

PHẦN 1

KIẾN THỨC CƠ BẢN VÀ BỔ XUNG. CÔNG THỨC TÍNH NHANH.

Trong phần này chúng ta nghiên cứu các bài toán điển hình trong hệ tọa độ Oxyz chỉ thiên về tính toán: Nghĩa là từ các số liệu và dữ kiện đã cho, chúng ta đi thiết lập các phương trình hay các hệ thức có liên quan và giải ra đáp số cần tìm.

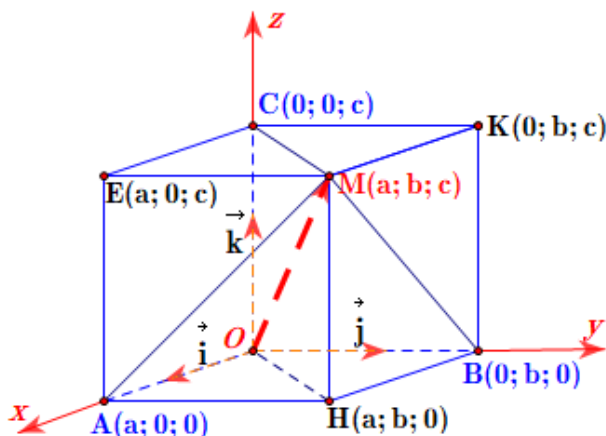
Phần này là các bài toán sưu tầm được chọn lọc và có tính tổng hợp, nghĩa là tổ hợp của nhiều bài toán nhỏ, bao gồm nhiều kiến thức có liên quan. Nói cách khác: Đây là các bài toán để ôn tập và luyện thi.

Chúng ta có thể phân dạng, loại toán theo nhiều cách hay theo các hình thức nào đó, một bài toán có thể được nằm trong nhiều dạng toán khác nhau, do đó không thể định dạng chung cho tất cả các bài toán. Trong phần này tôi cố gắng biên soạn các bài toán theo các chủ đề, hay theo phương pháp giải hoặc theo dạng toán đặc trưng của nó.

Để đáp ứng ôn tập và luyện thi, đặc biệt là thi trắc nghiệm, thì ngoài các kiến thức cơ bản và cách giải tự luận, yêu cầu các em cần bổ xung thêm các kiến thức, một số kết quả hay một số công thức tính nhanh, kết hợp với máy tính CASIO.

I. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ VEC TƠ VÀ TỌA ĐỘ.

1. Tóm tắt kiến thức cơ bản.



→ Trong hệ Oxyz, điểm $M(a; b; c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

- Hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox là $A(a; 0; 0), \dots$
- Hình chiếu vuông góc của M trên mp(Oxy) là $H(a; b; 0), \dots$

→ Cho $\vec{u} = (x; y; z)$ và $\vec{u}' = (x'; y'; z')$

- Tích vô hướng: $\vec{u} \cdot \vec{u}' = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}'| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{u}')$; $\vec{u} \cdot \vec{u}' = x.x' + y.y' + z.z'$; $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- Công thức tính độ dài $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Leftrightarrow \vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

→ Công thức tích có hướng

• **Định nghĩa:** Tích có hướng của $\vec{u} = (x; y; z)$ và $\vec{u}' = (x'; y'; z')$ là một véc tơ có tọa độ xác định bởi công thức:

$$\vec{u} \wedge \vec{u}' = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx') = \vec{w}.$$

• **Tính chất:** $|\vec{u} \wedge \vec{u}'| = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}'| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{u}')$; $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$; $\vec{w} \cdot \vec{u}' = 0$, ...

• **Chú ý.** Ta còn ký hiệu tích có hướng là $[\vec{u}, \vec{u}']$ hoặc $\vec{u} \times \vec{u}'$.

2. Một số ví dụ giải toán.

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-4; -1; 2)$, $B(3; 5; -10)$. Trung điểm cạnh AC thuộc trục tung, trung điểm cạnh BC thuộc mặt phẳng (Oxz) . Tọa độ đỉnh C là:

- A.** $C(4; -5; -2)$. **B.** $C(4; 5; 2)$. **C.** $C(4; -5; 2)$. **D.** $C(4; 5; -2)$.

✱ **Phân tích:**

+ Kiến thức: Trung điểm của đoạn thẳng

+ Vận dụng: Đối với AC và BC

+ Kỹ năng: $H(0; y; 0)$ là trung điểm $AC \Rightarrow x_C + x_A = 0; z_C + z_A = 0$ (Loại đáp án B và C)

$K(x; 0; z)$ là trung điểm $BC \Rightarrow y_C + y_B = 0$ (Loại đáp án D)

Đáp số: Chọn **A**.

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng:

- A.** 10. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** 2. **D.** 3.

✱ **Phân tích:**

+ Kiến thức: Khoảng cách từ điểm đến trục tọa độ

+ Vận dụng: đối với A

+ Kỹ năng: $H(0; 2; 0)$ là hình chiếu A trên $Oy \Rightarrow HA = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

Đáp số: Chọn **B**.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$ và $\vec{c} = (5; 1; 7)$. Giá trị của m để $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là:

- A.** -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

✱ **Phân tích:**

+ Kiến thức: Tích **CÓ HƯỚNG** của hai véc tơ

+ Vận dụng: Đối với $\vec{a}$ và $\vec{b}$

+ Kỹ năng: Tính chất của tích có hướng: $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 5 + 2 + 7m = 0 \Rightarrow m = -1$.

Đáp số: Chọn **A**.

Ví dụ 4: Trong không gian với $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

Độ dài của vectơ $[5\vec{a}, -2\vec{b}]$ bằng:

- A.** $3\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** $30\sqrt{3}$. **D.** 90.

✱ **Phân tích:**

+ Kiến thức: Tích **CÓ HƯỚNG** của hai véc tơ

+ Vận dụng: Đối với $5\vec{a}$ và $-2\vec{b}$

+ Kỹ năng: Tính chất tích có hướng $\left[5\vec{a}, -2\vec{b}\right] = 5.2.|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin 30^\circ = 10.2\sqrt{3}.3.\frac{1}{2} = 30\sqrt{3}$.

Đáp số: Chọn C.

Ví dụ 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;0;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(1;4;0)$. Diện tích tam giác ABC là:

A. $\frac{3\sqrt{13}}{2}$.

B. $\frac{2\sqrt{26}}{3}$.

C. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{3\sqrt{26}}{2}$.

✱ **Phân tích:**

+ Kiến thức: Tích **VÔ HƯỚNG** của hai véc tơ

+ Vận dụng: Đối với $\vec{BA}$ và $\vec{BC}$

+ Kỹ năng: Tính chất của tích vô hướng $S = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{BA}^2.\vec{BC}^2 - (\vec{BA}.\vec{BC})^2}$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{(3^2 + (-1)^2 + (-2)^2)(3^2 + 3^2 + (-3)^2) - (9 - 3 + 6)^2} = \frac{3\sqrt{26}}{2}.$$

Đáp số: Chọn D.

Lời bình.

Việc tính diện tích tam giác theo công thức Hê - Rông hay theo công thức

$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\vec{BA}, \vec{BC} \right]$ đều được, tuy nhiên ta có công thức bổ xung sau đây sẽ tính nhanh hơn:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{BA}^2.\vec{BC}^2 - (\vec{BA}.\vec{BC})^2}$$

Ghi vào máy (580):

$$\frac{1}{2}\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (Ax + By + Cz)^2} \text{ CALC nhập tọa độ } \vec{BA} \text{ và } \vec{BC}.$$

3. Bài tập kiểm tra.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; -3; -5)$ trên mặt phẳng (Oxy) là:

A. $(1; -3; 5)$.

B. $(1; -3; 0)$.

C. $(1; -3; 1)$.

D. $(1; -3; 2)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ M' đối xứng với điểm $M(-3; 2; -1)$ qua mp (Oxy) là:

A. $M'(-3; 2; 1)$.

B. $M'(3; 2; 1)$.

C. $M'(3; 2; -1)$.

D. $M'(3; -2; -1)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2021; 1; -2022)$. Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz có tọa độ:

A. $(0; 0; 0)$.

B. $(2021; 0; 0)$.

C. $(0; 1; 0)$.

D. $(0; 0; -2022)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 2; -1)$. Tọa độ A' đối xứng với A qua Oy là:

A. $A'(-3; 2; 1)$.

B. $A'(3; 2; -1)$.

C. $A'(3; 2; 1)$.

D. $A'(3; -2; -1)$.

- Câu 5.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4; -2; 3)$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng:
A. 3. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** 2. **D.** 5.
- Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón đỉnh $S(17/18; -11/9; 17/18)$ có đường tròn đáy đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 1)$. Độ dài đường sinh l của hình nón là:
A. $l = \frac{\sqrt{86}}{6}$. **B.** $l = \frac{\sqrt{194}}{6}$. **C.** $l = \frac{\sqrt{94}}{6}$. **D.** $l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.
- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; 0)$; $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. **B.** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. **C.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **D.** $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- Câu 8.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 2; 2)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-3; 4; 0)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là
A. $D(-4; 5; -1)$. **B.** $D(4; 5; -1)$. **C.** $D(-4; -5; -1)$. **D.** $D(4; -5; 1)$.
- Câu 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng:
A. -54. **B.** 54. **C.** 9. **D.** 6.
- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (2; -1; 2)$ và vectơ đơn vị $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$. Độ dài của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ bằng:
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 11.** Cho 3 điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$. Chọn mệnh đề đúng về tam giác ABC
A. Tam giác có ba góc nhọn. **B.** Tam giác cân đỉnh A .
C. Tam giác vuông đỉnh A . **D.** Tam giác đều.
- Câu 12.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0; 0; 1)$, $B(-1; -2; 0)$, $C(2; 1; -1)$. Khi đó tọa độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC là:
A. $H\left(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19}\right)$. **B.** $H\left(\frac{4}{9}; 1; 1\right)$. **C.** $H\left(1; 1; -\frac{8}{9}\right)$. **D.** $H\left(1; \frac{3}{2}; 1\right)$.
- Câu 13.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$ và $D(4; 5; -7)$. Trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ có tọa độ là:
A. $(-2; 1; 2)$. **B.** $(8; 2; -8)$. **C.** $(8; -1; 2)$. **D.** $(2; 1; -2)$.
- Câu 14.** **[ĐỀ THPTQG 2017]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1)$, $N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
A. $m = -6$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 2$.
- Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(1; 3; m)$. Giá trị của m sao cho diện tích tam giác ABC bằng $\frac{9}{2}$ là:
A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 4$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$, $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là:

- A. $2\sqrt{87}$. B. $\sqrt{349}$. C. $\sqrt{87}$. D. $\frac{\sqrt{349}}{2}$.

Câu 17. [BGD_2017_MH2] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5; 6; 2)$.

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{AM}{BM} = 2$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

.....

4. Hướng dẫn bài tập kiểm tra.

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oxy) là:

- A. $(1;-3;5)$. B. $(1;-3;0)$. C. $(1;-3;1)$. D. $(1;-3;2)$.

Hướng dẫn.

Để tiện ghi nhớ, ta nhìn vào mp(Oxy) thiếu thành phần z , nên trong M cho $z = 0$ ta được hình chiếu là $(1;-3;0)$. **Chọn B.**

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ M' đối xứng với điểm $M(-3;2;-1)$ qua mp(Oxy) là:

- A. $M'(-3;2;1)$. B. $M'(3;2;1)$. C. $M'(3;2-1)$. D. $M'(3;-2;-1)$.

Hướng dẫn.

M' đối xứng với M qua mp(Oxy) thì giữ nguyên hai thành phần x, y , thành phần z đối nhau nên tọa độ là $M'(-3;2;1)$. **Chọn A.**

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2021;1;-2022)$. Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz có tọa độ:

- A. $(0;0;0)$. B. $(2021;0;0)$. C. $(0;1;0)$. D. $(0;0;-2022)$.

Hướng dẫn.

Để tiện ghi nhớ, ta nhìn vào trục Oz thiếu thành phần x và y , nên trong M cho $x = y = 0$ ta được hình chiếu là $(0;0;-2022)$. **Chọn D.**

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;2;-1)$. Tọa độ A' đối xứng với A qua Oy là:

- A. $A'(-3;2;1)$. B. $A'(3;2-1)$. C. $A'(3;2;1)$. D. $A'(3;-2;-1)$.

Hướng dẫn.

A' đối xứng với A qua trục Oy thì giữ nguyên thành phần y , hai thành phần x, z tương ứng đều đối nhau nên tọa độ là $A'(3;2;1)$. **Chọn C.**

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;-2;3)$. Khoảng cách từ A đến trục Oy bằng:

- A. 3. B. $\sqrt{13}$. C. 2. D. 5.

Hướng dẫn.

Bỏ thành phần y , khoảng cách cần tìm là $d = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. **Chọn D.**

- Câu 6.** Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón đỉnh $S(17/18; -11/9; 17/18)$ có đường tròn đáy đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 1)$. Độ dài đường sinh l của hình nón là:
- A.** $l = \frac{\sqrt{86}}{6}$. **B.** $l = \frac{\sqrt{194}}{6}$. **C.** $l = \frac{\sqrt{94}}{6}$. **D.** $l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.

Hướng dẫn.

Độ dài đường sinh $l = SA = SB = SC$ nên ta chỉ cần tính một đoạn, chẳng hạn tính SA :

$$SA = \sqrt{\left(1 - \frac{17}{18}\right)^2 + \left(\frac{11}{9}\right)^2 + \left(\frac{17}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{86}}{6}. \text{ **Chọn A.**}$$

- Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; 0)$; $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
- A.** $\vec{b} \perp \vec{c}$. **B.** $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. **C.** $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. **D.** $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Hướng dẫn.

Rõ ràng ở đây ta cần giải theo phương pháp loại trừ, để nhanh chóng tìm được câu trả lời, ta kiểm tra đáp án ít véc tơ nhất. Các độ dài $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ và $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ đều đúng.

$\vec{b} \perp \vec{c}$ là sai, vì $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$. **Chọn A.**

- Câu 8.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1; 2; 2)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-3; 4; 0)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là
- A.** $D(-4; 5; -1)$. **B.** $D(4; 5; -1)$. **C.** $D(-4; -5; -1)$. **D.** $D(4; -5; 1)$.

Hướng dẫn.

Để nhanh chóng tìm được câu trả lời, ta sử dụng tính chất: tâm I của hình bình hành là trung điểm hai đường chéo.

Tổng thành phần x của A và C là -4 nên có hai đáp án **A, C** (Vì B có hoành độ bằng 0).

Tổng thành phần y của A và C là $6 = 1 + 5$, nên tọa độ $D(-4; 5; -1)$. **Chọn A.**

- Câu 9.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Độ dài của vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ bằng:
- A.** -54 . **B.** 54 . **C.** 9 . **D.** 6 .

Hướng dẫn.

Để nhanh chóng tìm được câu trả lời, ta sử dụng tính chất: Bình phương vô hướng.

$$\text{Ta có } |3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{(3\vec{a} - 2\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{144 - 108} = 6. \text{ **Chọn D.**}$$

- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (2; -1; 2)$ và vectơ đơn vị $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u} - \vec{v}| = 4$. Độ dài của vectơ $\vec{u} + \vec{v}$ bằng:
- A.** 4 . **B.** 3 . **C.** 2 . **D.** 1 .

Hướng dẫn.

Để nhanh chóng tìm được câu trả lời, ta sử dụng tính chất: Bình phương vô hướng.

$$16 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ và } m^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}. \text{ Cộng hai vế ta được:}$$

$$16 + m^2 = 2(\vec{u}^2 + \vec{v}^2) = 20 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = |\vec{u} + \vec{v}| = 2. \text{ Chọn C.}$$

Lời bình.

Cách giải trên chúng ta đã chứng minh lại định lý: *Trong một hình bình hành, tổng các bình phương độ dài hai đường chéo bằng tổng các bình phương độ dài các cạnh.*

Tương tự trong không gian: *Trong một hình hộp, tổng các bình phương độ dài bốn đường chéo bằng tổng các bình phương độ dài các cạnh.*

Câu 11. Cho 3 điểm $A(1;2;0), B(1;0;-1), C(0;-1;2)$. Chọn mệnh đề đúng về tam giác ABC

A. Tam giác có ba góc nhọn.

B. Tam giác cân đỉnh A .

C. Tam giác vuông đỉnh A .

D. Tam giác đều.

Hướng dẫn.

Để nhanh chóng tìm được câu trả lời, ta tính bình phương độ dài mỗi cạnh, suy ra mối quan hệ: $AB^2 = 5; AC^2 = 14; BC^2 = 11$. Các đáp án **B, C, D** đều sai. **Chọn A.**

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(0;0;1), B(-1;-2;0), C(2;1;-1)$. Khi đó tọa độ chân đường cao H hạ từ A xuống BC là:

A. $H\left(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19}\right)$. **B.** $H\left(\frac{4}{9}; 1; 1\right)$. **C.** $H\left(1; 1; -\frac{8}{9}\right)$. **D.** $H\left(1; \frac{3}{2}; 1\right)$.

Hướng dẫn.

Bước 1: Gọi tọa độ $H(x; y; z)$, tính $\overrightarrow{AH} = (x; y; z-1), \overrightarrow{BC} = (3; 3; -1)$.

Bước 2: Điểm H thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (1) và $H \in BC$ (2).

Cách giải 1. Trắc nghiệm.

Ghi vào máy tính $3x + 3y + 1 - z$ CALC nhập tọa độ H trong các đáp án, đáp án A thỏa mãn điều kiện (1). Các đáp án còn lại không thỏa mãn. **Chọn A.**

Lưu ý: Nếu có hai hay nhiều đáp án cùng thỏa mãn (1) thì kiểm tra $\overrightarrow{BH} = t \overrightarrow{BC}$.

Cách giải 2. Tự luận.

Từ (1) ta có $3x + 3y + 1 - z = 0$ và từ (2) ta có $\overrightarrow{BH} = t \overrightarrow{BC} = (3t; 3t; -t)$ do đó

$$x = 3t - 1, y = 3t - 2, z = -t \text{ thay vào trên ta được } 9t - 3 + 9t - 6 + 1 + t = 0 \Rightarrow t = \frac{8}{19}$$

$$\text{Suy ra tọa độ của } H\left(\frac{5}{19}; -\frac{14}{19}; -\frac{8}{19}\right). \text{ Chọn A.}$$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;-2), B(2;1;-1), C(1;-2;2)$ và $D(4;5;-7)$.

Trọng tâm G của tứ diện $ABCD$ có tọa độ là:

A. $(-2; 1; 2)$.

B. $(8; 2; -8)$.

C. $(8; -1; 2)$.

D. $(2; 1; -2)$.

Hướng dẫn.

Điểm G là trọng tâm của tứ diện $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$. Lấy tổng thành phần tương ứng các tọa độ chia 4 suy ra tọa độ G . Riêng thành phần x , ta **chọn đáp án D**.

Câu 14. [ĐỀ THPTQG 2017] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

- A. $m = -6$. B. $m = 0$. C. $m = -4$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn.

Bước 1: tính $\overrightarrow{NM} = (3;2;-2)$, $\overrightarrow{NP} = (2;m-2;1)$.

Bước 2: MNP vuông tại $N \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow 6 + 2m - 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn B**.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;1;3)$, $C(1;3;m)$. Giá trị của m sao cho diện tích tam giác ABC bằng $\frac{9}{2}$ là:

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Hướng dẫn.

Bước 1: Tính $\overrightarrow{BA} = (2;-1;-2)$, $\overrightarrow{BC} = (2;2;m-3)$.

Bước 2: $S = \frac{1}{2} \sqrt{BA^2 \cdot BC^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9(8 + (m-3)^2) - (8-2m)^2} = 9$. Bấm máy tính (CASIO) SHIFT SOLVE 10 = kết quả $m = 4$. **Chọn D**.

Lưu ý: Có thể giải tự luận bằng cách bình phương hai vế, giải PT bậc hai ẩn m .

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$, $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là:

- A. $2\sqrt{87}$. B. $\sqrt{349}$. C. $\sqrt{87}$. D. $\frac{\sqrt{349}}{2}$.

Hướng dẫn.

Bước 1: Tính $\overrightarrow{BA} = (2;3;-8)$, $\overrightarrow{BC} = (1;3;-2)$.

Bước 2: $S = \sqrt{BA^2 \cdot BC^2 - (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})^2} = \sqrt{77 \cdot 14 - (27)^2} = \sqrt{349}$. **Chọn B**.

Câu 17. [MH2_2017_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5; 6; 2)$.

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{AM}{BM} = 2$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

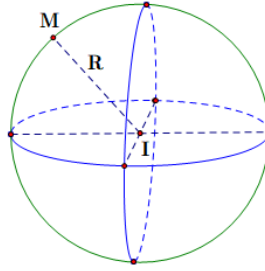
Hướng dẫn.

Ta có $\frac{AM}{BM} = \frac{d(A, (Oxz))}{d(B, (Oxz))} = \frac{|3|}{|6|} = \frac{1}{2}$. **Chọn A**.

.....

II. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ MẶT CẦU.

1. Tóm tắt kiến thức cơ bản.



→ **Định nghĩa:** Trong không gian, mặt cầu $S(I, R) = \{M \mid IM = R\}$.

→ Phương trình chính tắc: Mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

→ Phương trình tổng quát $(S): x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\text{Tọa độ tâm } I(a; b; c) \Leftrightarrow I\left(\frac{-A}{2}; \frac{-B}{2}; \frac{-C}{2}\right), \text{ bán kính } R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - D}.$$

2. Một số ví dụ giải toán.

Ví dụ 6: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(-2; 1; -1)$, tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) . Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

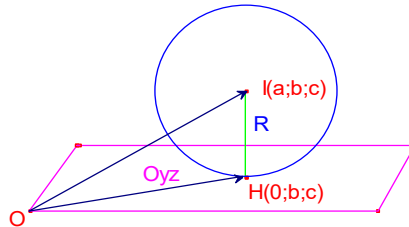
B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

D. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.

✱ **Phân tích:**

+ Kiến thức: PT chính tắc mặt cầu. Hình chiếu trên mp tọa độ



+ Vận dụng: Biết tâm I. Tìm R

+ Kỹ năng: Điểm tiếp xúc – khoảng cách: $R^2 = |a|^2 = OI^2 - OH^2 = a^2 = 4$.

Đáp số: Chọn C.

Ví dụ 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r bằng:

A. $r = \sqrt{5}$.

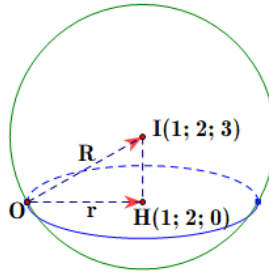
B. $r = 2$.

