

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
THĂNG LONG

NỘI DUNG KHẢO BÀI
TOÁN 12

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

I	GIẢI TÍCH 12	5
1	ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM	6
1.	TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ	6
I.	ÔN TẬP ĐẠO HÀM	6
II.	ÔN TẬP VỀ TÌM TẬP XÁC ĐỊNH HÀM SỐ	7
III.	BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ	7
IV.	TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ	7
V.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	8
2.	CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	9
I.	ĐỊNH NGHĨA	9
II.	MỐI QUAN HỆ GIỮA CỰC TRỊ VỚI ĐẠO HÀM	9
III.	PHÂN BIỆT CÁC KHÁI NIỆM	9
IV.	QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ	9
V.	MỘT VÀI HÀM SỐ THƯỜNG GẶP	10
VI.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	10
3.	GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT	10
I.	ĐỊNH NGHĨA GTLN, GTNN	10
II.	THUẬT TOÁN TÌM GTLN, GTNN	11
III.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	11
4.	ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	11
I.	ĐỊNH NGHĨA TIỆM CẬN ĐỨNG, TIỆM CẬN NGANG	11
II.	THUẬT TOÁN TÌM TIỆM CẬN ĐỨNG, TIỆM CẬN NGANG	11
III.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	12
5.	ĐỒ THỊ HÀM SỐ	12
I.	ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA	12
II.	ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG	13
III.	ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN	13
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	14
6.	SỰ TƯƠNG GIAO	14
I.	TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ	14
II.	SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH	15
III.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	15
7.	BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ	16
I.	Đồ thị hàm số $y = f(x) $	16
II.	Đồ thị hàm số $y = f(x)$	16
III.	Đồ thị hàm số $y = x - a \cdot f(x)$	16
2	HÀM SỐ LŨY THỪA. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔ-GA-RÍT	17
1.	LŨY THỪA	17
I.	ĐỊNH NGHĨA LŨY THỪA	17
II.	CÔNG THỨC	17
III.	SỐ SÁNH HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ	17
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	17
2.	HÀM SỐ LŨY THỪA	18

I.	ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LŨY THỪA	18
II.	ĐẠO HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA	18
III.	KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA	18
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	19
3.	LÔ-GA-RÍT	19
I.	ĐỊNH NGHĨA LÔ-GA-RÍT	19
II.	CÔNG THỨC LÔ-GA-RÍT	19
III.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	20
4.	HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔ-GA-RÍT	20
I.	HÀM SỐ MŨ	20
II.	HÀM SỐ LÔ-GA-RÍT	21
III.	BÀI TOÁN LÃI SUẤT	22
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	24
5.	PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT	24
I.	PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT CƠ BẢN	24
II.	PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ	24
III.	PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ	25
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	25
6.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT	25
I.	BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT CƠ BẢN	25
II.	PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ	25
III.	PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ	26
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	26
3	NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	27
1.	NGUYÊN HÀM	27
I.	KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM	27
II.	PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM	28
2.	TÍCH PHÂN	28
I.	CÔNG THỨC NEWTON-LEIBNIZ	28
II.	PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN	29
3.	ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC	29
I.	DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG	29
II.	THỂ TÍCH	30
4	SỐ PHỨC	32
1.	SỐ PHỨC	32
I.	ĐỊNH NGHĨA SỐ PHỨC	32
II.	HAI SỐ PHỨC BẰNG NHAU	32
III.	BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC	32
IV.	SỐ PHỨC LIÊN HỢP	33
V.	MÔ-ĐUN CỦA SỐ PHỨC	33
2.	CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC	33
I.	PHÉP CỘNG, TRỪ HAI SỐ PHỨC	33
II.	PHÉP NHÂN HAI SỐ PHỨC	34
3.	PHÉP CHIA SỐ PHỨC	35
I.	ĐỊNH NGHĨA	35
II.	CÁCH THỰC HIỆN PHÉP CHIA HAI SỐ PHỨC	35
III.	TÍNH CHẤT PHÉP CHIA HAI SỐ PHỨC	35
4.	PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC	35
I.	CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC ÂM	35
II.	CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC	35
III.	ĐỊNH LÝ VI-ÉT CHO PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC $\mathbb{C}$	35

II	HÌNH HỌC 12	36
1	THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN	37
1.	KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN	37
I.	KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN	37
II.	PHÂN CHIA KHỐI ĐA DIỆN	38
III.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	38
2.	KHỐI ĐA DIỆN LỒI - KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU	38
I.	KHỐI ĐA DIỆN LỒI	38
II.	KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU	38
III.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	39
3.	THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN	39
I.	THỂ TÍCH KHỐI CHÓP	39
II.	THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ	40
III.	ÔN TẬP KIẾN THỨC CŨ	41
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	43
2	KHỐI NÓN - KHỐI TRỤ - KHỐI CẦU	44
1.	KHỐI NÓN	44
I.	KHÁI NIỆM HÌNH NÓN	44
II.	CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA KHỐI NÓN	44
III.	DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH KHỐI NÓN	44
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	45
2.	KHỐI TRỤ	45
I.	KHÁI NIỆM HÌNH TRỤ	45
II.	CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA HÌNH TRỤ	45
III.	DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH KHỐI TRỤ	45
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	45
3.	KHỐI CẦU	46
I.	KHÁI NIỆM HÌNH CẦU, YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA HÌNH CẦU	46
II.	DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH KHỐI CẦU	46
III.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VÀ MẶT CẦU	46
IV.	CÂU HỎI KHẢO BÀI	47
3	PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	48
1.	HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	48
I.	HỆ TRỤC TỌA ĐỘ $OXYZ$	48
II.	TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ VÉC-TƠ	48
III.	HAI VÉC-TƠ BẰNG NHAU. TỌA ĐỘ VÉC-TƠ TỔNG, VÉC-TƠ HIỆU	49
IV.	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ VÀ ỨNG DỤNG	49
V.	TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ VÀ ỨNG DỤNG	49
VI.	QUAN HỆ GIỮA CÁC VÉC-TƠ	50
VII.	CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC, TỨ DIỆN	51
2.	VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	52
I.	VÉC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG	52
II.	PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG	52
III.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG THEO ĐOẠN CHẮN	53
IV.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG ĐẶC BIỆT	53
V.	HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	53
3.	VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	53
I.	VÉC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG	53
II.	PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG	53
III.	PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG ĐẶC BIỆT	54
IV.	PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG	54

V.	HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	54
VI.	ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG	54
4.	KHOẢNG CÁCH	54
I.	KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG	54
II.	KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG	54
III.	KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI NHAU	54
IV.	KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI NHAU	55
V.	KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU	55
VI.	KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG	55
5.	TÌM HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM	55
I.	HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT MẶT PHẲNG	55
II.	ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT MẶT PHẲNG	55
III.	HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG	55
IV.	ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG	56
V.	ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT ĐIỂM	56
6.	VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	56
I.	PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	56
II.	VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU KHI BIẾT TÂM VÀ MẶT PHẲNG TIẾP XÚC	56
III.	VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU KHI BIẾT TÂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC	56
7.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI	57
I.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẲNG	57
II.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG	57
III.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT CẦU	57
IV.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG	58
V.	VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẲNG VÀ MẶT CẦU	58
8.	GÓC	58
I.	GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG	58
II.	GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG	58
III.	GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG	58

Phần I

GIẢI TÍCH 12

Chương 1

ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

I. ÔN TẬP ĐẠO HÀM

1. Đạo hàm một số hàm số sơ cấp

a) $(c)' = 0$ trong đó c là một số bất kỳ.

b) $(x^n)' = nx^{n-1}$ trong đó n là số cho trước.

c) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) $(\sin x)' = \cos x$.

e) $(\cos x)' = -\sin x$.

f) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

g) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

2. Công thức đạo hàm mở rộng

a) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ trong đó n là số cho trước.

b) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

c) $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

d) $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$.

e) $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

f) $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

3. Quy tắc tính đạo hàm

a) $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ trong đó k là số cho trước.

b) $(u + v)' = u' + v'$.

c) $(u - v)' = u' - v'$.

d) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

e) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

4. Công thức tính nhanh đạo hàm

a) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

b) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

c) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

d) $\left(\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\right)' = \frac{(ab'-a'b)x^2+2(ac'-a'c)x+(bc'-b'c)}{(a'x^2+b'x+c')^2}$.

II. ÔN TẬP VỀ TÌM TẬP XÁC ĐỊNH HÀM SỐ

1. Điều kiện có nghĩa của một biểu thức

- a) Biểu thức dạng $\frac{f(x)}{g(x)}$ có điều kiện là $g(x) \neq 0$. b) Biểu thức dạng $\sqrt{f(x)}$ có điều kiện là $f(x) \geq 0$.
- c) Biểu thức dạng $\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ có điều kiện là $g(x) > 0$. d) Biểu thức **chứa** $\tan \alpha$ có điều kiện là $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- e) Biểu thức **chứa** $\cot \alpha$ có điều kiện là $\alpha \neq k\pi$.

2. Các bước tìm tập xác định hàm số

- a) Tìm điều kiện có nghĩa cho hàm số.
- b) Giải điều kiện.
- c) Kết luận tập xác định.

3. Chú ý

- a) Trường hợp hàm số không có điều kiện xác định, nghĩa là hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- b) Các hàm đa thức đều có tập xác định là $\mathbb{R}$.

III. BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Các bước lập **bảng biến thiên** của một hàm số $y = f(x)$ gồm

- a) Tìm tập xác định của hàm số.
- b) Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm nghiệm x .
- c) Vẽ bảng biến thiên.

IV. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa về tính đồng biến, tính nghịch biến của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathcal{D}$. Khi đó,

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathcal{D}$ nếu với $a, b \in \mathcal{D}$ mà $a < b$ thì $f(a) < f(b)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathcal{D}$ nếu với $a, b \in \mathcal{D}$ mà $a < b$ thì $f(a) > f(b)$.

2. Mối quan hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến của hàm số với đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathcal{D}$. Khi đó,

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathcal{D}$ nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathcal{D}$ nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

Chú ý. Nếu biết chắc chắn hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm nhất biến (hàm nhất biến là hàm có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$) thì

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathcal{D}$ nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathcal{D}$ nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathcal{D}$.

3. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số bậc ba

Hàm số bậc ba là hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có các tính chất sau

- Nếu $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm thì hàm số đồng biến (khi $a > 0$) hoặc nghịch biến (khi $a < 0$) trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $y' = 0$ có 2 nghiệm thì hàm số **không thể** đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Lúc này, muốn xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số nên dựa vào bảng biến thiên.
- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

4. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trùng phương

Hàm số trùng phương là hàm số có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có các tính chất sau

- Không thể** đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

5. Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số nhất biến

Hàm số nhất biến là hàm số có dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($ad - bc \neq 0$) có các tính chất sau

- Không thể** đồng biến hoặc nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(m; n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases}$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(m; n) \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m; n) \end{cases}$.

V. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Viết lại công thức đạo hàm của 7 hàm số sơ cấp?

Câu 2. Viết lại 6 công thức đạo hàm mở rộng?

Câu 3. Viết lại 5 quy tắc tính đạo hàm?

Câu 4. Viết lại 4 công thức tính nhanh đạo hàm?

Câu 5. Nêu lại điều kiện xác định của 5 hàm số đã học?

Câu 6. Có mấy bước để tìm tập xác định của hàm số? Là những bước nào?

Câu 7. Các hàm số nào luôn có tập xác định là tập $\mathbb{R}$?

Câu 8. Nêu lại các bước lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$?

Câu 9. Dựa vào định nghĩa về tính đồng biến của hàm số, khi nói “Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên tập $\mathcal{D}$ ” có nghĩa là?

Câu 10. Dựa vào định nghĩa về tính đồng biến của hàm số, khi nói “Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên tập $\mathcal{D}$ ” có nghĩa là?

Câu 11. Mối liên hệ giữa tính đồng biến của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathcal{D}$ với đạo hàm của nó là gì?

Câu 12. Mối liên hệ giữa tính đồng biến của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathcal{D}$ với đạo hàm của nó là gì?

Câu 13. Nếu biết hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm nhất biến thì điều kiện để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ là gì?

Câu 14. Nếu biết hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm nhất biến thì điều kiện để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ là gì?

Câu 15. Trong ba hàm số thường gặp (hàm bậc ba, hàm trùng phương, hàm nhất biến), hàm số nào có thể (không thể) đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$? Điều kiện để hàm số đó đồng biến (hoặc nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ là gì?

Câu 16. Điều kiện để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) đồng biến (hoặc nghịch biến) trên từng khoảng xác định là gì?

Câu 17. Điều kiện để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập $(s; t)$ là gì?

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$)

- Nếu tồn tại $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số **đạt cực đại** tại x_0 .
- Nếu tồn tại $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số **đạt cực tiểu** tại x_0 .

II. MỐI QUAN HỆ GIỮA CỰC TRỊ VỚI ĐẠO HÀM

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Khi đó,

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

III. PHÂN BIỆT CÁC KHÁI NIỆM

- Điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu)** của hàm số là x_0 .
- Giá trị cực trị (giá trị cực đại, giá trị cực tiểu, cực trị)** của hàm số là $f(x_0)$.
- Điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số là $(x_0; f(x_0))$.

IV. QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ

1. Quy tắc 1

- Vẽ bảng biến thiên hàm số.
- Kết luận.

