



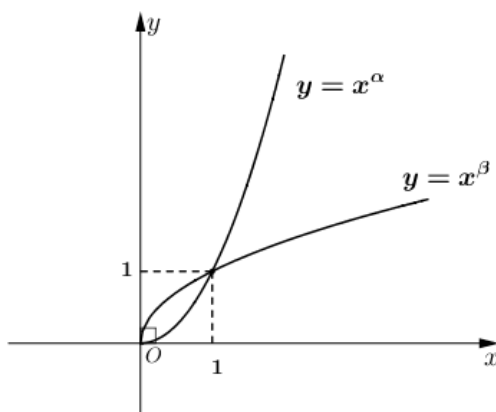
Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

- A. $\vec{n} = (3; -1; 0)$. B. $\vec{n} = (3; -1; 2)$. C. $\vec{n} = (3; 0; -1)$. D. $\vec{n} = (-3; 0; -1)$.

Câu 2. Cho a, b, c là các số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a b^2 = x, \log_{b^2} \sqrt{c} = y$. Giá trị của $\log_c a$ bằng

- A. $\frac{xy}{2}$. B. $2xy$. C. $\frac{1}{2xy}$. D. $\frac{2}{xy}$.

Câu 3. Cho α, β là các số thực. Đồ thị hàm số $y = x^\alpha, y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $\alpha < 0 < 1 < \beta$. B. $0 < \beta < 1 < \alpha$. C. $0 < \alpha < 1 < \beta$. D. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.

Câu 4. Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2)$ có đạo hàm là

- A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2}$. B. $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 2) \ln 2}$.
C. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2) \ln 2}$. D. $f'(x) = \frac{2x \ln 2}{x^2 - 2}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

- A. $(-1; -2; -3)$. B. $(-1; 2; -3)$. C. $(1; 2; 3)$. D. $(1; -2; 3)$.

Câu 6. Biết rằng hàm số $f(x) = -x + 2018 - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; 4)$ tại x_0 . Tính

$$P = x_0 + 2020.$$

- A. $P = 2021$. B. $P = 4036$. C. $P = 2020$. D. $P = 2019$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) = 3-5i$. Tính môđun của z .

- A. $|z| = 4$. B. $|z| = 16$. C. $|z| = \sqrt{17}$. D. $|z| = 17$.

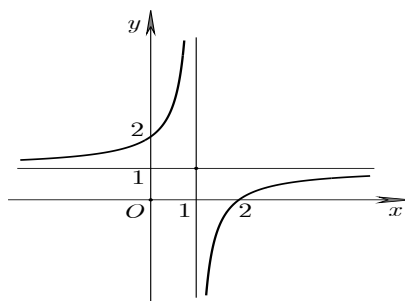
- Câu 8.** Cho các số phức $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2z_2 - z_1$ là
A. $\bar{w} = 8 - 15i$. **B.** $\bar{w} = 4 + 4i$. **C.** $\bar{w} = 4 - 4i$. **D.** $\bar{w} = 8 + 15i$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; m+1; -1)$ và $\vec{b} = (1; -3; 2)$. Với giá trị nguyên nào của m sau đây thì $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 3$?
A. 0. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 4.
- Câu 10.** Đường thẳng $x = m$ lần lượt cắt đồ thị hàm số $y = \log_5 x$ và đồ thị hàm số $y = \log_5 (x+4)$ tại các điểm A, B . Biết rằng khi $AB = \frac{1}{2}$ thì $m = a + \sqrt{b}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tổng $a + b$ bằng
A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 7.
- Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; 5)$ và $N(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (α) chứa M, N và song song với trục Oy có phương trình là
A. $(\alpha): x + 4z - 1 = 0$. **B.** $(\alpha): 2x + z - 3 = 0$. **C.** $(\alpha): x - 4z - 2 = 0$. **D.** $(\alpha): 4x - z + 1 = 0$.
- Câu 12.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(3; -1; 2)$ lên trục Ox là
A. $(3; 0; 0)$. **B.** $(0; -1; 2)$. **C.** $(0; 0; 2)$. **D.** $(0; -1; 0)$.
- Câu 13.** Tích phân $\int_0^1 e^{2x} dx$ bằng
A. $e^2 - 1$. **B.** $\frac{e^2 - 1}{2}$. **C.** $\frac{e - 1}{2}$. **D.** $2(e^2 - 1)$.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

- Câu 15.** Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở các phương án A, B, C, D . Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.** $y = \frac{x+2}{x-2}$. **B.** $y = \frac{x-2}{x+1}$. **C.** $y = \frac{x+2}{x-1}$. **D.** $y = \frac{x-2}{x-1}$.

- Câu 16.** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. 20.

B. $\sqrt{10}$.

C. 40.

D. $2\sqrt{10}$.

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3, u_4 = -24$ và công bội q . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $q = \frac{1}{2}$.

B. $q = -2$.

C. $q = -\frac{1}{2}$.

D. $q = 2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2, f(4) = 2020$. Tính

$$I = \int_1^2 f'(2x) dx.$$

A. $I = 1011$.

B. $I = 1009$.

C. $I = 2018$.

D. $I = 2022$.

Câu 19. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường

$$\text{thẳng } d: y = -\frac{1}{5}x.$$

A. $y = 5x + 3$.

B. $y = 3x - 5$.

C. $y = -5x + 3$.

D. $y = 5x - 3$.

Câu 20. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $ACB = 30^\circ$ và $SA = SB = SC$ với D là trung điểm của BC . Cạnh SA hợp với đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

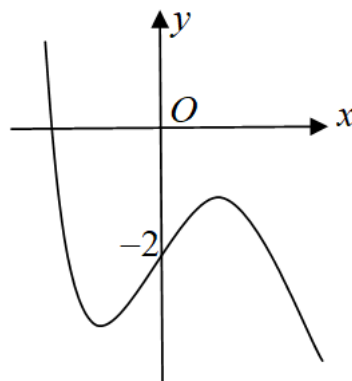
A. $\frac{a^3}{12}$.