C. $r = \sqrt{6}$.

D. $r = 4$.

✱ **Phân tích:**

+ Kiến thức: PT tổng quát mặt cầu – Điểm thuộc mặt cầu. Hình chiếu trên mp tọa độ



+ Vận dụng: Biết pt (S), O thuộc (S). Tìm H

+ Kỹ năng: Giao tuyến – khoảng cách: $r = OH = \sqrt{5}$. **Đáp số: Chọn A.**

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - (2m-2)x + 3my + (6m-2)z - 7 = 0$. Gọi R là bán kính của (S), giá trị nhỏ nhất của R bằng:

- A. 7. B. $\frac{\sqrt{377}}{7}$. C. $\sqrt{377}$. D. $\frac{\sqrt{377}}{4}$.

✱ Phân tích:

+ Kiến thức: PT tổng quát mặt cầu chứa tham số – Bán kính mặt cầu

+ Vận dụng: Biết pt (S). Tìm GTNN của R

+ Kỹ năng: Đỉnh của Parabol. $R^2 = (m-1)^2 + \left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (3m-1)^2 + 7 = \frac{49}{4}m^2 - 8m + 9$

Suy ra $\min R^2 = \frac{377}{49}$ tại $m = \frac{16}{49}$ hay $\min R = \frac{\sqrt{377}}{7}$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(-1; 4; 2)$ và có thể tích $V = 972\pi$. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$. B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$. D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81$.

✱ Phân tích:

+ Kiến thức: PT chính tắc mặt cầu – Thể tích khối cầu

+ Vận dụng: Biết tâm. Tìm R

+ Kỹ năng: Nhận biết phương trình, suy ngược. Loại các đáp án C, D vì sai tâm I.

Nếu $R = 3$ thì $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$ nên loại đáp án B. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 2; 0), B(1; 2; 4)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đường kính AB.

- A. (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 8$. B. (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8$.
C. (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16$. D. (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 32$.

✱ Phân tích:

+ Kiến thức: PT chính tắc mặt cầu – Trung điểm đoạn thẳng, độ dài đoạn thẳng

+ Vận dụng: Biết đường kính. Tìm tâm và R

+ Kỹ năng: Nhận biết phương trình, suy ngược. $I(-1; 2; 2)$ nên loại các đáp án A và D.

Thử tọa độ điểm A vào đáp án B thỏa mãn. **Chọn B.**

Cách 2. Phương pháp quỹ tích.

Điểm $M(x; y; z) \in (S)$ đường kính AB khi và chỉ khi $\widehat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$, biến đổi ta có $(x+3)(x-1) + (y-2)^2 + z(z-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 + (y-2)^2 + z^2 - 4z = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 8$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$. Tập hợp các điểm $M(x, y, z)$ thỏa mãn: $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:

- A.** $R = 2$. **B.** $R = \sqrt{2}$. **C.** $R = 3$. **D.** $R = \sqrt{3}$.

♣ Phân tích:

+ Kiến thức: PT chính tắc mặt cầu – Tập hợp điểm

+ Vận dụng: Biết hệ thức. Tìm R

+ Kỹ năng: Hằng đẳng thức lớp 8. Gọi $M(x; y; z) \in (S)$, từ $MA^2 = MB^2 + MC^2$ ta có

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y-2)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z-3)^2$$
$$\Leftrightarrow 2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \text{ suy ra } R = \sqrt{2}. \text{ **Chọn B.**}$$

.....

3. Bài tập kiểm tra.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A.** (S) tiếp xúc với trục Ox **B.** (S) không cắt trục Oy
C. (S) tiếp xúc với trục Oy **D.** (S) tiếp xúc với trục Oz

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua $A(0, 2, 0)$, $B(2; 3; 1)$, $C(0, 3; 1)$ và có tâm thuộc mặt phẳng (Oxz) . Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A.** $x^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 9$ **B.** $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$
C. $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$ **D.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 4)$. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ) là:

- A.** $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$ **B.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$
C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 20$ **D.** $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 9$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên trục Oz ?

- A.** $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0$. **B.** $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 2 = 0$.
C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6z = 0$. **D.** $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) ?

- A.** $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0$. **B.** $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 2 = 0$.
C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 2 = 0$. **D.** $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$.

- Câu 23.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và có diện tích $S=36\pi$. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$ B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$
 C. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$
- Câu 24.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Số nào dưới đây là diện tích của mặt cầu (S) ?
- A. 12π . B. 9π . C. 36π . D. 36 .
- Câu 25.** [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$ có bán kính $R=5$. Tìm giá trị của m .
- A. $m=-16$. B. $m=16$. C. $m=4$. D. $m=-4$.
-

4. Hướng dẫn bài tập kiểm tra.

- Câu 18.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?
- A. (S) tiếp xúc với trục Ox B. (S) không cắt trục Oy
 C. (S) tiếp xúc với trục Oy D. (S) tiếp xúc với trục Oz

Hướng dẫn.

Trong các đáp án nói tới 3 sự tiếp xúc, nên ta kiểm tra tính tiếp xúc trước tiên. Gọi H là tiếp điểm, ta có: $OH^2 + R^2 = OI^2 \Leftrightarrow OH^2 + 9 = 10 \Leftrightarrow OH = 1 \Leftrightarrow H(-1;0;0)$. **Chọn A.**

- Câu 19.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua $A(0,2,0)$, $B(2;3;1)$, $C(0,3;1)$ và có tâm thuộc mặt phẳng (Oxz) . Phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $x^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 9$. B. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$.
 C. $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$. D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$.

Hướng dẫn.

Dạng tọa độ của điểm I trên mp(Oxz) là $I(a;0;c)$ do đó **Chọn D.**

- Câu 20.** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,4)$. Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ) là:
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$.
 C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 20$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 9$.

Hướng dẫn.

Thử tọa độ điểm $O(0;0;0)$ vào các đáp án, ta loại nhanh C và D.

Thử tọa độ $B(0;4;0)$ vào đáp án A, loại A. **Chọn B.**

Lời bình.

Nắm vững kiến thức, kết hợp năng lực “quan sát” và suy luận để giải nhanh!

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên trục Oz ?

A. $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0.$

B. $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 2 = 0.$

C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6z = 0.$

D. $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0.$

Hướng dẫn.

Tọa độ tâm $I(0;0;c)$, nghĩa là thành phần bậc nhất chứa x, y bằng 0, do đó **Chọn B.**

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây có tâm nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) ?

A. $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0.$

B. $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z - 2 = 0.$

C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 2 = 0.$

D. $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0.$

Hướng dẫn.

Tọa độ tâm $I(a;b;0)$, nghĩa là thành phần bậc nhất chứa z bằng 0, do đó **Chọn A.**

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và có diện tích $S = 36\pi$. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9.$

B. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9.$

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9.$

D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3.$

Hướng dẫn.

Loại các đáp án A và C, vì sai tâm I. Nếu $R = 3$ thì $S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Số nào dưới đây là diện tích của mặt cầu (S) ?

A. $12\pi.$

B. $9\pi.$

C. $36\pi.$

D. $36.$

Hướng dẫn.

Ta có tâm $I(\frac{-A}{2}; \frac{-B}{2}; \frac{-C}{2}) = I(1;2;3)$. Bán kính $R = \sqrt{14-5} = 3$; $S = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$. **Chọn C.**

Lời bình.

Bài toán khá đơn giản, tuy nhiên yêu cầu các em cần nắm được kiến thức:

- Từ phương trình tổng quát mặt cầu suy ra tọa độ tâm I, bán kính R.

- Công thức tính diện tích mặt cầu.

Hầu như các bài toán nâng cao đều là tổ hợp của các bài toán nhỏ, ta luyện tập cách tính nhẩm, kết hợp CASIO để tính nhanh, từ đó mới giải nhanh được các bài khó hơn.

Câu 25. [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$ có bán kính $R = 5$. Tìm giá trị của m .

A. $m = -16.$

B. $m = 16.$

C. $m = 4.$

D. $m = -4.$

Hướng dẫn.

Không cần để ý dấu của tâm I, ta có $R^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 - (-m) = 25 \Leftrightarrow m = 16$. **Chọn B.**

5. Bài tập nâng cao – Hệ trục tọa độ.

Câu 26. Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $M(1;1;3)$. Qua M kẻ tiếp tuyến MA với mặt cầu (S) (A là tiếp điểm). Độ dài MA bằng

- A. 4. B. 1. C. 5. D. $\sqrt{3}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là một mặt cầu. Tính bán kính r của mặt cầu đó.

- A. $r = 1$ B. $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$. D. $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2;2;2)$. Điểm B thay đổi trên mặt cầu. Diện tích của tam giác OAB có giá trị lớn nhất là

- A. 1 B. 2. C. $\sqrt{3}$. D. 3.

Câu 29. Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi I là tâm của mặt cầu và điểm B thuộc mặt cầu sao cho $IB + BA$ nhỏ nhất. Tọa độ của điểm B là

- A. $(1;2;-9)$. B. $(1;2;9)$. C. $(1;2;-1)$. D. $(1;6;-5)$.

Câu 30. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;1)$, $B(1;0;-3)$, $C(-1;-2;-3)$. Tìm điểm D trên mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$, sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

- A. $(1;0;1)$. B. $\left(\frac{7}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{-1}{3}\right)$. C. $\left(\frac{-1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{-5}{3}\right)$. D. $(1;-1;0)$.

Câu 31. [THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{ABC}$.

- A. $D(8;7;-1)$. B. $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$. D. $D(-12;-1;3)$.

Câu 32. [THPT Trần Quốc Tuấn] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$, hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

- A. $a+b+c = 6$. B. $a+b+c = 5$. C. $a+b+c = 8$. D. $a+b+c = 7$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng:

- A. $5\sqrt{10}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{6}$. D. $10\sqrt{5}$.

Câu 34. [SGD Vĩnh Phúc] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $D(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB , CD và có góc C bằng 45° .

- A. $C(5;9;5)$. B. $C(1;5;3)$. C. $C(-3;1;1)$. D. $C(3;7;4)$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABCD$, biết chiều cao hình chóp bằng 6 và $A(1;0;0), B(5;0;0), C(5;4;0)$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm cách đều 5 đỉnh của hình chóp (với $c > 0$). Tính giá trị của $T = a + 2b + 3c$.

- A.** $T = 41$. **B.** $T = 14$. **C.** $T = 23$. **D.** $T = 32$.

.....

6. Hướng dẫn bài tập nâng cao – Hệ trục tọa độ.

Câu 26. Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $M(1;1;3)$. Qua M kẻ tiếp tuyến MA với mặt cầu (S) (A là tiếp điểm). Độ dài MA bằng

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Theo tính chất tiếp tuyến thì $MA^2 = MI^2 - R^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow MA = 4$. **Chọn A.**

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là một mặt cầu. Tính bán kính r của mặt cầu đó.

- A.** $r = 1$ **B.** $r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC , khi đó giả thiết là:

$\overrightarrow{MA} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MG} = 0$. Vậy M thuộc mặt cầu đường kính GA , bán kính $r = \frac{1}{2}GA = \frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 28. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$ và điểm $A(2;2;2)$. Điểm B thay đổi trên mặt cầu. Diện tích của tam giác OAB có giá trị lớn nhất là

- A.** 1 **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Xét vị trí tương đối.

Nhận xét A thuộc mặt cầu và OA không đổi nên diện tích OAB lớn nhất khi đường cao kẻ từ B lớn nhất, khi đó đường cao đi qua tâm $I(1;1;1)$.

Mặt khác $I(1;1;1)$ là trung điểm OA , suy ra ABO là tam giác vuông cân tại B , $IB = R = \sqrt{3}$ và khi đó $S = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} / 2 = 3$. **Chọn D.**

Cách 2. Bất đẳng thức.

Nhận xét điểm B thuộc mặt cầu đường kính $OA = 2\sqrt{3}$ nên ABO vuông tại B và $S = \frac{1}{4} \cdot 2BO \cdot BA \leq \frac{1}{4}(BO^2 + BA^2)$ hay $S \leq \frac{1}{4}OA^2 = 3 \Rightarrow \max S = 3 \Leftrightarrow BO = BA$. **Chọn D.**

- Câu 29.** Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Gọi I là tâm của mặt cầu và điểm B thuộc mặt cầu sao cho $IB + BA$ nhỏ nhất. Tọa độ của điểm B là
- A.** $(1;2;-9)$. **B.** $(1;2;9)$. **C.** $(1;2;-1)$. **D.** $(1;6;-5)$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Phương pháp véc tơ.

Ta thấy điểm A ngoài (S) và do $IB = R = 4$ không đổi nên $4 + BA$ nhỏ nhất nếu B thuộc tia IA . Gọi $\overrightarrow{IB} = t\overrightarrow{IA} = t(0;0;8), t > 0$, do đó $t = \frac{R}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IB} = (0;0;4) \Rightarrow B(1;2;-1)$.

Cách 2. Trắc nghiệm loại trừ.

Thử trực tiếp các đáp án A, C, D để tính BA thì $B(1;2;-1)$ có $BA = 4$ nhỏ nhất.

Cách 3. Khảo sát - BĐT.

Từ phương trình (S) ta có $|z+5| \leq 4 \Leftrightarrow -9 \leq z \leq -1$ (Có thể loại đáp án B từ đây). Gọi $B(x;y;z)$ ta có $AB^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16 - (z+5)^2 + (z-3)^2 = -16z \geq 16$.
Suy ra $\min AB = 4 \Leftrightarrow z = -1 \Leftrightarrow x-1=0, y-2=0$. **Chọn C.**

- Câu 30.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$. Tìm điểm D trên mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$, sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

- A.** $(1;0;1)$. **B.** $\left(\frac{7}{3}; \frac{-4}{3}; \frac{-1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{-1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{-5}{3}\right)$. **D.** $(1;-1;0)$.

Hướng dẫn giải.

Do diện tích ABC không đổi nên V lớn nhất nếu D cách xa mp(ABC) nhất. Gọi $D(x;y;z)$ sao cho $ID \perp BA, ID \perp CB$. Ta có: $\overrightarrow{ID} = (x-1; y; z+1)$, $\overrightarrow{BA} = (-1;1;4)$, $\overrightarrow{CB} = (2;2;0)$ do đó:
 $1-x+y+4z+4=0$ và $2x-2+2y=0$ suy ra $x=3+2z, y=-2+2z$ thay vào mặt cầu ta được phương trình $(2+2z)^2 + (2+2z)^2 + (z+1)^2 = 4$, giải ra $z = -\frac{1}{3}, z = -\frac{5}{3}$.

Ứng với $z = -\frac{1}{3}$ thì tính được $y < 0$ nên loại C. **Chọn B.**

- Câu 31.** [THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2;3;1), B(2;1;0), C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{ABC}$.

- A.** $D(8;7;-1)$. **B.** $\begin{bmatrix} D(-8;-7;1) \\ D(12;1;-3) \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} D(8;7;-1) \\ D(-12;-1;3) \end{bmatrix}$. **D.** $D(-12;-1;3)$.

Hướng dẫn giải

Biến đổi $3S_{ABC} = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \Rightarrow S_{ACD} = 2S_{ACB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Suy ra $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ (Nhân 2 tọa độ C - 2 tọa độ B + tọa độ A) và **Chọn D.**

Câu 32. [THPT Trần Quốc Tuấn] Trong không $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$, hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

- A.** $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Hướng dẫn giải

Tính $\overrightarrow{AB}=(1;-2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(4;1;1)$. Đặt $\overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{BC}=t(4;1;1)$, $t>0 \Rightarrow AD=3t\sqrt{2}$.

Từ diện tích đã cho, ta có: $\frac{AB(BC+AD)}{2}=6\sqrt{2} \Leftrightarrow 9\sqrt{2}(t+1)=12\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(4;1;1)$, suy ra tọa độ $D\left(\frac{7}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right) \Rightarrow a+b+c=6$. **Chọn A.**

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|$ bằng:

- A.** $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Tính trực tiếp theo tích vô hướng.

Tính $AC=BD=\sqrt{8^2+4^2+8^2}=12 \Rightarrow BC=6\sqrt{2}$. Từ đó ta có:

$$T=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=\sqrt{(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2} \Rightarrow T=\sqrt{12^2+(6\sqrt{2})^2+2 \times 72\sqrt{2} \cos 45^\circ}=6\sqrt{10}. \text{ **Chọn B.**}$$

Cách 2. Lập phương trình và hệ thức.

(Khi đã học mặt phẳng) Gọi $A(x;y;0)$ là đỉnh hình vuông $ABCD$ (x, y là các số nguyên), khi đó ta có A thuộc mặt phẳng trung trực của DB có phương trình: $2x+y-4=0 \Leftrightarrow y=4-2x$.

Mặt khác $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DA}=0$ nên $(x-3)(x+5)+y(y+4)=0 \Rightarrow x^2+2x-15+(4-2x)(8-2x)=0$

$$\Rightarrow 5x^2-22x+17=0 \Rightarrow x=1 \in \mathbb{Z} \text{ do đó } A(1;2;0) \Rightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=(8;10;14) \Rightarrow |\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=6\sqrt{10}.$$

Cách 3. Phương pháp véc tơ - Sử dụng tính chất hình bình hành.

$$T^2=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|^2=AC^2+BC^2+2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \text{và} \quad BA^2=|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}|^2=AC^2+BC^2-2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

nên cộng hai vế ta được: $T^2=2AC^2+BC^2=2 \cdot 12^2+72=360 \Rightarrow T=6\sqrt{10}$.

Cách 4. Phương pháp véc tơ - Sử dụng tính chất đặc biệt của hình vuông.

Tính $BD=\sqrt{8^2+4^2+8^2}=12$. Gọi I là tâm hình vuông, ta có $T=|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=|3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}|$

$$T^2=10IB^2 \Rightarrow T=DB\sqrt{10}/2=6\sqrt{10}. \text{ **Chọn B.**}$$

Lời bình.

Khi chúng ta nắm vững kiến thức về véc tơ và tính chất của nó, cũng như tính chất đặc biệt của một số hình: vuông, chữ nhật, thoi, thì việc giải toán sẽ tối ưu (Như Cách 4 chẳng hạn). Ngoài ra trong Cách 1, Cách 3, Cách 4 ta không cần điều kiện tọa độ A là số nguyên và mặt phẳng Oxy . Tuy nhiên không thể bỏ đi vì đó là điều kiện để tồn tại hình vuông.

- Câu 34. [SGD Vĩnh Phúc]** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $D(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB , CD và có góc C bằng 45° .
- A.** $C(5;9;5)$. **B.** $C(1;5;3)$. **C.** $C(-3;1;1)$. **D.** $C(3;7;4)$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1. Tính góc giữa hai véc tơ.

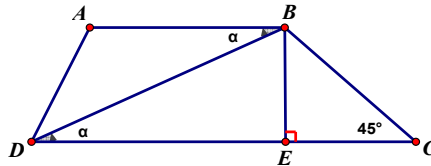
Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;2;1)$ nên $\overrightarrow{DC} = t(2;2;1)$, $t > 0 \Rightarrow C(2t-1;2t+3;t+2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2t-4;2t-1;t+1)$. Ngoài ra ta có $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}) = 45^\circ$

$$\text{nên } \frac{t(4t-8+4t-2+t+1)}{3t\sqrt{(2t-4)^2+(2t-1)^2+(t+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{3t-3}{\sqrt{(2t-4)^2+(2t-1)^2+(t+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow C(3;7;4)$. **Chọn D.**

Cách 2. Phân tích hình học – xét vị trí tương đối.



Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;2;1)$, $\overrightarrow{AD} = (-2;1;2)$, $\overrightarrow{BD} = (-4;1;1)$. Vẽ BE vuông góc với DC tại E , gọi

$$\widehat{ABD} = \alpha = \widehat{BDE}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{9+18-9}{2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Mà } \sin \alpha = \frac{BE}{BD} = \frac{BC/\sqrt{2}}{BD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = BD = 3\sqrt{2}. \Rightarrow C(3;7;4) \text{ thỏa mãn.}$$

Cách 3. Phân tích hình học – xét vị trí tương đối.

Ta chứng minh được tam giác DAB vuông cân tại A , vì $AB = AD = 3$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Do đó $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $\widehat{C} = 45^\circ$ suy ra $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow C(3;7;4)$.

Cách 4. Tính góc giữa hai véc tơ – Trắc nghiệm.

Vì $ABCD$ là hình thang và $\widehat{C} = 45^\circ$ nên góc $\widehat{B} = 135^\circ$. Gọi $C(x;y;z)$, tính được

$$\overrightarrow{BA} = (-2;-2;-1) \text{ và } \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{-2(x-3)-2(y-4)-1(z-1)}{3\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2}} \text{ nhập biểu thức,}$$

$$\text{CALC (thử A) } 5 = 9 = 5 = \text{KQ} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (loại), B, C đều loại. } \text{Đáp án D kết quả } -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Câu 35.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp đều $S.ABCD$, biết chiều cao hình chóp bằng 6 và $A(1;0;0)$, $B(5;0;0)$, $C(5;4;0)$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm cách đều 5 đỉnh của hình chóp (với $c > 0$). Tính giá trị của $T = a + 2b + 3c$.

- A.** $T = 41$. **B.** $T = 14$. **C.** $T = 23$. **D.** $T = 32$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Xét vị trí tương đối.

Nhận xét A, B, C đều thuộc $\text{mp}(Oxy)$ nên D thuộc $\text{mp}(Oxy)$.

Gọi $H(3; 2; 0)$ là trung điểm AC , vì $SH \perp (ABCD)$, $SH = 6$ nên $S(3; 2; 6)$ và $I(3; 2; c)$.

$$\text{Mà } SI^2 = IA^2 = IH^2 + HA^2 \Rightarrow (6 - c)^2 = c^2 + 8 \Rightarrow c = \frac{7}{3} \Rightarrow I\left(3; 2; \frac{7}{3}\right).$$

Vậy $T = a + 2b + 3c = 3 + 4 + 7 = 14$. **Chọn B.**

Lưu ý.

Ngoài cách tính trên, ta cũng có cách tính sau: Gọi K là trung điểm SA thì I thuộc mp trung trực của SA do đó $SI \cdot SH = SK \cdot SA = \frac{1}{2} SA^2 \Rightarrow SI = 6 - c = \frac{1}{12} \cdot (4 + 4 + 36) \Rightarrow c = \frac{7}{3}$.

Lời bình.

Điểm B trong giả thiết để đảm bảo $ABCD$ là hình vuông, ta không sử dụng trong tính toán. Trong nhiều trường hợp, bài toán không có hình minh họa thì các em hãy tự vẽ hình nhé. Sau khi vẽ hình đầy đủ, các em xóa đi và tự trình bày mà không có hình vẽ xem thế nào?. Đây là cách rèn luyện tư duy trừu tượng rất tốt.

.....

III. CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ MẶT PHẪNG.

1. Tóm tắt kiến thức cơ bản.

→ **Vecto pháp tuyến:** Nếu vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) thì $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến (VTPT) của (α) .

→ **Phương trình tổng quát:** Phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) .

