 10 + 2\sqrt{7}i \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5a^2}{2} = 10 \\ \dfrac{a^2\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 30: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(2m-1)z + 4m^2 - 5m = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0 + 3| = 10$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải:

Cách 1: Ta có $\Delta' = m + 1$.

Trường hợp 1: $m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Khi đó theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm thực z_0 thoả mãn $|z_0 + 3| = 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 7 \\ z_0 = -13 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} 7^2 - 2(2m-1)7 + 4m^2 - 5m = 0 \\ (-13)^2 - 2(2m-1)(-13) + 4m^2 - 5m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m^2 - 33m + 63 = 0 \\ 4m^2 - 47m + 143 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \quad (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} \quad (tm) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$.

Khi đó phương trình đã cho có hai nghiệm phức là z_0 và $\overline{z}_0$ và thoả mãn $|z_0+3|=10$

$\Leftrightarrow (z_0+3)(\overline{z}_0+3)=100 \Leftrightarrow |z_0|^2+3(z_0+\overline{z}_0)+9=100 \Leftrightarrow 4m^2-5m+3.2(2m-1)-91=0$

$\Leftrightarrow 4m^2+7m-97=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8} \quad (tm) \\ m=-\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8} \quad (ktm) \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Ta có $z^2-2(2m-1)z+4m^2-5m=0 \Leftrightarrow (z-2m+1)^2=m+1$ (1).

Trường hợp 1: $m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -1$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2m-1+\sqrt{m+1} \\ z=2m-1-\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$.

Do đó $\left[\begin{array}{l} \left|2m+2+\sqrt{m+1}\right|=10 \\ \left|2m+2-\sqrt{m+1}\right|=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \quad (tm) \\ m=\dfrac{21}{4} \quad (tm) \end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $m+1<0 \Leftrightarrow m<-1$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2m-1+i\sqrt{|m+1|} \\ z=2m-1-i\sqrt{|m+1|} \end{array}\right.$.

Theo bài ra, phương trình đã cho có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0+3|=10$.

Do đó $\left|2m+2+i\sqrt{|m+1|}\right|=10 \Leftrightarrow 4m^2+8m+4-m-1=100 \Leftrightarrow 4m^2+7m-97=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\dfrac{7+\sqrt{1601}}{8} \quad (tm) \\ m=-\dfrac{7-\sqrt{1601}}{8} \quad (ktm) \end{array}\right.$.

Vậy có 3 giá trị của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Cho số phức z,w khác 0 thỏa mãn $z+w\ne 0$ và $\dfrac{2}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{4}{z+w}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{w}\right|$ bằng:

A. 2. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải:

Với hai số phức z,w khác 0 thỏa mãn $z+w\ne 0$, ta có:

$\dfrac{2}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{4}{z+w} \Leftrightarrow \dfrac{2w+3z}{zw}=\dfrac{4}{z+w} \Leftrightarrow (2w+3z)(z+w)=4zw \Leftrightarrow 3z^2+zw+2w^2=0$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{z}{w}\right)^2+\left(\frac{z}{w}\right)+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{z}{w}=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{23}}{6}i\\ \frac{z}{w}=-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{23}}{6}i\end{array}\right.$$

Suy ra $\left|\frac{z}{w}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của a sao cho phương trình $z^2-az+2a-a^2=0$ có hai nghiệm phức có môđun bằng 1.

A. $a=-1$. **B.** $a=1$. **C.** $a=\pm1$. **D.** $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:

Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-az+2a-a^2=0$. Ta có $|z_1|=|z_2|=1$.

Theo định lí Viét, ta có $z_1z_2=2a-a^2$.

Lấy mô đun hai vế có $|z_1z_2|=|2a-a^2| \Leftrightarrow |z_1|.|z_2|=|2a-a^2| \Rightarrow |2a-a^2|=1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2a-a^2=1\\ 2a-a^2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-a^2+2a-1=0\\ -a^2+2a+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Với $a=1$ có phương trình thành $z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z|=1 \Rightarrow a=1$ thỏa mãn.

Với $a=1+\sqrt{2}$ có phương trình thành $z^2-\left(1+\sqrt{2}\right)z-1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{7+2\sqrt{2}}}{2}$.

$\Rightarrow a=1+\sqrt{2}$ không thỏa mãn.

Với $a=1-\sqrt{2}$ có phương trình thành $z^2-\left(1-\sqrt{2}\right)z-1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{7-2\sqrt{2}}}{2}$.