B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Câu 22. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = [2; 16]$.

B. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$.

Câu 23. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{1+t} (\text{m/s}^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 11 m/s .

B. 14 m/s .

C. 12 m/s .

D. 13 m/s .

Câu 24. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 12π .

B. 4.

C. 12.

D. 4π .

Câu 25. Từ nhà bạn An đến nhà bạn Bình có 3 con đường đi, từ nhà bạn Bình đến nhà bạn Cường có 2 con đường đi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà bạn An đến nhà bạn Cường và phải đi qua nhà bạn Bình ?

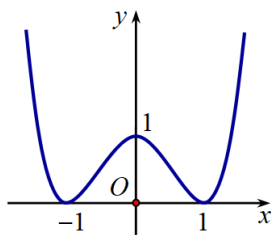
A. 5.

B. 6.

C. 2.

D. 3.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng ?



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 27. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (2 + 3i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(-5; -12)$.

B. $P(5; 12)$.

C. $M(-5; 12)$.

D. $N(12; -5)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	2	4	3	-1	

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 29. Mặt phẳng đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a . Thể tích khối trụ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{4}$.

B. πa^3 .

C. $\frac{\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3}{2}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây không thuộc d ?

A. $E(2; -2; 3)$.

B. $N(1; 0; 1)$.

C. $F(3; -4; 5)$.

D. $M(0; 2; 1)$.

Câu 31. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính mô-đun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1 + z_2| = 1$.

B. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.

C. $|z_1 + z_2| = 5$.

D. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

Câu 32. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$ là

- A.** $e^{x^2} + C$. **B.** $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. **C.** $2e^{x^2} + C$. **D.** $(2x^2 + 1)e^{x^2} + C$.

Câu 33. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

- A.** 3 mặt. **B.** 2 mặt. **C.** 5 mặt. **D.** 4 mặt.

Câu 34. Một người muốn gửi tiền vào ngân hàng để đến ngày 22/02/2020 rút được khoản tiền là 50.000.000 đồng. Lãi suất ngân hàng là 0,55% /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi vào ngày 22/03/2018 người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu trên, nếu lãi suất không thay đổi trong thời gian người đó gửi tiền? (làm tròn đến hàng nghìn).

- A.** 44.074.000 đồng. **B.** 44.316.000 đồng. **C.** 43.383.000 đồng. **D.** 43.593.000 đồng.

Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a . Tính diện tích S của mặt cầu qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

- A.** $S = \frac{49\pi a^2}{144}$. **B.** $S = \frac{7a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S = \frac{49a^2}{144}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

- A.** $x = 3$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 1$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

- A.** $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để

$$M \geq 2m?$$

- A.** 10. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 20.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình

$$(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0$$

chứa không quá 9 số nguyên?

- A.** 1094. **B.** 3281. **C.** 1093. **D.** 3280.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ có giá trị cực đại $y_{CD} = 9$ và giá trị cực tiểu $y_{CT} = 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2) = m^2$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A.** 2. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $BA = BC = a$ và $BAC = 30^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{2}$. B. $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} < |f(1)| < 2$. D. $|f(1)| \leq \sqrt{2}$.

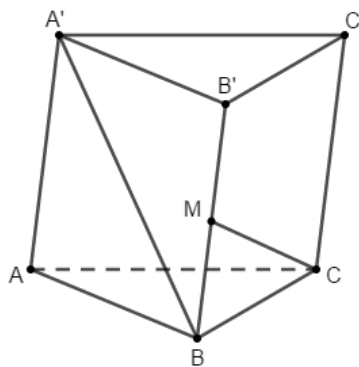
Câu 43. Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng là

- A. $\frac{5}{38}$. B. $\frac{7}{38}$. C. $\frac{3}{38}$. D. $\frac{1}{114}$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = SC = \frac{3}{2}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua C . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

- A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$. B. $\frac{3\sqrt{34}}{4}$. C. $\frac{3\sqrt{34}}{16}$. D. $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Câu 45. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$. Góc $CAA' = 90^\circ$, $BAA' = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (tham khảo hình vẽ). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



- A. $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{8}$. B. $V = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$. C. $V = \frac{3(1+\sqrt{33})}{4}$. D. $V = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$.

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.

- A. $m \in (0; 2)$. B. $m \in [0; 2]$. C. $m \in [2; 4]$. D. $m \in (0; 4)$.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3};1\right)$.

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 49. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2+1=3^m$ và $m=3^x-2x^2+x-1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .

A. 6

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 50. Biết phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$

A. $T_{\min} = \frac{4}{3}$.B. $T_{\min} = 4$.C. $T_{\min} = 2$.D. $T_{\min} = \frac{8}{3}$.

-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.B	4.B	5.D	6.A	7.C	8.C	9.A	10.A
11.D	12.A	13.B	14.D	15.D	16.D	17.B	18.B	19.D	20.C
21.D	22.C	23.D	24.D	25.B	26.B	27.C	28.D	29.A	30.D
31.D	32.B	33.A	34.A	35.C	36.A	37.C	38.B	39.D	40.C
41.D	42.B	43.C	44.C	45.C	46.B	47.D	48.B	49.B	50.A

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n} = (3; -1; 0)$.B. $\vec{n} = (3; -1; 2)$.C. $\vec{n} = (3; 0; -1)$.D. $\vec{n} = (-3; 0; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 0; -1)$.