→ **Khoảng cách:** Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ được tính theo công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

→ **Góc:** Công thức tính góc giữa (α) và (β) là $\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$

• Chú ý:

- ✓ Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- ✓ Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

• Thường gặp:

- ✓ Cho $\vec{n}$ nhưng trong đáp án chỉ xuất hiện $k \cdot \vec{n}$ (thường là $-\vec{n}; -2\vec{n}; \dots$).
- ✓ Cho (P) song song với (Q), cho (P) vuông góc với đoạn thẳng (đường thẳng).

• Kỹ năng giải toán:

Từ $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$.

Ghi máy Casio: $Ax + By + Cz$ bấm CALC nhập tọa độ M_0 kết quả bằng $-D$ là đủ.

2. Các ví dụ giải toán.

Ví dụ 12: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-7, 10, 1)$ và đi qua $M(10, 1, 9)$ là

A. (P): $7x - 10y - z - 51 = 0$

B. (P): $7x - 10y - z + 51 = 0$

C. (P): $7x - 10y - z + 89 = 0$

D. (P): $10x + y + 9z + 51 = 0$

Hướng dẫn giải

Nhận xét các đáp án đều đổi hướng VTPT đã cho, nên ghi $7x - 10y - z$ bấm CALC nhập $10 - 1 - 9 =$ kết quả 51. **Chọn A.**

Ví dụ 13: [MH 2017] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. (P): $x + y + 2z - 3 = 0$.

B. (P): $x + y + 2z - 6 = 0$.

C. (P): $x + 3y + 4z - 7 = 0$.

D. (P): $x + 3y + 4z - 26 = 0$.

Hướng dẫn giải

Nhận xét các đáp án hệ số của x đều dương, nên nhấm lấy B trừ A, ghi $x + y + 2z$ bấm CALC nhập $0 = 1 = 1 =$ kết quả 3. **Chọn A.**

Ví dụ 14: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 2)$, mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và song song (P) là:

A. $2x - y - z - 4 = 0$. B. $2x + y - z + 4 = 0$. C. $2x - y - z + 4 = 0$. D. 3 đáp án kia sai.

Hướng dẫn giải

Ghi $2x - y - z$ bấm CALC nhập $-1 = 0 = 2 =$ kết quả - 4. **Chọn C.**

Ví dụ 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) song song (P) và cách (P) một khoảng là 3 là

A. $(Q): x + 2y - 2z + 8 = 0$ B. $(Q): x + 2y - 2z + 2 = 0$
C. $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ D. $(Q): x + 2y - 2z + 5 = 0$

Hướng dẫn giải

Các đáp án đều có $\vec{n} = (1; 2; -2) \Rightarrow |\vec{n}| = 3$, nhấm lấy $D_P - D_Q = \pm 9$. Kết quả **Chọn A.**

Lời bình.

Lấy điểm $M(x; y; z)$ tùy ý thuộc mp(P): $Ax + By + Cz + D = 0$ nên $Ax + By + Cz = -D$, và tính khoảng cách đến mặt phẳng song song $(Q): Ax + By + Cz + D' = 0$ thì:

$$d((P), (Q)) = \frac{|D' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ví dụ 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) tâm $I(2; -3; 0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$. Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(S): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 4$. B. $(S): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 2$.
C. $(S): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 4$. D. $(S): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2$.

Hướng dẫn giải

Loại các đáp án C, D vì sai tâm I. Điều kiện tiếp xúc là: $d(I, (P)) = R$, do đó ghi vào máy

$\frac{|2x - y + 2z - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}}$ bấm CALC (nhập tọa độ I) $2 = -3 = 0 =$ kết quả $R = 2$. **Chọn A.**

Lưu ý.

Trên đây là máy 580, đối với máy 570, ... Các em thay phím **z** bằng phím **F** nhé!

Ví dụ 17: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; 0)$, $B(3; 5; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + z - 7 = 0$.

Phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (α) là

A. $x - z - 1 = 0$. B. $x - z + 1 = 0$. C. $x - y = 0$. D. $x + y = 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Trắc nghiệm loại trừ.

Kiểm tra tính vuông góc với (α) , ghi $x - 2y + z$ CALC nhập bộ $1 = 0 = -1 =$ thỏa mãn, CALC nhập $1 = -1 = 0 =$ (loại) và CALC nhập $1 = 1 = 0 =$ (loại). Như thế loại **C, D**.
Kiểm tra đi qua điểm : Thử tọa độ điểm A vào đáp án A, thỏa mãn. **Chọn A**.

Cách 2. Tự luận.

Tính $\overrightarrow{AB} = (2; 4; 2)$. Gọi $mp(\beta)$ cần tìm, do (β) qua A, B và vuông góc với (α) nên $\overrightarrow{n_\beta} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_\alpha}] \Rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = (1; 0; -1)$. Viết $mp(\beta)$ đi qua điểm A, là $x - z - 1 = 0$. **Chọn A**.

Lời bình.

Cách giải tự luận có ưu điểm là ôn tập được kiến thức, tuy nhiên thi trắc nghiệm thì không nên nhé! Theo cách 1 thì vẫn hơn.

• Chúng ta có thể tính $\overrightarrow{n_\beta} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_\alpha}]$ theo cách tự luận (theo định nghĩa) hoặc sử dụng Casio thường dùng. Sau đây ta sẽ trình bày cách tính khác. Gọi $\overrightarrow{n_\beta} = (a; b; c)$, vì $\overrightarrow{n_\beta} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \overrightarrow{n_\beta} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$, cho $c = 1$ ta được $\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a - 2b = -1 \end{cases}$, giải ra ta có kết quả $a = -1, b = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_\beta} = (-1; 0; 1)$ hay đổi dấu chọn $\overrightarrow{n_\beta} = (1; 0; -1)$ đều được.

• Thực hành thì khác: Tính hoặc nhẩm $\overrightarrow{AB} = (2; 4; 2)$ và nhìn vào $(\alpha): x - 2y + z - 7 = 0$, bấm MENU 9 1 2 (máy 580) $2 = 4 = -2 =$ và $1 = -2 = -1 =$ kết quả như trên. Như vậy ta chỉ cần lưu ý đổi dấu thành phần z là được, nhẩm và bấm máy tính cực nhanh (Hầu như không cần ghi).

Ví dụ 18: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;3), B(1;2;6), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Mặt phẳng (Q) chứa AB và song song với CD có một vectơ pháp tuyến là:

A. $\vec{n} = (2; 5; 1)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; 3)$. **C.** $\vec{n} = (2; -1; 1)$. **D.** $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Hướng dẫn giải

Nhẩm lấy A trừ B, lấy C trừ D và MENU 9 1 2 nhập $4 = -1 = 3 =$ và $1 = 0 = 2 =$
Kết quả $x = 2, y = 5$ như thế ta có $\vec{n} = (2; 5; 1)$. **Chọn A**.

Lưu ý.

Nếu giải ra được phân số thì quy đồng thành bộ số nguyên cho đẹp.

Ví dụ 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; 1), B(0; 2; 1), C(-1; 2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $4x - 3y + 4z + 2 = 0$. **B.** $4x + 3y + 4z + 10 = 0$.
C. $4x + 3y + 4z - 10 = 0$. **D.** $4x + 3y - 4z - 2 = 0$.

Hướng dẫn giải

Nhẩm lấy A trừ B, lấy A trừ C và MENU 9 1 2 nhập $3 = -4 = 0 =$ và $4 = -4 = -1 =$

Kết quả $x = -1, y = \frac{-3}{4}$ như thế ta có $\vec{n} = \left(-1; \frac{-3}{4}; 1\right)$ hay chọn $\vec{n} = (4; 3; -4)$. **Chọn D**.

Lời bình.

Nếu viết phương trình thì ghi $4x + 3y - 4z$ CALC nhập $0 = 2 = 1 =$ kết quả là 2. Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm, ta còn cách giải nhanh hơn, ở phần sau.

Ví dụ 20: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; -1; 6)$; $B(-3; -1; -4)$; $C(5; -1; 0)$; $D(1; 2; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua CD và chia tứ diện thành hai phần, biết phần chứa A có thể tích là 12. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

A. $3x + 5y - 3z - 10 = 0$.

B. $x + 4z - 5 = 0$.

C. $2x + y + 5z - 9 = 0$.

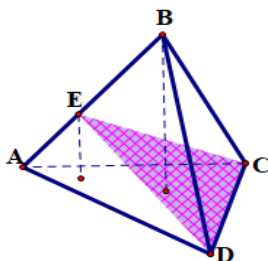
D. $3x + 4y - 11 = 0$

Hướng dẫn giải

Bước 1: Tính thể tích tứ diện. Dễ thấy phương trình mp(ABC) là $y + 1 = 0$, suy ra đường cao hạ từ đỉnh D là $h = 3$. Tính $\overrightarrow{BA} = (5; 0; 10)$, $\overrightarrow{BC} = (8; 0; 4)$.

Suy ra $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{125 \cdot 80 - (40 + 40)^2} = 30$. Vậy $V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 30 = 30$.

Bước 2: Xác định giao điểm E của (P) với AB. Gọi thể tích phần chứa đỉnh A là V_1 , khi đó tỉ số thể tích là



$$\frac{V_1}{V} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = \frac{EA}{BA} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \frac{3\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{5} \Rightarrow E(0; -1; 2).$$

Bước 3: Viết phương trình (P) đi qua ba điểm C, D, E.

Mặt phẳng là $(P): 2x + y + 5z - 9 = 0$. **Chọn C.**

Lời bình:

Bài toán không quá khó nhưng tính toán khá nhiều, HS ban cơ bản không được học về tỉ số thể tích của khối chóp. Tuy nhiên các em có thể hình dung như sau: Từ E và B hạ các đường cao xuống đáy ACD thì tỉ số thể tích bằng tỉ số các đường cao và bằng $EA : BA$.

3. Bài tập kiểm tra.

Câu 36: Viết phương trình mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1, -3, -7)$ và đi qua $M(3, 4, 5)$

A. $(P): x - 3y - 7z + 20 = 0$

B. $(P): x - 3y - 7z - 44 = 0$

C. $(P): 3x + 4y + 5z + 44 = 0$

D. $(P): x - 3y - 7z + 44 = 0$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 0)$, $B(0; -1; 3)$, $C(1; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm C và vuông góc với AB

A. $x + y - 3z + 1 = 0$.

B. $x + y - 3z - 1 = 0$.

C. $x + y + 3z - 5 = 0$.

D. $x - y + 3z - 1 = 0$.

- Câu 38:** [MH 2017] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .
- A. $(P): x + y + 2z - 3 = 0$. B. $(P): x + y + 2z - 6 = 0$.
C. $(P): x + 3y + 4z - 7 = 0$. D. $(P): x + 3y + 4z - 26 = 0$.
- Câu 39:** [ĐỀ 2017] Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?
- A. $3x - 2y + z + 12 = 0$ B. $3x + 2y + z - 8 = 0$
C. $3x - 2y + z - 12 = 0$ D. $x - 2y + 3z + 3 = 0$
- Câu 40:** [ĐỀ 2017] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α) là:
- A. $3x + y - 2z - 14 = 0$ B. $3x - y + 2z + 6 = 0$ C. $3x - y + 2z - 6 = 0$ D. $3x - y - 2z + 6 = 0$
- Câu 41:** [MH 2018] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .
- A. $3x - y - z - 6 = 0$. B. $3x - y - z + 6 = 0$. C. $x + 3y + z - 5 = 0$. D. $x + 3y + z - 6 = 0$.
- Câu 42:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ và điểm $A(-2;4;3)$. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) .
- A. $(Q): 2x - 3y + 6z + 5 = 0$ B. $(Q): 2x - 3y + 6z + 12 = 0$
C. $(Q): 2x - 3y + 6z - 2 = 0$ D. $(Q): 2x - 3y + 6z - 9 = 0$
- Câu 43:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-2;3;1)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 4x - 2y + 3z - 5 = 0$
- A. $4x - 2y - 3z - 11 = 0$ B. $4x - 2y + 3z + 11 = 0$
C. $4x + 2y + 3z + 11 = 0$ D. $-4x + 2y - 3z + 11 = 0$
- Câu 44:** Trong không gian $Oxyz$, tìm các mặt phẳng chứa những điểm cách đều hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 1 = 0; (Q): x + 2y + z + 5 = 0$?
- A. $x + 2y + z + 1 = 0$. B. $x + 2y + z + 2 = 0$. C. $x + 2y + z + 3 = 0$. D. $x + 2y + z = 0$.
- Câu 45:** Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q): 2x - 4y + 4z - 14 = 0$ và cách điểm $A(2;-3;4)$ một khoảng bằng 3. Viết phương trình của mặt phẳng (P) .
- A. $x - 2y + 2z - 25 = 0$. B. $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - 41 = 0 \\ 2x - 4y + 4z - 23 = 0 \end{cases}$.
C. $x - 2y + 2z - 7 = 0$. D. $\begin{cases} x - 2y + 2z - 25 = 0 \\ x - 2y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$.
- Câu 46:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 3 = 0$ là
- A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$. B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.
C. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$. D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 9$.

- Câu 47:** Trong không gian $Oxyz$, tất cả giá trị thực của tham số m để mặt phẳng $x + my + 2mz + 4 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ là
- A.** $m = 1 \vee m = 4$. **B.** $m = -\frac{3}{2} \vee m = 1$. **C.** $m = -\frac{3}{2} \vee m = 4$. **D.** $m = -\frac{1}{2} \vee m = 2$.

(Các câu từ 36 đến 47: Học sinh tự giải).

4. Bài tập nâng cao.

- Câu 48:** [Đề_2018_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là
- A.** $2x + 2y + 2z + 15 = 0$. **B.** $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.
C. $x + y + z + 7 = 0$. **D.** $x + y + z - 7 = 0$.
- Câu 49:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua $A(1;-1;3)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q): x - 2y + 2z + 1 = 0$ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- A.** $8x - y - 5z + 6 = 0$. **B.** $2x + z - 1 = 0$. **C.** $8x + y - 3z + 2 = 0$. **D.** $2x + y - 1 = 0$.
- Câu 50:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $M(5;3;1)$, $N(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y + z = 27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM , điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ điểm C là
- A.** $(-15;21;6)$. **B.** $(21;21;6)$. **C.** $(-15;7;20)$. **D.** $(21;19;8)$.
- Câu 51:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{1}$ là
- A.** $x + 2y - 5z + 12 = 0$. **B.** $7x + 2y - z + 3 = 0$.
C. $2x + y - 7z + 21 = 0$. **D.** $2x - y + 7z + 5 = 0$.
- Câu 52:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;2;0), B(0;0;-2), C(1;1;1), D(-1;1;0)$. Mặt phẳng (P) qua A và B thỏa mãn $d(C;(P)) = d(D;(P))$ có phương trình là
- A.** $x + 2y - 2z - 4 = 0$. **B.** $x - 2y + 2z + 4 = 0$. **C.** $x + 2y + 2z - 4 = 0$. **D.** $x - 2y - 2z - 4 = 0$.
- Câu 53:** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;0), B(-2;3;1), C(2;-1;1), D(0;-2;1)$. Gọi (α) là mặt phẳng song song và cách đều hai đường thẳng AB, CD . Phương trình mặt phẳng (α) là
- A.** $x + 2y + 5z + 7 = 0$. **B.** $x + 2y + 5z - 7 = 0$. **C.** $x - 2y + 5z - 3 = 0$. **D.** $x - 2y + 5z + 3 = 0$.
- Câu 54:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) cách đều 4 điểm $A(-1;2;0), B(0;1;1), C(-2;-1;-1)$ và $D(-3;-1;4)$, sao cho (α) song song với cả 2 đường thẳng AB và CD .
- A.** $(\alpha): 5x + 6y + z - 5 = 0$. **B.** $(\alpha): x - z + 4 = 0$.
C. $(\alpha): 5x + 6y + z + 5 = 0$. **D.** $(\alpha): -15x + 6y - 3z - 15 = 0$.

- Câu 55:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$ và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng
- A.** -42 . **B.** -32 . **C.** 11 . **D.** 20 .
- Câu 56:** **[HỘI 8 TRƯỜNG CHUYÊN]** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + ay + bz + c = 0$ ($c > 0$) song song với 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$. Khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng 2 lần khoảng cách từ d_2 đến (P) . Giá trị của $a + b + c$ bằng
- A.** 14 . **B.** 6 . **C.** -4 . **D.** -6 .
- Câu 57:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 2; 2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$. Tìm một vectơ pháp tuyến của (P) ?
- A.** $\vec{n} = (1; 2; 1)$. **B.** $\vec{n} = (-1; -2; 1)$. **C.** $\vec{n} = (1; 2; 0)$. **D.** $\vec{n} = (1; -2; 1)$.
- Câu 58:** **[THPT Chuyên Hạ Long]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, và $C(2; -1; 2)$. Biết mặt phẳng qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ có một vectơ pháp tuyến là $(10; a; b)$. Tổng $a + b$ là:
- A.** -2 . **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** -1 .
- Câu 59:** **[SGD Quảng Nam]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; -1; 2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là một vectơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.
- A.** $\vec{n} = (1; -1; -1)$. **B.** $\vec{n} = (1; -1; -3)$. **C.** $\vec{n} = (1; -1; 5)$. **D.** $\vec{n} = (1; -1; -5)$.
- Câu 60:** **[HỘI 8 TRƯỜNG CHUYÊN]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$, $(Q): 2y + z - 5 = 0$ và $(R): x - y + z - 2 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng qua giao tuyến của (P) và (Q) , đồng thời vuông góc với (R) . Phương trình của (α) là
- A.** $2x + 3y - 5z + 5 = 0$. **B.** $x + 3y + 2z - 6 = 0$. **C.** $x + 3y + 2z + 6 = 0$. **D.** $2x + 3y - 5z - 5 = 0$.
- Câu 61:** **[THPT Chuyên ĐH Vinh]** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x - z - 3 = 0$ và điểm $M(1; 1; 1)$. Gọi A là điểm thuộc tia Oz . Gọi B là hình chiếu của A lên (α) . Biết rằng tam giác MAB cân tại M . Diện tích của tam giác MAB bằng
- A.** $6\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{123}}{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.
-

5. Hướng dẫn bài tập nâng cao.

- Câu 48:** [Đề_2018_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là
- A. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$. B. $2x + 2y + 2z - 15 = 0$.
C. $x + y + z + 7 = 0$. D. $x + y + z - 7 = 0$.

Hướng dẫn giải

Từ tính chất tiếp tuyến ta có $AM^2 = AI^2 - R^2 = 3 - 2 = 1$, do đó M thuộc mặt cầu tâm A có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$.

M thuộc (S) viết dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 27 = 0$.

Trừ các vế và rút gọn ta được $x + y + z - 7 = 0$. **Chọn D.**

- Câu 49:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua $A(1;-1;3)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q): x - 2y + 2z + 1 = 0$ và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- A. $8x - y - 5z + 6 = 0$. B. $2x + z - 1 = 0$. C. $8x + y - 3z + 2 = 0$. D. $2x + y - 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Bước 1: Gọi VTPT của mặt phẳng là $\vec{n} = (a; b; c)$. Từ tính vuông góc ta có: $a - 2b + 2c = 0$
Suy ra $a = 2b - 2c$ và phương trình(P): $(2b - 2c)(x - 1) + b(y + 1) + c(z - 3) = 0$.

Bước 2: Từ khoảng cách ta có $\frac{|2c - 2b + b - 3c|}{\sqrt{(2b - 2c)^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}|b + c| = \sqrt{5b^2 + 5c^2 - 8bc}$

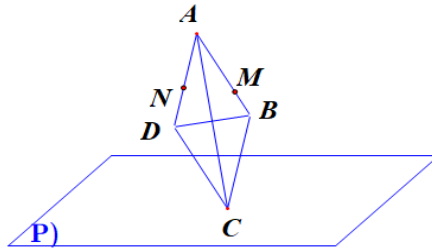
$\Rightarrow 18bc = 0 \Rightarrow b = 0 \cup c = 0$.

Bước 3: Nếu $b = 0$ thì chọn $c = -1$ ta có $a = 2$, phương trình mp(P): $2x - z + 1 = 0$.

Nếu $c = 0$ thì chọn $b = 1$ ta có $a = 2$, phương trình mp(P): $2x + y - 1 = 0$. **Chọn D.**

- Câu 50:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $M(5;3;1)$, $N(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y + z = 27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM , điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ điểm C là
- A. $(-15; 21; 6)$. B. $(21; 21; 6)$. C. $(-15; 7; 20)$. D. $(21; 19; 8)$.

Hướng dẫn giải.



Ta có $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{AM} = m(3; 4; 0)$; $\overrightarrow{AD} = n\overrightarrow{AN} = n(2; 2; 1)$. Mà $AB = AD$

suy ra $5m = 3n \Rightarrow m = \frac{3n}{5}$. Khi đó ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = n\left(\frac{9}{5}; \frac{12}{5}; 0\right) + n(2; 2; 1) = \left(\frac{19n}{5}; \frac{22n}{5}; \frac{5n}{5}\right)$

Suy ra $C\left(\frac{19n+10}{5}; \frac{22n-5}{5}; \frac{5n+5}{5}\right)$ thuộc (P) ta được $n = 5 \Rightarrow m = 3$ và $C(21; 21; 6)$.

Chọn B.

Cách 2. Trắc nghiệm.

Gọi $C(x; y; z)$. Từ AC là phân giác của góc BAD nên $\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = \cos(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC})$

Hay $\frac{3(x-2)+4(y+1)}{5} - \frac{2(x-2)+2(y+1)+1(z-1)}{3} = 0$. Nhập biểu thức vào máy Casio

CALC nhập các đáp án và chọn B (Vì các điểm trong đáp án đều thuộc (P)).

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng d_1 :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1} \text{ và } d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{1} \text{ là}$$

A. $x + 2y - 5z + 12 = 0$.

B. $7x + 2y - z + 3 = 0$.

C. $2x + y - 7z + 21 = 0$.

D. $2x - y + 7z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy hai đường thẳng có cùng vtcp $\vec{u} = (2; 3; 1)$ nên hai đường thẳng song song.

Véc tơ $\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; 6; 0)$ nên vào **MENU 9 1 2** nhập $2 = 3 = -1 =$ và $-3 = 6 = 0 =$ ta có

$x = \frac{-2}{7}, y = \frac{-1}{7} \Rightarrow \vec{n} = (2; 1; -7)$ và phương trình là: $2x + y - 7z = -21$. **Chọn C.**

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 2; 0), B(0; 0; -2), C(1; 1; 1), D(-1; 1; 0)$. Mặt phẳng (P)

qua A và B thỏa mãn $d(C; (P)) = d(D; (P))$ có phương trình là

A. $x + 2y - 2z - 4 = 0$.

B. $-x + 2y - 2z - 4 = 0$.

C. $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

D. $x - 2y - 2z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Tính $\overrightarrow{BA} = (0; 2; 2), \overrightarrow{DC} = (2; 0; 1)$ và $I\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của CD. Thử tọa độ I vào

các đáp án đều không thỏa mãn. Vậy không có trường hợp (P) đi qua I.