$\Rightarrow a=1-\sqrt{2}$ không thỏa mãn. Vậy $a=1$.

Câu 33: Trên tập số phức, xét phương trình $z^2+2mz+n^2+5=0$ (với m, n là tham số thực). Có bao nhiêu cặp số $(m;n)$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phức z_1,z_2 sao cho các điểm biểu diễn của $z_1,z_2,z_3=1,z_4=5$ là bốn đỉnh của một hình vuông?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải:

Để phương trình có hai nghiệm phức khi và chỉ khi $\Delta'=m^2-n^2-5<0$.

Đặt $z_1=a+bi; a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow z_2=a-bi$.

Ta có bốn điểm $A(a;b),B(a;-b),C(1;0),D(5;0)$ biểu diễn bốn số phức $z_1,z_2,z_3=1,z_4=5$ lập thành hình vuông. Suy ra $ACBD$ là hình vuông nên $\begin{cases}(3;0)\in AB\\ AB=CD\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ |2b|=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=\pm2\end{cases}$.

- $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z_1=3+2i\\ z_2=3-2i\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z_1+z_2=6=-2m\\ z_1z_2=13=n^2+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-3\\ n=\pm2\sqrt{2}\end{cases}$.

- $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 3-2i \\ z_2 = 3+2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2 = 6 = -2m \\ z_1z_2 = 13 = n^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$.

  Vậy ta có hai cặp số $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2mz-m+12=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2| = \sqrt{2}|z_1-z_2|$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải:

Phương trình đã cho có $\Delta' = m^2+m-12$.

Trường hợp 1: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2+m-12>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>3 \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực z_1, z_2 phân biệt.

Do đó, $|z_1|+|z_2| = \sqrt{2}|z_1-z_2|$

$\Leftrightarrow (|z_1|+|z_2|)^2 = \left(\sqrt{2}|z_1-z_2|\right)^2$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+2|z_1z_2| = 2\left(z_1^2+z_2^2-2z_1z_2\right)$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-2z_1z_2+2|z_1z_2| = 2\left[(z_1+z_2)^2-4z_1z_2\right]$

$\Leftrightarrow (z_1+z_2)^2-6z_1z_2-2|z_1z_2|=0$

$\Leftrightarrow 4m^2-6(-m+12)-2|-m+12|=0\ (*)$

Nếu $m<-4$ hoặc $3<m<12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2-8(-m+12)=0 \Leftrightarrow m^2+2m-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-6 \\ m=4 \end{array}\right.$.

Nếu $m \ge 12$ thì $(*) \Leftrightarrow 4m^2-4(-m+12)=0 \Leftrightarrow m^2+m-12=0$.

Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2+m-12<0 \Leftrightarrow -4<m<3$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 là hai số phức liên hợp:

$-m+i\sqrt{-m^2-m+12}$ và $-m-i\sqrt{-m^2-m+12}$.

Do đó, $|z_1|+|z_2| = \sqrt{2}|z_1-z_2|$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{m^2+(-m^2-m+12)} = 2\sqrt{-m^2-m+12} \Leftrightarrow -m+12 = -m^2-m+12 \Leftrightarrow m=0$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 35: Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $(z_1^2+4)(z_2^2+4)(z_3^2+4)(z_4^2+4)=324$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-15 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=15 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-35 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=35 \end{array}\right.$.

Lời giải:

Đặt $t=z^2$, phương trình trở thành $4t^2+mt+4=0$ có hai nghiệm t_1, t_2.

Ta có $\begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{m}{4} \\ t_1.t_2=1 \end{cases}$. Do vai trò bình đẳng, giả sử ta có $z_1^2=z_2^2=t_1$, $z_3^2=z_4^2=t_2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (t_1+4)^2(t_2+4)^2=324 \Leftrightarrow \left[t_1t_2+4(t_1+t_2)+16\right]^2=324$

$\Leftrightarrow (-m+17)^2=18^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m+17=18 \\ -m+17=-18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=35 \end{array}\right.$.

Câu 36: Cho các số thực b,c sao cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-4+3i|=1$ và $|z_2-8-6i|=4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $5b+c=-12$. **B.** $5b+c=4$. **C.** $5b+c=-4$. **D.** $5b+c=12$.