Câu 2. Cho a, b, c là các số thực dương, khác 1 và thỏa mãn $\log_a b^2 = x, \log_{b^2} \sqrt{c} = y$. Giá trị của $\log_c a$ bằng

A. $\frac{xy}{2}$.B. $2xy$.C. $\frac{1}{2xy}$.D. $\frac{2}{xy}$.

Lời giải

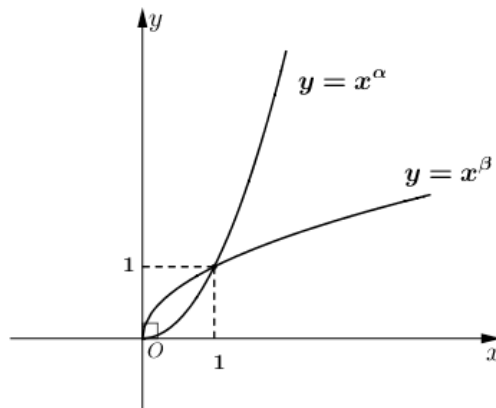
Chọn C

$$\log_a b^2 = x \Rightarrow \log_a b = \frac{x}{2}.$$

$$\log_{b^2} \sqrt{c} = y \Rightarrow \log_b c = 4y.$$

$$\text{Ta có } \log_c a = \log_c b \cdot \log_b a = \frac{1}{4y} \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{2xy}.$$

Câu 3. Cho α, β là các số thực. Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

B. $0 < \beta < 1 < \alpha$.

C. $0 < \alpha < 1 < \beta$.

D. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow$ Loại **A, D**

Lại có: với mỗi số $x_0 > 1$, ta có: $x_0^\alpha > x_0^\beta \Rightarrow \alpha > \beta \Rightarrow 0 < \beta < 1 < \alpha$.

Câu 4. Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2)$ có đạo hàm là

A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2}$.

B. $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 2)\ln 2}$.

C. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2)\ln 2}$.

D. $f'(x) = \frac{2x \ln 2}{x^2 - 2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{(x^2 - 2)'}{\ln 2(x^2 - 2)} = \frac{2x}{\ln 2(x^2 - 2)}.$$

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Tâm của mặt cầu (S) có tọa độ là

A. $(-1; -2; -3)$.

B. $(-1; 2; -3)$.

C. $(1; 2; 3)$.

D. $(1; -2; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có tâm là $I(a; b; c)$.

Khi đó mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$ có tâm là $I(1; -2; 3)$.

Câu 6. Biết rằng hàm số $f(x) = -x + 2018 - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; 4)$ tại x_0 . Tính

$P = x_0 + 2020$.

A. $P = 2021$.

B. $P = 4036$.

C. $P = 2020$.

D. $P = 2019$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x) = -x + 2018 - \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 4)$ có $f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1(L) \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = -x + 2018 - \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 4)$:

x	0	1	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2016	$\frac{8055}{4}$

Từ bảng biến thiên, ta có $x_0 = 1$. Suy ra $P = 1 + 2020 = 2021$.

Câu 7. Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i) = 3-5i$. Tính môđun của z .

A. $|z| = 4$.

B. $|z| = 16$.

C. $|z| = \sqrt{17}$.

D. $|z| = 17$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z(1+i) = 3-5i \Leftrightarrow z = \frac{3-5i}{1+i} = -1-4i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$.

Câu 8. Cho các số phức $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 4+5i$. Số phức liên hợp của số phức $w = 2z_2 - z_1$ là

A. $\bar{w} = 8-15i$.

B. $\bar{w} = 4+4i$.

C. $\bar{w} = 4-4i$.

D. $\bar{w} = 8+15i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $w = 2z_2 - z_1 = 2[4+5i - 2+3i] = 4+4i \Rightarrow \bar{w} = 4-4i$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; m+1; -1)$ và $\vec{b} = (1; -3; 2)$. Với giá trị nguyên nào của m sau đây thì $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 3$?

A. 0.

B. -3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\vec{a}.\vec{b} = 2.1 + (m+1).(-3) + (-1).2 = -3(m+1).$

Suy ra $|\vec{a}.\vec{b}| = |-3(m+1)| = 3 \Leftrightarrow |m+1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases}.$

Dựa vào đáp án ta chọn $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 10. Đường thẳng $x = m$ lần lượt cắt đồ thị hàm số $y = \log_5 x$ và đồ thị hàm số $y = \log_5 (x + 4)$ tại các điểm A, B . Biết rằng khi $AB = \frac{1}{2}$ thì $m = a + \sqrt{b}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tổng $a + b$ bằng

A.6.

B.8.

C.5.

D.7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: A là giao điểm của đường thẳng $x = m$ và đồ thị hàm số $y = \log_5 x$.

Suy ra điểm A có tọa độ là $A(m; \log_5 m)$ với $m > 0$.

Ta có: B là giao điểm của đường thẳng $x = m$ và đồ thị hàm số $y = \log_5(x + 4)$.

Suy ra điểm B có tọa độ là $B(m; \log_5(m+4))$.

$$\text{Khi đó } \overline{AB} = (0; \log_5(m+4) - \log_5 m) = \left(0; \log_5\left(\frac{m+4}{m}\right)\right); AB = \sqrt{\left[\log_5\left(\frac{m+4}{m}\right)\right]^2}.$$

Theo bài ra ta có: $AB = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\log_5 \left(\frac{m+4}{m} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 \frac{m+4}{m} = \frac{1}{2} \\ \log_5 \frac{m+4}{m} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+4=m\sqrt{5} \\ \sqrt{5}(m+4)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1+\sqrt{5} \\ m=-5-\sqrt{5} \end{cases}.$$

Dựa vào đáp án ta chọn $m = 1 + \sqrt{5}$. Suy ra $a = 1; b = 5$.

Vậy $a+b=6$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -1; 5)$ và $N(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (α) chứa M, N và song song với trục Oy có phương trình là

A. $(\alpha): x + 4z - 1 = 0$. **B.** $(\alpha): 2x + z - 3 = 0$. **C.** $(\alpha): x - 4z - 2 = 0$. **D.** $(\alpha): 4x - z + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Giải tự luận

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-1; 1; -4)$.

Trục Oy có vector đơn vị: $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Do (α) chứa giá của vector $\overrightarrow{MN}$ và song song với giá của vector $\vec{j}$ nên (α) có một vector pháp tuyến là: $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \wedge \vec{j} = (4; 0; -1)$.

Vậy (α) là mặt phẳng đi qua điểm $N(0; 0; 1)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 0; -1)$ nên có phương trình là: $4(x-0) + 0(y-0) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow 4x - z + 1 = 0$.