Trường hợp (P) chứa AB và song song CD, vào **MENU 9 1 2** nhập $0 = 2 = -2 =$ và

$2 = 0 = -1 =$ ta được $x = \frac{-1}{2}, y = -1 \Rightarrow \vec{n} = (1; 2; -2)$ và mp(P): $x + 2y - 2z - 4 = 0$. **Chọn A.**

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện ABCD có các đỉnh $A(1; 2; 0), B(-2; 3; 1), C(2; -1; 1),$

$D(0; -2; 1)$. Gọi (α) là mặt phẳng song song và cách đều hai đường thẳng AB, CD.

Phương trình mặt phẳng (α) là

A. $x + 2y + 5z + 7 = 0$.

B. $x + 2y + 5z - 7 = 0$.

C. $x - 2y + 5z - 3 = 0$.

D. $x - 2y + 5z + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Tính $\overrightarrow{BA} = (3; -1; -1), \overrightarrow{DC} = (2; 1; 0)$ và chúng khác phương, vào **MENU 9 1 2**

nhập $3 = -1 = 1 =$ và $2 = 1 = 0 =$ ta được $x = \frac{1}{5}, y = \frac{-2}{5} \Rightarrow \vec{n} = (1; -2; 5)$.

(α) qua trung điểm $I\left(-1; \frac{1}{2}; 1\right)$ của BD, phương trình là $x - 2y + 5z = 3$. **Chọn C.**

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 0), B(0; 1; 1), C(-2; -1; -1), D(-3; -1; 4)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) cách đều 4 điểm A, B, C, D sao cho (α) song song với cả 2 đường thẳng AB và CD.

A. (α): $5x + 6y + z - 5 = 0$.

B. (α): $x - z + 4 = 0$.

C. (α): $5x + 6y + z + 5 = 0$.

D. (α): $-15x + 6y - 3z - 15 = 0$.

Hướng dẫn giải

Tính $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1), \overrightarrow{DC} = (1; 0; -5)$ và chúng khác phương, vào **MENU 9 1 2** nhập $1 = -1 = -1 =$ và $1 = 0 = 5 =$ ta được $x = 5, y = 6 \Rightarrow \vec{n} = (5; 6; 1)$.

(α) qua trung điểm $I\left(\frac{-3}{2}; 0; \frac{5}{2}\right)$ của BD nên phương trình là $5x + 6y + z = -5$. **Chọn C.**

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$ và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng

A. -42 .

B. -32 .

C. 11 .

D. 20 .

Hướng dẫn giải.

Vào **MENU 9 1 2** nhập $1 = 0 = 2 =$ & $1 = -2 = -3 =$ ta có $\vec{n} = (4; 5; 2)$. Trở về **MENU 1**

Ghi $|4x + 5y + 2z + 11|$ CALC nhập tọa độ điểm M kết quả bằng 4.

CALC nhập tọa độ điểm $N(-3; 1; -4)$ thuộc đường thẳng d_2 , kết quả 4 thỏa mãn.

Vậy (P): $4x + 5y + 2z + 11 = 0$ nên $a + 2b + 3c = 20$. **Chọn D.**

Câu 56: [HỘI 8 TRƯỜNG CHUYÊN] Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$. Mặt phẳng (P): $x + ay + bz + c = 0 (c > 0)$ song song với d_1, d_2 và khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng 2 lần khoảng cách từ d_2 đến (P). Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 14 .

B. 6 .

C. -4 .

D. -6 .

Hướng dẫn.

(**MENU 9 1 2**) $\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; -3; 1)$ nên phương trình (P): $x - 3y + z + c = 0 (c > 0)$.

Thay tọa độ các điểm của đường thẳng vào (P) và giả thiết có $|8 + c| = 2|c - 4| \Rightarrow c = 16$.

Vậy $a + b + c = -3 + 1 + 16 = 14$. **Chọn A.**

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$. Tìm một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A.** $\vec{n} = (1;2;1)$. **B.** $\vec{n} = (-1;-2;1)$. **C.** $\vec{n} = (1;2;0)$. **D.** $\vec{n} = (1;-2;1)$.

Hướng dẫn.

Gọi $M(m;0;0), N(0;n;0)$, vì $OM = 2ON$ nên $m = 2n$, suy ra

$\overrightarrow{NM} = (2n; -n; 0) = n(2; -1; 0)$ và $\overrightarrow{BA} = (1; -1; -1)$. Vào **MENU 9 1 2** nhập $2 = -1 = 0 =$ và $1 = -1 = 1 =$ ta được $x = 1, y = 2$.

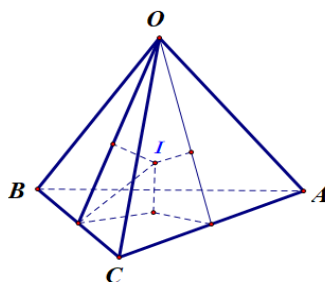
Vậy một VTPT của (P) là $\vec{n} = (1;2;1)$. **Chọn A.**

Câu 58: **[THPT Chuyên Hạ Long]** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0)$, $B(1;2;1)$, và $C(2;-1;2)$. Biết mặt phẳng qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ có một vectơ pháp tuyến là $(10;a;b)$. Tổng $a+b$ là:

- A.** -2 . **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** -1 .

Hướng dẫn giải

Gọi tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ là $I(x;y;z)$. Điểm I cách đều 4 mặt của $OABC$, ta không cần tìm tọa độ I , mà theo yêu cầu xét điểm I thuộc mặt phẳng chứa BC , do đó: Ta có phương trình (OBC) : $x - z = 0$. Mặt phẳng (BCA) : $5x + 3y + 4z - 15 = 0$.



Tâm I cách đều hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) suy ra:

$$\frac{|x-z|}{\sqrt{2}} = \frac{|5x+3y+4z-15|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3z-5=0 & (\alpha) \\ 10x+3y-z-15=0 & (\beta) \end{cases}$$

Theo đề bài thì ta chọn (β) . Vậy $a=3, b=-1$ nên $a+b=2$. **Chọn B.**

Câu 59: **[SGD Quảng Nam]** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$, $B(0;-1;2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng bằng $\sqrt{3}$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là một vectơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

- A.** $\vec{n} = (1;-1;-1)$. **B.** $\vec{n} = (1;-1;-3)$. **C.** $\vec{n} = (1;-1;5)$. **D.** $\vec{n} = (1;-1;-5)$.

Hướng dẫn giải

Điểm B cách đều hai mặt phẳng (P) và (P') nên mặt phẳng (OAB) là mặt phân giác của hai mặt (P) và (P') . Nói cách khác các mặt (P) và (P') cùng tiếp xúc với mặt

cầu tâm B, bán kính $R = \sqrt{3}$ (Tương tự câu 58). Sau đây là cách giải thường dùng:

Gọi $\vec{n}_p = (a; b; c) \perp \vec{OA} = (1; 1; 0)$ nên $\vec{n} = (a; -a; c)$ và phương trình (P): $ax - ay + cz = 0$.

$$d(B, (P)) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{|a+2c|}{\sqrt{a^2+a^2+c^2}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow c^2 + 4ac - 5a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ c = 5a \end{cases}.$$

Vậy có hai véc tơ $\vec{n} = (1; -1; 1)$ hoặc $\vec{n} = (1; -1; 5)$. **Chọn C.**

Câu 60: [HỘI 8 TRƯỜNG CHUYÊN] Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng (P): $x + y + z - 1 = 0$, (Q): $2y + z - 5 = 0$ và (R): $x - y + z - 2 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng qua giao tuyến của (P) và (Q), đồng thời vuông góc với (R). Phương trình (α) là

A. $2x + 3y - 5z + 5 = 0$. **B.** $x + 3y + 2z - 6 = 0$. **C.** $x + 3y + 2z + 6 = 0$. **D.** $2x + 3y - 5z - 5 = 0$.

Hướng dẫn.

Cách 1. Trắc nghiệm loại trừ.

Loại các đáp án A và D vì các mặt phẳng không vuông góc với (R).

Cộng các vế của (P) và (Q) thì ta có **đáp án B.**

Cách 2. Tự luận.

Gọi d là giao tuyến của (P) và (Q), d đi qua M(-4; 0; 5) và có $\vec{u}_d = [\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (1; 1; -2)$.

Mà (α) vuông góc với (R) nên $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_r] = (1; 3; 2)$ do đó phương trình là:

$x + 3y + 2z = 6$. **Chọn B.**

Câu 61: [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x - z - 3 = 0$ và điểm M(1; 1; 1). Gọi A là điểm thuộc tia Oz. Gọi B là hình chiếu của A lên (α) . Biết rằng tam giác MAB cân tại M. Diện tích của tam giác MAB bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{123}}{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Thiết lập phương trình.

Gọi (β) là mặt phẳng đối xứng với (α) qua điểm M, phương trình $(\beta): x - z + 3 = 0$.

Do MA = MB nên điểm A là giao của (β) và trục Oz, tọa độ A(0; 0; 3).

$$\text{Ta có } AB = d(A, (\alpha)) = 3\sqrt{2}. \text{ Diện tích } S = \frac{1}{2} AB \cdot \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6 - \frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Cách 2. Phương pháp véc tơ - Khử dần ẩn (dồn biến).

Gọi $B(x; y; x-3) \in (\alpha)$ (Gồm hai ẩn x, y) thì $\vec{BA} = t\vec{n}_\alpha = (t; 0; -t) \Leftrightarrow A(x+t; y; x-3-t)$.

(Đã thêm vào biến t) cho A thuộc Oz, ta có $t = -x, y = 0$ và được $A(0; 0; 2x-3)$.

$$\text{Gọi } I\left(\frac{x}{2}; 0; \frac{3x-6}{2}\right) \text{ là trung điểm AB, ta có } \vec{MI} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 1 - \left(\frac{3x-6}{2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Từ đó } \vec{BA} = 3(-1; 0; 1), \vec{MI} = \frac{1}{2}(1; -2; 1) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \text{ **Chọn B.**}$$

IV. MẶT PHẪNG THEO ĐOẠN CHẴN VÀ ỨNG DỤNG.

1. Tóm tắt kiến thức cơ bản.

→ Mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

($abc \neq 0$) có phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và được gọi là mặt phẳng theo đoạn chắn.

• Quy đồng mẫu thức ta được phương trình tổng quát: $bcx + cay + abz - abc = 0$.

✓ Nếu $G(x_0; y_0; z_0)$ là trọng tâm tam giác ABC theo đoạn chắn thì: $a = 3x_0, b = 3y_0, c = 3z_0$ và phương trình mặt phẳng là: $y_0 z_0 x + z_0 x_0 y + x_0 y_0 z - 3x_0 y_0 z_0 = 0$.

✓ Nếu $H(x_0; y_0; z_0)$ là trực tâm tam giác ABC theo đoạn chắn thì: phương trình mặt phẳng là $x_0 x + y_0 y + z_0 z - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0$.

→ Ứng dụng.

• Giả sử mặt phẳng (α) đi qua ba điểm M, N, P bất kỳ và có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ ($D \neq 0$), nghĩa là (α) không qua gốc O, khi đó chuyển về và chia cả hai vế cho $-D \neq 0$ ta được phương trình dạng: $mx + ny + pz = 1$ (2). Như thế ta thay tọa độ các điểm M, N, P vào (2) và giải hệ ba ẩn m, n, p (CASIO).

• Lưu ý.

Vế trái (2) là tọa độ các điểm cần nhập, vế phải của (2) bằng 1, khi giải ra phân số, BCNN của m, n, p chính là $-D$ (Hoặc quy đồng trực tiếp, xem VD 23, VD 24).

2. Các ví dụ giải toán.

Ví dụ 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Viết phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện OABC?

A. $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 0$. B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$. C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 0$.

Hướng dẫn giải

Vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, nên từ tọa độ $G(1;4;3)$ suy ra $a = 3, b = 12, c = 9$. **Chọn C.**

Ví dụ 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(-2;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC.

A. $x + y - 2z + 3 = 0$. B. $2x - y - z + 6 = 0$. C. $x - 2y - 2z + 6 = 0$. D. $x - 2y + z + 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình là $-2x + y + z - (2^2 + 1^2 + 1^2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z + 6 = 0$. **Chọn B.**

Ví dụ 23. Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD có A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(1; 3; 2) và D(-2; 3; -1). Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là

A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Hướng dẫn giải

Vào MENU 9 1 3 (Giải hệ ba ẩn) nhập dòng đầu $2 = 3 = 1 = 1$ = dòng hai $4 = 1 = -2 = 1 =$

và dòng ba $1 = 3 = 2 = \mathbf{1}$ = kết quả $m = \frac{2}{3}, n = \frac{-1}{3}, p = \frac{2}{3} \Rightarrow (ABC): \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z = 1$

hay viết thành $\Leftrightarrow 2x - y + 2z - 3 = 0$, do đó $d(D, (ABC)) = 4$. **Chọn A.**

Ví dụ 24. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3, -2, -2)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 1)$ và $D(-1, 1, 2)$. Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) có bán kính bằng:

- A. 9. B. 5. C. $\sqrt{14}$. D. $\sqrt{13}$.

Hướng dẫn giải

Vào **MENU 9 1 3** (Giải hệ ba ẩn) nhập dòng đầu $3 = 2 = 0 = \mathbf{1}$ = dòng hai $0 = 2 = 1 = \mathbf{1}$ = và dòng ba $-1 = 1 = 2 = \mathbf{1}$ = kết quả $x = \frac{1}{7}, y = \frac{2}{7}, z = \frac{3}{7} \Rightarrow (BCD): \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z = 1$ hay viết thành $\Leftrightarrow x + 2y + 3z - 7 = 0$, do đó $R = d(A, (BCD)) = \sqrt{14}$. **Chọn C.**

Ví dụ 25. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0;1;-1)$; $B(1;1;2)$; $C(1;-1;0)$; $D(0;0;1)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua A, B và chia tứ diện thành hai khối $ABCE$ và $ABDE$ có tỉ số thể tích bằng 3.

- A. $15x - 4y - 5z - 1 = 0$. B. $15x + 4y - 5z - 1 = 0$.
C. $15x + 4y - 5z + 1 = 0$. D. $15x - 4y + 5z + 1 = 0$.

Hướng dẫn giải

Tỉ số thể tích bằng $CE:DE = 3$ nên $\frac{CE}{CD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}(-1;1;1) \Rightarrow E\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

Viết phương trình (ABE) , vào **MENU 9 1 3** nhập dòng đầu $0 = 1 = -1 = \mathbf{1}$ = dòng hai

$1 = 1 = 2 = \mathbf{1}$ = và dòng ba $\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{1}$ = ta được $x = 15, y = -4, z = -5$. **Chọn A.**

3. Bài tập kiểm tra.

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A(5;4;3)$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

- A. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 0$. B. $12x + 15y + 20z + 60 = 0$.
C. $12x + 15y + 20z - 60 = 0$. D. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} - 60 = 0$.

Câu 63: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) qua $M(1;2;3)$ và cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC

- A. $x + 2y + 3z + 14 = 0$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.
C. $3x + 2y + z - 10 = 0$. D. $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 64: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là:

- A. $m = \pm \frac{12}{5}$ B. $m = \pm \frac{2}{5}$ C. $m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}$ D. $m = \pm \frac{5}{2}$.

- Câu 65:** Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (BCD)
- A.** $6x - 3y - 2z - 12 = 0$. **B.** $6x - 3y - 2z + 12 = 0$.
C. $3x + 2y - 6z - 6 = 0$. **D.** $3x - 2y + 6z - 6 = 0$.
- Câu 66:** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; 3; -4)$, $B(1; 2; 3)$, $C(-2; 1; 2)$, $D(-1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD)
- A.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 16$. **B.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 32$.
C. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 4)^2 = 16$. **D.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 32$.
- Câu 67:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x + 2y - z - 4 = 0$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (Q) với ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Đường cao MH của tam giác MNP có một vectơ chỉ phương là
- A.** $\vec{u} = (-3; 4; -2)$. **B.** $\vec{u} = (2; -4; 2)$. **C.** $\vec{u} = (5; -4; 2)$. **D.** $\vec{u} = (-5; -4; 2)$.
- Câu 68:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; -1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng:
- A.** 4. **B.** 5. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{4}{6}$.
- Câu 69:** Trong không gian $\mathbb{R}\{|\}$, cho hai điểm $P(5; 3; 3)$, $Q(4; 4; 4)$. Mặt phẳng (S) thay đổi qua P cắt các trục $\mathbb{R}\{|\}$ lần lượt tại $E(3; e; 3)$, $F(3; 3; f)$ ($e \neq 3, f \neq 3$). Tìm mệnh đề đúng
- A.** $ef = 5(e + f)$. **B.** $ef = \frac{4}{e} + \frac{4}{f}$. **C.** $ef = e + f$. **D.** $ef = e - f$.
- Câu 70:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với (P) và $d(O; (ABC)) = \frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.** $3b + c = 3$. **B.** $2b + c = 1$. **C.** $b - 3c = 1$. **D.** $b + c = 1$.
- Câu 71:** [THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng] Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1; 3; -2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.
- A.** $2x - y - z - 1 = 0$. **B.** $x + 2y + 4z + 1 = 0$. **C.** $4x + 2y + z + 1 = 0$. **D.** $4x + 2y + z - 8 = 0$.
- Câu 72:** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 1; -1)$; $B(1; 1; 2)$; $C(1; -1; 0)$; $D(0; 0; 1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và chia tứ diện thành hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$ có tỉ số thể tích bằng $\frac{1}{26}$.
- A.** $3x - 3z - 4 = 0$. **B.** $y - z - 1 = 0$. **C.** $y + z - 4 = 0$. **D.** $4x + 3z + 4 = 0$.
- Câu 73:** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0$, $(Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.
- A.** $x + y + z + 6 = 0$. **B.** $x + y + z - 6 = 0$. **C.** $x + y - z - 6 = 0$. **D.** $x + y + z - 3 = 0$.

4. Hướng dẫn bài tập kiểm tra.

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A(5;4;3)$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 0$.

B. $12x + 15y + 20z + 60 = 0$.

C. $12x + 15y + 20z - 60 = 0$.

D. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} - 60 = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình dạng: $bcx + cay + abz - abc = 0$, áp dụng: $12x + 15y + 20z - 60 = 0$.

Chọn C.

Câu 63: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trọng tâm tam giác ABC là

A. $x + 2y + 3z + 14 = 0$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

C. $3x + 2y + z - 10 = 0$.

D. $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình là $x + 2y + 3z - (1^2 + 2^2 + 3^2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$. **Chọn D.**

Câu 64: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là:

A. $m = \pm \frac{12}{5}$.

B. $m = \pm \frac{2}{5}$.

C. $m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}$.

D. $m = \pm \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

VTPT của mp(ABC) đoạn chắn là $\vec{n} = (2m; m; 2)$. Mặt phẳng (Oxy) có VTPT $\vec{k} = (0;0;1)$

. Suy ra: $\left| \cos(\vec{n}, \vec{k}) \right| = \frac{2}{\sqrt{5m^2 + 4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}$. **Chọn C.**

Câu 65: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $C(0;0;6)$, $D(2;4;6)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với mặt phẳng (BCD)

A. $6x - 3y - 2z - 12 = 0$.

B. $6x - 3y - 2z + 12 = 0$.

C. $3x + 2y - 6z - 6 = 0$.

D. $3x - 2y + 6z - 6 = 0$.

Hướng dẫn giải

Vào **MENU 9 1 3** để viết phương trình của mp(BCD), dòng đầu $0 = 4 = 0 = 1 =$ dòng hai

là $0 = 0 = 6 = 1 =$ dòng ba $2 = 4 = 6 = 1 =$ ta được $x = \frac{-1}{2}, y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{6}$ nghĩa là ta có

$(BCD): 6x - 3y - 2z + 12 = 0$. **Chọn A.** (Xem lại các VD 23, VD 24).

Câu 66: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;3;-4)$, $B(1;2;3)$, $C(-2;1;2)$, $D(-1;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD)

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 16$.

B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 32$.

C. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2 = 16$.

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 32$.

Hướng dẫn giải

Vào MENU 9 1 3 nhập dòng đầu $1 = 2 = 3 = 1 =$ dòng hai là $-2 = 1 = 2 = 1 =$ và dòng ba $-1 = 2 = 3 = 1 =$ kết quả $x = 0, y = -1, z = 1 \Rightarrow (BCD): 0x - y + z = 1$ hay viết thành $\Leftrightarrow y - z + 1 = 0$, do đó $d(A, (BCD)) = 4\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 67: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): 2x + 2y - z - 4 = 0$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (Q) với ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Đường cao MH của tam giác MNP có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (-3; 4; -2)$. B. $\vec{u} = (2; -4; 2)$. C. $\vec{u} = (5; -4; 2)$. D. $\vec{u} = (-5; -4; 2)$.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng tìm được các giao điểm $N(0; 2; 0)$ và $P(0; 0; -4)$, suy ra $\overrightarrow{PN} = (0; 2; 4)$, sau đó vào MENU 9 1 2 (Giải hệ hai ẩn) nhập dòng đầu $2 = 2 = 1 =$ dòng hai $0 = 2 = -4 =$ kết quả $x = \frac{5}{2}, y = -2 \Rightarrow \vec{u} = \left(\frac{5}{2}; -2; 1\right)$ hay chọn $\vec{u} = (5; -4; 2)$. **Chọn C.**

Câu 68: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(-2; 1; -1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng:

A. 4. B. 5. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{4}{6}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mp(ABC) là $x + y + z - 1 = 0$, nên $d(D, (ABC)) = \sqrt{3}$.

Tam giác ABC đều cạnh bằng $a = \sqrt{2} \Rightarrow S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và suy ra $V = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 69: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 0; 0), N(1; 1; 1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua M, N cắt Oy, Oz tại $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ ($b > 0, c > 0$). Hệ thức nào dưới đây là đúng?

A. $bc = 2(b+c)$. B. $bc = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. C. $b+c = bc$. D. $bc = b-c$.

Hướng dẫn giải

Phương trình (MBC) là: $bxc + 2cy + 2bz - 2bc = 0$, thay tọa độ N vào. **Chọn A.**

Câu 70: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) vuông góc với (P) và $d(O, (ABC)) = \frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3b + c = 3$. B. $2b + c = 1$. C. $b - 3c = 1$. D. $b + c = 1$.

Hướng dẫn giải

Một VTPT của mp(ABC) đoạn chắn là $\vec{n} = (bc; c; b)$, vuông góc với $\vec{n}_p = (0; 1; -1)$, suy ra $c - b = 0 \Rightarrow c = b$ do đó $\vec{n} = (b; 1; 1)$ và phương trình (ABC): $b(x-1) + y + z = 0$.