2. Quy tắc 2

- Tính $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$.
- Giải phương trình $y' = 0$ tìm nghiệm x_0 .
- Tính $f''(x_0)$
 - Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .
 - Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

V. MỘT VÀI HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- Hàm số bậc ba hoặc có **hai** cực trị hoặc **không có** cực trị.
- Hàm số bậc ba có hai cực trị khi chỉ khi $\Delta_{y'} > 0$.
- Hàm số bậc ba không có cực trị khi chỉ khi $\Delta_{y'} \leq 0$ (hơi giống điều kiện để hàm số bậc ba đồng biến (nghịch biến) trên $\mathbb{R}$).

2. Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

- Hàm số trùng phương luôn có 1 cực trị hoặc 3 cực trị (đây là lý do khiến hàm trùng phương không đơn điệu trên $\mathbb{R}$).
- Hàm số trùng phương có 1 cực trị khi chỉ khi $a \cdot b \geq 0$ (a, b cùng dấu).
- Hàm số trùng phương có 3 cực trị khi chỉ khi $a \cdot b < 0$ (a, b trái dấu).

3. Hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($ad - bc \neq 0$)

- Hàm nhất biến **không bao giờ** có cực trị.

VI. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết lại) định nghĩa cực đại của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ?

Câu 2. Nêu (viết lại) định nghĩa cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 ?

Câu 3. Nêu mối liên hệ giữa đạo hàm cấp 1 với cực trị của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ?

Câu 4. Nêu mối liên hệ giữa đạo hàm cấp 1 với cực đại của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$?

Câu 5. Nêu mối liên hệ giữa đạo hàm cấp 1 với cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$?

Câu 6. Nêu mối liên hệ giữa đạo hàm cấp 1, cấp 2 với cực đại của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ?

Câu 7. Nêu mối liên hệ giữa đạo hàm cấp 1, cấp 2 với cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ?

Câu 8. Phân biệt các khái niệm thường dùng liên quan đến cực trị hàm số và đồ thị hàm số?

Câu 9. Nêu các bước của quy tắc 1 để tìm cực trị hàm số? Cho ví dụ một hàm số và sử dụng quy tắc 1 để tìm cực trị hàm số?

Câu 10. Nêu các bước của quy tắc 2 để tìm cực trị hàm số? Cho ví dụ một hàm số và sử dụng quy tắc 2 để tìm cực trị hàm số?

Câu 11. Trong các hàm số thường gặp (hàm bậc ba, hàm trùng phương, hàm nhất biến), hàm số nào luôn không có cực trị? Hàm số nào luôn luôn có cực trị? Hàm số nào lúc có, lúc không có cực trị?

Câu 12. Hàm số bậc ba có tối đa, tối thiểu bao nhiêu cực trị? Nêu điều kiện tương ứng?

Câu 13. Hàm trùng phương có tối đa, tối thiểu bao nhiêu cực trị? Nêu điều kiện tương ứng?

§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

I. ĐỊNH NGHĨA GTLN, GTNN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$, tập hợp $\mathcal{K}$ là tập hợp con của $\mathcal{D}$.

- Số M được gọi là GTLN của hàm số trên $\mathcal{K}$ nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, x \in \mathcal{K} \\ \exists x_0 \in \mathcal{K}: f(x_0) = M \end{cases}$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in \mathcal{K}} f(x)$

- m được gọi là GTNN của hàm số trên $\mathcal{K}$ nếu $\begin{cases} f(x) \geq m, x \in \mathcal{K} \\ \exists x_0 \in \mathcal{K}: f(x_0) = m \end{cases}$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in \mathcal{K}} f(x)$

Chú ý. Khi đề bài không chỉ rõ tìm GTLN, GTNN trên tập hợp nào thì ta hiểu $\mathcal{K} = \mathcal{D}$.

II. THUẬT TOÁN TÌM GTLN, GTNN

1. Thuật toán 1.

Thuật toán này thường được dùng chung cho các dạng toán tìm GTLN, GTNN.

Phát biểu bài toán.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{K}$.

Thuật toán

- Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathcal{K}$.
- So sánh các giá trị của y để chọn GTLN, GTNN.

2. Thuật toán 2.

Thuật toán này chỉ dùng khi tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn.

Phát biểu bài toán.

Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$.

Thuật toán.

- Giải phương trình $f'(x) = 0$, giả sử tìm được hai nghiệm x_1, x_2 .
- So sánh các giá trị $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2)$ để chọn GTLN, GTNN.

III. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Hãy phân biệt cách dùng của hai thuật toán tìm GTLN, GTNN?

Câu 2. Nêu các bước của thuật toán 1.

Câu 3. Nêu các bước của thuật toán 2.

§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. ĐỊNH NGHĨA TIỆM CẬN ĐỨNG, TIỆM CẬN NGANG

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$.

- Đồ thị có tiệm cận ngang $y = y_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.
- Đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

II. THUẬT TOÁN TÌM TIỆM CẬN ĐỨNG, TIỆM CẬN NGANG

1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Bài toán. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Thuật toán.

- Giải phương trình $g(x) = 0$, giả sử tìm được nghiệm $x = a, x = b$.
- Kiểm tra tiệm cận đứng
 - Nhập biểu thức $\frac{f(x)}{g(x)}$ vào máy tính bỏ túi.
 - Lần lượt CALC các giá trị $x = a \pm 10^{-10}$ để kiểm tra $x = a$ có là TCD hay không, nếu kết quả bấm máy là ∞ thì $x = a$ là TCD.
 - Lần lượt CALC các giá trị $x = b \pm 10^{-10}$ để kiểm tra $x = b$ có là TCD hay không, nếu kết quả bấm máy là ∞ thì $x = b$ là TCD.

2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Bài toán. Tìm tiệm cận ngang của hàm số $y = f(x)$

Thuật toán.

- Nhập biểu thức $f(x)$ vào máy tính bỏ túi.
- Bấm CALC với $x = 10^{10}$. Nếu kết quả làm tròn là số có giá trị bé a (thông thường dưới 10) thì $y = a$ là TCN, ngược lại máy báo lỗi hoặc ra giá trị lớn (thường là có giá trị vài trăm trở lên) thì không có TCN.
- Bấm CALC với $x = -10^{10}$. Nếu kết quả làm tròn là số có giá trị bé b (thông thường dưới 10) thì $y = b$ là TCN, ngược lại máy báo lỗi hoặc ra giá trị lớn (thường là có giá trị vài trăm trở lên) thì không có TCN.

3. Tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng là $x = -\frac{d}{c}$.
- Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$.

III. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết lại) thuật toán tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

Câu 2. Nêu (viết lại) thuật toán tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số?

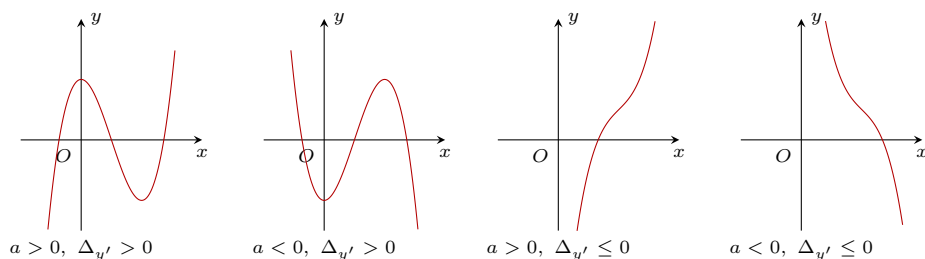
Câu 3. Nêu (viết lại) đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$?

§5. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

I. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

1. Đồ thị hàm số bậc ba

Bốn hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) là



2. Gợi ý nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba

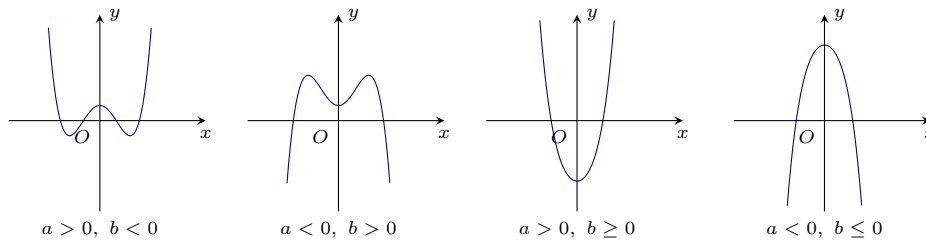
- Về hệ số a
 - Đồ thị “thăng thiên” $\rightarrow a > 0$.
 - Đồ thị “độn thổ” $\rightarrow a < 0$.
- Về hệ số b
 - Đồ thị có “điểm uốn” nằm bên phải trục $Oy \rightarrow ab < 0$.
 - Đồ thị có “điểm uốn” nằm bên trái trục $Oy \rightarrow ab < 0$.
 - Đồ thị có “điểm uốn” thuộc trục $Oy \rightarrow b = 0$.
- Về hệ số c
 - Đồ thị không có cực trị $\rightarrow c = 0$ hoặc $ac > 0$.

- Hai điểm cực trị nằm về hai phía trục $Oy \rightarrow ac < 0$.
- Có một điểm cực trị thuộc trục $Oy \rightarrow c = 0$
- Về hệ số d
 - Giao điểm với trục Oy nằm phía trên điểm $O \rightarrow d > 0$.
 - Giao điểm với trục Oy nằm phía dưới điểm $O \rightarrow d < 0$.
 - Giao điểm với trục Oy nằm trùng điểm $O \rightarrow d = 0$.

II. ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

1. Đồ thị hàm số trùng phương

Bốn hình dạng của đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) là



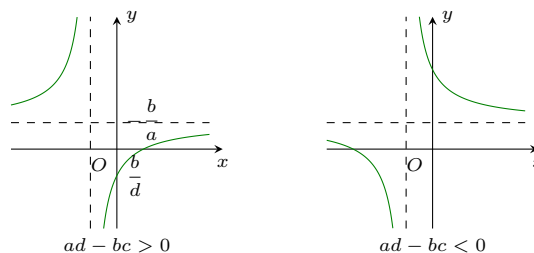
2. Gợi ý nhận dạng đồ thị hàm số trùng phương

- Về hệ số a
 - Đồ thị “thăng thiên” $\rightarrow a > 0$.
 - Đồ thị “độn thổ” $\rightarrow a < 0$.
- Về hệ số b
 - Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\rightarrow ab < 0$.
 - Đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị $\rightarrow ab \geq 0$.
- Về hệ số c
 - Giao điểm với trục Oy nằm phía trên điểm $O \rightarrow c > 0$.
 - Giao điểm với trục Oy nằm phía dưới điểm $O \rightarrow c < 0$.
 - Giao điểm với trục Oy nằm trùng điểm $O \rightarrow c = 0$.

III. ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN

1. Đồ thị hàm số nhất biến

Hai hình dạng của đồ thị hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$) là



2. Gợi ý nhận dạng đồ thị hàm số nhất biến

a) Hàm số không chứa tham số, lần lượt dựa vào các tiêu chí

- Dựa vào tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.
- Dựa vào giao điểm với Ox , Oy .
- Dựa vào sự đồng biến, nghịch biến.

b) Hàm số có chứa tham số, dựa vào “dấu” của các cặp tích số

- Cặp tích số “ ab ”
 - Giao của đồ thị với Ox nằm bên phải điểm $O \rightarrow ab < 0$.
 - Giao của đồ thị với Ox nằm bên trái điểm $O \rightarrow ab > 0$.
 - Đồ thị không cắt $Ox \rightarrow a = 0$
- Cặp tích số “ ac ”
 - Tiệm cận ngang nằm phía trên $Ox \rightarrow ac > 0$.
 - Tiệm cận ngang nằm phía trên $Ox \rightarrow ac < 0$.
 - Tiệm cận ngang nằm trùng $Ox \rightarrow a = 0$
- Cặp tích số “ bd ”
 - Giao của đồ thị với Oy nằm bên trên điểm $O \rightarrow bd > 0$.
 - Giao của đồ thị với Oy nằm bên trên điểm $O \rightarrow bd < 0$.
 - Giao của đồ thị với Oy trùng điểm $O \rightarrow b = 0$.
- Cặp tích số “ cd ”
 - Tiệm cận đứng nằm bên phải $Oy \rightarrow cd < 0$.
 - Tiệm cận đứng nằm bên trái $Oy \rightarrow cd > 0$.
 - Tiệm cận đứng trùng $Oy \rightarrow d = 0$.

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Vẽ lại bốn hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (ghi kèm điều kiện của a , Δ_y , tương ứng)?

Câu 2. Vẽ lại bốn hình dạng của đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ (ghi kèm điều kiện của a , b tương ứng)?

Câu 3. Vẽ lại hai hình dạng của đồ thị hàm số nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ (ghi kèm mối quan hệ giữa các hệ số a , b , c , d tương ứng)?

§6. SỰ TƯƠNG GIAO

I. TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Bài toán tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số

Bài toán. Cho hai đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$. Hãy tìm tọa độ giao điểm của (C_1) và (C_2) ?
Thuật toán.

- a) Giải phương trình $f(x) = g(x)$, giả sử tìm được nghiệm $x = a$, $x = b$.
- b) Thay $x = a$ vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$ để tính $y = f(a)$. Tương tự, tính $y = f(b)$.
- c) Kết luận giao điểm là $(a; f(a))$, $(b; f(b))$.

2. Bài toán tìm số giao điểm của hai đồ thị hàm số (bấm máy tính bỏ túi được)

Bài toán. Cho hai đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$. Hãy đếm số giao điểm của (C_1) và (C_2) ?
Thuật toán.

- Rút gọn phương trình $f(x) = g(x)$ về dạng $F(x) = 0$.
- Bấm máy và đếm nghiệm của phương trình $F(x) = 0$.
- Kết luận số giao điểm (phương trình $F(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm là có bấy nhiêu giao điểm).

Chú ý. Trường hợp $F(x) = 0$ không bấm máy đếm nghiệm được thì ta chuyển sang dạng toán bên dưới.