Cách 2: Giải trắc nghiệm

Bước 1: Kiểm tra tính chất song song với trục Oy (phương trình khuyết ẩn y) $\Rightarrow$ cả 4 phương án đều thỏa mãn.

Bước 2: Kiểm tra tính chất đi qua điểm $N(0; 0; 1)$ (điểm nào dễ nhầm thì kiểm tra trước).

Phương án A: $0 + 4 - 1 = 0$ (sai) $\Rightarrow$ loại A.

Phương án B: $0 + 1 - 3 = 0$ (sai) $\Rightarrow$ loại B.

Phương án C: $0 - 4 - 2 = 0$ (sai) $\Rightarrow$ loại C.

Vậy chọn D.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(3; -1; 2)$ lên trục Ox là

A. $(3; 0; 0)$.

B. $(0; -1; 2)$.

C. $(0; 0; 2)$.

D. $(0; -1; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu của $M(a; b; c)$ lên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt có tọa độ là: $(a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)$.

Vậy hình chiếu của $M(3; -1; 2)$ lên trục Ox có tọa độ là $(3; 0; 0)$.

Câu 13. Tích phân $\int_0^1 e^{2x} dx$ bằng

A. $e^2 - 1$.

B. $\frac{e^2 - 1}{2}$.

C. $\frac{e - 1}{2}$.

D. $2(e^2 - 1)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

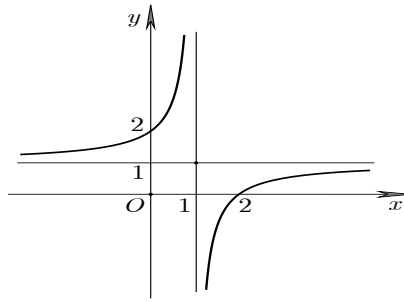
Chọn D

Đạo hàm qua các điểm $x = -3, x = 2$ đổi dấu nên $x = -3, x = 2$ là các điểm cực trị.

Qua điểm $x = 1$ đạo hàm không đổi dấu nên $x = 1$ không là điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 15. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở các phương án A, B, C, D . Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \frac{x+2}{x-2}$.

B. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

D. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là: $x = 1$. Loại A, B .

Ta có, hàm số là hàm đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Loại C .

Câu 16. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

A. 20.

B. $\sqrt{10}$.

C. 40.

D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = -1 - 3i$ và $z_2 = -1 + 3i$. Vậy

$$P = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 2\sqrt{10}.$$

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3, u_4 = -24$ và công bội q . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $q = \frac{1}{2}$.

B. $q = -2$.

C. $q = -\frac{1}{2}$.

D. $q = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_4 = u_1 \cdot q^3 \Leftrightarrow -24 = 3q^3 \Leftrightarrow q^3 = -8 \Leftrightarrow q = -2$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và thỏa mãn $f(2) = 2, f(4) = 2020$. Tính

$$I = \int_1^2 f'(2x) dx.$$

A. $I = 1011$. **B.** $I = 1009$. **C.** $I = 2018$. **D.** $I = 2022$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 f'(2x) dx = \frac{1}{2} f(2x) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} [f(4) - f(2)] = \frac{1}{2} (2020 - 2) = 1009.$$

Câu 19. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : y = -\frac{1}{5}x$.

A. $y = 5x + 3$.

B. $y = 3x - 5$.

C. $y = -5x + 3$.

D. $y = 5x - 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 + 1$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến. Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên ta có: k .

$$k_d = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{k_d} = 5 \Rightarrow 4x^3 + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2.$$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 5(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = 5x - 3$.

Câu 20. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $ACB = 30^\circ$ và $SA = SB = SD$ với D là trung điểm của BC . Cạnh SA hợp với đáy một góc 45° . Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3}{12}$.

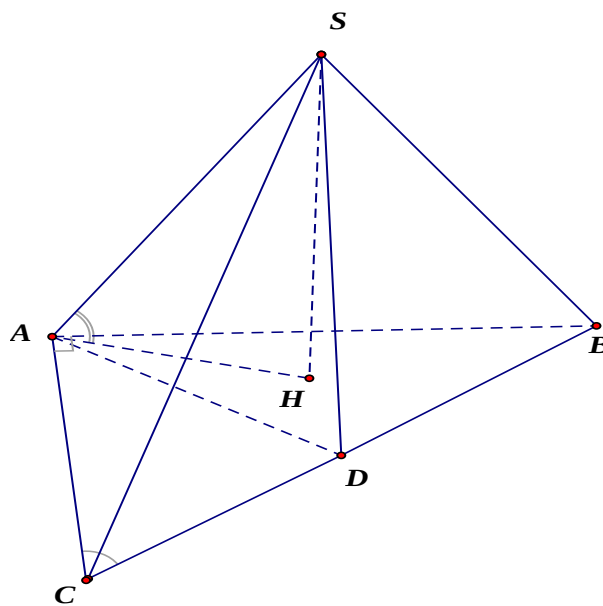
B. $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3}{6}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $ACB = 30^\circ \Rightarrow ABC = 60^\circ$

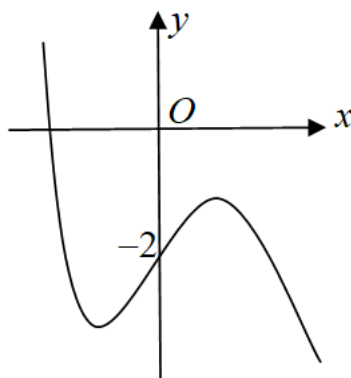
$AB = a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow BD = a \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều cạnh bằng a .

$SA = SB = SD$, suy ra hình chiếu H của S trên mặt đáy là trọng tâm tam giác ABD .

$$AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Góc giữa } SA \text{ và mặt đáy là góc } SAH = 45^\circ \Rightarrow SH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{6}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm?



A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $[f(x)]^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases}$.

Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta có đồ thị hàm số $f(x)$ cắt đường thẳng $y = 2$ tại một điểm và cắt đường thẳng $y = -2$ tại ba điểm phân biệt (hoành độ các giao điểm khác nhau) nên phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm và phương trình $f(x) = -2$ có ba nghiệm.

Vậy phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có 4 nghiệm.

Câu 24. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0$.

A. $S = [2; 16]$.

B. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

C. $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{cases}$.

So với điều kiện $x > 0$ ta có: $\begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 16 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

Câu 23. Một vật đang chuyển động với vận tốc 6m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = \frac{3}{1+t}$ (m/s²), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây gần nhất với kết quả nào sau đây?

A.11m/s.

B.14m/s.

C.12m/s.

D.13m/s.

Lời giải

Chọn D

Vận tốc của vật là $v(t) = \int a(t)dt = \int \frac{3dt}{t+1} = 3\ln|t+1| + C$.

Tại thời điểm vật bắt đầu tăng tốc $v(0) = C = 6$. Suy ra $v(t) = 3\ln|t+1| + 6$ (m/s)

Vậy vận tốc của vật sau 10 giây bằng $v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13$ (m/s).

Câu 24. Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{3}$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 12π .

B. 4.

C. 12.

D. 4π .

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (\sqrt{3})^2 4 = 4\pi$.

Câu 25. Từ nhà bạn An đến nhà bạn Bình có 3 con đường đi, từ nhà bạn Bình đến nhà bạn Cường có 2 con đường đi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà bạn An đến nhà bạn Cường và phải đi qua nhà bạn Bình ?

A. 5.

B. 6.

C. 2.

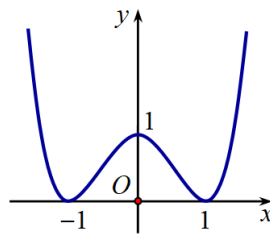
D. 3.

Lời giải

Chọn B

Số cách chọn đường đi từ nhà bạn An đến nhà bạn Cường và phải đi qua nhà bạn Bình :
 $3.2 = 6$ (cách).

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng ?



A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 27. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (2 + 3i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(-5; -12)$.

B. $P(5; 12)$.

C. $M(-5; 12)$.

D. $N(12; -5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z = (2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = -5 + 12i$.

Do đó, điểm biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ là điểm $M(-5; 12)$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	2	4	3	-1	

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

• $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và $y = -1$.

Vậy, đồ thị hàm số có số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là 3.

Câu 29. Mặt phẳng đi qua trục của hình trụ, cắt hình trụ theo thiết diện là hình vuông cạnh a . Thể tích khối trụ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{4}$.

B. πa^3 .

C. $\frac{\pi a^3}{3}$.

D. $\frac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Khối trụ có bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$ và chiều cao $h = a$.

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Điểm nào dưới đây

không thuộc d ?

A. $E(2; -2; 3)$.

B. $N(1; 0; 1)$.

C. $F(3; -4; 5)$.

D. $M(0; 2; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ các điểm E, N, F vào phương trình đường thẳng d ta thấy thỏa mãn nên E, N, F thuộc d .

Thay tọa độ các điểm M vào phương trình đường thẳng d ta thấy không thỏa mãn nên M không thuộc d .

Câu 31. Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính mô-đun của số phức $z_1 + z_2$.

- A.** $|z_1 + z_2| = 1$. **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. **C.** $|z_1 + z_2| = 5$. **D.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z_1 + z_2 = (1 + i) + (2 - 3i) = 3 - 2i$.

Vậy $|z_1 + z_2| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

Câu 32. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$ là

- A.** $e^{x^2} + C$. **B.** $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. **C.** $2e^{x^2} + C$. **D.** $(2x^2 + 1)e^{x^2} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x) dx = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$.

Câu 33. Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất bao nhiêu mặt?

- A.** 3 mặt. **B.** 2 mặt. **C.** 5 mặt. **D.** 4 mặt.

Lời giải

Chọn A

Mỗi đỉnh của hình đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 mặt.

Câu 34. Một người muốn gửi tiền vào ngân hàng để đến ngày 22/02/2020 rút được khoản tiền là 50.000.000 đồng. Lãi suất ngân hàng là 0,55% /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi vào ngày 22/03/2018 người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu trên, nếu lãi suất không thay đổi trong thời gian người đó gửi tiền? (làm tròn đến hàng nghìn).

- A.** 44.074.000 đồng. **B.** 44.316.000 đồng. **C.** 43.383.000 đồng. **D.** 43.593.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Thời gian người đó gửi tiền từ 22/03/2018 đến 22/02/2020 là 23 tháng.

Người đó gửi tiền vào ngân hàng theo hình thức lãi kép nên ta có:

$$A_{23} = A_0 \cdot (1+r)^{23} \Leftrightarrow A_0 = \frac{A_{23}}{(1+r)^{23}} = \frac{50.000.000}{(1+0,55\%)^{23}} \approx 44.073.981 \text{ đồng.}$$

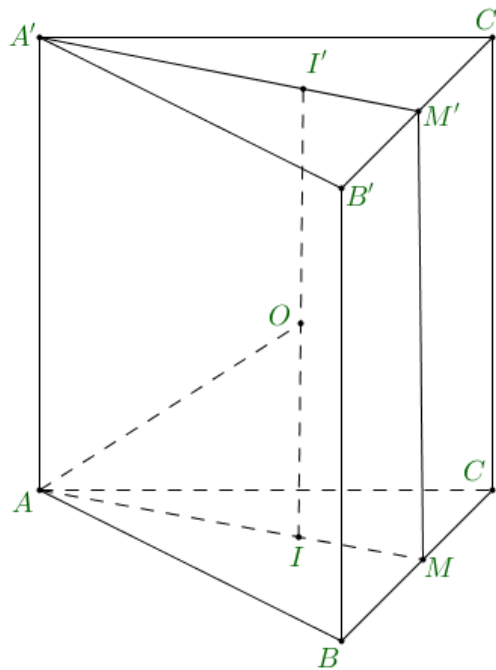
Vậy người đó cần phải gửi vào ban đầu 44.074.000 đồng.