Khoảng cách $d(O, (ABC)) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Vậy $b + c = 1$. **Chọn D.**

Câu 71: [THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng] Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1; 3; -2)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

A. $2x - y - z - 1 = 0$. **B.** $x + 2y + 4z + 1 = 0$. **C.** $4x + 2y + z + 1 = 0$. **D.** $4x + 2y + z - 8 = 0$.

Hướng dẫn giải

Phương trình (ABC) là: $bcx + cay + abz - abc = 0$, với $b = 2a$, $c = 4a$ đều dương.

Khi đó viết lại: $8x + 4y + 2z - 8a = 0$, thay tọa độ M vào, suy ra $a = 2$. **Chọn D.**

Câu 72: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 1; -1)$; $B(1; 1; 2)$; $C(1; -1; 0)$; $D(0; 0; 1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và chia tứ diện thành hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$ có tỉ số thể tích bằng $\frac{1}{26}$.

A. $3x - 3z - 4 = 0$. **B.** $y - z - 1 = 0$. **C.** $y + z - 4 = 0$. **D.** $4x + 3z + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi thể tích khối $AMNF$ là V_1 và khối $ABCD$ là V , từ giả thiết ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{27} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^3$.

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(1; 0; 3) \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; 1; 0\right)$.

Vào **MENU 9 1 3** để viết phương trình của mp $(BCD): y - z + 1 = 0$.

Vậy phương trình (Q) qua M là $y - z - 1 = 0$. **Chọn B.**

Câu 73: Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0$, $(Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x + y + z + 6 = 0$. **B.** $x + y + z - 6 = 0$. **C.** $x + y - z - 6 = 0$. **D.** $x + y + z - 3 = 0$.

Hướng dẫn giải

Do tính đối xứng của hình chóp đều $O.ABC$ nên $G(m; m; m)$ là trọng tâm tam giác ABC , phương trình mp (ABC) theo đoạn chắn là $(\alpha): x + y + z - 3m = 0$.

Vì (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ nên đi qua điểm $(6; 0; 0)$, suy ra $m = 2$. **Chọn B.**

Lời bình.

Dưới dạng chùm mặt phẳng, cộng (P) và (Q) ta có $2x + 2y + 2z - 12 = 0$. Tức là rút gọn thành đáp án B, kiểm tra dễ dàng giao điểm với các trục thỏa mãn bài toán.

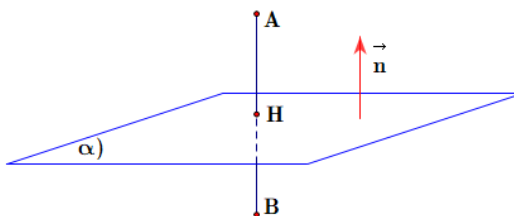
V. MẶT PHẪNG TRUNG TRỰC – PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ỨNG DỤNG.

1. Kiến thức cơ bản.

• Mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của nó được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng đó.

• **Tính chất:** Điểm M thuộc $mp(\alpha)$ là trung trực của đoạn AB khi và chỉ khi $MA = MB$.

• Hai điểm A và B gọi là đối xứng nhau qua mặt phẳng (α) khi và chỉ khi (α) là trung trực của AB . Khi đó, nếu H là trung điểm của AB thì H gọi là điểm chiếu vuông góc của A trên (α) .



2. Kiến thức bổ xung – Hình chiếu vuông góc và ứng dụng.

• Cho điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$.

✓ Để tìm hình chiếu H của A trên (α) ta tính giá trị $t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$,

khi đó tọa độ H là: $x_H = at + x_0; y_H = bt + y_0; z_H = ct + z_0$.

✓ Khoảng cách từ A đến (α) là: $d = AH = |t| \cdot |\vec{n}| = |t| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

✓ Điểm B đối xứng với A qua (α) là: $x_B = 2at + x_0; y_B = 2bt + y_0; z_B = 2ct + z_0$.

• **Thực hành CASIO:**

Ghi $-\frac{ax + by + cz + d}{a^2 + b^2 + c^2}$ CALC (nhập tọa độ A) STO M

Bấm AC ghi $aM + x : bM + y : cM + z$ bấm $= = =$

(Bấm Alpha để nhập dấu : màu đỏ; các số $x_0; y_0; z_0$ có thể ghi trực tiếp).

3. Các ví dụ giải toán.

Ví dụ 26.[Đề_2017_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại H . Tìm tọa độ điểm H .

A. $H(-3;0;-2)$. **B.** $H(-1;4;4)$. **C.** $H(3;0;2)$. **D.** $H(1;-1;0)$.

Hướng dẫn.

Ta có H là hình chiếu của I trên (P) , ghi $-\frac{2x - 2y - z - 4}{2^2 + 2^2 + 1^2}$ CALC (nhập tọa độ I)

$1 = 2 = 3 =$ STO **M** bấm AC ghi $2M + 1 : - 2M + 2 : - M + 3$ bấm $= = =$ ta có $H(3;0;2)$



Lưu ý.

Để dễ ghi nhớ, ta thế **M** vào vị trí tương ứng của x, y, z trong $mp(P)$.

Có thể ghi $2M + x : - 2M + y : - M + z$ (Vì $x = 1 ; y = 2 ; z = 3$ đã nhập ở phần trước), cách ghi này tuy rằng thêm chút thao tác bấm máy, nhưng tránh được sai sót về dấu, cũng như trường hợp có phân số.

Ví dụ 27. [BGD_2017_MH3] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , tính OA' .

- A. $OA' = 3\sqrt{26}$. B. $OA' = 5\sqrt{3}$. C. $OA' = \sqrt{46}$. D. $OA' = \sqrt{186}$.

Hướng dẫn.

Ta tính tham số t , gán vào **M** và ghi công thức tính OA' . Ghi $-\frac{6x-2y+z-35}{6^2+2^2+1^2}$ CALC

(nhập tọa độ A) $-1 = 3 = 6 =$ STO **M** ghi $\sqrt{(12M+x)^2 + (-4M+y)^2 + (2M+z)^2}$ bấm $=$ ta có $\sqrt{186}$.



Chú ý.

Để tìm điểm đối xứng thì so với hình chiếu, ta nhân đôi véc tơ pháp tuyến. Cụ thể hoành độ hình chiếu, từ $6x$ chuyển thành $6M + x$; đối xứng chuyển thành $12M + x$.

Từ đây về sau ta không chụp màn hình máy tính. Ngoài ra, tổng các bình phương của tọa độ véc tơ pháp tuyến $6^2 + 2^2 + 1^2$ ghi luôn là 41 cho bớt công kênh!

Ví dụ 28. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-2;3;1)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + z - 2 = 0$. Tìm điểm đối xứng M' của M qua (P) .

- A. $M' \left(\frac{2}{11}; -\frac{39}{11}; \frac{35}{11} \right)$. B. $M' \left(-\frac{42}{11}; \frac{27}{11}; \frac{81}{11} \right)$.
C. $M' \left(\frac{-46}{11}; \frac{105}{11}; -\frac{13}{11} \right)$. D. $M' \left(-\frac{96}{11}; \frac{171}{11}; \frac{9}{11} \right)$.

Hướng dẫn.

Ghi $-\frac{x-3y+z-2}{11}$ CALC (nhập tọa độ M) $-2 = 3 = 1 =$ STO **M** bấm AC ghi

$2M + x$ bấm $=$ ta có $2/11$. **Chọn A.** (Chỉ cần hoành độ, nếu thêm thì $-6M + y : 2M + z$).

Ví dụ 29. [Đề 2017 BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-2;0;0)$, $B(0;-2;0)$ và $C(0;0;-2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau và $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = -4$. B. $S = -1$. C. $S = -2$. D. $S = -3$.

Hướng dẫn.

Nhận xét: $OA = OB = OC$ và đôi một vuông góc, phương trình (ABC): $x + y + z + 2 = 0$. Điểm D thỏa mãn DA, DB, DC đôi một vuông góc nên đối xứng với O qua mp(ABC).

Tính nhẩm tham số $t = -\frac{2}{3}$ (Thay tọa độ $O(0;0;0)$ vào công thức như VD 28 thì dài).

Tọa độ của $D(-4/3; -4/3; -4/3)$.

Tâm $I(x;x;x)$ thuộc tia OD , $x < 0$, với $ID = IA$, như thế: $3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = (x + 2)^2 + 2x^2$.

Nhập máy và SHIFT SOLVE ta có $x = -1/3$. Vậy $S = a + b + c = 3x = -1$. **Chọn B.**

.....

4. Bài tập kiểm tra.

Câu 74: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C)

- A. $(3; 0; 2)$ và $r = 2$. B. $(2; 3; 0)$ và $r = 2$. C. $(2; 3; 0)$ và $r = 4$. D. $(3; 0; 2)$ và $r = 4$.

Câu 75: Trong hệ trục $Oxyz$ cho mp(α): $2x + y - 2z + 15 = 0$ và điểm $J(-1;-2;1)$. Gọi I là điểm đối xứng của J qua (α). Mặt cầu (C) tâm I , cắt (α) theo một đường tròn có chu vi 8π là:

- A. (C): $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 25$. B. (C): $(x+5)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 5$.
C. (C): $(x+5)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 25$. D. (C): $(x+5)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$.

Câu 76: [Đề 2017 BGD] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;6;2)$ và $B(2;-2;0)$ và mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

- A. $R = 1$. B. $R = \sqrt{6}$. C. $R = \sqrt{3}$. D. $R = 2$.

Câu 77: [THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x + y + 6z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1;-1;0)$, $B(-1;0;1)$. Hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) có độ dài bao nhiêu?

- A. $\sqrt{\frac{255}{61}}$. B. $\sqrt{\frac{237}{41}}$. C. $\sqrt{\frac{137}{41}}$. D. $\sqrt{\frac{155}{61}}$.

Câu 78: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng (P): $6x + 3y - 2z + 24 = 0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H , sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

- A. $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$. B. $(x+8)^2 + (y+8)^2 + (z-1)^2 = 196$.

C. $(x+16)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 196.$ **D.** $(x-16)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 196.$

Câu 79: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5;-3;5)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB=4$.

A. $OA=\sqrt{11}.$ **B.** $OA=5.$ **C.** $OA=3.$ **D.** $OA=\sqrt{6}.$

Câu 80: [SGD Bắc Giang] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x+my+(2m+1)z-m-2=0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

A. $a+b=-\frac{1}{2}.$ **B.** $a+b=2.$ **C.** $a+b=0.$ **D.** $a+b=\frac{3}{2}.$

Câu 81: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x+2y+z+1=0$ và $(Q): 2x-y+2z+4=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Tung độ của điểm M bằng:

A. 4. **B.** 2. **C.** -5. **D.** 3.

Câu 82: [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0$. Điểm $M(a,b,c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng (ABM) vuông góc với (P) và $MA^2+MB^2=246$. Tính $S=a+b+c$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 10. **D.** 13.

5. Hướng dẫn bài tập kiểm tra.

Câu 74: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn (C)

A. $(3; 0; 2)$ và $r=2$. **B.** $(2; 3; 0)$ và $r=2$. **C.** $(2; 3; 0)$ và $r=4$. **D.** $(3; 0; 2)$ và $r=4$.

Hướng dẫn giải

Tâm H đường tròn là hình chiếu của tâm I mặt cầu trên (P) , bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

Ghi vào màn hình $-\frac{2x-2y-z-4}{9}$ Calc (nhập tọa độ I) $1=2=3==$ **STO M.**

Ghi $2M+x:-2M+y:-M+z$ bấm $==$ ta có kết quả $H(3; 0; 2)$. (ghi nháp)

Tính r bấm $\sqrt{1^2+2^2+3^2+11-9M^2}$ ta có kết quả 4. **Chọn D.**

Câu 75: Trong hệ trục $Oxyz$ cho mp $(\alpha): 2x+y-2z+15=0$ và điểm $J(-1;-2;1)$. Gọi I là điểm đối xứng của J qua (α) . Mặt cầu (C) tâm I , cắt (α) theo một đường tròn có chu vi 8π là:

A. $(C):(x-5)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=25$ **B.** $(C):(x+5)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=5$
C. $(C):(x+5)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=25$ **D.** $(C):(x+5)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=25$

Hướng dẫn giải

Ta có tâm I đối xứng với J , bán kính $R^2 = r^2 + d^2$ với $r^2 = \left(\frac{8\pi}{2\pi}\right)^2 = 16$, $d^2 = t^2 \left|\overrightarrow{n_p}\right|^2$.

Ghi vào màn hình $-\frac{2x + y - 2z + 15}{9}$ Calc nhập $-1 = -2 = 1 =$ **Sto M**.

Bấm tiếp $4M + x : 2M + y : -4M + z$ bấm $= =$ ta có kết quả $I(-5; -4; 5)$. (ghi nháp)

Tiếp theo tính R^2 bấm $16 + 9M^2$ ta có kết quả 25. **Chọn C**.

Câu 76: [Đề 2017 BGD] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 6; 2)$ và $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = 1$. **B.** $R = \sqrt{6}$. **C.** $R = \sqrt{3}$. **D.** $R = 2$.

Hướng dẫn.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên (P) , khi d đi qua B và K thì H trùng K , khi d vuông góc với AB thì H trùng B . Vậy H thuộc đường tròn đường kính BK , là hình chiếu của AB trên (P) , $R = \frac{1}{2}BK$.

Cách 1. Tính trực tiếp.

Ghi $-\frac{x+y+z}{3}$ CALC (nhập tọa độ A) $4 = 6 = 2 =$ **STO M**

Ghi $\frac{1}{2}\sqrt{(M+x-2)^2 + (M+y+2)^2 + (M+z)^2}$ ta được $\sqrt{6}$. **Chọn B**.

Cách 2. Tính gián tiếp.

Ta có $R = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}BA \cdot \cos \varphi$. Tính $\overrightarrow{BA} = (2; 8; 2) \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{n_p}) = \frac{6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}$ **STO M**.

Ghi $\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \sqrt{1-M^2} = \sqrt{6}$.

Câu 77: [THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 6z - 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 0)$, $B(-1; 0; 1)$. Hình chiếu vuông góc của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) có độ dài bao nhiêu?

A. $\sqrt{\frac{255}{61}}$. **B.** $\sqrt{\frac{237}{41}}$. **C.** $\sqrt{\frac{137}{41}}$. **D.** $\sqrt{\frac{155}{61}}$.

Hướng dẫn.

Kiểm tra được điểm $A \in (P), B \notin (P)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên (P) .

Cách 1. Tính trực tiếp.

Ghi $-\frac{2x+y+6z-1}{41}$ CALC (nhập tọa độ B) $-1 = 0 = 1 =$ **STO M**

Ghi $(2M+x-1)^2 + (M+y+1)^2 + (6M+z)^2$ ta được $\frac{237}{41}$. **Chọn B**.

Cách 2. Phương pháp véc tơ – Tính gián tiếp.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 1)$ và phân tích $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AH} + k\overrightarrow{n_p}$.

Nhân hai vế với $\vec{n}$ ta có $k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}}{\vec{n}^2} = \frac{3}{41}$, thay trở lại :

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} - k\vec{n} = (-2; 1; 1) - \frac{3}{41}(2; 1; 6) = \left(-\frac{88}{41}; \frac{38}{41}; \frac{33}{41}\right)$$

Cuối cùng tính được $AH = \sqrt{237/41}$.

Lời bình.

Theo cách 2 tuy dài dòng hơn cách 1, nhưng ta hiểu rõ ràng hơn, ngoài ra ta còn tìm được hình chiếu của véc tơ trên mặt phẳng.

Cách 3. Phương pháp hình học .

Theo định lý Pitago ta có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 6 - \frac{(x+y+6z-1)^2}{41}$ CALC nhập tọa độ điểm B, kết quả $AH^2 = \frac{237}{41}$.

Câu 78: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 1)$ và mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z + 24 = 0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) . Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H , sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$.

B. $(x+8)^2 + (y+8)^2 + (z-1)^2 = 196$.

C. $(x+16)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 196$.

D. $(x-16)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 196$.

Hướng dẫn

Tính $R^2 = 784\pi / 4\pi = 196 \Rightarrow R = 14$ và các đáp án đều thỏa mãn. Ta phải có $IA < R$

Cách 1. Trắc nghiệm loại trừ.

Lấy tọa của A là $x = 2, y = 5$ thử vào và nhẩm: loại ngay các đáp án B, C, D.

Cách 2. Tính trực tiếp.

+ Tìm H : ghi $-\frac{6x+3y-2z+24}{49}$ Calc nhập tọa độ A , STO **M**

ghi $6M + x : 3M + y : -2M + z$ bấm $= = =$ ta có $H(-4; 2; 3)$.

+ Tìm tâm I : Ta có $\overrightarrow{HI} = t\vec{n}_p = t(6; 3; -2); HI = R \Rightarrow |t| = \frac{14}{\sqrt{49}} = 2$. Nên $t = 2$ hoặc $t = -2$ và

$I(8; 8; -1)$ hoặc $I(-16; -4; 7)$. Chỉ có $I(8; 8; -1)$ thì $IA < 14$. **Chọn A.**

Câu 79: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại B . Tính OA biết $AB = 4$.

A. $OA = \sqrt{11}$.

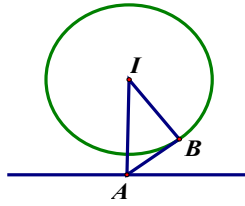
B. $OA = 5$.

C. $OA = 3$.

D. $OA = \sqrt{6}$.

Hướng dẫn.

Ta có $AI = \sqrt{R^2 + AB^2} = 6$. Mà $d(I, (P)) = 6$ nên A là hình chiếu của I trên (P) .



Ghi $-\frac{x-2y+2z-3}{9}$ CALC nhập $5 = -3 = 5 =$ **Sto M**

Bấm $\sqrt{(M+x)^2 + (-2M+y)^2 + (2M+z)^2}$ kết quả $\sqrt{11}$. **Chọn A.**

Câu 80: [SGD Bắc Giang] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

- A.** $a+b = -\frac{1}{2}$. **B.** $a+b = 2$. **C.** $a+b = 0$. **D.** $a+b = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn

Cách 1. Khảo sát – BĐT.

Ta có $\overrightarrow{AH} = t \cdot \vec{n}_P$; $AH = \frac{3|2m+1|}{\sqrt{1+m^2+(2m+1)^2}}$.

Xét $1+m^2+(2m+1)^2 = \frac{1}{5}(1+4)(1+m^2) + (2m+1)^2 \geq \frac{1}{5}(2m+1)^2 + (2m+1)^2$,

suy ra $AH \leq \frac{3|2m+1|}{\sqrt{6(2m+1)^2/5}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$, dấu bằng có khi $m = 2$.

Khi đó $t = -\frac{3(2m+1)}{1+m^2+(2m+1)^2} = -\frac{1}{2}$, và $a+b = (2+t) + (1+2t) = \frac{3}{2}$. **Chọn D.**

Câu 81: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x+2y+z+1=0$ và $(Q): 2x-y+2z+4=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Q) nằm trên trục hoành. Tung độ của điểm M bằng:

- A.** 4. **B.** 2. **C.** -5. **D.** 3.

Hướng dẫn

Cách 1. Khử dần ẩn (dồn biến).

Gọi $M(a;b;c)$ thuộc (P) thỏa mãn bài toán, ta có: $a+2b+c+1=0$ (1).

Tọa độ M' đối xứng với M qua (Q) có dạng: $\begin{cases} x' = a+4t \\ y' = b-2t, \text{ với } t = -\frac{2a-b+2c+4}{9} \\ z' = c+4t \end{cases}$.

$M' \in Ox$, suy ra $b=2t$, $c=-4t$ nên $9t = -2a+2t+8t-4 \Leftrightarrow a = \frac{t-4}{2}$ thế vào (1), ta có:

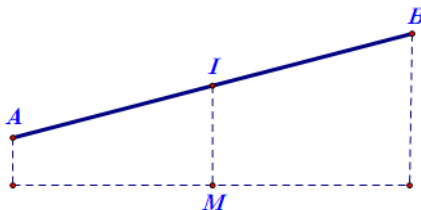
$t = 2$, từ đó $b = 2t = 4$. **Chọn A.** (Tìm được $M(-1;4;-8)$, $M'(7;0;0)$)

- Câu 82: [THPT Chuyên ĐH Vinh]** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$, $B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Điểm $M(a,b,c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng (ABM) vuông góc với (P) và $MA^2 + MB^2 = 246$. Tính $S = a + b + c$.
- A. 0. B. -1. C. 10. D. 13.

Hướng dẫn

Cách 1. Xét vị trí tương đối.

Gọi $I(-2;5;-10)$ là trung điểm AB , với $\overrightarrow{BA} = (2; -4; 16)$, ta có $IM^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$ suy ra $IM^2 = 54$ nên M thuộc mặt cầu tâm I , bán kính $R = 3\sqrt{6}$.



Mặt khác tính $d(I, (P)) = 3\sqrt{6} = R$ suy ra M là hình chiếu của I trên (P) .

Ghi vào máy $-\frac{2x - y + z + 1}{6}$ CALC (nhập tọa độ I) $-2 = 5 = -10 = \text{STO } M$. Bấm AC

Bấm $(2M + x) + (-M + y) + (M + z) =$ kết quả bằng -1. **Chọn B.**

6. Kiến thức bổ xung – Mặt phẳng trung trực và ứng dụng.

Bài toán. Lập phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

Đây là bài toán cơ bản, hầu hết các em học sinh đều giải tự luận như sau:

- **Bước 1:** Tìm tọa độ I là trung điểm của AB .
- **Bước 2:** Tìm tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AB}$.
- **Bước 3:** Lập phương trình mặt phẳng (α) . So sánh (biến đổi) để chọn đáp án.

Ví dụ 30: [ĐỀ 2017] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

- A. $3x - y - z = 0$. B. $3x + y + z - 6 = 0$. C. $3x - y - z + 1 = 0$. D. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$

Lời giải.

Ta có $I(1;1;2)$ là trung điểm của AB và $\overrightarrow{AB} = (-6;2;2)$ do đó phương trình mặt phẳng cần tìm là: $-3(x-1) + 1(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - z = 0$. **Chọn A.**

Lời bình.

Cách giải trên là đúng. Thoạt nhìn thì lời giải tương đối ngắn gọn, nhưng quá trình tiến hành tính toán và biến đổi phải thực hiện nhiều thao tác, đồng thời phải tính toán cẩn thận tránh sai sót về dấu, vì thế mất nhiều thời gian. Nói cách khác: chúng ta đã tiêu tốn thời gian vào giải câu dễ mà không tiết kiệm được thời gian dành cho câu khó hơn, điều này là không cần thiết, nhất là đối với các em tiếp cận “mức 8+ hay 9+.” **Vậy làm thế nào để giải nhanh nhất?** (Tức là cách giải trên đã tối ưu hay chưa?).