3. Bài toán tìm số giao điểm của hai đồ thị hàm số (không bấm máy tính bỏ túi được)

Bài toán. Cho hai đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$. Hãy đếm số giao điểm của (C_1) và (C_2) ?
Thuật toán.

- Rút gọn phương trình $f(x) = g(x)$ về dạng $F(x) = 0$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = F(x)$.
- Đếm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = F(x)$ với trục hoành ($y = 0$) để kết luận số giao điểm.

II. SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

1. Đếm số nghiệm của một phương trình

Bài toán. Đếm số nghiệm của phương trình $F(x) = 0$.

Thuật toán.

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = F(x)$.
- Đếm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = F(x)$ với trục hoành ($y = 0$) để kết luận số nghiệm phương trình $F(x) = 0$.

2. Tìm tham số m để phương trình $F(x, m) = 0$ có n nghiệm

Bài toán. Tìm tham số m để phương trình $F(x, m) = 0$ có n nghiệm.

Thuật toán.

- Thực hiện “cô lập” x và m để thu được phương trình $f(x) = g(m)$.
- Lập bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$.
- Dựa vào các y_{CD} , y_{CT} để tìm m thỏa yêu cầu bài toán.

Chú ý. Thuật toán đang xét chỉ giải quyết được những phương trình có thể cô lập x và m .

III. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Phát biểu và nêu thuật toán của dạng toán tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số?

Câu 2. Phát biểu và nêu thuật toán đếm số giao điểm của hai đồ thị hàm số (trường hợp bấm máy tính được)?

Câu 3. Phát biểu và nêu thuật toán đếm số giao điểm của hai đồ thị hàm số (trường hợp không bấm máy tính được)?

Câu 4. Phát biểu và nêu thuật toán đếm số nghiệm phương trình cho trước?

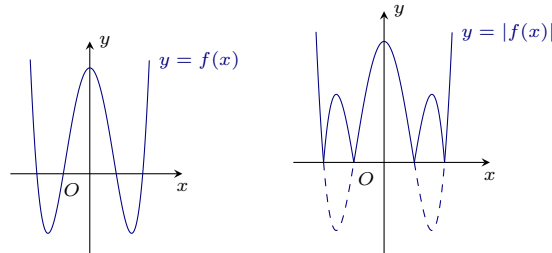
Câu 5. Phát biểu và nêu thuật toán tìm m để phương trình $F(x, m) = 0$ có n nghiệm?

§7. BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ

I. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$

Giả sử hàm số $y = |f(x)|$ có tập xác định là $\mathcal{D}$. Để vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, ta thực hiện theo hai bước sau

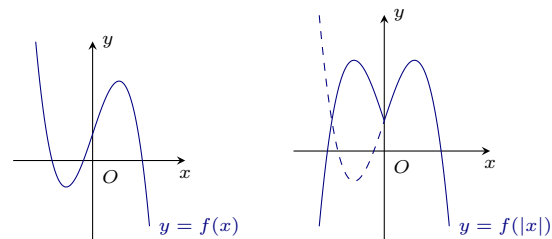
- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathcal{D}$.
- Thực hiện biến đổi theo nguyên tắc “trên giữ nguyên, dưới lấy đối xứng lên trên”, nghĩa là, toàn bộ phần đồ thị nằm **phía trên** trục Ox được giữ nguyên, toàn bộ phần đồ thị nằm **phía dưới** trục Ox lấy đối xứng lên trên.



II. Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$

Giả sử hàm số $y = f(|x|)$ có tập xác định là $\mathcal{D}$. Để vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$, ta thực hiện theo hai bước sau

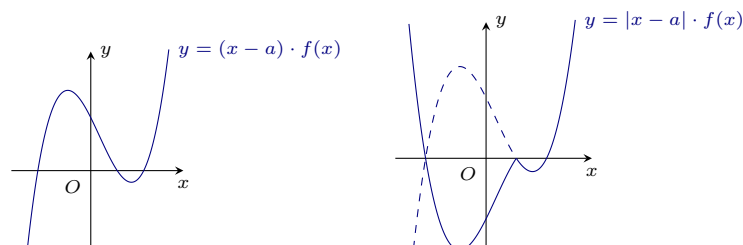
- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathcal{D} \cap [0; +\infty)$.
- Thực hiện biến đổi theo nguyên tắc “lấy đối xứng phần bên phải sang bên trái”.



III. Đồ thị hàm số $y = |x - a| \cdot f(x)$

Giả sử hàm số $y = |x - a| \cdot f(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D}$. Để vẽ đồ thị hàm số $y = |x - a| \cdot f(x)$, ta thực hiện theo hai bước sau

- Vẽ đồ thị hàm số $y = (x - a)f(x)$ trên $\mathcal{D}$.
- Giữ nguyên phần đồ thị ứng với $x \geq a$, lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị ứng với $x < a$.



Chương 2

HÀM SỐ LŨY THỪA. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔ-GA-RÍT

§1. LŨY THỪA

I. ĐỊNH NGHĨA LŨY THỪA

Cho a là số thực dương khác 1. Khi đó

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ số } a \text{ nhân với nhau}}$.
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

⚠ Với mọi $a \neq 0$ thì $a^0 = 1$.

II. CÔNG THỨC

1. Công thức lũy thừa không chứa căn

- a) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- b) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
- c) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
- d) $(a^n)^m = a^n \cdot m$.
- e) $(ab)^n = a^n b^n$.
- f) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.
- g) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

2. Công thức lũy thừa chứa căn

- a) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$.
- b) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}$.
- c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$.

III. SO SÁNH HAI LŨY THỪA CÙNG CƠ SỐ

- a) Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.
- b) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết lại) định nghĩa lũy thừa?

Câu 2. Nêu (viết lại) 7 công thức lũy thừa không chứa căn?

Câu 3. Nêu (viết lại) 2 tính chất được dùng để so sánh hai lũy thừa cùng cơ số?

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

I. ĐỊNH NGHĨA HÀM SỐ LŨY THỪA

Hàm số $y = x^\alpha$ (α là số thực cho trước) được gọi là hàm số lũy thừa.

! Điều kiện xác định của hàm số lũy thừa $y = [f(x)]^\alpha$

- a) Nếu α là số nguyên dương (tức là $\alpha = 1, 2, 3, 4, \dots$) thì $f(x)$ không cần thêm điều kiện.
- b) Nếu $\alpha = 0$ hoặc α là số nguyên âm (tức là $\alpha = 0, -1, -2, -3, \dots$) thì $f(x) \neq 0$.
- c) Nếu α không là số nguyên (tức $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) thì $f(x) > 0$.

a) Biểu thức $\frac{f(x)}{g(x)}$ có điều kiện là $g(x) \neq 0$.

b) Biểu thức $\sqrt[n]{f(x)}$ có điều kiện là $f(x) \geq 0$.

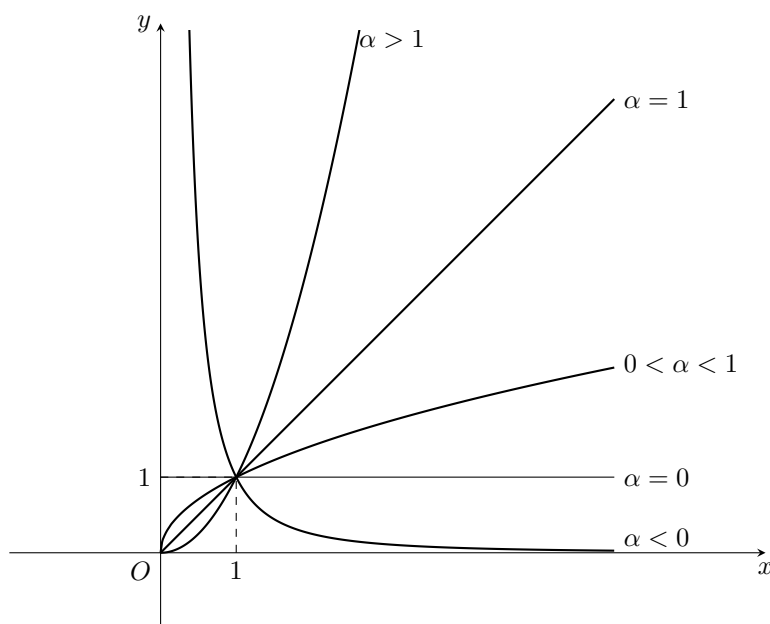
II. ĐẠO HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

- a) Nếu hàm số $y = x^\alpha$ thì $y' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.
- b) Nếu hàm số $y = u^\alpha$ thì $y' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}$.

III. KHẢO SÁT HÀM SỐ LŨY THỪA

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$	$y = x^\alpha, \alpha < 0.$																		
a) Sự biến thiên $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0.$ Do đó, hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. b) Giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$ Do đó, đồ thị hàm số không có tiệm cận. c) Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'	+		y	0	$+\infty$	a) Sự biến thiên $y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0.$ Do đó, hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$. b) Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$ Do đó, Ox là tiệm cận ngang, Oy là tiệm cận đứng của đồ thị. c) Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td>0</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	y'	-		y	$+\infty$	0
x	0	$+\infty$																	
y'	+																		
y	0	$+\infty$																	
x	0	$+\infty$																	
y'	-																		
y	$+\infty$	0																	

Đồ thị hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ trên $(0; +\infty)$



Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1; 1)$.

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu 3 điều kiện xác định của hàm số lũy thừa?

Câu 2. Nêu (viết lại) công thức đạo hàm của hàm số lũy thừa?

Câu 3. Nêu kết quả về tính đơn điệu của hàm số lũy thừa?

Câu 4. Đồ thị hàm số lũy thừa có đường tiệm cận khi nào? Nêu đường tiệm cận ứng với trường hợp đó?

§3. LÔ-GA-RÍT

I. ĐỊNH NGHĨA LÔ-GA-RÍT

Cho a, b là hai số thực dương, $a \neq 1$. Khi đó, $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$.

⚠ Với mọi số dương $a \neq 1$, ta có

a) $\log_a a = 1$.

b) $\log_a 1 = 0$.

II. CÔNG THỨC LÔ-GA-RÍT

1. Công thức biến đổi biểu thức trong lô-ga-rít

Cho $a > 0, a \neq 1, b, b_1, b_2 > 0$. Ta có

a) $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$.

b) $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$.

c) $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ (chú ý α không cần điều kiện).

2. Công thức biến đổi cơ số của lô-ga-rít

Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$ và $c \neq 1$. Ta có

a) $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

b) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

c) $\log_a c \cdot \log_c b = \log_a b$.

d) $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ (chú ý $\alpha \neq 0$).

3. Công thức lũy thừa có mũ chứa lô-ga-rít

III. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết lại) định nghĩa lô-ga-rít?

Câu 2. Nêu (viết lại) công thức biến đổi biểu thức trong lô-ga-rít?

Câu 3. Nêu (viết lại) công thức biến đổi cơ số của lô-ga-rít?

Câu 4. Nêu (viết lại) công thức đổi cơ số của lô-ga-rít?

Câu 5. Nêu (viết lại) các công thức lũy thừa có mũ chứa lô-ga-rít?

§4. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔ-GA-RÍT

I. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

Cho số thực dương a khác 1. Hàm số $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) được gọi là hàm số mũ.

2. Đạo hàm của hàm số mũ

a) Nếu $y = a^x$ thì $y' = a^x \cdot \ln a$.

b) Nếu $y = a^u$ thì $y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

c) Nếu $y = e^x$ thì $y' = e^x$.

d) Nếu $y = e^u$ thì $y' = u' \cdot e^u$.

3. Khảo sát hàm số mũ $y = a^x$

a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) Tập giá trị $\mathcal{S} = (0; +\infty)$.

c) Tính đơn điệu

(a) Nếu $a > 1$ thì $y' > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

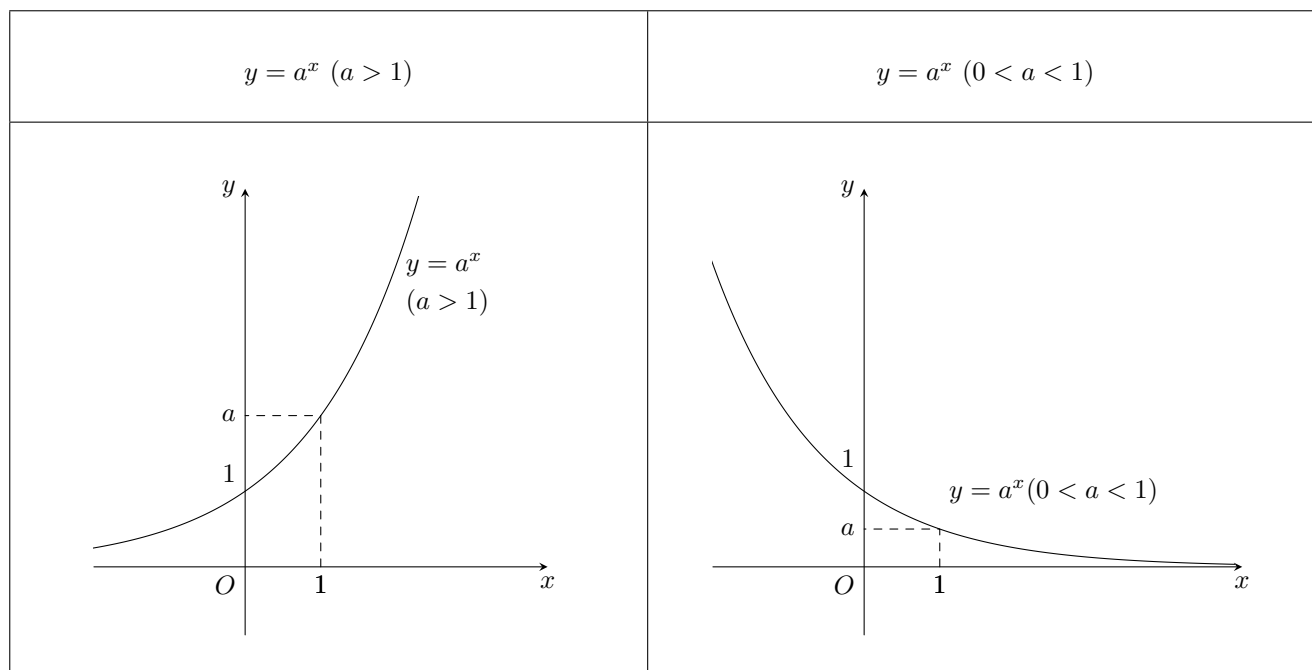
(b) Nếu $0 < a < 1$ thì $y' < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

d) Giới hạn, tiệm cận

(a) Nếu $a > 1$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ nên Ox là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

(b) Nếu $0 < a < 1$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ nên Ox là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

e) Đồ thị



II. HÀM SỐ LÔ-GA-RÍT

1. Định nghĩa hàm số lô-ga-rít

Cho số thực dương a khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a .