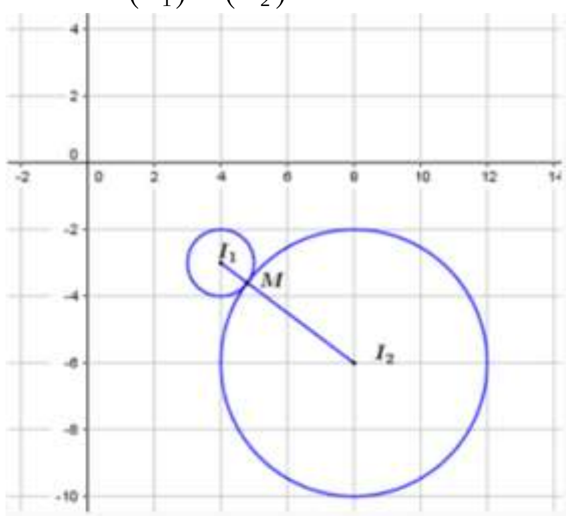
Lời giải:

Vì z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+bz+c=0$ nên $z_1=\overline{z_2}$

Khi đó ta có $|z_2-8-6i|=4 \Leftrightarrow |\overline{z_1}-8-6i|=4 \Leftrightarrow |z_1-8+6i|=4.$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1.

$\Rightarrow M$ vừa thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4;-3)$, bán kính $R_1=1$ và đường tròn (C_2) tâm $I_1(8;-6)$, bán kính $R_1=4$ $\Rightarrow m\in(C_1)\cap(C_2)$.



Ta có $I_1I_2=\sqrt{4^2+3^2}=5=R_1+R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài.

Do đó có duy nhất 1 điểm M thỏa mãn, tọa độ điểm M là nghiệm của hệ

$\begin{cases} x^2+y^2-8x+6y+24=0 \\ x^2+y^2-16x+12y+84=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{24}{5} \\ y=-\dfrac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{24}{5};-\dfrac{18}{5}\right) \Rightarrow z_1=\dfrac{24}{5}-\dfrac{18}{5}i$ là nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0 \Rightarrow z_2=\dfrac{24}{5}+\dfrac{18}{5}i$ cũng là nghiệm của phương trình

$z^2+bz+c=0.$

Áp dụng định lí Vi ét ta có $z_1+z_2=-b=\dfrac{48}{5} \Rightarrow b=-\dfrac{48}{5}$; $z_1.z_2=c=36$

Vậy $5b+c=-48+36=-12.$

Câu 37: Cho phương trình $z^2+bz+c=0$, có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$. Gọi A,B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2-2bz+4c=0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải:

$z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$

Xét $z_2-z_1=4+2i\Rightarrow(z_2+z_1)^2-4z_1z_2=(4+2i)^2\Rightarrow b^2-4c=(4+2i)^2$

Khi đó phương trình $z^2-2bz+4c=0$

có $\Delta'=b^2-4c=(4+2i)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_A=b-4-2i\Rightarrow A(b-4;-2)\\ z_B=b+4+2i\Rightarrow B(b+4;2)\end{array}\right.(b=m+ni,m,n\in\mathbb{R})$

Vậy $AB=\sqrt{(b+4-b+4)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$.

Câu 38: Trên tập hợp các số phức, phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ (a là tham số thực) có 2 nghiệm z_1, z_2. Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết rằng có 2 giá trị của tham số a để tam giác OMN có một góc bằng $120°$. Tổng các giá trị đó bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -6.

Lời giải:

Vì O, M, N không thẳng hàng nên z_1, z_2 không đồng thời là số thực, cũng không đồng thời là số thuần ảo $\Rightarrow z_1$, z_2 là hai nghiệm phức, không phải số thực của phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$. Do đó, ta phải có $\Delta=a^2-12a+16<0\Leftrightarrow a\in\left(6-2\sqrt{5};\ 6+2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó, ta có $\begin{cases}z_1=\dfrac{2-a}{2}-\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i\\ z_1=\dfrac{2-a}{2}+\dfrac{\sqrt{-a^2+12a-16}}{2}i\end{cases}$.

$\Rightarrow OM=ON=|z_1|=|z_2|=\sqrt{2a-3}$ và $MN=|z_1-z_2|=\sqrt{-a^2+12a-16}$.

Tam giác OMN cân nên $MON=120°$ $\Rightarrow\dfrac{OM^2+ON^2-MN^2}{2OM.ON}=\cos120°$ $\Leftrightarrow\dfrac{a^2-8a+10}{2(2a-3)}=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a^2-6a+7=0\Leftrightarrow a=3\pm\sqrt{2}$.