🔗 Kiến thức bổ sung:

Dưới đây là kết quả về trung trực của đoạn thẳng, các em tự chứng minh xem nhé!

- Điểm $M(x; y; z)$ thuộc mp(α) là trung trực của đoạn AB khi và chỉ khi

$$MA = MB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{OB^2 - OA^2}{2} \text{ với mọi điểm } O.$$

• Kỹ năng thực hành CASIO.

Bước 1: Quan sát đáp án xem các hệ số của x, y, z dương hay âm? Từ đó các em đưa quyết định lấy B trừ A hoặc lấy A trừ B.

Bước 2: Ghi ra giấy nháp vẽ trái tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OM} = ax + by + cz$, và ghi vào máy tính Casio vẽ phải $\frac{OB^2 - OA^2}{2} = -d$.

Bước 3: Nhân nhẩm để cân bằng phương trình (Nếu cần).

Ví dụ 31: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(2, 1, 1), B(2, -1, -1)$

A. $y + z = 0$

B. $x + y + z - 2 = 0$

C. $x - 2 = 0$

D. $y + z - 2 = 0$

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Quan sát đáp án, lấy A trừ B, vẽ trái là $2y + 2z$

Vẽ phải Casio: $\frac{OA^2 - OB^2}{2} = \frac{6 - 6}{2} = 0 \Rightarrow$ **Chọn A.**

Ví dụ 32: Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(2, 3, -4), B(4, -1, 0)$

A. $3x + y - 2z + 3 = 0$

B. $3x + y - 2z - 3 = 0$

C. $x - 2y + 2z - 3 = 0$

D. $x - 2y + 2z + 3 = 0$

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Quan sát đáp án, lấy B trừ A, vẽ trái là $2x - 4y + 4z$

Vẽ phải $\frac{OB^2 - OA^2}{2} = \frac{1 - 4 - 9}{2} = -6$, suy ra $2x - 4y + 4z = -6 \Rightarrow$ **Chọn D.**

(Bước 1: loại ngay đáp án A và B; Bước 2: tính ra -6 loại tiếp đáp án C luôn nhé).

Ví dụ 33: Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(1, -1, -4), B(2, 0, 5)$

A. $2x + 2y + 18z + 11 = 0$

B. $3x - y + z - 11 = 0$

C. $2x + 2y + 18z - 11 = 0$

D. $3x - y + z + 11 = 0$

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Quan sát đáp án, lấy B trừ A, vẽ trái là: $x + y + 9z$

Vẽ phải $\frac{OB^2 - OA^2}{2} = \frac{4 + 25 - 1 - 1 - 16}{2} = \frac{11}{2}$, suy ra $x + y + 9z = \frac{11}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 34: Trong không gian $Oxyz$, biết điểm N trên trục Oz cách đều 2 điểm $A(3; -4; 7), B(-5; 3; -2)$. Khi đó N có tọa độ là:

A. $N(0; -2; 0)$

B. $N(0; 0; 2)$

C. $N(0; 0; 18)$

D. $N(0; 0; -2)$.

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Gọi $N(0; 0; z)$, lấy A trừ B (thành phần z về trái), ghi vào máy:

$$9z = \frac{16 + 49 - 25 - 4}{2} \text{ bấm SHIFT SOLVE} = \text{kết quả } z = 2. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 35: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm K thuộc mặt phẳng (Oxz) cách đều 3 điểm $A(1; 0; 2), B(-2; 1; 1), C(1; -3; -2)$. Tọa độ K là:

A. $K(\frac{7}{15}; 0; -\frac{5}{4})$ B. $K(\frac{5}{24}; 0; -\frac{9}{8})$ C. $K(-\frac{21}{8}; 0; -\frac{5}{4})$ D. $K(\frac{-3}{14}; 0; -\frac{5}{14})$

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Gọi $K(x; 0; z)$, khi đó (Trừ hai thành phần x, z về trái):

$$K \text{ thuộc mặt phẳng trung trực của BA, nên } 3x + z = \frac{0-1}{2}.$$

$$K \text{ thuộc mặt phẳng trung trực của CA, nên } 0x + 4z = \frac{0-9}{2}.$$

$$\text{Giải hệ trên ta có } x = \frac{5}{24}, z = -\frac{9}{8}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 36: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD với $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; 0; 2)$ và $D(1; 1; 1)$ là

A. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + y - z + 6 = 0$ B. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + y - z - 6 = 0$
C. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 2z + 24 = 0$ D. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 2z - 24 = 0$

Hướng dẫn.

Cách 1. Trắc nghiệm loại trừ.

Thử tọa độ điểm D vào các đáp án A, C, D đều không thỏa mãn. **Chọn B.**

Cách 2. Tính trực tiếp.

Phương trình mặt phẳng trung trực BA là $x - y - z = -3/2$.

Phương trình mặt phẳng trung trực BC là $x - 2y + z = 0$.

Phương trình mặt phẳng trung trực BD là $x - y = -1$.

$$\text{Giải hệ ba ẩn ta được tọa tâm } I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \text{ suy ra } R^2 = ID^2 = \frac{35}{4}.$$

$$\text{Suy ra } d = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{35}{4} = -6. \text{ Chọn B.}$$

.....

7. Bài tập – Mặt phẳng trung trực và ứng dụng.

Câu 83: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 3; 2)$ và $B(-3; 1; 0)$ Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:

A. $2x + y + z - 1 = 0$. B. $2x + y + z - 7 = 0$. C. $2x + y - z - 4 = 0$. D. $4x + y + z - 1 = 0$.

Câu 84: [Đề 2019_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 0)$ và $B(5; 1; -2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $2x - y - z + 5 = 0$. B. $2x - y - z - 5 = 0$. C. $x + y + 2z - 3 = 0$. D. $3x + 2y - z - 14 = 0$

- Câu 85:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 5)$ và $B(3; -2; 4)$. Điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm A, B có tọa độ là:
- A.** $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. **B.** $M\left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. **C.** $M(3; 0; 0)$. **D.** $M(-3; 0; 0)$.
- Câu 86:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(3; 1; -1)$. Điểm M trên mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm A, B, C có tọa độ là:
- A.** $\left(0; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{6}; 0; -\frac{5}{6}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$. **D.** $\left(\frac{6}{5}; 0; -\frac{6}{7}\right)$.
- Câu 87:** Trong không gian $Oxyz$, điểm H trên mặt phẳng (Oyz) cách đều 3 điểm $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$ có tọa độ là:
- A.** $H\left(0; -\frac{31}{18}; -\frac{7}{18}\right)$. **B.** $H\left(0; \frac{17}{9}; -\frac{7}{9}\right)$. **C.** $H\left(0; -\frac{5}{21}; -\frac{17}{21}\right)$. **D.** $H\left(0; -\frac{29}{18}; -\frac{5}{18}\right)$.
- Câu 88:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng Oxz và đi qua các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(2; 0; -1)$
- A.** (S): $(x + 3)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 17$. **B.** (S): $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 11$.
C. (S): $(x + 3)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 11$. **D.** (S): $(x - 3)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 17$.
- Câu 89:** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có đỉnh là $A(1; -2; -1)$, $B(-5; 10; -1)$, $C(4; 1; -1)$, $D(-8; -2; 2)$. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là
- A.** $(-2; 4; 5)$. **B.** $(2; -4; 3)$. **C.** $(-2; 3; -5)$. **D.** $(1; -3; 4)$.
- Câu 90:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 2y + z - 3 = 0$. Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MA = MB = MC$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.** $2a + b - c = 0$. **B.** $2a + 3b - 4c = 41$. **C.** $5a + b + c = 0$. **D.** $a + 3b + c = 0$.
- Câu 91:** **[JHTPT Chuyên ĐHSP – Hà Nội]** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn $\triangle ABC$ có trọng tâm là điểm $G(2; 4; 8)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là
- A.** $(1; 2; 3)$. **B.** $\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{16}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **D.** $(3; 6; 12)$.
- Câu 92:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với $S(1; -1; 6)$, $A(1; 2; 3)$, $B(3; 1; 2)$, $C(4; 2; 3)$, $D(2; 3; 4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD) .
- A.** $d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $d = \frac{\sqrt{21}}{2}$. **D.** $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 93:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho $MA = MB = MC$. Tính $|\overline{OM}|$.
- A.** $|\overline{OM}| = \sqrt{62}$. **B.** $|\overline{OM}| = \sqrt{70}$. **C.** $|\overline{OM}| = \sqrt{38}$. **D.** $|\overline{OM}| = \sqrt{46}$.

Câu 94: [THPT Chuyên ĐHSPT Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; 4; 0), B(3; 0; -4), C(0; -3; -4)$. Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?
A. $O(0; 0; 0)$. **B.** $P(3; 0; 0)$. **C.** $M(1; 2; 0)$. **D.** $N(0; 0; 2)$.

Câu 95: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1), B(-1; 2; 0), C(1; 1; -2)$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = 15a + 30b + 75c$
A. 48. **B.** 50. **C.** 52. **D.** 46.

8. Hướng dẫn bài tập – Mặt phẳng trung trực và ứng dụng.

Câu 83: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 3; 2)$ và $B(-3; 1; 0)$ Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:
A. $2x + y + z - 1 = 0$. **B.** $2x + y + z - 7 = 0$. **C.** $2x + y - z - 4 = 0$. **D.** $4x + y + z - 1 = 0$.

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Lấy A trừ B , vế trái là $4x + 2y + 2z$. Vế phải bằng 2, đến đây **chọn A**.

Câu 84: [Đề 2019_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 0)$ và $B(5; 1; -2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là
A. $2x - y - z + 5 = 0$. **B.** $2x - y - z - 5 = 0$. **C.** $x + y + 2z - 3 = 0$. **D.** $3x + 2y - z - 14 = 0$

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Lấy B trừ A , vế trái là $4x - 2y - 2z$. Vế phải $\frac{25 + 4 - 9}{2} = 10$. Đến đây **chọn B**.

Câu 85: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 5)$ và $B(3; -2; 4)$. Điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm A, B có tọa độ là:

A. $M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. **B.** $M\left(-\frac{3}{2}; 0; 0\right)$. **C.** $M(3; 0; 0)$. **D.** $M(-3; 0; 0)$.

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Gọi $M(x; 0; 0)$ và thuộc trung trực của AB , nên: $2x = \frac{4 + 16 - 1 - 25}{2} = -3$.

Đến đây không cần giải máy tính. **Chọn B**.

Lưu ý.

Khi bình phương và thực hiện phép trừ thì $3^2 - (-3)^2 = 0$ nên không cần ghi. Ta cố tình viết thứ tự AB để ngầm hiểu tương tự như tính véc tơ.

Câu 86: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(-1; 1; 0), C(3; 1; -1)$. Điểm M trên mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm A, B, C có tọa độ là:

A. $\left(0; \frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right)$. **B.** $\left(\frac{7}{6}; 0; -\frac{5}{6}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{6}; 0; -\frac{7}{6}\right)$. **D.** $\left(\frac{6}{5}; 0; -\frac{6}{7}\right)$.

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Gọi $M(x; 0; z)$, khi đó (Trừ hai thành phần x và z về trái):

M thuộc mặt phẳng trung trực của BA, suy ra $2x + z = \frac{1-0}{2}$.

M thuộc mặt phẳng trung trực của AC, suy ra $2x - 2z = \frac{9-1}{2} = 4$.

Giải hệ trên ta có $x = \frac{5}{6}, z = \frac{-7}{6}$. **Chọn C.**

Câu 87: Trong không gian $Oxyz$, điểm H trên mặt phẳng (Oyz) cách đều 3 điểm $A(3; -1; 2), B(1; 2; -1), C(-1; 1; -3)$ có tọa độ là:

A. $H(0; -\frac{31}{18}; -\frac{7}{18})$. **B.** $H(0; \frac{17}{9}; -\frac{7}{9})$. **C.** $H(0; -\frac{5}{21}; -\frac{17}{21})$. **D.** $H(0; -\frac{29}{18}; -\frac{5}{18})$.

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Gọi $H(0; y; z)$, khi đó (Trừ hai thành phần y và z về trái):

H thuộc mặt phẳng trung trực của AB, suy ra: $3y - 3z = \frac{1-9}{2} = -4$.

H thuộc mặt phẳng trung trực của AC, suy ra: $2y - 5z = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}$.

Giải hệ trên ta có $y = \frac{-31}{18}, z = \frac{-7}{18}$. **Chọn A.**

Câu 88: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng Oxz và đi qua các điểm $A(1; 2; 0), B(-1; 1; 3), C(2; 0; -1)$

A. (S): $(x+3)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 17$. **B.** (S): $(x-3)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 11$.

C. (S): $(x+3)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 11$. **D.** (S): $(x-3)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 17$.

Hướng dẫn.

Kỹ năng: Quan sát về trái ta thấy các đáp án A, C có dấu cộng, về trái B, D có dấu trừ, nên:

Thử tọa độ điểm A vào các đáp án A, C nên loại.

Thử tọa độ điểm C vào đáp án B nên loại. **Chọn D.**

Lời bình.

Trên đây ta giải theo cách loại trừ để đến đáp số nhanh nhất, yêu cầu các em cũng phải tinh tế quan sát để thử mà không phải thử tùy ý. Các em có thể giải như VD 36.

Câu 89: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có đỉnh là $A(1; -2; -1), B(-5; 10; -1), C(4; 1; -1), D(-8; -2; 2)$. Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $(-2; 4; 5)$. **B.** $(2; -4; 3)$. **C.** $(-2; 3; -5)$. **D.** $(1; -3; 4)$.

Hướng dẫn.

Cách 1. Viết phương trình ba mặt phẳng trung trực

Mặt phẳng trung trực của BA là: $6x - 12y = \frac{5-25-100}{2} = -60$.

Mặt phẳng trung trực của AC là: $3x + 3y = \frac{17-5}{2} = 6$.

Mặt phẳng trung trực của DA là: $9x - 3z = \frac{2 - 64 - 4}{2} = -33$.

Giải hệ ba ẩn (máy tính 580: **MENU 9 1 3**; máy 570: **MODE 5 2**) ta có $I(-2; 4; 5)$.

Chọn A.

Cách 2. Giải hệ phương trình bốn ẩn (Máy 580).

Gọi mặt cầu là $ax + by + cz + d = -(x^2 + y^2 + z^2)$. Vào **MENU 9 1 4** và nhập tọa độ x, y, z của điểm A theo hàng ngang. Tương tự với ba điểm B, C, D . Giải ra ta có a, b, c và d .

Tâm $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$.

Câu 90: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2), B(2; -2; 1), C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + 2y + z - 3 = 0$. Biết rằng tồn tại duy nhất điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MA = MB = MC$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a + b - c = 0$. **B.** $2a + 3b - 4c = 41$. **C.** $5a + b + c = 0$. **D.** $a + 3b + c = 0$.

Hướng dẫn

Điểm M thuộc mp trung trực của AB có phương trình $2x - 3y - z = \frac{4 - 0}{2} = 2$.

Điểm M thuộc mp trung trực của CA có phương trình $2x + y + z = 0$.

Điểm M thuộc mp (α) có phương trình $2x + 2y + z = 3$.

Giải hệ ba ẩn ta có $M(2; 3; -7)$ nên $2a + 3b - 4c = 41$.

Chọn B.

Câu 91: **[THPT Chuyên ĐHS - Hà Nội]** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm O và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O thỏa mãn $\triangle ABC$ có trọng tâm là điểm $G(2; 4; 8)$. Tọa độ tâm của mặt cầu (S) là

A. $(1; 2; 3)$. **B.** $\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{16}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **D.** $(3; 6; 12)$.

Hướng dẫn

Từ G là trọng tâm $\triangle ABC$, suy ra $A(6; 0; 0), B(0; 12; 0), C(0; 0; 24)$. Gọi $I(x; y; z)$ là

tâm mặt cầu thì $IO = IA \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OO}^2}{2} \Leftrightarrow 6x = \frac{36}{2} \Leftrightarrow x = 3$. **Chọn D.**

Câu 92: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ với $S(1; -1; 6), A(1; 2; 3), B(3; 1; 2), C(4; 2; 3), D(2; 3; 4)$. Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp. Tính khoảng cách d từ I đến mặt phẳng (SAD) .

A. $d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $d = \frac{\sqrt{21}}{2}$. **D.** $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn.

+ Viết phương trình mp (SAD) , giải hệ ba ẩn:

Nhập dòng đầu $1 = -1 = 6 = 1 =$ dòng thứ hai $1 = 2 = 3 = 1 =$ dòng thứ ba $2 = 3 = 4 = 1 =$ ta được phương trình (SAD): $-2x + y + z - 3 = 0$.

+ Tìm tâm I là giao điểm của ba mặt phẳng trung trực SA, AC, BD

$$0x + 3y - 3z = \frac{4+9-1-36}{2} = -12; 3x + 0y + 0z = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}; -x + 2y + 2z = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$$

Giải ra ta có $I\left(x = \frac{5}{2}; y = \frac{1}{2}; z = \frac{9}{2}\right)$.

+ Tính khoảng cách $d(I, (SAD)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 93: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB = MC$. Tính $|\overline{OM}|$.

A. $|\overline{OM}| = \sqrt{62}$. **B.** $|\overline{OM}| = \sqrt{70}$. **C.** $|\overline{OM}| = \sqrt{38}$. **D.** $|\overline{OM}| = \sqrt{46}$.

Hướng dẫn

Điểm M thuộc mp trung trực của AB có phương trình $2x - 3y - z = \frac{4-0}{2} = 2$.

Điểm M thuộc mp trung trực của CA có phương trình $2x + y + z = 0$.

Điểm M thuộc mp (α) có phương trình $2x + 2y + z = 3$.

Giải hệ ba ẩn ta có $M(2; 3; -7)$ nên $OM = \sqrt{62}$. **Chọn A.**

Câu 94: [THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; 4; 0)$, $B(3; 0; -4)$, $C(0; -3; -4)$. Trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0; 0; 0)$. **B.** $P(3; 0; 0)$. **C.** $M(1; 2; 0)$. **D.** $N(0; 0; 2)$.

Hướng dẫn

Cách 1. Xét vị trí tương đối.

Nhận xét được $OA = OB = OC = 5$, suy ra O thuộc trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. **Chọn A.**

Cách 2. Tính trực tiếp.

+ Viết phương trình mp(ABC): vào **MENU 9 1 3** nhập dòng một $3 = 4 = 0 = 1 =$ dòng hai $3 = 0 = -4 = 1 =$ dòng ba $0 = -3 = -4 = 1 =$ ta được mp(ABC): $-x + y - z = 1$.

+ Mặt phẳng trung trực của BA có phương trình $4y + 4z = 0$.

+ Mặt phẳng trung trực của CA có phương trình $3x + 7y + 4z = 0$.

Giải hệ ba ẩn trên ta được tâm đường tròn ngoại tiếp ABC là $H\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Phương trình trục đường tròn: $x = -\frac{1}{3} - t, y = \frac{1}{3} + t, z = -\frac{1}{3} - t$ đi qua O .

Chọn A.

- Câu 95:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức $P = 15a + 30b + 75c$
- A. 48. B. 50. C. 52. D. 46.

Hướng dẫn

Cách 1. Tính trực tiếp.

+ Viết phương trình mp(ABC): vào **MENU 9 1 3** nhập dòng một $2 = 3 = 1 = 1 =$ dòng hai $-1 = 2 = 0 = 1 =$ dòng ba $1 = 1 = -2 = 1 =$ ta được mp(ABC): $-x + 8y - 5z = 17$.

+ Mặt phẳng trung trực của BA có phương trình $3x + y + z = \frac{9}{2}$.

+ Mặt phẳng trung trực của CA có phương trình $x + 2y + 3z = 4$.

Giải hệ ba ẩn trên ta được tâm đường tròn ngoại tiếp ABC là $H\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right)$.

Suy ra $P = 15a + 30b + 75c = 50$.

Chọn B.

.....

VI. BÀI TOÁN CƠ BẢN VỀ ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN.

1. Kiến thức cơ bản.

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$ có phương

$$\text{trình tham số: } \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, (t \in \mathbb{R}). \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- ✓ Nếu $abc \neq 0$ thì Δ có phương trình chính tắc: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

- **Chú ý:**

- ✓ Một đường thẳng có thể được xem là giao tuyến của hai mặt phẳng.

✓ Một đường thẳng có thể có nhiều phương trình tham số, có thể có nhiều phương trình chính tắc (Vì đường thẳng có nhiều điểm khác nhau, có nhiều véc tơ chỉ phương khác nhau). Ngược lại: Nhiều phương trình có thể chỉ biểu diễn một đường thẳng.

Ví dụ 37: Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $P(5; 3; -4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{d} = (7; -9; 5)$. Phương trình tham số của Δ là:

A. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6t \\ z = 2 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Nhận xét.

Mục đích của bài toán là “Phù sương mù” nhằm gây nhiễu đối với chúng ta. Các em cũng sẽ gặp một số tình huống sau đây:

+ **Tình huống thứ nhất:** Các tọa độ của điểm M_0 hoặc vtcp $\vec{u}$ nếu “bằng 0” thì sẽ “không xuất hiện” trong phương trình.

+ **Tình huống thứ hai:** Xuất hiện sự “tráo đổi tọa độ” của điểm M_0 với vtcp $\vec{u}$.

+ **Tình huống thứ ba:** Tọa độ điểm M_0 hoặc $\vec{u}$ không xuất hiện trong phương trình mà thay bởi số khác.

Nói cách khác: Từ giả thiết đã cho ta lập được phương trình đường thẳng Δ . Chúng ta cần tìm ra trong bốn đáp án đó, đường thẳng nào trùng với đường thẳng Δ đã lập?. Trước khi đi vào giải quyết bài toán xét vị trí tương đối, ta xét các ví dụ để củng cố kiến thức về đường thẳng, trong đó có một số lưu ý sau:

- ✓ **Về kĩ năng:**

+ Cần phân biệt $\vec{u}$ và $k\vec{u}$ ($k \neq 0$). Khi $\vec{u} = (a; b; c) \Rightarrow k\vec{u} = (ka; kb; kc)$. Có một số véc tơ “na ná giống $k\vec{u}$ ” nhưng không phải nhé!. Ví dụ: $(2; -3; 5)$ và $(2; 3; -5)$.

Ghi nhớ: Nếu có một thành phần (hoành; tung; cao) đổi dấu thì hai thành phần kia đổi dấu. Nói cách khác: cả ba thành phần *cùng đổi dấu* hoặc *cùng giữ nguyên dấu*.

+ Nếu $a \neq 0$ thì có thể chọn $\vec{u} = (1; \frac{b}{a}; \frac{c}{a})$ từ đó ta có phương trình tham số dạng:

$$\Delta: \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0 \\ z = \frac{c}{a}(x - x_0) + z_0 \end{cases} \text{ . Đến đây ta biểu diễn } y \text{ và } z \text{ theo } x \text{ và kiểm tra điểm } \in \Delta, \dots$$

✓ Về một số tính huống thường gặp:

- + Đường thẳng đi qua hai điểm cho trước.
- + Đường thẳng song song với đường thẳng cho trước.
- + Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.
- + Chuyển từ dạng tham số sang chính tắc và ngược lại.