Câu 35. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các cạnh đều bằng a . Tính diện tích S của mặt cầu qua 6 đỉnh của hình lăng trụ đó.

- A.** $S = \frac{49\pi a^2}{144}$. **B.** $S = \frac{7a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $S = \frac{49a^2}{144}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$, O là trung điểm II' .
 Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $OI = \frac{a}{2}$

Suy ra $OA = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}a}{\sqrt{12}}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ là $S = 4\pi OA^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x = 3$.

B. $x = 0$.

C. $x = -3$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x) = -f'(1-x) + x^2 - 4x + 3$.

$-f'(1-x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < -2 \\ 0 < 1-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -3 < x < 1 \end{cases}$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$-f'(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x^2 - 4x + 3$	$+$	$+$	0	$-$	0
$g'(x)$	không xác định	$+$	0	$-$	0

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{16}$.

C. $\frac{\pi}{20}$.

D. $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy tích phân hai vế, ta có $\int_0^1 [4x.f(x^2) + 3f(1-x)] dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx (*)$.

Xét tích phân $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$. Khi đó, ta có

$$J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Xét tích phân $K = \int_0^1 4x.f(x^2) dx$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$. Khi đó, ta có

$$K = \int_0^1 4x.f(x^2) dx = 2 \int_0^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(x) dx.$$

Xét tích phân $L = \int_0^1 3f(1-x) dx$. Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$. Khi đó, ta có

$$L = \int_0^1 3f(1-x) dx = 3 \int_1^0 f(t) (-dt) = 3 \int_0^1 f(t) dt = 3 \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } (*) \Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{20}.$$

Câu 38. Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$, với a là tham số thực. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1;2]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để

$$M \geq 2m?$$

A. 10.

B. 14.

C. 5.

D. 20.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{x^4 + ax + a}{x+1} = \frac{x^4}{x+1} + a.$$

Ta có $y' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}$ và $m = \min \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|; \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\}$.

Trường hợp 1. $a + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{16}{3} \right| = a + \frac{16}{3} \\ m = \left| a + \frac{1}{2} \right| = a + \frac{1}{2} \end{cases}$.

Khi đó $M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2 \left(a + \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow a \leq \frac{13}{3}$.

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3} \Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên thỏa mãn điều kiện.

Trường hợp 2. $a + \frac{16}{3} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -\frac{16}{3} \Rightarrow \begin{cases} M = \left| a + \frac{1}{2} \right| = -a - \frac{1}{2} \\ m = \left| a + \frac{16}{3} \right| = -a - \frac{16}{3} \end{cases}$.

$M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2 \left(-a - \frac{16}{3} \right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{61}{6}$.

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}$. Suy ra có 5 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Trường hợp 3. $\begin{cases} a + \frac{1}{2} < 0 \\ a + \frac{16}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{3} < a < -\frac{1}{2}$.

Nếu $\left| a + \frac{1}{2} \right| > \left| a + \frac{16}{3} \right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} > a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a < -\frac{35}{12}$ thì

$$\begin{cases} M = -a - \frac{1}{2} \\ m = a + \frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \geq 2\left(a + \frac{16}{3}\right) \Leftrightarrow a \leq -\frac{67}{18}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{16}{3} < a \leq -\frac{67}{18}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Nếu } \left|a + \frac{1}{2}\right| \leq \left|a + \frac{16}{3}\right| \Leftrightarrow -a - \frac{1}{2} \leq a + \frac{16}{3} \Leftrightarrow a \geq -\frac{35}{12} \text{ thì}$$

$$\begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = -a - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M \geq 2m \Leftrightarrow a + \frac{16}{3} \geq 2\left(-a - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow a \geq -\frac{19}{9}.$$

Kết hợp điều kiện, ta có $-\frac{19}{9} \leq a < -\frac{1}{2}$. Suy ra có 2 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Vậy có 14 giá trị nguyên của a thỏa mãn điều kiện.

Câu 39. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A.1094.

B. 3281.

C.1093.

D.3280.

Lời giải.

Chọn D

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$ bất phương trình $(3^{x+2} - \sqrt{3})(3^x - 2m) < 0$ (1) trở thành $(9t - \sqrt{3})(t - 2m) < 0$ (2).

Nếu $2m \leq \frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow m \leq \frac{\sqrt{3}}{18} < 1$ thì không có số nguyên dương m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $2m > \frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{3}}{18}$ thì bất phương trình (2) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9} < t < 2m$.

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình (1) là $S = \left(-\frac{3}{2}; \log_3(2m)\right)$.

Để S chứa không quá 9 số nguyên thì $\log_3(2m) \leq 8 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{3^8}{2}$

Vậy có 3280 số nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ có giá trị cực đại $y_{CB} = 9$ và giá trị cực tiểu $y_{CT} = 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2) = m^2$ có 4 nghiệm phân biệt.

B. 2.

B. 7.

C. 1.

D. 6.

Lời giải.

Chọn C

Hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ là hàm số trùng phương có giá trị cực đại $y_{CB} = 9$ và giá trị cực tiểu $y_{CT} = 1$, suy ra bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$ phương trình $f(x^2) = m^2$ trở thành $f(t) = m^2$. Phương trình $f(x^2) = m^2$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m^2$ có 2 nghiệm $t > 0$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, phương trình $f(t) = m^2$ có 2 nghiệm $t > 0$ khi và chỉ khi $1 < m^2 < 9 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Vậy có 1 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân, $BA = BC = a$ và $BAC = 30^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

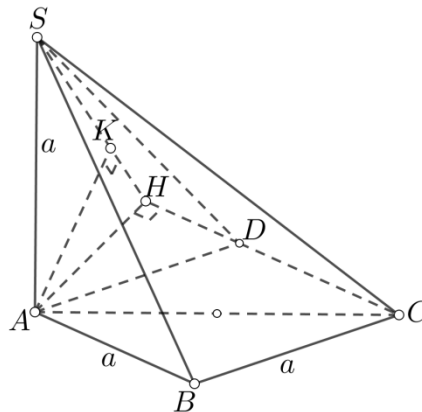
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có $BAC = 30^\circ$ và D đối xứng với B qua AC nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi có $ADC = ABC = 120^\circ$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ AH vuông góc với đường thẳng CD tại H . Khi đó $CD \perp AH$ và $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAH)$. Do đó $(SCD) \perp (SAH)$.