Chú ý. Biểu thức $\log_a f(x)$ có điều kiện là $f(x) > 0$.

2. Đạo hàm của hàm số lô-ga-rít

a) Nếu $y = \log_a x$ thì $y' = \frac{1}{x \ln a}$.

b) Nếu $y = \log_a u$ thì $y' = \frac{u'}{u \ln a}$.

c) Nếu $y = \ln x$ thì $y' = \frac{1}{x}$.

d) Nếu $y = \ln u$ thì $y' = \frac{u'}{u}$.

3. Khảo sát hàm số lô-ga-rít

a) Tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

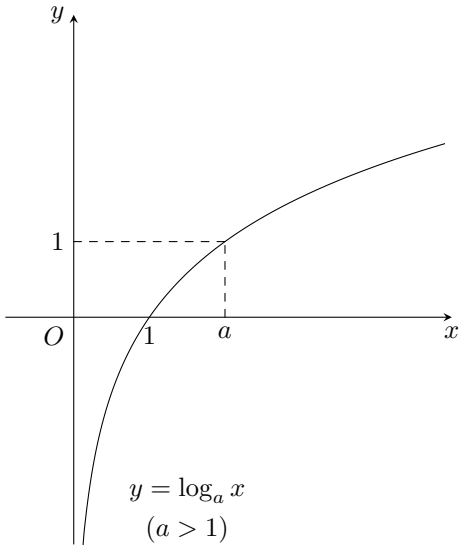
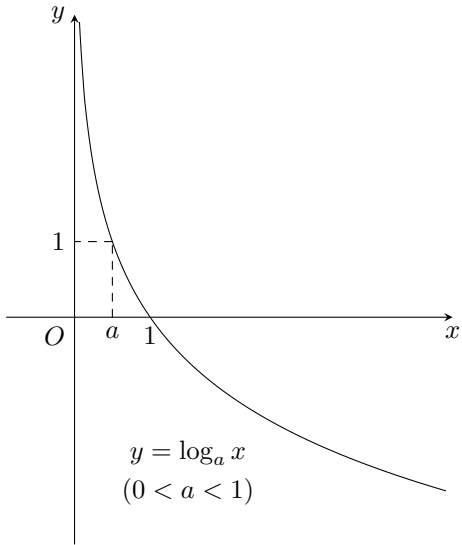
b) Tập giá trị $\mathcal{T} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Tính đơn điệu

(a) Nếu $a > 1$ thì $y' > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(b) Nếu $0 < a < 1$ thì $y' < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

d) Đồ thị

$y = \log_a x \ (a > 1)$	$y = \log_a x \ (0 < a < 1)$
 $y = \log_a x$ ($a > 1$)	 $y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)

III. BÀI TOÁN LÃI SUẤT

1. Bài toán lãi suất đơn

Định nghĩa lãi đơn.

Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến lấy tiền ra.

Phát biểu bài toán.

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A + nAr = A(1 + nr)$$

Chú ý: Trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ $r\%$ là $\frac{r}{100}$.

2. Bài toán lãi suất kép

Định nghĩa lãi kép.

Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Phát biểu bài toán.

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A(1 + r)^n$$

Từ công thức trên ta có thể tính được

$$n = \log_{1+r} \left(\frac{S_n}{A} \right)$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1$$

$$A = \frac{S_n}{(1 + r)^n}$$

3. Bài toán gửi tiền hàng tháng vào ngân hàng

Phát biểu bài toán.

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng, thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n .

Công thức sử dụng.

Ý tưởng hình thành công thức. Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_1 = A(1+r) = \frac{A}{r} [(1+r)^1 - 1] (1+r)$$

Đầu tháng thứ hai, khi đã gửi thêm số tiền A đồng thì số tiền là

$$T_1 = A(1+r) + A = A[(1+r) + 1] = A \frac{[(1+r)^2 - 1]}{(1+r) - 1} = \frac{A}{r} [(1+r)^2 - 1]$$

Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_2 = \frac{A}{r} [(1+r)^2 - 1] (1+r)$$

Từ đó ta có công thức tổng quát

$$S_n = \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1] (1+r)$$

Chú ý. Từ công thức trên ta có thể tính được

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n r}{A(1+r)} + 1 \right)$$

$$A = \frac{S_n r}{(1+r)[(1+r)^n - 1]}$$

4. Bài toán gửi tiền vào ngân hàng và rút tiền hàng tháng

Phát biểu bài toán.

Một người gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, người đó rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu.

Công thức sử dụng.

Ý tưởng hình thành công thức. Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là $T_1 = A(1+r)$ và sau khi rút số tiền còn lại là

$$S_1 = A(1+r) - X = A(1+r) - X \frac{(1+r) - 1}{r}$$

Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$T_2 = [A(1+r) - X] (1+r) = A(1+r)^2 - X(1+r)$$

và sau khi rút số tiền còn lại là

$$S_2 = A(1+r)^2 - X(1+r) - X = A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1] = A(1+r)^2 - X \frac{(1+r)^2 - 1}{r}$$

Từ đó ta có công thức tổng quát số tiền còn lại sau n tháng là

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Chú ý. Từ công thức trên ta có thể tính được

$$X = [A(1+r)^n - S_n] \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

5. Bài toán vay vốn trả góp

Phát biểu bài toán.

Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau một tháng, mỗi lần hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Công thức sử dụng.

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính tiền gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$$

và

$$X = \frac{A(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1}$$

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết lại) 4 công thức đạo hàm của hàm số mũ?

Câu 2. Nêu (viết lại) 6 công thức đạo hàm của hàm số lô-ga-rít?

Câu 3. Nêu kết quả về tính đơn điệu của hàm số mũ?

Câu 4. Nêu kết quả về tính đơn điệu của hàm số lô-ga-rít?

Câu 5. Nêu các đường tiệm cận của hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít?

§5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ. PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ, PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT CƠ BẢN

1. Phương trình mũ cơ bản

Cho $a, b > 0, a \neq 1$. Ta có

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

2. Phương trình lô-ga-rít cơ bản

Cho $a, b > 0, a \neq 1$. Ta có

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

II. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số cho phương trình mũ

a) Sử dụng 7 công thức lũy thừa không chứa căn, biến đổi phương trình về dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

b) Áp dụng công thức

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số cho phương trình lô-ga-rít

a) Sử dụng các công thức lô-ga-rít, biến đổi phương trình về dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

b) Áp dụng công thức

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

1. Phương pháp đặt ẩn phụ cho phương trình mũ

- Sử dụng công thức biến đổi đưa phương trình về dạng $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$.
- Đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện $t > 0$, phương trình trở thành $mt^2 + nt + p = 0$.
- Giải phương trình tìm t , sau đó tìm x .

2. Phương pháp đặt ẩn phụ cho phương trình lô-ga-rít

- Sử dụng công thức biến đổi đưa phương trình về dạng $m \cdot \log_a^2 f(x) + n \cdot \log_a f(x) + p = 0$.
- Đặt $t = \log_a f(x)$, phương trình trở thành $mt^2 + nt + p = 0$.
- Giải phương trình tìm t , sau đó tìm x .

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết lại) công thức nghiệm của phương trình mũ cơ bản?

Câu 2. Nêu (viết lại) công thức nghiệm của phương trình lô-ga-rít cơ bản?

Câu 3. Nêu các bước giải phương trình mũ bằng phương pháp đưa về cùng cơ số?

Câu 4. Nêu các bước giải phương trình lô-ga-rít bằng phương pháp đưa về cùng cơ số?

Câu 5. Nêu các bước giải phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ?

Câu 6. Nêu các bước giải phương trình lô-ga-rít bằng phương pháp đặt ẩn phụ?

§6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔ-GA-RÍT CƠ BẢN

1. Bất phương trình mũ cơ bản

Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Xét bất phương trình $a^x > b$. Khi đó,

- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$
 - Nếu $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$. Do đó, tập nghiệm là $S = (\log_a b; +\infty)$.
 - Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$. Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \log_a b)$.

2. Bất phương trình lô-ga-rít cơ bản

Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Xét bất phương trình $\log_a x > b$. Khi đó,

- Nếu $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$. Do đó, tập nghiệm là $S = (a^b; +\infty)$.
- Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$. Do đó, tập nghiệm là $S = (0; a^b)$.

II. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ CÙNG CƠ SỐ

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số cho bất phương trình mũ

- Sử dụng 7 công thức lũy thừa không chứa căn, biến đổi phương trình về dạng $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.
- Áp dụng công thức
 - Nếu $a > 1$ thì công thức là

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

(b) Nếu $0 < a < 1$ thì công thức là

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

2. Phương pháp đưa về cùng cơ số cho bất phương trình lô-ga-rít

a) Sử dụng các công thức lô-ga-rít, biến đổi phương trình về dạng $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

b) Áp dụng công thức

(a) Nếu $a > 1$ thì công thức là

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

(b) Nếu $0 < a < 1$ thì công thức là

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

III. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

1. Phương pháp đặt ẩn phụ cho bất phương trình mũ

a) Sử dụng công thức biến đổi đưa phương trình về dạng $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p > 0$.

b) Đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện $t > 0$, phương trình trở thành $mt^2 + nt + p > 0$.

c) Giải phương trình tìm t , sau đó tìm x .

2. Phương pháp đặt ẩn phụ cho bất phương trình lô-ga-rít

a) Sử dụng công thức biến đổi đưa phương trình về dạng $m \cdot \log_a^2 f(x) + n \cdot \log_a f(x) + p > 0$.

b) Đặt $t = \log_a f(x)$, phương trình trở thành $mt^2 + nt + p > 0$.

c) Giải phương trình tìm t , sau đó tìm x .

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết lại) các công thức nghiệm của bất phương trình mũ cơ bản $a^x > b$?

Câu 2. Nêu (viết lại) các công thức nghiệm của bất phương trình lô-ga-rít cơ bản $\log_a x > b$?

Câu 3. Nêu các bước giải bất phương trình mũ bằng phương pháp đưa về cùng cơ số?

Câu 4. Nêu các bước giải bất phương trình lô-ga-rít bằng phương pháp đưa về cùng cơ số?

Câu 5. Nêu các bước giải bất phương trình mũ bằng phương pháp đặt ẩn phụ?

Câu 6. Nêu các bước giải bất phương trình lô-ga-rít bằng phương pháp đặt ẩn phụ?

Chương 3

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

§1. NGUYÊN HÀM

I. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

1. Định nghĩa nguyên hàm

$F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ khi chỉ khi $F'(x) = f(x)$, ta viết $\int f(x) dx = F(x) + C$. Do đó,

$$\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

2. Tính chất nguyên hàm

a) **Tính chất 1** $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x)$ và $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

b) **Tính chất 2** $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, k là một số thực.

c) **Tính chất 3** $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Nguyên hàm cơ bản

a) $\int 0 dx = C$.

b) $\int dx = x + C$.

c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ ($n \neq -1$).

d) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$.

e) $\int e^x dx = e^x + C$.

f) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$).

g) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

h) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

i) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

j) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$.

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý. Nếu $\int f(x) = F(x) + C$ thì $\int f(t)dt = F(t) + C$.

Hệ quả. Công thức nguyên hàm mở rộng

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int (ax+b)^n dx &= \frac{1}{a} \frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1} + C \quad (n \neq -1). & \text{b)} \quad \int \frac{1}{ax+b} dx &= \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C. \\ \text{c)} \quad \int e^{ax+b} dx &= \frac{1}{a} e^{ax+b} + C. & \text{d)} \quad \int \cos(ax+b) dx &= \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C. \\ \text{e)} \quad \int \sin(ax+b) dx &= -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C. & \text{f)} \quad \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx &= \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C. \\ \text{g)} \quad \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx &= -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C. \end{aligned}$$

Phương pháp đổi biến số

- Đặt $t =$ (biểu thức).
- Tính $dt =$ (biểu thức)' dx .
- Thay t và dt vào nguyên hàm ban đầu.