Ví dụ 38: Trong không gian $R\{|\}$, cho đường thẳng $g = \frac{\begin{cases} -4 \\ -5 \end{cases}}{8} = \frac{\begin{cases} -5 \\ 6 \end{cases}}{-1} = \frac{\begin{cases} 6 \\ 1 \end{cases}}{1}$. Vector nào dưới đây là một

vector chỉ phương của g ?

- A. $\vec{x}_4 = (4; 5; -6)$. B. $\vec{x}_5 = (-4; -5; 6)$. C. $\vec{x}_6 = (8; -; 1)$. D. $\vec{x}_7 = (1; -; 8)$.

Hướng dẫn

$$\vec{u} = (5; -8; 7) \Rightarrow \text{Chọn C}$$

Ví dụ 39: [ĐỀ CT 2017 BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng AB ?

- A. $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. B. $\vec{c} = (1; 2; 2)$. C. $\vec{d} = (-1; 1; 2)$. D. $\vec{a} = (-1; 0; -2)$.

Hướng dẫn

$$(\text{Lấy B trừ A}) \Rightarrow \vec{u} = (-1; 0; 2) \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Ví dụ 40: [ĐỀ 2017 BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục tọa độ Ox, Oy . Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

- A. $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$. B. $\vec{u}_3 = (1; 0; 0)$. C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$ D. $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$

Hướng dẫn

$$M_1 = (1; 0; 0), M_2 = (0; 2; 0) \Rightarrow \vec{u} = (-1; 2; 0) \Rightarrow \text{Chọn C.}$$

Ví dụ 41: Trong không gian $R\{|\}$, cho g là đường thẳng đi qua hai điểm $D(5; -4; 6)$ và $E(3; 5; 4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của g ?

$$\text{A. } \begin{cases} \{ = 7w \\ | = 5 + 9w. \\ \} = 4 - 7w \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} \{ = 5 + 5w \\ | = -4 + 6w. \\ \} = 6 + 5w \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} \{ = -5 + 5w \\ | = 8 - 6w. \\ \} = -4 + 5w \end{cases} \quad \text{D. 3 đáp án kia sai.}$$

Hướng dẫn

Kỹ năng: Lấy A trừ B $\Rightarrow \vec{u} = (2; -3; 2) \Rightarrow$ loại A và B. Trong C : Cho $x = 0 \Rightarrow t = 1$

Thay $t = 1$ vào y và z $\Rightarrow$ Chọn C.

Ví dụ 42: Trong không gian $\mathbb{R}\{|\}$, cho đường thẳng $g = \begin{cases} \{ = 5 - w \\ | = 4 + w. \\ \} = w \end{cases}$. Phương trình nào sau đây là

phương trình chính tắc của g ?

$$\text{A. } \frac{\{-5\}}{-4} = \frac{|}{4} = \frac{\{+6\}}{-4} \quad \text{B. } \frac{\{+5\}}{4} = \frac{|}{-4} = \frac{\{-6\}}{4} \quad \text{C. } \{-5\} = | = \{+6\} \quad \text{D. } \frac{\{-5\}}{-4} = \frac{|-4\}}{4} = \frac{\{+6\}}{4}$$

Hướng dẫn

$\vec{u} = (-1; 1; 1) \Rightarrow$ loại A, B và C $\Rightarrow$ Chọn D.

Ví dụ 43: Trong không gian $\mathbb{R}\{|\}$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm D(4; 5; 6) và E(6; 4; 4) ?

$$\text{A. } \frac{\{-4\}}{6} = \frac{|-5\}}{-4} = \frac{\{+6\}}{4} \quad \text{B. } \frac{\{-4\}}{5} = \frac{|-5\}}{-6} = \frac{\{+6\}}{7} \quad \text{C. } \frac{\{-6\}}{4} = \frac{|+4\}}{5} = \frac{\{-4\}}{-6} \quad \text{D. } \frac{\{+4\}}{5} = \frac{|+5\}}{-6} = \frac{\{-6\}}{7}$$

Hướng dẫn

(Lấy B trừ A) $\Rightarrow \vec{u} = (2; -3; 4)$, nhìn tử số $\Rightarrow$ Chọn B.

Ví dụ 44: Trong không gian Oxyz, viết phương trình đường thẳng d đi qua A(4; -2; 2), song song với $\Delta: \frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}$ là

$$\text{A. d: } \frac{x+4}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}. \quad \text{B. d: } \frac{x+4}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}. \\ \text{C. d: } \frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}. \quad \text{D. d: } \frac{x-4}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

Hướng dẫn

Các mẫu số như nhau, nhìn tử số $\Rightarrow$ Chọn D.

Ví dụ 45: Trong không gian Oxyz, viết phương trình đường thẳng d đi qua A(-1; 0; 2), vuông góc với (P): $2x - 3y + 6z + 4 = 0$

$$\text{A. d: } \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{6}. \quad \text{B. d: } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{6}. \\ \text{C. d: } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{6}. \quad \text{D. d: } \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{6}.$$

Hướng dẫn

$\vec{u} = (2; -3; 6) \Rightarrow$ loại A và C, nhìn tử số $\Rightarrow$ Chọn B.

Ví dụ 46: [ĐỀ 2017 BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường

thẳng đi qua trung điểm đoạn thẳng AB và song song với d .

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$. B. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$. C. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Hướng dẫn

$\vec{u} = (1; -1; 2) \Rightarrow$ loại A, trung điểm $I(0; 1; -1) \Rightarrow$ **Chọn C.**

Ví dụ 47: [ĐỀ 2017 BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

A. $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. B. $x - 2y + z = 0$. C. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. D. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Hướng dẫn

Loại A và B (không phải chính tắc), nhìn tử số $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Ví dụ 48: [ĐỀ 2017 BGD] Trong không gian $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$ là:

A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Hướng dẫn

$\vec{u} = (1; 3; -1) \Rightarrow$ loại A và D, cho $z = 1 - t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$ nhẩm tính x và $y \Rightarrow$ **Chọn B.**

2. Bài toán xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng.

Bài toán “xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng” ở mức độ thông hiểu, tuy nhiên trên thực tế các em “đã hiểu” nhưng chưa thực sự “thông suốt – mạch lạc”, các em vẫn còn cảm thấy “vướng mắc – bối rối – lúng túng” khi thực hành, tức là kỹ năng giải toán vẫn chậm, thậm chí một số em mặc dù học toán khá tốt vẫn gây cảm giác “ức chế - mất hứng”. Trước hết ta xét thêm ví dụ sau:

Ví dụ 49: Trong không gian $\mathbb{R}\{|\}$, cho g là đường thẳng đi qua hai điểm $D(5; -4; 6)$ và $E(3; 5; 4)$.

Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của g ?

A. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 9t \\ z = 2 - 6t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = -4 + 6t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

☞ Cách giải quen thuộc:

Hầu hết các học sinh đều giải như sau:

Loại đáp án A, chỉ còn B, C, D thỏa mãn $\vec{u} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.

+ Trong B: cho $x = 1 - 6t = 0 \Rightarrow t = 1/6$ thay vào $y, z \Rightarrow M(0; 3/2; 1) \neq B(0; 2; 1)$

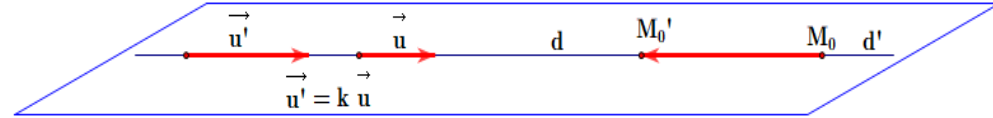
⇒ loại **B**

+ Trong **C**: cho $x = 4 - 4t = 0 \Rightarrow t = 1$ thay vào $y, z \Rightarrow M(0; 2; 1) \equiv B(0; 2; 1) \Rightarrow$ **chọn C**.

☞ **Nhận xét:**

Cách giải đúng: Mục đích của cách làm là cho điểm $M(4 - 4t; -4 + 6t; 5 - 4t)$ chạy trùng với các điểm A hoặc B ứng với giá trị t nào đó. Tuy nhiên vẫn chậm.

Chúng ta chú ý là: Từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$ ta đi lập phương trình đường thẳng, nghĩa là thực hiện “Quy trình xuôi theo”. Để giải nhanh nhất bài toán xét vị trí tương đối thì chúng ta phải thực hiện “Quy trình suy ngược”. Ta có bốn trường hợp sau:



☞ **Trường hợp 1:**
$$\begin{cases} \vec{u}' = k\vec{u} \\ \overrightarrow{M_0M_0'} = l\vec{u} \end{cases} \Rightarrow d' \equiv d.$$

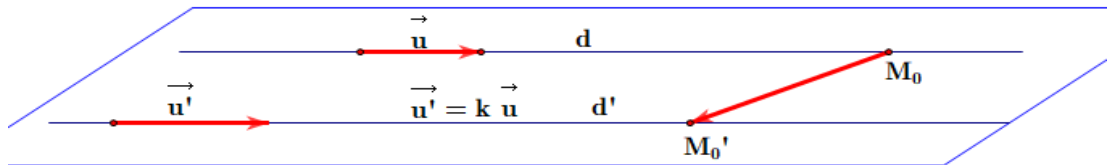
Ví dụ 50: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathcal{R}\{|\}\}$, cho hai đường thẳng $\mathcal{G}_1 = \begin{cases} \begin{cases} x = -4 + 5w \\ y = -w \\ z = 4 + w \end{cases} \end{cases}$ và

$\mathcal{G}_2 = \begin{cases} \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \\ z = -5 \end{cases} \end{cases}$. Vị trí tương đối của d_1 và d_2 là:

- A.** Song song. **B.** Trùng nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Chéo nhau.

Hướng dẫn

Kĩ năng: ta có $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; -1; 1) = \vec{u}_1 = -\vec{u}_2 \Rightarrow$ **Chọn B**.



☞ **Trường hợp 2:**
$$\begin{cases} \vec{u}' = k\vec{u} \\ \overrightarrow{M_0M_0'} \neq l\vec{u} \end{cases} \Rightarrow d' // d.$$

Ví dụ 51: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathcal{R}\{|\}\}$, cho hai đường thẳng $\mathcal{G}_1 = \begin{cases} \begin{cases} x = -4 + 6w \\ y = -w \\ z = 4 - 5w \end{cases} \end{cases}$ và

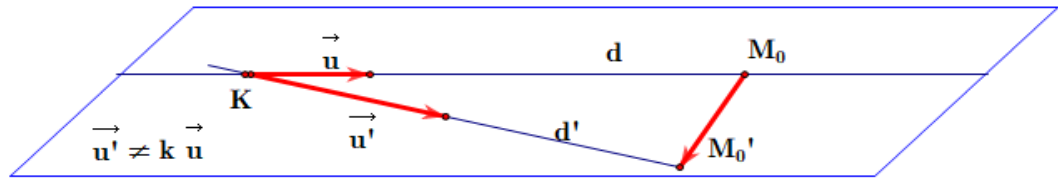
$\mathcal{G}_2 = \begin{cases} \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \\ z = -6 \end{cases} \end{cases}$. Vị trí tương đối của $\mathcal{G}_1$ và $\mathcal{G}_2$ là:

- A.** Song song. **B.** Trùng nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Chéo nhau.

Hướng dẫn

Kĩ năng: ta có $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; 2; 2) \neq l(3; -1; -2) \Rightarrow$ **Chọn A**.

☞ **Trường hợp 3:**
$$\begin{cases} \vec{u}' \neq k\vec{u} \\ \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}' = \overrightarrow{M_0M_0'} \end{cases} \Rightarrow d \cap d' = K.$$



Ví dụ 52: Trong không gian với hệ tọa độ $R\{|\}$, cho hai đường thẳng $g_4 = \begin{cases} \{ = w \\ | = -5 + 6w \\ \} = 9 - 7w \end{cases}$ và

$g_5 = \begin{cases} \{ + 7 \\ | - 5 \\ \} + 8 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

- A.** g_4 song song g_5 . **B.** g_4 và g_5 chéo nhau và không vuông góc.
C. g_4 cắt g_5 và vuông góc với nhau. **D.** g_4 và g_5 chéo nhau và vuông góc.

Hướng dẫn

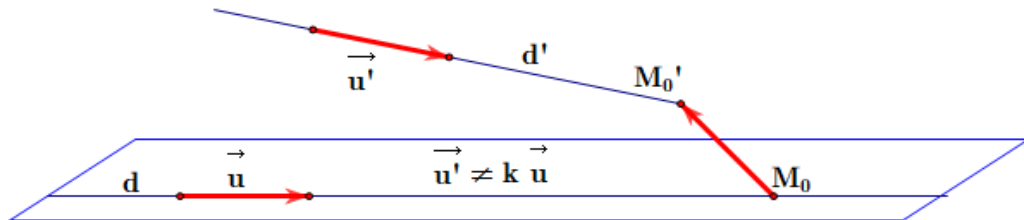
Kĩ năng: ta có $\vec{u}_2 = (6; 2; 3) \neq k \cdot (1; 3; -4)$; $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 = 0$. Đến đây loại đáp án A và B.

Từ d_1 thế $y = -2 + 3x$ và $z = 6 - 4x$ vào d_2 , **Casio:** $\frac{x+4}{6} = \frac{-2+3x-2}{2}$ **SHIFT SOLVE** tìm được $x = 2 \Rightarrow y = 4$ và $z = -2$ thỏa mãn $\Rightarrow$ **đáp số C.**

✓ Chú ý:

Chúng ta dùng phép thế để giải tìm hai ẩn và thử vào thành phần còn lại và kết luận hai đường thẳng cắt nhau (Chéo nhau), nhanh hơn việc giải hệ hai ẩn $\alpha; \beta$.

Trường hợp 4: $\begin{cases} \vec{u}' \neq k \cdot \vec{u} \\ \alpha \cdot \vec{u} + \beta \vec{u}' \neq \overrightarrow{M_0 M_0'} \end{cases} \Rightarrow d \text{ và } d' \text{ chéo nhau.}$



Ví dụ 53: Trong không gian với hệ tọa độ $R\{|\}$, cho hai đường thẳng $g_4 = \begin{cases} \{ - 6 \\ | - 5 \\ \} - 4 \end{cases}$ và

$g_5 = \begin{cases} \{ = w \\ | = 5 \\ \} = 5 + w \end{cases}$. Vị trí tương đối của g_4 và g_5 là:

- A.** Song song. **B.** Trùng nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Chéo nhau.

Hướng dẫn

Kĩ năng: ta có $\vec{u}_2 = (1; 0; 1) \neq k \cdot (1; 2; 1)$.

Từ d_2 thế $y = 2$ vào $d_1 \Rightarrow x = 3, z = 1$ thay trở về $d_2 \Rightarrow$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ **Chọn D.**

.....

3. Bài tập về vị trí tương đối của đường thẳng.

Câu 96: Trong không gian $\mathbb{R}\{||\}$, cho hai đường thẳng $g_4 = \frac{\begin{cases} -4 \\ -6 \end{cases}}{4} = \frac{\begin{cases} -6 \\ -4 \end{cases}}{-4} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -6 \end{cases} + 4}{4}$ và $g_5 = \begin{cases} \begin{cases} = q + 5w \\ = -4 - 5w \end{cases} \\ = 6 + p w \end{cases}$. Với giá trị nào của p/q thì hai đường thẳng đó trùng nhau?

- A. $p = 5/q = 8$. B. $p = -5/q = 8$. C. $p = 8/q = 5$. D. $p = -8/q = 5$.

Câu 97: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathbb{R}\{||\}$, cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình

$$g_4 = \begin{cases} \begin{cases} = 4 + dw \\ = w \\ = -4 + 5w \end{cases} \end{cases} \quad \text{và} \quad g_5 = \begin{cases} \begin{cases} = 4 - w \\ = 5 + 5w \\ = 6 - w \end{cases} \end{cases}. \text{ Với giá trị nào của } d \text{ thì } g_4 \text{ và } g_5 \text{ cắt nhau?}$$

- A. $d = 3$. B. $d = 4$. C. $d = \frac{4}{5}$. D. $d = 5$.

Câu 98: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathbb{R}\{||\}$, cho đường thẳng $g = \begin{cases} \begin{cases} = w \\ = 5 \\ = 5 + w \end{cases} \end{cases}$. Trong các đường

thẳng sau, đường thẳng nào **cắt** g ?

- A. $g_4 = \frac{\begin{cases} -6 \\ -5 \end{cases}}{4} = \frac{\begin{cases} -5 \\ -4 \end{cases}}{5} = \frac{\begin{cases} -6 \\ -4 \end{cases}}{4}$. B. $g_5 = \frac{\begin{cases} -4 \\ -5 \end{cases}}{4} = \frac{\begin{cases} -5 \\ -4 \end{cases}}{-4} = \frac{\begin{cases} -6 \\ -4 \end{cases}}{4}$.
C. $g_6 = \begin{cases} \begin{cases} = 5 - w \\ = 4 \\ = -w \end{cases} \end{cases}$. D. $g_7 = \begin{cases} \begin{cases} = 4 + 5w \\ = 5 \\ = 6 + 5w \end{cases} \end{cases}$.

Câu 99: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathbb{R}\{||\}$, cho đường thẳng $\Delta = \frac{\begin{cases} +5 \\ -4 \end{cases}}{4} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -6 \end{cases}}{-4} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -6 \end{cases}}{6}$ đi qua điểm $A(2; m; n)$. Khi đó giá trị của $m; n$ lần lượt là:

- A. $p = -5; q = 4$ B. $p = 5; q = -4$ C. $p = -7; q = :$ D. $p = 3; q = :$

Câu 100: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathbb{R}\{||\}$, cho đường thẳng $g = \begin{cases} \begin{cases} = -4 + 5w \\ = -w \\ = -5 - w \end{cases} \end{cases}$. Trong các đường

thẳng sau, đường thẳng nào **vuông góc** với g ?

- A. $g_4 = \begin{cases} \begin{cases} = 6w \\ = 4 + w \\ = 8w \end{cases} \end{cases}$. B. $g_5 = \begin{cases} \begin{cases} = 5 \\ = 5 + w \\ = 4 + w \end{cases} \end{cases}$.
C. $g_6 = \frac{\begin{cases} -5 \\ -6 \end{cases}}{6} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -8 \end{cases}}{5} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -8 \end{cases}}{-8}$. D. $g_7 = \frac{\begin{cases} +5 \\ -4 \end{cases}}{5} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -4 \end{cases}}{-4} = \frac{\begin{cases} +4 \\ -4 \end{cases}}{5}$.

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathbb{R}\{||\}$, cho đường thẳng $g = \frac{\begin{cases} +5 \\ -4 \end{cases}}{5} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -4 \end{cases}}{-4} = \frac{\begin{cases} +4 \\ -4 \end{cases}}{5}$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **song song** với g ?

- A. $g_4 = \begin{cases} \begin{cases} = 5 + 6w \\ = 5 - w \\ = 4 + 7w \end{cases} \end{cases}$. B. $g_5 = \begin{cases} \begin{cases} = 6w \\ = 4 + w \\ = 8w \end{cases} \end{cases}$.
C. $g_6 = \frac{\begin{cases} +5 \\ -7 \end{cases}}{-7} = \frac{\begin{cases} +6 \\ -5 \end{cases}}{5} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -7 \end{cases}}{-7}$. D. $g_7 = \frac{\begin{cases} +5 \\ -4 \end{cases}}{9} = \frac{\begin{cases} +4 \\ -6 \end{cases}}{-6} = \frac{\begin{cases} -4 \\ -9 \end{cases}}{9}$.

Câu 102: [ĐHQG TPHCM Cơ Sở 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3 \end{cases} \text{ và đường thẳng } \Delta': \begin{cases} x=3+2t' \\ y=1-t' \\ z=-3 \end{cases}. \text{ Vị trí tương đối của } \Delta \text{ và } \Delta' \text{ là}$$

- A. $\Delta // \Delta'$. B. $\Delta \equiv \Delta'$. C. Δ cắt Δ' . D. Δ, Δ' chéo nhau.

Câu 103: [THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(5; -3; 2)$

và mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$. Tìm phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc (P) .

- A. $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$. B. $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.
C. $\frac{x-6}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{1}$. D. $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 104: [THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): 2x-2y+z=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi Δ là một đường thẳng chứa trong (P) , cắt và vuông góc với d . Vector $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vector chỉ phương của Δ . Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 1$. B. $S = 0$. C. $S = 2$. D. $S = 4$.

Câu 105: [THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường

thẳng song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ là:

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 106: [Đề tham khảo 2021 – BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): 2x+2y-z-3=0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 107: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): y+2z=0$, hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=4t \end{cases}$

và $d_2: \begin{cases} x=2-t' \\ y=4+2t' \\ z=4 \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) và cắt hai đường thẳng

$d_1; d_2$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-4}$. B. $\frac{x+1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}$. C. $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}$. D. $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{4}$.

Câu 108: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$,

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) vuông góc với d_1 , cắt Oz tại A

và cắt d_2 tại B (có tọa nguyên) sao cho $AB = \sqrt{21}$.

A. $(\alpha): 10x - 5y + 5z + 1 = 0$.

B. $(\alpha): 4x - 2y + 2z + 1 = 0$.

C. $(\alpha): 2x - y + z + 1 = 0$.

D. $(\alpha): 2x - y + z + 2 = 0$.

Câu 109: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d qua M cắt d_1, d_2 lần lượt

tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 3.

B. 2.

C. $\sqrt{6}$.

D. $\sqrt{5}$.

4. Hướng dẫn bài tập vị trí tương đối của đường thẳng.

Câu 96: Trong không gian $\mathbb{R}\{|\}$, cho hai đường thẳng $g_4 = \frac{\{-4}{4} = \frac{|-6}{-4} = \frac{|+4}{4}$ và $g_5 = \begin{cases} \{ = q + 5w \\ | = -4 - 5w \\ \} = 6 + pw \end{cases}$. Với

giá trị nào của p thì hai đường thẳng đó trùng nhau?

A. $p = 5/4 = 8$.

B. $p = -5/4 = 8$.

C. $p = 8/4 = 5$.

D. $p = -8/4 = 5$.

Hướng dẫn

Kĩ năng: Quan sát các đáp án thì chỉ cần thỏa mãn $\overrightarrow{u_2} = 2\overrightarrow{u_1} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 97: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathbb{R}\{|\}$, cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình

$g_4 = \begin{cases} \{ = 4 + dw \\ | = w \\ \} = -4 + 5w \end{cases}$ và $g_5 = \begin{cases} \{ = 4 - w \\ | = 5 + 5w \\ \} = 6 - w \end{cases}$. Với giá trị nào của d thì g_4 và g_5 cắt nhau?