Trong mặt phẳng (SAH) , kẻ $AK \perp SH$ tại K . Khi đó, $AK \perp (SCD)$ và $AK = d[A, (SCD)]$.

Ta có $AH = AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAH , ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{7}{3a^2}$. Từ đó,

$AK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vì $AB \parallel (SCD)$ nên $d[B, (SCD)] = d[A, (SCD)] = AK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

- Câu 42.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1. Biết hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{2}$. B. $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} < |f(1)| < 2$. D. $|f(1)| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì d_1 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên d_1 có hệ số góc $k_1 = f'(1)$.

Ta có $[xf(2x-1)]' = f(2x-1) + 2xf'(2x-1)$.

Vì d_2 là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 nên d_2 có hệ số góc $k_2 = f(1) + 2f'(1)$.

Mặt khác, hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau nên $k_1.k_2 = -1$.

Từ đó, $2[f'(1)]^2 + f'(1).f(1) = -1$.

Suy ra $2\left[f'(1) + \frac{1}{4}f(1)\right]^2 = \frac{1}{8}[f(1)]^2 - 1$. Dẫn đến, $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$.

- Câu 43.** Cho tập $S = \{1; 2; \dots; 19; 20\}$ gồm 20 số tự nhiên từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc S . Xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng là

- A. $\frac{5}{38}$. B. $\frac{7}{38}$. C. $\frac{3}{38}$. D. $\frac{1}{114}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega) = C_{20}^3$.

Gọi A là biến cố: “ba số lấy được lập thành cấp số cộng”.

Giả sử ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, khi đó ta có $a + c = 2b$. Hay $a + c$ là một số chẵn và mỗi cách chọn 2 số a và c thỏa mãn $a + c$ là số chẵn sẽ có duy nhất cách chọn b . Số cách chọn hai số có tổng chẵn sẽ là số cách chọn ba số tạo thành cấp số cộng.

TH1: Hai số lấy được đều là số chẵn, có: C_{10}^2 cách lấy.

TH2: Hai số lấy được đều là số lẻ, có: C_{10}^2 cách lấy.

$$\Rightarrow n(A) = C_{10}^2 + C_{10}^2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{10}^2 + C_{10}^2}{C_{20}^3} = \frac{3}{38}.$$

- Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1. Mặt bên (SAC) là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = SC = \frac{3}{2}$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua C . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABD$.

A. $\frac{\sqrt{34}}{8}$.

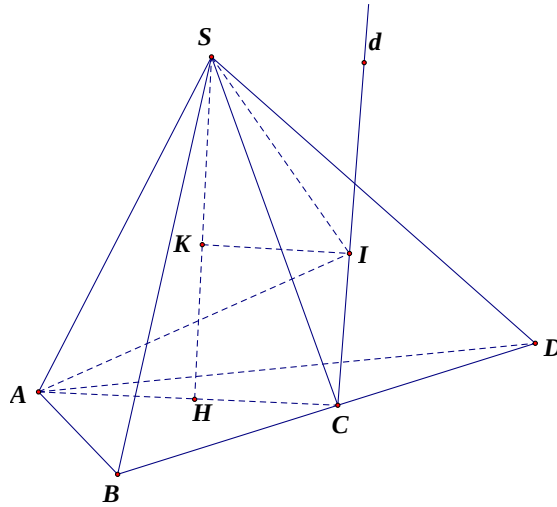
B. $\frac{3\sqrt{34}}{4}$.

C. $\frac{3\sqrt{34}}{16}$.

D. $\frac{3\sqrt{34}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AC, do SAC là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{2}$.

Tam giác ABD có AC là đường trung tuyến và $AC = \frac{1}{2}BD$ nên ABD là tam giác vuông tại A, suy ra C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Dựng trục (d) của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Gọi I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABD \Rightarrow I \in d$ và $IA = IS = ID = IB = R$.

$$\text{Kẻ } IK \perp SH \Rightarrow IK = CH = \frac{1}{2}$$

$$\text{Giả sử } HK = x \Rightarrow SK = \sqrt{2} - x \Rightarrow IS = \sqrt{SK^2 + HC^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = R$$

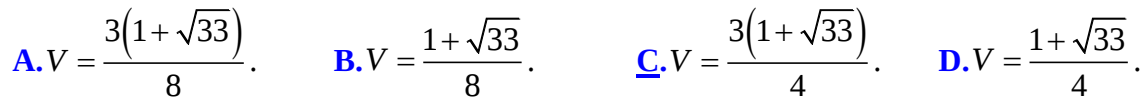
$$\text{Mặt khác: } R = IA = \sqrt{AC^2 + IC^2} = \sqrt{1 + x^2}.$$

$$\text{Ta có phương trình: } \sqrt{(\sqrt{2} - x)^2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{1 + x^2} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{2}}{16}$$

$$\text{Suy ra: } R = \frac{3\sqrt{2}}{16} + 1 \quad R = \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3\sqrt{34}}{16}.$$

Vậy phương án C đúng.

Câu 45. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2$, $AC = \sqrt{3}$. Góc $CAA' = 90^\circ$, $BAA' = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh BB' (tham khảo hình vẽ). Biết CM vuông góc với $A'B$, tính thể tích khối lăng trụ đã cho.