Suy ra tổng các giá trị cần tìm của a bằng 6.

Câu 39: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2z-m+2=0$ (m là tham số thực). Gọi T là tập hợp các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt được biểu diễn hình học bởi hai điểm A, B trên mặt phẳng tọa độ sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$, với $C(-1;1)$. Tổng các phần tử trong T bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 9. **D.** -1.

Lời giải:

Ta có: $z^2-2z-m+2=0\Leftrightarrow(z-1)^2=m-1$ (1)

TH1. có hai nghiệm phức $\Leftrightarrow$ $m-1<0\Leftrightarrow m<1$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức $z_1=1+\sqrt{1-m}\,i$; $z_2=1-\sqrt{1-m}\,i$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của z_1; z_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:
$A\left(1;-\sqrt{1-m}\right)$; $B\left(1;\sqrt{1-m}\right)$.

Ta có: $AB = 2\sqrt{1-m}$; $d\left(C;AB\right) = d\left(C;\left(x=1\right)\right) = 2$.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.d\left(C;AB\right) = 2\sqrt{1-m} = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = -1$.

TH2. có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow\ m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm $z_1 = 1+\sqrt{1-m}$; $z_2 = 1-\sqrt{1-m}$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của z_1; z_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:
$A\left(1-\sqrt{1-m};0\right)$; $B\left(1+\sqrt{1-m};0\right)$.

Ta có: $AB = 2\sqrt{1-m}$; $d\left(C;AB\right) = d\left(C;Ox\right) = 1$.

Khi đó $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.d\left(C;AB\right) = \sqrt{1-m} = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 9$. Vậy $T = \left\{-1;9\right\}$ nên tổng các phần tử trong T bằng 8.

Câu 40: Biết rằng phương trình $z^2 + 2az + b = 0$ (a,b là các số thực dương) có hai nghiệm phức liên hợp z_1, z_2. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của số phức $w = 2, z_1, z_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = b-4a$ biết rằng ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác vuông có diện tích bằng 9.

A. 6. **B.** -8. **C.** 9. **D.** 14.

Lời giải:

Do phương trình $z^2 + 2az + b = 0$ (a,b là các số thực dương) có hai nghiệm phức liên hợp z_1, z_2 nên từ giả thiết ta gọi tọa độ các điểm biểu diễn cho các số phức $w = 2, z_1, z_2$ là $A(2;0); B(x;y); C(x;-y)$ với $x \neq 2, y \neq 0$

$\overrightarrow{AB} = (x-2;y); \overrightarrow{AC} = (x-2;-y)$. Do A thuộc Ox, B,C đối xứng qua Ox

Nên theo giả thiết suy ra ABC là tam giác vuông cân tại A

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - y^2 = 0 \quad (1)$

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC$

$\Leftrightarrow 9 = \dfrac{1}{2}\left[(x-2)^2 + y^2\right]$

Từ và suy ra $\left[\begin{array}{l} x = 5 \Rightarrow y = \pm 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = \pm 3 \end{array}\right.$

Với $x = 5, y = \pm 3$ ta tìm được $z_1 = 5+3i; z_2 = 5-3i$.

Với $x = -1, y = \pm 3$ ta tìm được $z_1 = -1+3i; z_2 = -1-3i$ suy ra $a = 1; b = 10 \Rightarrow T = 6$

Câu 41: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - 2az + b^2 - 20 = 0\left(1\right)$ với a,b là các tham số nguyên dương. Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn: $z_1 + 3iz_2 = 7+5i$ thì giá trị của biểu thức $7a+5b$ bằng

A. 19. **B.** 17. **C.** 32. **D.** 40.

Lời giải:

Nhận xét: Nếu $\Delta' = a^2 - b^2 + 20 \geq 0$

Giả thiết $z_1+3iz_2=7+5i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=7 \\ z_2=\dfrac{5}{3} \end{cases}$. Suy ra $7+\dfrac{5}{3}=z_1+z_2=2a\in\mathbb{Z}$

Suy ra: $\Delta'=a^2-b^2+20<0$

Giải phương trình (1) ta có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} z=a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \\ z=a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \end{array}\right.$