2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

a. Bốn dạng nguyên hàm được tính bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int P(x) \sin x dx. & & \text{b)} \quad \int P(x) \cos x dx. \\ \text{c)} \quad \int P(x) e^x dx. & & \text{d)} \quad \int P(x) \ln x dx. \end{aligned}$$

b. Công thức nguyên hàm từng phần

$$\boxed{\int u \cdot v' dx = v \cdot u - \int v \cdot u' dx}$$

c. Áp dụng phương pháp nguyên hàm từng phần cho ba dạng a), b) và c)

$$\text{Đặt } u = P(x), v' = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{cases} \text{ Suy ra } u' = P'(x), v = \begin{cases} \int \sin x dx = -\cos x \\ \int \cos x dx = \sin x \\ \int e^x dx = e^x \end{cases}.$$

Thay u, v, u', v' vào công thức $\int u \cdot v' dx = v \cdot u - \int v \cdot u' dx$.

d. Áp dụng phương pháp nguyên hàm từng phần cho dạng d)

Đặt $u = \ln x, v' = P(x)$. Suy ra $u' = \frac{1}{x}, v = \int P(x) dx$.

Thay u, v, u', v' vào công thức $\int u \cdot v' dx = v \cdot u - \int v \cdot u' dx$.

§2. TÍCH PHÂN

I. CÔNG THỨC NEWTON-LEIBNIZ

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Sử dụng kết quả nguyên hàm cơ bản và mở rộng

Phương pháp.

- Sử dụng công thức nguyên hàm để tính nguyên hàm.
- Áp dụng công thức Newton-Leibniz tính tích phân.

2. Phương pháp đổi biến số

Phương pháp.

- Đặt $t = (\text{biểu thức})$, tính $dt = (\text{biểu thức})' dx$.
- Đổi cận.
- Thay t , dt và cận mới vào tích phân ban đầu.

3. Phương pháp tích phân từng phần

Phương pháp tích phân từng phần cũng được áp dụng cho 4 dạng tích phân $\int_a^b P(x) \sin x \, dx$, $\int_a^b P(x) \cos x \, dx$,

$$\int_a^b P(x)e^x \, dx, \int_a^b P(x) \ln x \, dx.$$

Công thức tích phân từng phần

$$\int_a^b u \cdot v' \, dx = v \cdot u \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u' \, dx$$

Phương pháp.

- Đặt u, v' thích hợp.
- Suy ra u', v .
- Áp dụng công thức tích phân từng phần.

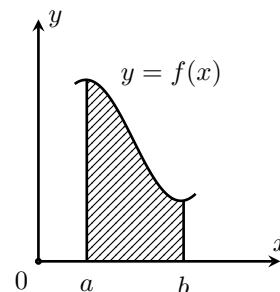
§3. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi bốn đường: $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$, $x = b$

Công thức tính diện tích

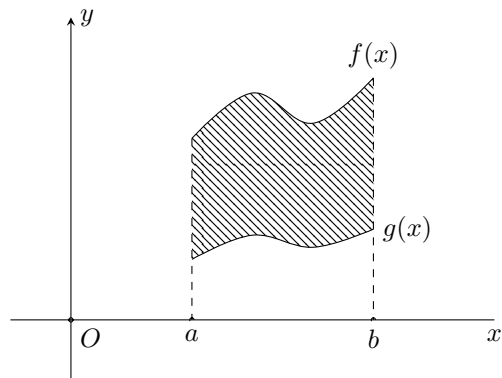
$$\int_a^b |f(x)| \, dx$$



2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi bốn đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

Công thức tính diện tích

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$



3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong: $y = f(x)$, $y = g(x)$

Phương pháp.

a) Giải phương trình $f(x) = g(x)$ và chọn nghiệm nhỏ nhất (giả sử $x = a$), chọn nghiệm lớn nhất (giả sử $x = b$).

b) Áp dụng công thức tính diện tích

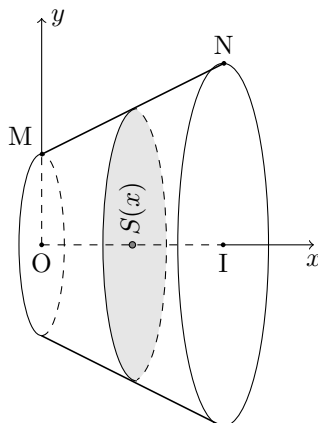
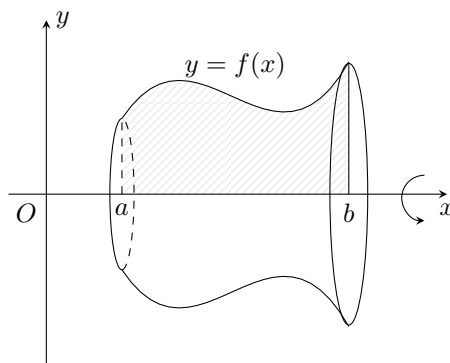
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

II. THỂ TÍCH

1. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình ($\mathcal{H}$) quanh trục Ox , hình ($\mathcal{H}$) giới hạn bởi bốn đường $y = f(x)$, trục hoành, $x = a$ và $x = b$.

Công thức thể tích

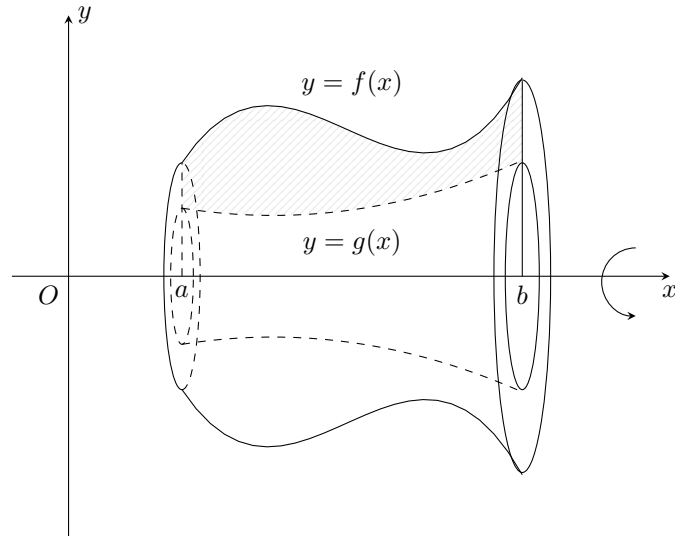
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



2. Thể tích khối tròn xoay khi quay hình $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox , hình $(\mathcal{H})$ giới hạn bởi bốn đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ và $x = b$.

Công thức thể tích

$$V = \pi \left| \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx \right|$$



Chương 4

SỐ PHỨC

§1. SỐ PHỨC

I. ĐỊNH NGHĨA SỐ PHỨC

- Một **số phức** là một biểu thức dạng $a + bi$, trong đó a và b là những số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết $z = a + bi$.
- i được gọi là *đơn vị ảo*, a được gọi là *phần thực*, b được gọi là *phần ảo* của số phức $z = a + bi$.
- Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Chú ý.

- Mỗi số thực a được gọi là một số phức với phần ảo bằng 0, tức là $a = a + 0i$.
Như vậy, *mỗi số thực cũng là một số phức*. Ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Số phức $0 + bi$ được gọi là **số thuần ảo** và viết đơn giản là bi , tức là $bi = 0 + bi$.

$$\text{c) } i^n = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 4k \\ i & \text{nếu } n = 4k + 1 \\ -1 & \text{nếu } n = 4k + 2 \\ -i & \text{nếu } n = 4k + 3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

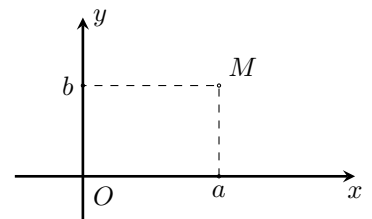
II. HAI SỐ PHỨC BẰNG NHAU

Hai số phức $z = a + bi$, $z' = c + di$ được gọi là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau, tức là

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

III. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Điểm $M(a; b)$ trong một hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn** số phức $z = a + bi$.



IV. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

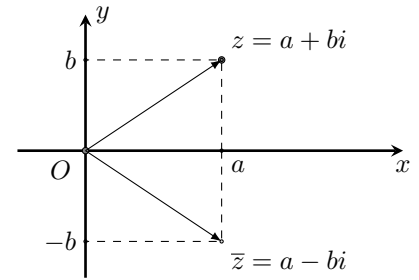
Định nghĩa.

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z và kí hiệu là $\bar{z} = a - bi$. Tức là

$$\overline{a + bi} = a - bi.$$

Tính chất.

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z$ có phần ảo bằng 0.



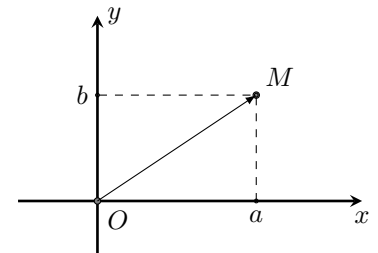
V. MÔ-ĐUN CỦA SỐ PHỨC

Giả sử số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ.

Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **mô-đun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Từ định nghĩa, suy ra $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ hay $|a + bi| = |\overrightarrow{OM}|$. Khi đó

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



§2. CỘNG, TRỪ VÀ NHÂN SỐ PHỨC

I. PHÉP CỘNG, TRỪ HAI SỐ PHỨC

1. Phép cộng hai số phức

Định nghĩa. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Khi đó, ta có

$$(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i.$$

Tính chất của phép cộng số phức. Phép cộng số phức có tất cả các tính chất của phép cộng số thực.

- Tính chất kết hợp

$$(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Do đó ta kí hiệu chung các số $(x + y) + z$ và $x + (y + z)$ là $x + y + z$.

Nếu $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i, \dots, z_n = a_n + b_ni$ ($a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$) thì

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)i.$$

- Tính chất giao hoán

$$x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

- Cộng với 0

$$z + 0 = 0 + z = z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Với mỗi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có

$$z + (-z) = (-z) + z = 0.$$

Số phức $-z$ được gọi là **số đối** của số phức z . Điểm biểu diễn số phức z và điểm biểu diễn số đối của nó đối xứng qua gốc tọa độ.

- Với mọi số phức z và w ta có

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

- Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số phức đó.
- $|z + w| \geq ||z| - |w||$, dấu “=” xảy ra khi chỉ khi $z = kw$ với $k < 0$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$, dấu “=” xảy ra khi chỉ khi $z = kw$ với $k > 0$.

2. Phép trừ hai số phức

Định nghĩa. Hiệu của hai số phức z và w là tổng của z với $-w$, tức là

$$z - w = z + (-w).$$

Nếu $z = a + bi$ và $w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) thì

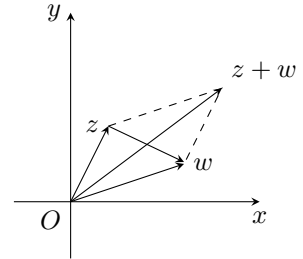
$$z - w = (a - c) + (b - d)i.$$

Tính chất phép trừ hai số phức. Với mọi số phức z và w ta có

- $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$.
- $|z - w| \geq ||z| - |w||$, dấu “=” xảy ra khi chỉ khi $z = kw$ với $k > 0$.
- $|z - w| \leq |z| + |w|$, dấu “=” xảy ra khi chỉ khi $z = kw$ với $k < 0$.

3. Ý nghĩa hình học của phép cộng và phép trừ số phức

Nếu $z = a + bi$, $w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) lần lượt được biểu diễn bởi các véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ thì $z + w$ được biểu diễn bởi $\vec{u} + \vec{v}$, $z - w$ được biểu diễn bởi $\vec{u} - \vec{v}$.



II. PHÉP NHÂN HAI SỐ PHỨC

1. Định nghĩa.

Cho hai số phức $z = a + bi$ và $w = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Khi đó ta có

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Chú ý. Với mọi số thực k ta có $kz = ka + kbi$. Đặc biệt $0 \cdot z = 0$.

2. Tính chất phép nhân hai số phức.

Phép nhân hai số phức có tất cả các tính chất của phép nhân hai số thực.

- Tính chất kết hợp

$$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Do đó ta kí hiệu các số phức $(xy)z$ và $x(yz)$ là xyz .

Đặc biệt ta kí hiệu $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ số phức } z}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

- Tính chất giao hoán

$$xy = yx, \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

- Nhân với 1

$$1 \cdot z = z \cdot 1 = z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

$$x(y + z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{C}.$$

- Với mọi số phức z, w ta đều có

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

$$z\bar{z} = |z|^2,$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

§3. PHÉP CHIA SỐ PHỨC

I. ĐỊNH NGHĨA

Nếu $c + di = (a + bi)z$ thì số phức z được gọi là thương của phép chia $c + di$ cho $a + bi$ khác 0.

II. CÁCH THỰC HIỆN PHÉP CHIA HAI SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ trong đó $z_2 \neq 0$. Khi đó thương của phép chia z_1 cho z_2 được xác định như sau

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) - (ad + bc)i}{c^2 + d^2}.$$

III. TÍNH CHẤT PHÉP CHIA HAI SỐ PHỨC

Cho hai số phức z, w trong đó $w \neq 0$. Khi đó,

- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$

§4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

I. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ THỰC ÂM

Cho a là số thực âm. Hai căn bậc hai của a là $\pm i\sqrt{|a|}$.

II. CÔNG THỨC NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Khi đó:

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\frac{b}{2a}.$
- Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$
- Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$

III. ĐỊNH LÝ VI-ÉT CHO PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC $\mathbb{C}$

Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

Phần II

HÌNH HỌC 12

Chương 1

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

§1. KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN

I. KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có 1 đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

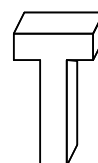
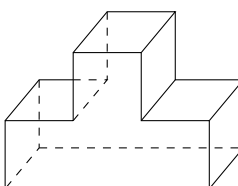
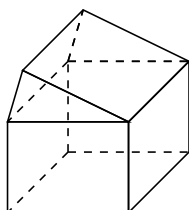
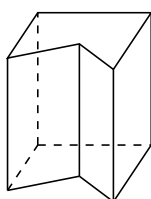
2. Mặt phẳng đối xứng của một hình

Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng đối xứng** của hình (H) khi phép đối xứng qua (P) biến hình (H) thành chính nó.