Chọn C



Đặt $AA' = x$ ($x > 0$). Ta có $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AM} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}) \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'} \right) = AB^2 - \frac{1}{2} AA'^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} \\ &= AB^2 - \frac{1}{2} AA'^2 - \frac{1}{2} AB \cdot AA' \cdot \cos BAA' = 2^2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + 4\end{aligned}$$

Do $A'B \perp AM$ nên $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2}$.

Lại có $S_{AB'B'A'} = AB.AA'.\sin BAA' = 2.\frac{1+\sqrt{33}}{2}.\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{33})}{2}$ (đvdt).

$$\text{Do } AC \perp (ABB'A') \text{ nên } V_{C.ABB'A'} = \frac{1}{3} \cdot AC \cdot S_{ABB'A'} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{33})}{2} = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \text{ (đvtt).}$$

$$\text{Mà } V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} \Rightarrow V_{C.ABB'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{C.ABB'A'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{33}}{2} = \frac{3(1+\sqrt{33})}{4} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$.

A. $m \in (0; 2)$.

B. $m \in [0; 2]$.

C. $m \in [2; 4]$.

D. $m \in (0; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x + 1}$. Với $x \in [1; 27]$ thì $t \in [1; 2]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = t^2 + t$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên đoạn $[1; 2]$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1; 2]$ nên hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Bảng biến thiên:

t	1	2
$f'(t)$	+	
$f(t)$	2	6

Để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 27]$ thì phương trình (*) phải có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1; 2]$.

Từ bảng biến thiên, suy ra $2 \leq 2m + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 2x - 2 - m}{(x - 1)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ y' \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - m \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ x^2 - 2x - 2 - m \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (1; 3) \\ m \leq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (4; 6) \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 2, g'(x) = 2x - 2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	1	3	4	6	$+\infty$
g'(x)	-	0		+		
g(x)	$+\infty$					$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*) \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 6$, và vì m là số nguyên nên chọn $m \in \{3; 4; 5; 6\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 48. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để hàm số

đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$.

A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

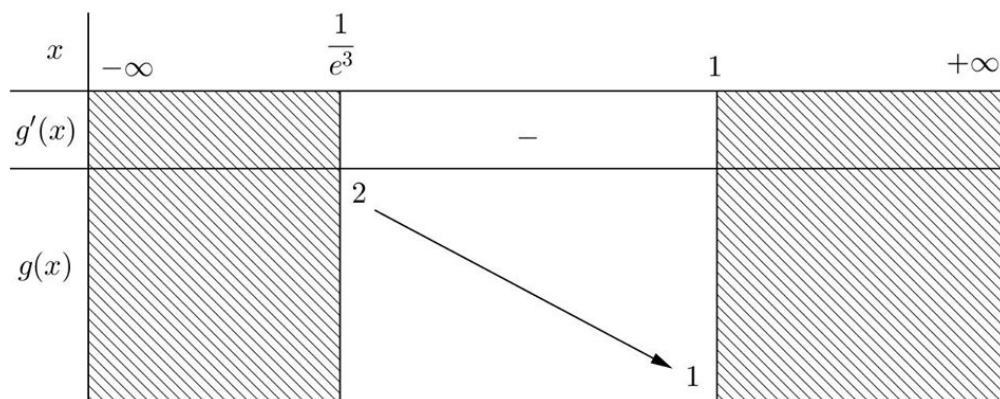
Ta có đạo hàm của $y = \frac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$ là $y' = \frac{1-m}{2x\sqrt{1-\ln x}(\sqrt{1-\ln x}+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$ khi và chỉ khi $y' > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ \sqrt{1-\ln x}+m \neq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \sqrt{1-\ln x}+m \neq 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right) \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1-\ln x}, x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$, ta có $g'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{1-\ln x}} < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{e^3}; 1\right)$ do đó ta có bảng

biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau



Qua bảng biến thiên ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \notin (-2; -1) \end{cases}$, kết hợp với $m \in [-5; 5]$ ta có 6 giá trị nguyên của m

là $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0\}$.

Câu 49. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2 + 1 = 3^m$ và $m = 3^x - 2x^2 + x - 1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S .

A. 6

B. 3.

C. 1.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2 + 1 = 3^m \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \log_3(2x^2 + 1) \\ m = 3^x - 2x^2 + x - 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3(2x^2 + 1) = 3^x - 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2x^2 + 1) + 2x^2 + 1 = 3^x + x \Leftrightarrow 3^{\log_3(2x^2 + 1)} + \log_3(2x^2 + 1) = 3^x + x.$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t$ xác định trên $\mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0$ suy ra hàm $f(t) = 3^t + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $\log_3(2x^2 + 1) = x \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 3^x$.

Xét hàm số $g(x) = 2x^2 + 1 - 3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 4x - 3^x \ln 3 \Rightarrow g''(x) = 4 - 3^x \ln^2 3 \Rightarrow g'''(x) = -3^x \ln^3 3 < 0$. Suy ra hàm số $g''(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g(x) = 0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm.

$$\text{Ta lại có } g(0) = g(1) = g(2) = 0. \text{ Suy ra phương trình } 2x^2 + 1 = 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Vậy $S = 3$.

Câu 50. Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$

A. $T_{\min} = \frac{4}{3}$.

B. $T_{\min} = 4$.

C. $T_{\min} = 2$.

D. $T_{\min} = \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$.

Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được

$$x^2 + ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -ax - b - \frac{c}{x} \Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(-ax - b - \frac{c}{x}\right)^2.$$

Ta có $\left(-ax - b - \frac{c}{x}\right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right)$. (theo BĐT Cauchy - Schwarz)

$$\text{Khi đó } \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)}. \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ (theo BĐT Cô Si).

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t+1}, t \in [2; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [2; +\infty)$.

Do đó $\min_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = \frac{4}{3} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}$.

Dấu " $=$ " $\Leftrightarrow a = -b = c = \frac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm thì $T \geq \min_{[2; +\infty)} f(t)$.

$\Rightarrow x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 = 0$ có nghiệm $x = -1 \Rightarrow t = 2$ thỏa mãn.

Vậy $T_{\min} = \frac{4}{3}$.

-----HẾT-----