TH1: $\begin{cases} z_1=a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \\ z_2=a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \end{cases} \Rightarrow z_1+3iz_2=7+5i \Leftrightarrow a-3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}+\left(3a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}\right)i=7+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=7 \\ 3a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=-2 \end{cases} \Rightarrow VN$

TH2: $\begin{cases} z_1=a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \\ z_2=a-\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}i \end{cases} \Rightarrow z_1+3iz_2=7+5i \Leftrightarrow a+3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}+\left(3a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}\right)i=7+5i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=7 \\ 3a+\sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \sqrt{\left|a^2-b^2+20\right|}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \left[\begin{array}{l} b^2=25 \\ b^2=17(l) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \left[\begin{array}{l} b=5 \\ b=-5(l) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$

Suy ra $7a+5b=32$

Cách 2 Nhận xét: Nếu $\Delta'=a^2-b^2+20\ge 0$

Giả thiết $z_1+3iz_2=7+5i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=7 \\ z_2=\dfrac{5}{3} \end{cases}$. Suy ra $7+\dfrac{5}{3}=z_1+z_2=2a\in\mathbb{Z}$

Suy ra: $\Delta'=a^2-b^2+20<0$

Giả thiết ta có: $\begin{cases} z_1+3iz_2=7+5i \\ z_2-3iz_1=7-5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1+3i\left(7-5i+3iz_1\right)=7+5i \\ z_2-3iz_1=7-5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=1+2i \\ z_2=1-2i \end{cases}$

Áp dụng viet suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow 7a+5b=32$.

Câu 42: Cho phương trình $x^2-4x+\dfrac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính $P=c+2d$.

A. $P=18$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=22$.

Lời giải:

Ta có: $x^2-4x+\dfrac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức $\Leftrightarrow\ \Delta'=4-\dfrac{c}{d}<0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức $x_1=2+\sqrt{\left|\Delta'\right|}\,i$; $x_2=2-\sqrt{\left|\Delta'\right|}\,i$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của x_1; x_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:

$A\left(2;\sqrt{|\Delta'|}\right)$; $B\left(2;-\sqrt{|\Delta'|}\right)$.

Ta có: $AB=2\sqrt{|\Delta'|}$; $OA=OB=\sqrt{4+|\Delta'|}$.

Tam giác OAB đều khi và chỉ khi $AB=OA=OB \Leftrightarrow 2\sqrt{|\Delta'|}=\sqrt{4+|\Delta'|} \Leftrightarrow 4|\Delta'|=4+|\Delta'|$

$\Leftrightarrow |\Delta'|=\frac{4}{3}$. Vì $\Delta'<0$ nên $\Delta'=-\frac{4}{3}$ hay $4-\frac{c}{d}=-\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{c}{d}=\frac{16}{3}$.

Từ đó ta có $c=16$; $d=3$.

Vậy: $P=c+2d=22$.

Câu 43: Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thự **C.** Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=324$.

A. $m=1$; $m=-35$. **B.** $m=-1$; $m=-35$. **C.** $m=-1$; $m=35$. **D.** $m=1$; $m=35$.

Lời giải:

Đặt $f(z)=4z^4+mz^2+4$.

Vì phương trình $f(z)=0$ có 4 nghiệm z_1,z_2,z_3,z_4 nên

$f(z)=4z^4+mz^2+4=4(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$

Ta có: $z_1^2+4=(z_1-2i)(z_1+2i) \Rightarrow \left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=\frac{f(2i)}{4}\cdot\frac{f(-2i)}{4}$

Mà $\begin{cases} f(2i)=4(2i)^4+m(2i)^2+4=68-4m \\ f(-2i)=4(-2i)^4+m(-2i)^2+4=68-4m \end{cases}$ và $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=324$

Nên $324=\frac{(68-4m)^2}{16} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=35 \end{array}\right.$.

Câu 44: Tìm $m\in\mathbb{R}$ để các nghiệm của phương trình sau đều là số ảo: $(m-3)z^4+6z^2+m+3=0$.

A. $3\le m\le 3\sqrt{2}$. **B.** $3<m\le 3\sqrt{2}$. **C.** $\left[\begin{array}{l} -3\sqrt{2}\le m\le -3 \\ 3<m\le 3\sqrt{2} \end{array}\right.$. **D.** $-3\sqrt{2}\le m\le -3$.

Lời giải:

* Nếu $m=3$: Phương trình trở thành $6z^2+6=0 \Leftrightarrow z=\pm i$.