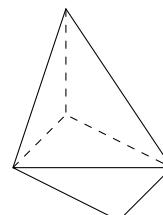
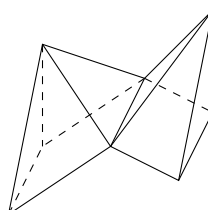
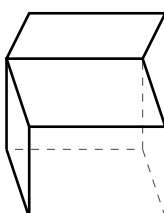
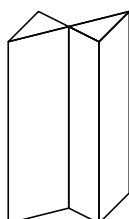
3. Khái niệm khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Ví dụ Những hình sau đây là **khối đa diện**



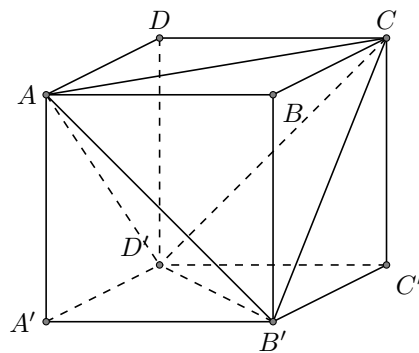
Ví dụ Những hình sau đây là **không phải** là khối đa diện



II. PHÂN CHIA KHỐI ĐA DIỆN

Khối đa diện $ABCD.A'B'C'D'$ được chia thành nhiều tứ diện nhỏ, đó là các tứ diện $A.A'B'D'$, $C.B'C'D'$, $B'.ABC$, $D'.ACD$ và $C.AB'D'$.

Do đó, $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{A.A'B'D'} + V_{C.B'C'D'} + V_{B'.ABC} + V_{D'.ACD} + V_{C.AB'D'}$



III. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu định nghĩa hình đa diện, khối đa diện?

Câu 2. Nêu định nghĩa mặt phẳng đối xứng của một hình?

§2. KHỐI ĐA DIỆN LỖI - KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

I. KHỐI ĐA DIỆN LỖI

Định nghĩa. Một khối đa diện được gọi là **lỗi** khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía với mỗi mặt phẳng chứa một mặt bên của nó.

II. KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

1. Định nghĩa khối đa diện đều

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có các tính chất sau

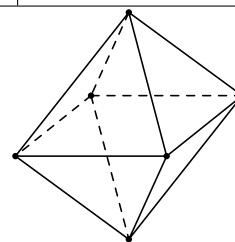
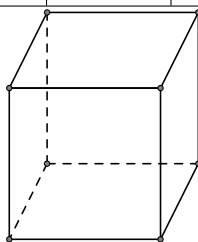
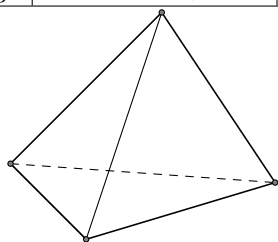
- Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

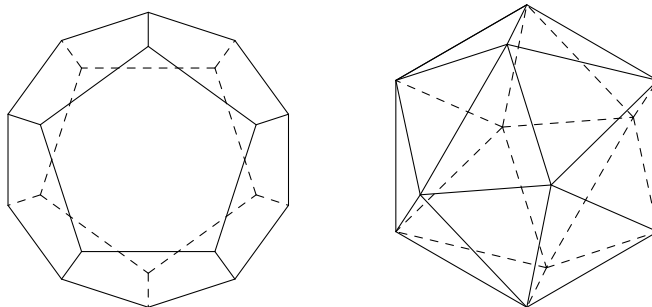
Một khối đa diện có đặc điểm như trên được ký hiệu là $\{p; q\}$.

2. Phân loại khối đa diện lồi

Có 5 loại khối đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Số mặt phẳng đối xứng
$\{3; 3\}$	Tứ diện đều	4	6	4	6
$\{4; 3\}$	Lập phương	8	12	6	9
$\{3; 4\}$	Bát diện đều	6	12	8	9
$\{5; 3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12	
$\{3; 5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20	





Chú ý. Gọi D là tổng số đỉnh, C là tổng số cạnh và M là tổng số mặt của khối đa diện đều loại $\{p; q\}$.
Ta có $qD = 2C = pM$.

III. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Định nghĩa khối đa diện lồi?

Câu 2. Định nghĩa khối đa diện đều?

Câu 3. Vẽ bảng phân loại 5 khối đa diện đều?

§3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

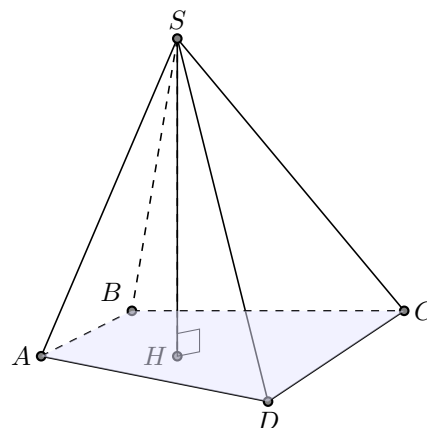
I. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

1. Công thức thể tích khối chóp tổng quát

Trong hình bên, hình chóp $S.ABCD$ có $SH \perp (ABCD)$. Khi đó, SH là đường cao có chiều dài h , $ABCD$ là đáy có diện tích $S_{\text{đáy}}$.

Thể tích khối chóp là

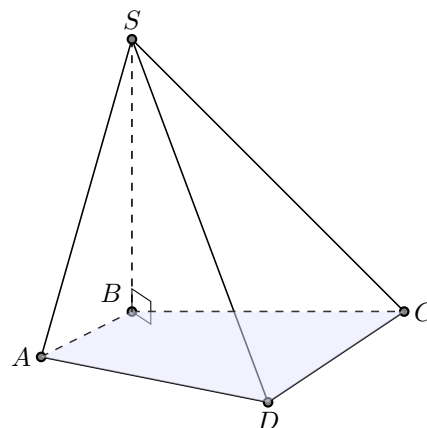
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot h$$



2. Khối chóp có một cạnh bên vuông góc mặt đáy

Trong hình bên, hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB \perp (ABCD)$ nên công thức thể tích là

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot SB$$

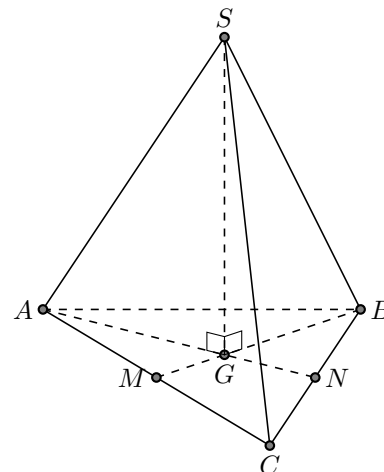


3. Khối chóp tam giác đều

Cho hình chóp đều $S.ABC$.

- Trong hình vẽ là hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Khi đó,
 - ✓ $SA = SB = SC$.
 - ✓ $\triangle ABC$ là tam giác đều.
 - ✓ $\triangle SAB, \triangle SAC, \triangle SBC$ cân tại S .
 - ✓ $SG \perp (ABC)$ tại G với G là trọng tâm $\triangle ABC$.

- Công thức thể tích $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SG$

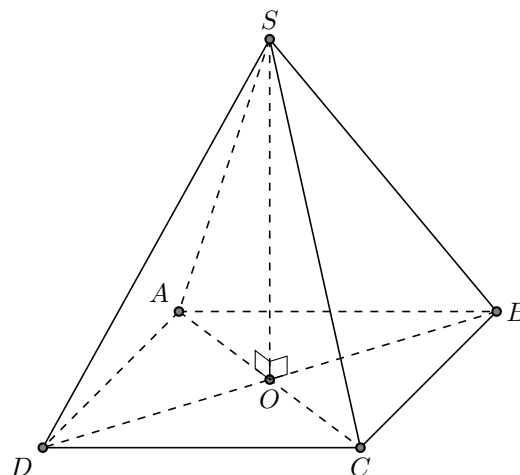


4. Khối chóp tứ giác đều

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

- Trong hình vẽ là hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Khi đó,
 - ✓ $SA = SB = SC = SD$.
 - ✓ $ABCD$ là hình vuông.
 - ✓ $SO \perp (ABCD)$.

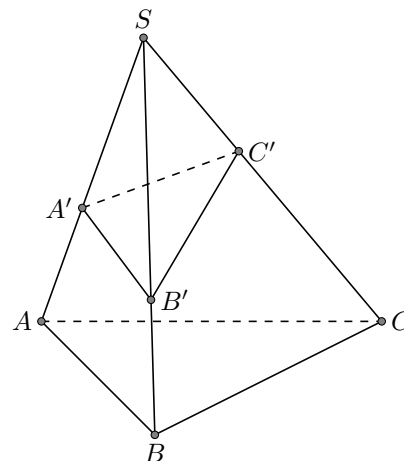
- Công thức thể tích $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO$



5. Công thức tỉ số thể tích

Cho khối chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' . Khi đó

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}.$$



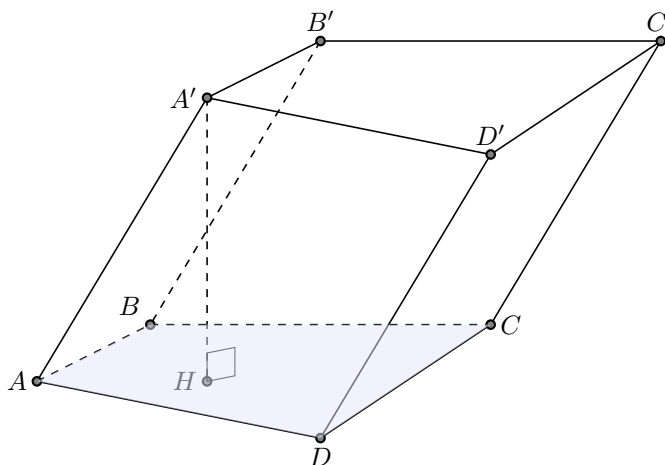
II. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ

1. Công thức thể tích khối lăng trụ tổng quát

Trong hình bên, hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'H \perp (ABCD)$. Khi đó, $A'H$ là đường cao có độ dài h , $ABCD$ là đáy có diện tích $S_{\text{đáy}}$.

Thể tích khối lăng trụ là

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

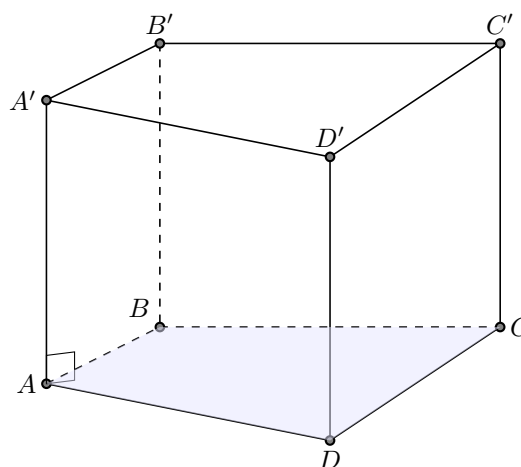


2. Khối lăng trụ đứng

Hình bên là khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, $A'A$ là đường cao của hình lăng trụ, $ABCD$ là đáy có diện tích $S_{\text{đáy}}$.

Thể tích khối lăng trụ là

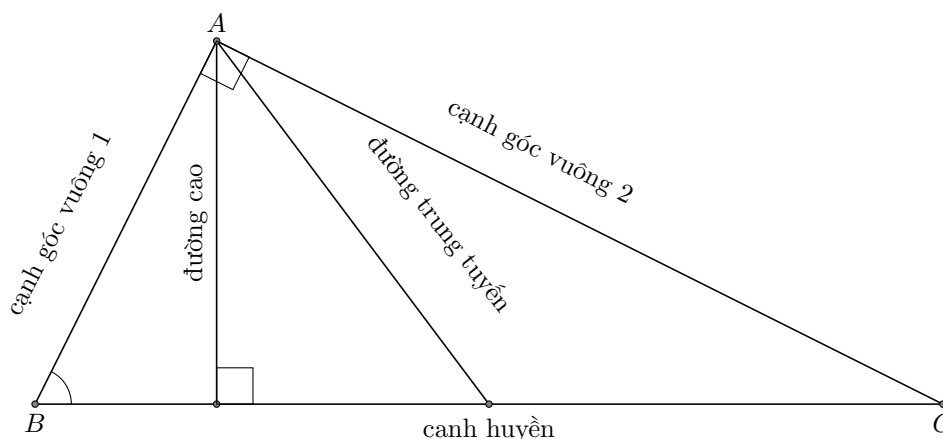
$$V = S_{\text{đáy}} \cdot A'A$$



III. ÔN TẬP KIẾN THỨC CŨ

1. Công thức trong tam giác vuông

Trong hình vẽ bên là tam giác ABC vuông tại A .