* Nếu $m\ne 3$: Đặt $z=xi\ (x\in\mathbb{R})$, phương trình $(m-3)z^4+6z^2+m+3=0\ (1)$ trở thành $(m-3)x^4-6x^2+m+3=0\ (2)$.

Đặt $t=x^2\ (t\ge 0)$, phương trình (2) trở thành $(m-3)t^2-6t+m+3=0\ (3)$.

Phương trình (1) chỉ có nghiệm ảo $\Leftrightarrow$ phương trình (2) chỉ có nghiệm thự **C.**

$\Leftrightarrow$ phương trình (3) có 2 nghiệm thực thỏa mãn:

$$0 \le t_1 \le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18 - m^2 \ge 0 \\ \dfrac{6}{m-3} \ge 0 \\ \dfrac{m+3}{m-3} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{2} \le m \le 3\sqrt{2} \\ m > 3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m \le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m \le 3\sqrt{2}.$$

Vậy $3 \le m \le 3\sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Gọi S là tổng các số thực m thỏa mãn $z^3 - 7z^2 + 16z - 12 - mz + 3m = 0$ có nghiệm phức z_0 thỏa mãn $|z_0| = 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S = 24$. **B.** $S = 25$. **C.** $S = 18$. **D.** $S = 16$.

Lời giải:

Ta có $z^3 - 7z^2 + 16z - 12 - mz + 3m = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z^2 - 4z + 4 - m) = 0(1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 \\ (z-2)^2 = m \end{array}\right.$$

+ Với $m \ge 0$ (1) $\Leftrightarrow z = 2 \pm \sqrt{m}$

Ta có: $|z_0| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |2 + \sqrt{m}| = 2 \\ |2 - \sqrt{m}| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 16 \end{array}\right.$

+ Với $m < 0$ (1) $\Leftrightarrow z = 2 \pm i\sqrt{-m}$. Do đó $|z_0| = \sqrt{4 - m}$

Ta có: $|z_0| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - m} = 2 \Leftrightarrow 4 - m = 4 \Leftrightarrow m = 0$

Vậy $S = 0 + 16 = 16$.

Câu 46: Trên tập hợp số phức cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$, với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình có dạng $z_1 = w + 3$ và $z_2 = 3w - 8i + 13$ với w là một số phức. Tính $b + c$.

A. 9. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải:

Gọi $w = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$

$z_1 = w + 3 = x + yi + 3 = x + 3 + yi$

$z_2 = 3w - 8i + 13 = 3(x + yi) - 8i + 13 = 3x + 13 + (3y - 8)i$

z_1, z_2 là hai số phức liên hợp nên: $\begin{cases} x + 3 = 3x + 13 \\ y = -(3y - 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}$

Khi đó $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = -2 - 2i$

Ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -4 \\ z_1.z_2 = 8 \end{cases}$

Suy ra z_1, z_2 là nghiệm của phương trình: $z^2 + 4z + 8 = 0$

Vậy $b + c = 4 + 8 = 12$.

Câu 47: Trên tập hợp các số phức, xét phương trình: $z^2 - 2(m+1)z + m^2 - 3m + 5 = 0$ (m là tham số thực). Tính tổng các giá trị của m để phương trình trên có nghiệm z_0 thỏa mãn $\left|\overline{z_0}\right|^3 - 12 = 5|z_0|$.

A. 9. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải:

Ta có $\left|\overline{z_0}\right|^3-12=5|z_0| \Leftrightarrow |z_0|^3-5|z_0|-12=0 \Leftrightarrow (|z_0|-3)\left(|z_0|^2+3|z_0|+4\right)=0 \Leftrightarrow |z_0|=3$

Đặt phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2-3m+5=0$ (1) có $\Delta'=5m-4$

TH1: xét $\Delta'\ge 0 \Rightarrow 5m-4\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \frac{4}{5}$ khi đó $z_0\in\mathbb{R}$. Ta có $|z_0|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=3 \\ z_0=-3\end{array}\right.$

Với $z_0=3$ thay vào (1) $\Leftrightarrow m^2-9m+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=8\end{array}\right.$

Với $z_0=-3$ thay vào (1) $\Leftrightarrow m^2+3m+20=0 \Rightarrow$ pt vô nghiệm.

TH2: xét $\Delta'<0 \Rightarrow 5m-4<0 \Leftrightarrow m<\frac{4}{5}$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức $z_1=z_0$ và $z_2=\overline{z_0}$ thỏa mãn

$|z_0|=3 \Leftrightarrow |z_0|^2=9 \Leftrightarrow z_0.\overline{z_0}=9 \Leftrightarrow z_1.z_2=9 \Leftrightarrow m^2-3m+5=9 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4\end{array}\right.$.

Với $m=-1$ thay vào (1) $\Leftrightarrow z^2+9=0 \Leftrightarrow z=\pm 3i$ thỏa mãn

Với $m=4$ không thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Vậy có 3 giá trị $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=8 \\ m=-1\end{array}\right.$

Nên tổng các giá trị của tham số m là 8.

Câu 48: Cho phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=3-4i$. Gọi A,B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2-2bz+4c=0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. 20. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải:

Phương trình $z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=3-4i$.

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-b \\ z_1.z_2=c\end{cases}$

Xét $z_2-z_1=3-4i \Rightarrow (z_2+z_1)^2-4z_1z_2=(3-4i)^2 \Rightarrow b^2-4c=(3-4i)^2$

Khi đó phương trình $z^2-2bz+4c=0$

có $\Delta'=b^2-4c=(3-4i)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_A=b-3+4i \Rightarrow A(b-3;4) \\ z_B=b+3-4i \Rightarrow B(b+3;-4)\end{array}\right.$ $(b=m+ni, m,n\in\mathbb{R})$

Vậy $AB=\sqrt{(b+3-b+3)^2+(-4-4)^2}=10$.

Câu 49: Cho m là số thực, biết phương trình $z^2-2mz+9=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m sao cho $z_1\left|\overline{z_2}\right|+z_2\left|\overline{z_1}\right|<16$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải:

$z^2-2mz+9=0$ (*) có $\Delta'=m^2-9$.

Phương trình (*) có hai nghiệm phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1\left|\overline{z_2}\right|+z_2\left|\overline{z_1}\right|<16$ nên

$\Delta'<0\Leftrightarrow -3<m<3$.

Áp dụng định lý Vi-ét ta có, $z_1+z_2=2m,\ z_1z_2=9$.

Ta có $|z_1|=|z_2|=\sqrt{|z_1||z_2|}=\sqrt{|z_1z_2|}=\sqrt{9}=3$ và $|z_1|=\left|\overline{z_1}\right|,|z_2|=\left|\overline{z_2}\right|$.

$\Rightarrow z_1\left|\overline{z_2}\right|+z_2\left|\overline{z_1}\right|=z_1.3+z_2.3=3\left(z_1+z_2\right)=6m$.

Theo đề, $z_1|z_2|+z_2|z_1|<16\Leftrightarrow 6m<16\Leftrightarrow m<\dfrac{8}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $-3<m<\dfrac{8}{3}$. Mà m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Gọi S là tập hợp tất cả các số thực a sao cho phương trình $z^2+(a-2)z+2a-3=0$ có hai nghiệm phức z_1,z_2 và các điểm biểu diễn của z_1,z_2 cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Số phần tử của S là?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải:

Nếu $\Delta=(a-2)^2-4(2a-3)\ge 0\Rightarrow z_1,z_2$ là các số thực khi đó $M(z_1),\ N(z_2)\in Ox\Rightarrow O,M,N$ thẳng hàng.

Nếu $\Delta=(a-2)^2-4(2a-3)<0\Rightarrow z_1=\overline{z_2}\Rightarrow|z_1|=|z_2|=\sqrt{z_1z_2}=\sqrt{2a-3}$.

Với $M(z_1),N(z_2)\Rightarrow OM=ON=|z_1|=|z_2|$ và

$MN=|z_1-z_2|=\sqrt{|z_1-z_2|^2}=\sqrt{|(z_1+z_2)^2-4z_1z_2|}=\sqrt{4(2a-3)-(2-a)^2}$.

Tam giác OMN cân tại O. Do đó

$$S_{OMN}=\frac{1}{2}MN.\sqrt{OM^2-\frac{MN^2}{4}}=\frac{1}{4}MN.\sqrt{4OM^2-MN^2}.$$

Mà $S_{OMN}=2\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\sqrt{4(2a-3)-(2-a)^2}\sqrt{(2-a)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=4\\a\approx 10,369\end{array}\right.$.

Vậy có 2 số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HẾT

Huế, 15h15' Ngày 19 tháng 3 năm 2023