a) Công thức Pi-ta-go

$$(\text{cạnh huyền})^2 = (\text{cạnh góc vuông 1})^2 + (\text{cạnh góc vuông 2})^2$$

b) Đường trung tuyến vẽ từ đỉnh A

$$(\text{đường trung tuyến}) = \frac{(\text{cạnh huyền})}{2}$$

c) Đường cao vẽ từ đỉnh A

$$(\text{đường cao}) = \frac{(\text{cạnh góc vuông 1}) \cdot (\text{cạnh góc vuông 2})}{(\text{cạnh huyền})}$$

d) Công thức lượng giác của góc $\widehat{ABC}$

$$(a) \sin \widehat{ABC} = \frac{(\text{đối})}{(\text{huyền})} = \frac{AC}{BC}.$$

$$(b) \cos \widehat{ABC} = \frac{(\text{kề})}{(\text{huyền})} = \frac{AB}{BC}.$$

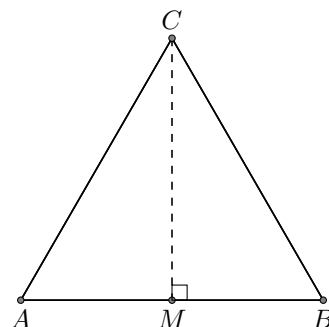
$$(c) \tan \widehat{ABC} = \frac{(\text{đối})}{(\text{kề})} = \frac{AC}{AB}.$$

2. Công thức trong tam giác đều

Trong hình bên là tam giác ABC đều, CM vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao, vừa là đường phân giác vẽ từ đỉnh C của tam giác ABC . Khi đó, một số tính chất của tam giác cần được ghi nhớ

- Cả ba đường cao của tam giác đều thì bằng nhau, hơn nữa chúng cũng là đường trung tuyến, đường phân giác của tam giác
- Công thức tính độ dài đường trung tuyến tam giác đều

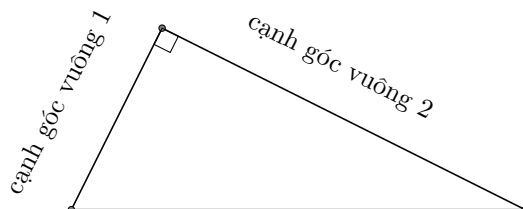
$$CM = \frac{(\text{cạnh}) \cdot \sqrt{3}}{2}$$



3. Công thức diện tích thường gặp

a) Công thức diện tích của tam giác vuông

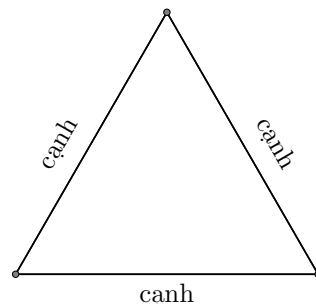
$$S = \frac{1}{2} (\text{cạnh góc vuông 1}) \cdot (\text{cạnh góc vuông 2})$$



b) Công thức diện tích của tam giác đều

Cho tam giác ABC đều. Khi đó, diện tích tam giác được tính bằng công thức

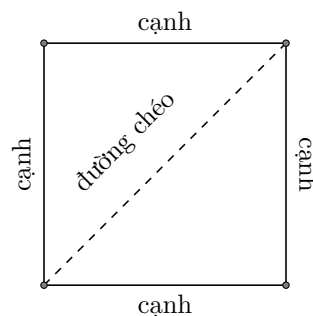
$$S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$



c) Công thức diện tích của hình vuông

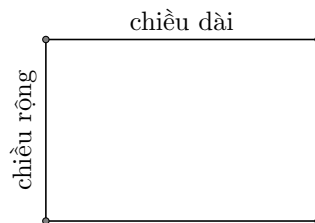
$$S = (\text{cạnh})^2$$

$$(\text{đường chéo}) = (\text{cạnh}) \cdot \sqrt{2}$$



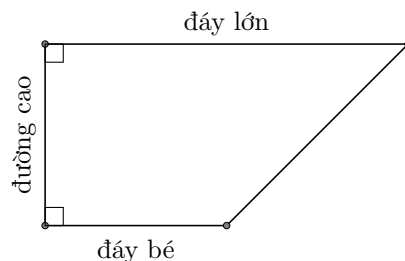
d) Công thức diện tích của hình chữ nhật

$$S = (\text{chiều dài}) \cdot (\text{chiều rộng})$$



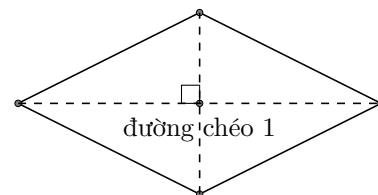
e) Công thức diện tích của hình thang vuông

$$S = \frac{(\text{đáy lớn}) + (\text{đáy bé})}{2} \cdot (\text{đường cao})$$



f) Công thức diện tích của hình thoi

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\text{đường chéo 1}) \cdot (\text{đường chéo 2})$$



IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu (viết) công thức thể tích khối chóp tổng quát?

Câu 2. Nêu (viết) công thức thể tích khối chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy?

Câu 3. Nêu (viết) công thức thể tích khối chóp tam giác đều?

Câu 4. Nêu (viết) công thức thể tích khối chóp tứ giác đều?

Câu 5. Nêu (viết) công thức tỉ số thể tích?

Câu 6. Nêu (viết) công thức thể tích khối lăng trụ tổng quát?

Câu 7. Nêu (viết) công thức thể tích khối lăng trụ đứng?

Câu 8. Nêu (viết) 4 nhóm công thức trong tam giác vuông?

Câu 9. Nêu (viết) công thức tính đường trung tuyến, đường cao của tam giác đều? Công thức tính đường chéo của hình vuông?

Câu 10. Nêu (viết) các công thức tính diện tích hình tam giác vuông, tam giác đều, hình vuông, hình chữ nhật, hình thang vuông và hình thoi?

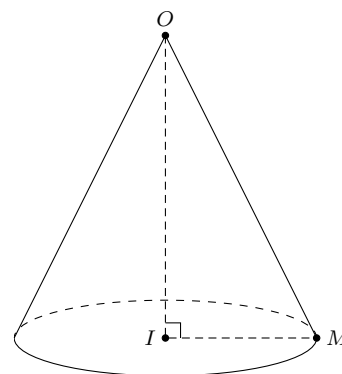
Chương 2

KHỐI NÓN - KHỐI TRỤ - KHỐI CẦU

§1. KHỐI NÓN

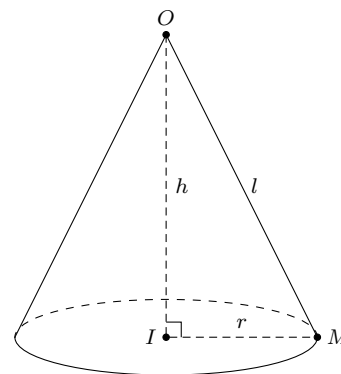
I. KHÁI NIỆM HÌNH NÓN

Cho tam giác OIM vuông tại I . Khi quay tam giác đó xung quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình gọi là *hình nón tròn xoay*, gọi tắt là *hình nón*.



II. CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA KHỐI NÓN

- r là bán kính đường tròn đáy.
- h là chiều cao của hình nón.
- l là đường sinh của hình nón.



III. DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH KHỐI NÓN

1. Diện tích xung quanh hình nón

$$S_{xq} = \pi \cdot r \cdot l$$

2. Diện tích toàn phần hình nón

$$S_{tp} = \pi \cdot r \cdot l + \pi \cdot r^2$$

3. Thể tích khối nón

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Cho tam giác OIM vuông tại I , nêu cách tạo hình nón? Nêu các yếu tố của hình nón?

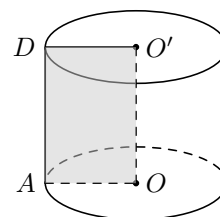
Câu 2. Nêu các công thức tính diện tích của hình nón?

Câu 3. Nêu công thức tính thể tích khối nón?

§2. KHỐI TRỤ

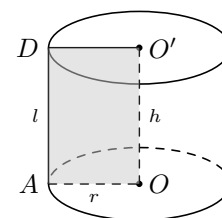
I. KHÁI NIỆM HÌNH TRỤ

Cho hình chữ nhật $AOO'D$ quay xung quanh cạnh OO' , thì đường gấp khúc $OADO'$ tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay hay còn gọi tắt là hình trụ.



II. CÁC YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA HÌNH TRỤ

- l là đường sinh của hình trụ.
- r là bán kính đường tròn đáy của hình trụ.
- h là chiều cao của hình trụ.



III. DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH KHỐI TRỤ

1. Diện tích xung quanh hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot l$$

2. Diện tích toàn phần hình trụ

$$S_{tp} = 2\pi \cdot r \cdot l + 2\pi \cdot r^2$$

3. Thể tích khối trụ

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu cách tạo ra hình trụ từ hình chữ nhật $OO'DA$? Nêu các yếu tố của hình trụ?

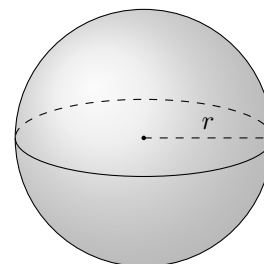
Câu 2. Nêu công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ?

Câu 3. Nêu công thức tính thể tích của khối trụ?

§3. KHỐI CẦU

I. KHÁI NIỆM HÌNH CẦU, YẾU TỐ CƠ BẢN CỦA HÌNH CẦU

r là bán kính của hình cầu.



II. DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH KHỐI CẦU

1. Diện tích hình cầu

$$S = 4\pi \cdot r^2$$

2. Thể tích khối cầu

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VÀ MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính R , d là khoảng cách từ tâm O đến (P) .

So sánh	Vị trí tương đối	Đặc điểm	Hình minh họa
$d < R$	(P) và (S) cắt nhau	Thiết diện là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	
$d = R$	(P) và (S) tiếp xúc nhau	(P) gọi là tiếp diện	
$d > R$	(P) và (S) không cắt nhau		

IV. CÂU HỎI KHẢO BÀI

Câu 1. Nêu công thức tính diện tích hình cầu? Nêu công thức tính thể tích khối cầu?

Câu 2. Mô tả các vị trí tương đối của khối cầu với mặt phẳng?

Chương 3

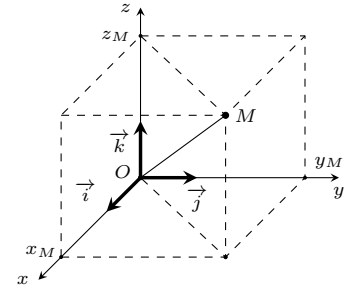
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ $OXYZ$

Hệ trục tọa độ $Oxyz$ gồm ba tia Ox , Oy và Oz đôi một vuông góc nhau như hình vẽ bên.

- Các véc-tơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ là các véc-tơ đơn vị của các trục Ox , Oy , Oz .
- $|\vec{i}| = 1$, $|\vec{j}| = 1$, $|\vec{k}| = 1$.
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$, $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.
- $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



II. TỌA ĐỘ ĐIỂM, TỌA ĐỘ VÉC-TƠ

Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $C(x_C; y_C; z_C)$

a) $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$.

b) $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

- $M \equiv O \Rightarrow x = y = z = 0 \longrightarrow M(0; 0; 0)$.
- $M \in (Oxy) \Rightarrow z = 0 \longrightarrow M(x; y; 0)$.
- $M \in (Oxz) \Rightarrow y = 0 \longrightarrow M(x; 0; z)$.
- $M \in (Oyz) \Rightarrow x = 0 \longrightarrow M(0; y; z)$.
- $M \in Ox \Rightarrow y = z = 0 \longrightarrow M(x; 0; 0)$.
- $M \in Oy \Rightarrow x = z = 0 \longrightarrow M(0; y; 0)$.
- $M \in Oz \Rightarrow x = y = 0 \longrightarrow M(0; 0; z)$.

c) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

d) M là trung điểm của đoạn AB , ta có

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

e) G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta có

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

f) Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ($k \neq 0$), nghĩa là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$, tọa độ điểm M là

$$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}; z_M = \frac{z_A - kz_B}{1 - k}.$$

III. HAI VÉC-TƠ BẰNG NHAU. TỌA ĐỘ VÉC-TƠ TỔNG, VÉC-TƠ HIỆU

Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó,

a) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \text{ (hoành = hoành; tung = tung; cao = cao).} \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

b) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

c) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$.

d) $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

e) $m\vec{a} \pm n\vec{b} = (ma_1 \pm nb_1; ma_2 \pm nb_2; ma_3 \pm nb_3)$.

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ VÀ ỨNG DỤNG

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

b) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

c) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

d) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

e) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

V. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ VÀ ỨNG DỤNG

a) $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$.

b) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

c) $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$.

d) $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

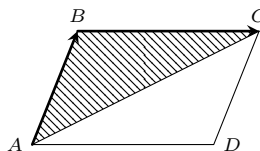
e) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ (nếu $b_1b_2b_3 \neq 0$).

f) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

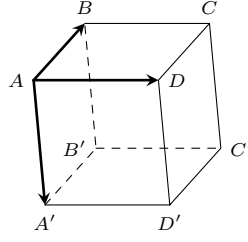
g) A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0}$.

h) A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

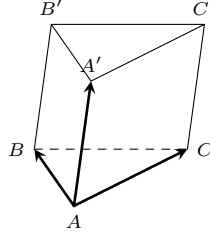
i) Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.



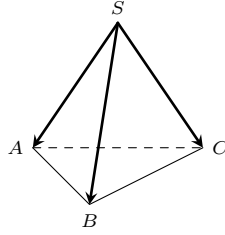
j) Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$.



k) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AA'}|$



l) Thể tích khối tứ diện $SABC$ là $V_{SABC} = \frac{1}{6} |[\vec{SA}, \vec{SB}] \cdot \vec{SC}|$.



VI. QUAN HỆ GIỮA CÁC VÉC-TƠ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó,

1. Hai véc-tơ vuông góc

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Chú ý.

- Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC} = 0$.
- Đường thẳng $d \perp (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} d \perp AB \\ d \perp AC \end{cases}$.

2. Hai véc-tơ cùng phương

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ (nếu } b_1b_2b_3 \neq 0)$$

Chú ý.

- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB}$ cùng phương với $\vec{AC}$.
- A, B, C là ba đỉnh của tam giác $\Leftrightarrow A, B, C$ không thẳng hàng $\Leftrightarrow \vec{AB}$ và $\vec{AC}$ không cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \neq \vec{0} \Leftrightarrow$ Hai trong ba tỉ lệ $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ khác nhau ($b_1b_2b_3 \neq 0$).
- $ABCD$ là hình thang có hai đáy AB và $CD \Leftrightarrow \vec{AB}$ cùng phương với $\vec{DC}$.

3. Hai véc-tơ bằng nhau

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}; \quad \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}; \quad m\vec{a} = n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} ma_1 = nb_1 \\ ma_2 = nb_2 \\ ma_3 = nb_3 \end{cases}$$

Chú ý. $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

4. Góc

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Chú ý.

- Gọi ϕ là góc giữa hai đường thẳng AC và BD . Khi đó

$$\cos \phi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{AB \cdot CD}.$$

- Góc $\hat{A}$ của tam giác ABC được tính bằng công thức

$$\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}.$$

5. Ba véc-tơ đồng phẳng

$$\text{Ba véc-tơ } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0.$$

Chú ý.

- A, B, C, D lập thành **tứ diện** $\Leftrightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.
- A, B, C, D lập thành **tứ giác** $\Leftrightarrow A, B, C, D$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

VII. CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRONG TAM GIÁC, TỨ DIỆN

1. Trung điểm đoạn thẳng

$$\text{Nếu } M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ thì } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}.$$

2. Các điểm đặc biệt trong tam giác

Cho tam giác ABC , một số điểm đặc biệt trong tam giác được xác định như sau

$$\bullet \text{ Trọng tâm } G \text{ của } \triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}.$$

$$\bullet H \text{ là trực tâm của } \triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AH} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \end{cases}.$$

- A' là chân đường cao của $\triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \end{cases}$.
- D là chân đường phân giác trong của góc $\hat{A}$ của $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$.
- E là chân đường phân giác ngoài của góc $\hat{A}$ của $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$.
- I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ trong đó $a = BC$, $b = AC$ và $c = AB$.

3. Các điểm đặc biệt trong tứ diện

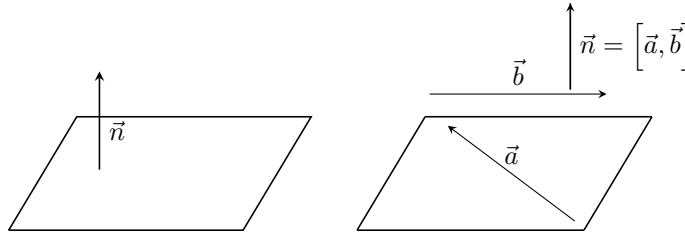
Cho tứ diện $ABCD$, một số điểm đặc biệt thường gặp

- G là trọng tâm tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases}$.
- H là hình chiếu của A lên $(BCD) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{BH} \cdot [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}] = 0 \end{cases}$.

§2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

I. VÉC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

- Véc-tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là **véc-tơ pháp tuyến** (VTPT) của mặt phẳng (α) nếu giá của nó vuông góc với (α) .



- Nếu hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ (khác $\vec{0}$ và không cùng phương với nhau) có giá song song hoặc nằm trên (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ được gọi là **cặp véc-tơ chỉ phương** của (α) .
Khi đó, (α) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

- Phương trình tổng quát của mặt phẳng có dạng

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

trong đó $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, véc-tơ $\vec{n} = (a; b; c)$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

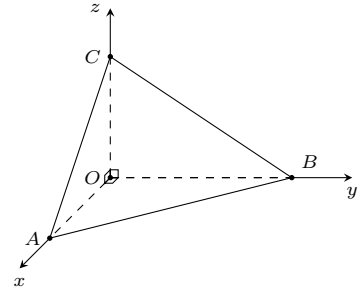
- Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT là $\vec{n} = (a; b; c)$ có phương trình là

$$(\alpha): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

III. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG THEO ĐOẠN CHẮN

Mặt phẳng đi qua ba điểm $A(a; 0; 0) \in Ox$, $B(0; b; 0) \in Oy$, $C(0; 0; c) \in Oz$ ($a, b, c \neq 0$). Phương trình mặt phẳng có dạng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG ĐẶC BIỆT

- a) $(\alpha): ax + by + d = 0 \rightarrow (\alpha) \parallel Oz$.
- b) $(\alpha): ax + by = 0 \rightarrow (\alpha) \supset Oz$.
- c) $(\alpha): ax + d = 0 \rightarrow (\alpha) \parallel (Oyz)$.
- d) $(\alpha): ax = 0 \rightarrow (\alpha) \equiv (Oyz)$.
- e) $(\alpha): ax + by + cz = 0 \rightarrow (\alpha)$ đi qua gốc tọa độ.

Các trường hợp còn lại tương tự.

V. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Cho hai mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\beta)$ và mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$. Khi đó, mặt phẳng (β) có phương trình tổng quát là

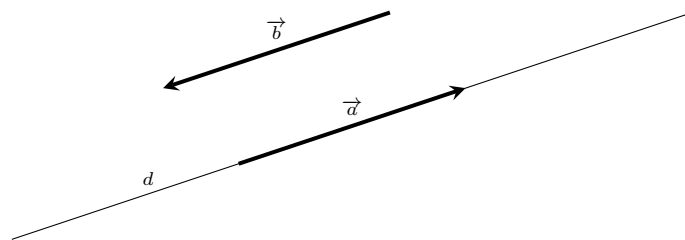
$$ax + by + cz + d' = 0$$

trong đó $d \neq d'$.

§3. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. VÉC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

- Véc-tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ được gọi là véc-tơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng d nếu giá của nó cùng phương (song song hoặc trùng) với d .



- Nếu hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ (khác $\vec{0}$, có giá vuông góc với d và **không cùng phương với nhau**) thì đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}]$.

II. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$, có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG ĐẶC BIỆT

- Đường thẳng $x'Ox$ có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$
- Đường thẳng $y'Oy$ có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0. \end{cases}$$
- Đường thẳng $z'Oz$ có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Nếu đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (a; b; c)$ ($abc \neq 0$) thì phương trình chính tắc của d là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

V. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Nếu $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ và $d \parallel d'$ thì d' có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'} = (a_1; a_2; a_3)$.

VI. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Nếu đường thẳng $d \perp (P)$ và $(P): ax + by + cz + d = 0$ thì $\vec{u}_d = (a; b; c)$ là véc-tơ chỉ phương của d .

§4. KHOẢNG CÁCH

I. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ được tính bằng công thức

$$d(M, (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

II. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$ được tính bằng công thức

$$d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MM_1}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

trong đó $M_1(x_1; y_1; z_1)$ là điểm tùy ý trên đường thẳng Δ , véc-tơ $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

III. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG VỚI NHAU

Hai mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$, $(Q): ax + by + cz + d' = 0$ song song với nhau. Khoảng cách giữa (P) và (Q) được tính bằng công thức

$$d((P), (Q)) = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

IV. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI NHAU

Cho hai đường thẳng

- Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP là $\vec{u} = (a; b; c)$.
- Δ' đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có VTCP là $\vec{u}' = (a'; b'; c')$.

song song nhau. Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' là khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến đường thẳng Δ' .

V. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Cho hai đường thẳng

- Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP là $\vec{u} = (a; b; c)$.
- Δ' đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có VTCP là $\vec{u}' = (a'; b'; c')$.

chéo nhau. Khi đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' được tính bằng công thức

$$d(\Delta, \Delta') = \frac{\left| [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} \right|}{\left| [\vec{u}, \vec{u}'] \right|}.$$

VI. KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng và mặt phẳng

- đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP là $\vec{u} = (a; b; c)$.
- mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$.

song song nhau. Khoảng cách giữa Δ và (P) là khoảng cách từ $M(x_0; y_0; z_0)$ đến (P) .

§5. TÌM HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM

I. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT MẶT PHẲNG

Phương pháp. Tìm hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ lên mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$, thực hiện theo các bước

- Gọi d là đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) , viết phương trình đường thẳng d .
- Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .
- Kết luận tọa độ hình chiếu.

II. ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT MẶT PHẲNG

Giả sử H là hình chiếu của điểm M lên mặt phẳng (α) và M' đối xứng với M qua (α) . Khi đó, H là trung điểm của đoạn MM' .

III. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp. Tìm hình chiếu của điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ lên đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$, thực hiện theo các bước

- Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với d , viết phương trình mặt phẳng (P) .
- Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .
- Kết luận tọa độ hình chiếu.

IV. ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Giả sử H là hình chiếu của điểm M lên đường thẳng Δ và M' đối xứng với M qua Δ . Khi đó, H là trung điểm của đoạn MM' .

V. ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT ĐIỂM

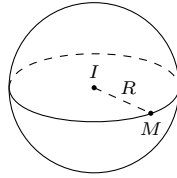
Giả sử M' đối xứng với M qua điểm I . Khi đó, I là trung điểm của đoạn MM' .

§6. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

I. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

- Mặt cầu (S) tâm là điểm $I(a; b; c)$, bán kính R có bán kính là

$$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



- Phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

là phương trình mặt cầu khi điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ được thỏa mãn. Khi điều kiện được thỏa mãn, phương trình trên là phương trình mặt cầu có tâm là điểm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

II. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU KHI BIẾT TÂM VÀ MẶT PHẪNG TIẾP XÚC

Giả sử mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): mx + ny + pz + r = 0$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

trong đó $R = d(I, (\alpha)) = \frac{|ma + nb + pc + r|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$.

III. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU KHI BIẾT TÂM VÀ ĐƯỜNG THẲNG TIẾP XÚC

Giả sử mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(a; b; c)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$. Khi đó, phương trình

mặt cầu (S) là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

trong đó $R = d(I, \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{IM}, \vec{u} \right] \right|}{|\vec{u}|}$, điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{u} = (m; n; p)$.

§7. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Cách 1.

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ và $(\alpha'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$ ($a'b'c'd' \neq 0$). Khi đó

- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ thì $(\alpha) \parallel (\alpha')$.
- Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$ thì $(\alpha) \equiv (\alpha')$.
- Các trường hợp còn lại thì (α) cắt (α') .

Cách 2.

Cho hai mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nhận $\vec{n} = (a; b; c)$ làm VTPT; (α') đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ nhận $\vec{n}' = (a'; b'; c')$ làm VTPT. Khi đó

- Nếu $[\vec{n}, \vec{n}'] \neq \vec{0}$ thì (α) cắt (α') .
- Nếu $[\vec{n}, \vec{n}'] = \vec{0}$ và $M \in (\alpha')$ thì $(\alpha) \equiv (\alpha')$.
- Nếu $[\vec{n}, \vec{n}'] = \vec{0}$ và $M \notin (\alpha')$ thì $(\alpha) \parallel (\alpha')$.

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng

- Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.
- Δ' đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}' = (a'; b'; c')$.

Khi đó,

- Nếu $[\vec{u}, \vec{u}'] \neq \vec{0}$ thì Δ và Δ' cắt hoặc chéo nhau.
 - Nếu $[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0$ thì Δ và Δ' chéo nhau.
 - Nếu $[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$ thì Δ và Δ' cắt nhau.
- Nếu $[\vec{u}, \vec{u}'] = \vec{0}$ thì Δ và Δ' song song hoặc trùng nhau.
 - Nếu $[\vec{u}, \overrightarrow{MM'}] \neq \vec{0}$ thì Δ và Δ' song song nhau.
 - Nếu $[\vec{u}, \overrightarrow{MM'}] = \vec{0}$ thì Δ và Δ' trùng nhau.

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R và mặt cầu (S') tâm I' bán kính R' . Khi đó,

- $R + R' = II'$ thì (S) và (S') tiếp xúc nhau (tiếp xúc ngoài).
- $|R - R'| = II'$ thì (S) và (S') tiếp xúc nhau (tiếp xúc trong).
- $R + R' < II'$ thì (S) và (S') không có điểm chung.
- $R + R' > II'$ thì (S) và (S') cắt nhau.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): mx + ny + pz + r = 0$. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ mx + ny + pz + r = 0 \end{cases}$.

Khi đó,

- Nếu hệ phương trình có một nghiệm $(x; y; z)$ thì Δ cắt (α) tại một điểm $M(x; y; z)$.
- Nếu hệ phương trình vô nghiệm thì $\Delta \parallel (\alpha)$.
- Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì $\Delta \subset (\alpha)$.

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VÀ MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R và mặt phẳng (α) . Khi đó,

- Nếu $d(I, (\alpha)) = R$ thì (α) tiếp xúc (S) .
- Nếu $d(I, (\alpha)) > R$ thì (α) và (S) không có điểm chung.
- Nếu $d(I, (\alpha)) < R$ thì (α) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' (I' là hình chiếu của I lên (α)) bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (\alpha))}$.

§8. GÓC

I. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Cho mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (α') có VTPT là $\vec{n}' = (a'; b'; c')$. Khi đó, góc ϕ giữa (α) và (α') được tính bằng công thức

$$\cos \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

II. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u} = (a; b; c)$ và đường thẳng Δ' có VTCP là $\vec{u}' = (a'; b'; c')$. Khi đó, góc ϕ giữa Δ và Δ' được tính bằng công thức

$$\cos \phi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

III. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = (a; b; c)$ và đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u} = (a'; b'; c')$. Khi đó, góc ϕ giữa (α) và Δ được tính bằng công thức

$$\sin \phi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$