A. $d = 3$.

B. $d = 4$.

C. $d = \frac{4}{5}$.

D. $d = 5$.

Hướng dẫn

Kĩ năng: từ d_1 thế y và $z = -1 + 2y$ vào d_2 ta có, **Casio:** $\frac{y-2}{2} = \frac{-1+2y-3}{-1}$

SHIFT SOLVE tìm được $y = 2, z = 3 \Rightarrow x = 2a + 1 = 1 \Rightarrow$ **đáp số A.**

Câu 98: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathbb{R}\{|\}$, cho đường thẳng $g = \begin{cases} \{ = w \\ | = 5 \\ \} = 5 + w \end{cases}$. Trong các đường

thẳng sau, đường thẳng nào cắt g ?

A. $g_4 = \frac{\{-6}{4} = \frac{|-5}{5} = \frac{|-4}{4}$.

B. $g_5 = \frac{\{-4}{4} = \frac{|-5}{-4} = \frac{|-6}{4}$.

$$\text{C. } g_6 = \begin{cases} \{ = 5 - w \\ | = 4 \\ \} = -w \end{cases}.$$

$$\text{D. } g_7 = \begin{cases} \{ = 4 + 5w \\ | = 5 \\ \} = 6 + 5w \end{cases}.$$

Hướng dẫn

Kĩ năng: Quan sát $\Rightarrow$ loại **C** và **D** (!?)

Thế $y = 2$ từ d vào d₁ $\Rightarrow x = 3, z = 1$ thay trở về d $\Rightarrow$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ **Chọn B**.

Câu 99: Trong không gian với hệ tọa độ $R\{|\}$, cho đường thẳng $\Delta = \frac{\{ = 1}{4} = \frac{| + 5}{-4} = \frac{\} - 4}{6}$ đi qua điểm $A(2; m; n)$. Khi đó giá trị của $m; n$ lần lượt là:

A. $p = -5; q = 4$

B. $p = 5; q = -4$

C. $p = -7; q = :$

D. $p = 3; q = :$

Hướng dẫn

Kĩ năng: Từ điểm A, thế $x = 2$ vào Δ , suy ra $y = m = -4, z = n = 7 \Rightarrow$ **Chọn C**.

Câu 100: Trong không gian với hệ tọa độ $R\{|\}$, cho đường thẳng $g = \begin{cases} \{ = -4 + 5w \\ | = -w \\ \} = -5 - w \end{cases}$. Trong các đường

thẳng sau, đường thẳng nào **vuông góc** với g ?

A. $g_4 = \begin{cases} \{ = 6w \\ | = 4 + w \\ \} = 8w \end{cases}$

B. $g_5 = \begin{cases} \{ = 5 \\ | = 5 + w \\ \} = 4 + w \end{cases}$

C. $g_6 = \frac{\{ - 5}{6} = \frac{|}{5} = \frac{\} - 4}{-8}$

D. $g_7 = \frac{\{ + 5}{5} = \frac{|}{-4} = \frac{\} + 4}{5}$

Hướng dẫn

Kĩ năng: (Từ d) Ghi vào màn hình 2A - B - C bấm CALC nhập (A; B; C) là tọa độ VTCP trong các đáp án, chọn đáp số bằng 0 $\Rightarrow$ kết quả **Chọn A**.

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $R\{|\}$, cho đường thẳng $g = \frac{\{ + 5}{5} = \frac{|}{-4} = \frac{\} + 4}{5}$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **song song** với g ?

A. $g_4 = \begin{cases} \{ = 5 + 6w \\ | = 5 - w \\ \} = 4 + 7w \end{cases}$

B. $g_5 = \begin{cases} \{ = 6w \\ | = 4 + w \\ \} = 8w \end{cases}$

C. $g_6 = \frac{\{ + 5}{-7} = \frac{| + 6}{5} = \frac{\} - 4}{-7}$

D. $g_7 = \frac{\{ = 1}{9} = \frac{| + 4}{-6} = \frac{\} - 4}{9}$

Hướng dẫn

Kĩ năng: Quan sát các VTCP thì chỉ có **C** và **D** thỏa mãn $\vec{u}' = k\vec{u}$;

Trong đáp án **C** ta có $\overrightarrow{M_0M_3} = (0; -3; 2) \neq l.(2; -1; 2) \Rightarrow$ **Chọn C**.

Câu 102: [ĐHQG TPHCM Cơ Sở 2] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 \end{cases}$ và đường thẳng $\Delta': \begin{cases} x = 3 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = -3 \end{cases}$. Vị trí tương đối của Δ và Δ' là

A. $\Delta // \Delta'$.

B. $\Delta \equiv \Delta'$.

C. Δ cắt Δ' .

D. Δ, Δ' chéo nhau.

Hướng dẫn

Ta thấy $\vec{u} = \vec{u}' = (2; -1; 0)$ và $\overrightarrow{M_0M_0'} = (2; -1; 0) = \vec{u}$ suy ra $\Delta \equiv \Delta'$. **Chọn B.**

Câu 103: [THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(5; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc (P) .

A. $\frac{x+5}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$. **B.** $\frac{x-5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.
C. $\frac{x-6}{1} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x+5}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn

Ta thấy ngay $\vec{u} = \vec{n}_p = (1; -2; 1)$ nên loại đáp án B. Mà trong đáp án A, $\overrightarrow{M_0M} = (10; -6; 4) \neq k\vec{u}$ nên loại A. Trong đáp án C, $\overrightarrow{M_0M} = (-1; 2; -1) = -\vec{u}$. **Chọn C.**

Câu 104: [THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi Δ là một đường thẳng chứa trong (P) , cắt và vuông góc với d . Vector $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vector chỉ phương của Δ . Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 4$.

Hướng dẫn

Ta có $\vec{u} = [\vec{n}_p, \vec{u}_d]$ nên vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $2 = -2 = -1 =$ dòng hai $1 = 2 = 1 =$ ta có $x = 0, y = \frac{1}{2}$ do đó $\vec{u} = (0; 1; 2)$. Suy ra $a = 0, b = 2$. **Chọn C.**

Câu 105: [THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng

$d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. **C.** $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Hướng dẫn

Từ tính song song $\Rightarrow$ loại đáp án D. Mà trong đáp án A, thế $y = x$ vào d_2 không thỏa mãn $\Rightarrow$ loại đáp án A.

Trong B, thế $y = x - 1$ vào d_1 , ta có $\frac{x+1}{2} = \frac{x}{1}$. Giao điểm là: $x = 1, y = 0, z = 1$.

Thế $y = x - 1$ vào d_2 , ta có $\frac{x-1}{-1} = \frac{x-3}{1}$. Giao điểm là: $x = 2, y = 1, z = 0$. **Chọn B.**

Lời bình.

Dùng phép thế trực tiếp để tìm giao điểm là nhanh nhất. Nếu dùng thông qua tham số t là $x = t, y = t - 1$ thì cũng cho kết quả như nhau, nhưng dài dòng thêm.

Câu 106: [Đề tham khảo 2021 – BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng

$$(P): 2x + 2y - z - 3 = 0 \text{ và hai đường thẳng } d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2}, d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

Đường thẳng vuông góc với (P) , đồng thời cắt cả d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1}.$

B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2}.$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}.$

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$

Hướng dẫn

Từ tính vuông góc $\Rightarrow$ loại đáp án **B** và **C**. Từ đáp án A, thế $x = -2z - 1$ vào d_1 , ta có $\frac{-2z-2}{2} = \frac{z+1}{-2}$. Giao điểm là: $x = 1, y = 0, z = -1$.

Từ đáp án A, thế $x = -2z - 1$ vào d_2 , ta có $\frac{-2z-3}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Giao điểm là: $x = 3, y = 2, z = -2$. **Chọn A.**

Cách 2. Biến đổi phương trình.

Từ tính vuông góc $\Rightarrow$ loại đáp án B và C. Từ đáp án A, ta có $\frac{x-3}{2} + 1 = \frac{y-2}{2} + 1 = \frac{z+2}{-1} + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}. \text{ Đến đây ta so sánh với } d_1 \text{ và } d_2.$$

+ So sánh với d_1 nếu chúng cắt nhau thì $\frac{z+1}{-1} = \frac{z+1}{-2}$, suy ra giao điểm $(1; 0; -1)$.

+ So sánh với d_2 nếu chúng cắt nhau thì $\frac{x-1}{2} = \frac{x-2}{1}$, suy ra giao điểm $(3; 2; -2)$.

Câu 107: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): y + 2z = 0$, hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$

và $d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4 \end{cases}$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) và cắt hai đường thẳng

$d_1; d_2$ có phương trình là

A. $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-4}.$

B. $\frac{x+1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}.$

C. $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}.$

D. $\frac{x-1}{7} = \frac{y}{8} = \frac{z}{4}.$

Hướng dẫn

Từ $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ nên loại đáp án **A** và **D**.

Từ d_2 thế $z = 4$ vào đáp án **B**, ta có $x = 6, y = -8$ thay trở về d_2 thì loại. **Chọn C.**

Câu 108: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$,

$$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}. \text{ Viết phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ vuông góc với } d_1, \text{ cắt } Oz \text{ tại } A$$

và cắt d_2 tại B (có tọa nguyên) sao cho $AB = \sqrt{21}$.

A. $(\alpha): 10x - 5y + 5z + 1 = 0.$

B. $(\alpha): 4x - 2y + 2z + 1 = 0.$

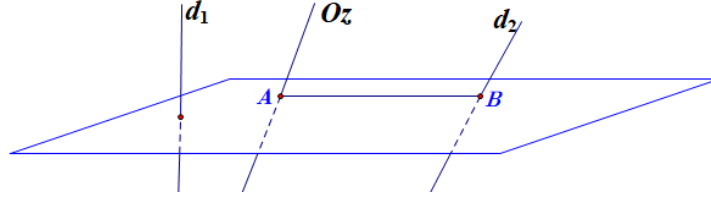
C. $(\alpha): 2x - y + z + 1 = 0.$

D. $(\alpha): 2x - y + z + 2 = 0.$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Phương pháp khử dần ẩn.

Gọi $A(0;0;a) \in Oz, B(1+b;2b;-1+b) \in d_2 \Rightarrow \overrightarrow{BA} = (-b-1; -2b; a-b+1).$



Vì $\overrightarrow{BA} \perp \vec{u}_1$ nên ta có $-2b - 2 + 2b + a - b + 1 = 0 \Rightarrow b = a - 1.$

Từ đó $\overrightarrow{BA} = (a; 2 - 2a; 2)$, từ độ dài suy ra $a^2 + (2a - 2)^2 + 4 = 21 \Rightarrow a = -1 \in \mathbb{Z}.$

Phương trình $(\alpha): 2x - y + z + 1 = 0.$ **Chọn C.**

Cách 2. Phương pháp dồn biến.

Vì (α) vuông góc với d_1 , cắt Oz tại $A(0;0;a)$ nên phương trình có dạng:

$$(\alpha): 2x - y + z = a.$$

(α) cắt d_2 tại B , với t thỏa mãn: $2(t+1) - 2t + t - 1 = a \Leftrightarrow t = a - 1.$ Do đó tọa độ B là:

$$B(a; 2a - 2; a - 2), \text{ suy ra } \overrightarrow{AB} = (a; 2a - 2; -2) \Rightarrow AB^2 = 5a^2 - 8a + 8 = 21.$$

Giải ra $a = -1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\alpha): 2x - y + z = -1.$ **Chọn C.**

Câu 109: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;3;-2)$ và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}; d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}.$$

Đường thẳng d qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 3.

B. 2.

C. $\sqrt{6}.$

D. $\sqrt{5}.$

Hướng dẫn giải

Cách 1. Phương pháp khử dần ẩn.

Gọi $A(a+1; 3a+2; a) \in d_1, B(b; -1-2b; -2-4b) \in d_2.$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (a-2; 3a-1; a+2), \overrightarrow{MB} = (b-3; -4-2b; -4b)$ cùng phương nên:

$$\begin{cases} a-2 = kb-3k \\ 3a-1 = -2kb-4k, \text{ từ (1) và (3), ta có: } -5kb+3k = 4 \Rightarrow 5kb = 3k-4. \\ a+2 = -4kb \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có $-5 = 5kb - 5k \Rightarrow 5kb = 5k - 5.$ Suy ra $5k - 5 = 3k - 4.$

Suy ra $k = \frac{1}{2}, b = -1, a = 0.$ Cuối cùng $\overrightarrow{BA} = (2; 1; -2) \Rightarrow AB = 3.$ **Chọn A.**

Cách 2. Xét vị trí tương đối.

Nhận xét $\overrightarrow{M_1M} = (2; 1; -2), \overrightarrow{M_2M} = (4; 2; -4)$ cùng phương nên $A \equiv M_1(1; 2; 0), B \equiv M_2(-1; 1; 2)$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{BA} = (2; 1; -2) \Rightarrow AB = 3$.

Cách 3. Phương pháp quỹ tích.

Lập phương trình mp(P) chứa M và d_1 , phương trình mp(Q) chứa M và d_2 , khi đó d là giao tuyến của (P) và (Q).

+ Vào MENU 9 1 2 nhập $1 = 3 = -1 =$ và $2 = 1 = 2 =$ ta có $\overrightarrow{n_p} = (7; -4; 5)$.

Sửa lại dòng đầu $-1 = 2 = -4 =$ ta có $\overrightarrow{n_q} = (8; -6; 5)$. Suy ra $\overrightarrow{u_d} = (2; 1; -2)$.

+ Phương trình $d: x = 3 + 2t, y = 3 + t, z = -2 - 2t$ cắt d_1 tại $A(1; 2; 0)$ và d_2 tại $B(-1; 1; 2)$.

.....

VII. HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐIỂM LÊN ĐƯỜNG THẲNG.

1. Kiến thức bổ xung.

- Tìm hình chiếu vuông góc H của điểm $M_1(x_1; y_1; z_1)$ trên đường thẳng Δ có

phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 hoặc chính tắc:
$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

✓ Tọa độ H tính theo công thức:
$$\begin{cases} x_H = x_0 + at \\ y_H = y_0 + bt, \\ z_H = z_0 + ct \end{cases}$$

với
$$t = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

→ CASIO: Đặt $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0) = (x; y; z)$ (Bộ số nhập máy) thì:

$$t = \frac{ax + by + cz}{a^2 + b^2 + c^2} \text{ STO } M \text{ và } H(x_0 + aM; y_0 + bM; z_0 + cM).$$

✓ Khoảng cách từ M_1 đến Δ là $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2)M^2}$ hoặc nếu không

cần tọa độ H thì ghi $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(ax + by + cz)^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$ CALC nhập bộ $(x; y; z)$.

• Chú ý:

Các công thức trên đều suy ra từ cách tìm t như bình thường, nhưng bằng chữ. Các em biến đổi: giao điểm của Δ với $mp(\alpha)$ qua M_1 và vuông góc Δ , rút ra công thức; Hoặc $\overrightarrow{M_1H} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0$ ta đều có t như trên. Các em đã thực hiện bằng số, hãy thực hiện bằng chữ nhé!

2. Các ví dụ giải toán.

Ví dụ 54: [THPT Chuyên Thái Bình] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi H hình chiếu

vuông góc của $M(2; 0; 1)$ lên đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tìm tọa độ điểm H .

A. $H(2; 2; 3)$.

B. $H(0; -2; 1)$.

C. $H(1; 0; 2)$.

D. $H(-1; -4; 0)$.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta giải tự luận, sau đó ta dùng CASIO để so sánh.

Cách 1. Tự luận.

Tọa độ H dạng tham số là $H(1+t; 2t; 1+t)$, suy ra $\overrightarrow{MH} = (t-1; 2t; 1+t)$ vuông góc với $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 2; 1)$ nên ta có: $\overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow t-1+4t+1+t=0 \Leftrightarrow t=0$. Vậy $H(1; 0; 2)$.

Cách 2. Casio.

Ghi vào màn hình $\frac{x+2y+z}{1^2+2^2+1^2}$ CALC (nhập bộ khi thay M vào tử số Δ) $1=0=-1==$
 STO M bấm $1+M:2M:2+M==$ ta được $H(1;0;2)$.

Ví dụ 55: [THTT Số 3-486] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm

$$M(1;3;2) \text{ đến đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=-t \end{cases}$$

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Trước hết ta giải tự luận, sau đó ta dùng CASIO để so sánh.

Cách 1. Tự luận.

Tọa độ H là hình chiếu của M là $H(1+t;1+t;-t)$, suy ra $\overrightarrow{MH} = (t; t-2; -2-t)$ vuông góc với $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1;-1)$ nên ta có: $\overrightarrow{u_\Delta} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow t+t-2+2+t=0 \Leftrightarrow t=0$.

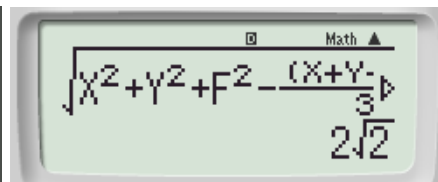
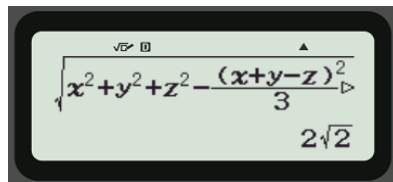
Vậy $\overrightarrow{MH} = (0; -2; -2) \Rightarrow MH = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Cách 2. Casio.

(Làm nháp nếu cần, chuyển về chính tắc $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$)

Ghi vào máy $\sqrt{x^2+y^2+z^2 - \frac{(x+y-z)^2}{3}}$ CALC (thay $M(1;3;2)$ vào tử số Δ)

$0=2=2==$ ta được $2\sqrt{2}$. **Chọn C.**



Lưu ý. Máy tính 570 thì phím z thay bằng phím F

Ngoài ra ta cũng có thể giải bằng khảo sát Parabol biến t từ $MH^2 = 3t^2 + 8$.

Ví dụ 56: Tính khoảng cách từ điểm $E(2;-1;-3)$ đến đường thẳng $d: \begin{cases} x=2+t \\ y=4+3t \\ z=-2-5t \end{cases} (t \in R)$ bằng:

A. $\frac{9}{\sqrt{7}}$.

B. $\frac{4}{\sqrt{35}}$.

C. $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

D. $\frac{9\sqrt{14}}{7}$.

Hướng dẫn.

Cách 1. Khảo sát Parabol.

Gọi $H(2+t; 4+3t; -2-5t) \in d \Rightarrow \overrightarrow{EH} = (t; 5+3t; 1-5t)$, ta tìm giá trị nhỏ nhất của EH .

Ta có $\overrightarrow{EH}^2 = t^2 + (5+3t)^2 + (1-5t)^2 = 35t^2 + 20t + 26 \geq \frac{162}{7}$ nên $EH_{\min} = \frac{9\sqrt{14}}{7}$,

đạt được khi $t = -2/7$. **Chọn D.**

Cách 2. CASIO.

Ghi $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(1x + 3y - 5z)^2}{1 + 9 + 25}}$ CALC nhập (Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{M_0E}$) $0 = -5 = -1 =$

Kết quả $\frac{9\sqrt{14}}{7}$. **Chọn D.**

Nhận xét.

Nhìn vào cột tham số t ta thấy bộ $t; 3t; -5t$ và so sánh trong công thức $x + 3y - 5z$ có sự thể biến $x; y; z$ tương ứng. Như thế ta chỉ việc tính nhằm tọa độ véc tơ $\overrightarrow{M_0E}$ bằng cách trừ theo hàng ngang thành phần tương ứng. Trên đây là công thức tính khoảng cách nhanh nhất rồi, các em chỉ thực hiện vài lần là OK!.

Còn ngay cả việc tính nhằm véc tơ $\overrightarrow{M_0E}$ mà không muốn làm thì chỉ có cách ghi đầy đủ công thức (Khá dài nhé!):

$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 - \frac{(1(x-2) + 3(y-4) - 5(z+2))^2}{1+9+25}}$ CALC nhập tọa độ của điểm E là $2 = -1 = -3 =$ cùng kết quả $\frac{9\sqrt{14}}{7}$.

Ví dụ 57: [THPT Chuyên Thái Bình] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$

và đường thẳng có phương trình $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

B. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}$.

C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$.

D. $\frac{x-2}{-3} = \frac{-y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Hướng dẫn.

Cách 1. Trắc nghiệm loại trừ.

Kiểm tra tính vuông góc với d , ghi $2A + B - C$ bấm CALC nhập bộ véc tơ chỉ phương trong các đáp án, chỉ có đáp án A cho kết quả bằng 0. **Chọn A.**

Cách 2. CASIO.

Tìm hình chiếu của M trên d ghi $\frac{2x+y-z}{6}$ CALC nhập $1 = 2 = 0 =$ STO **M**

Bấm AC ghi $1 + 2M - 2 : -1 + M - 1 : -M =$ = véc tơ $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{3}(1; -4; -2)$. **Chọn A.**

Ví dụ 58: Đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = -4 + 6t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -2 - 3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

Hướng dẫn.

Cách 1. Khảo sát Parabol.

Gọi $M(-4+6t; 1+t; 3-2t) \in d_2$, ta tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ M đến d_1 .

$$\text{Ta có } \overline{MH}^2 = (6t-7)^2 + (t-1)^2 + (6-2t)^2 - \frac{(3(6t-7)-1(6-2t))^2}{9+1}$$

$$\overline{MH}^2 = 41t^2 - 110t + 86 - \frac{(20t-27)^2}{10} = t^2 - 2t + \frac{131}{10} \text{ nên } \overline{MH}^2_{\min} \Leftrightarrow t = 1.$$

Chỉ có đáp án **D** thì đường thẳng đi qua $M(2; 2; 1)$. **Chọn D.**

Lưu ý.

$$\text{Có thể tính giá trị } t' = \frac{20t-27}{10} = \frac{-7}{10} \Rightarrow H\left(\frac{9}{10}; 2; \frac{-23}{10}\right) \Rightarrow \overline{MH} = \frac{-11}{10}(1; 0; 3).$$

Cách 2. Tính trực tiếp.

Gọi d là đường vuông góc chung, vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $3 = 0 = 1 =$ và dòng hai $6 = 1 = 2 =$ ta có $x = \frac{1}{3}, y = 0$ suy ra $\vec{u}_d = (1; 0; 3)$. Đến đây loại đáp án **C**, loại tiếp đáp án **A** vì $y = -2$ không thỏa mãn d_1 .

Từ đáp án **B**, thế $y = 2$ vào d_2 thì $t = 1$ nên $x = 2, z = 1$ thế trở về đáp án **B** thì mâu thuẫn.

Vậy **chọn D.**

Lời bình.

Giả sử $A(3+a; 2; -3-a) \in d_1, B(-4+6b; 1+b; 3-2b) \in d_2$ là đoạn vuông góc chung AB , thì $\overline{AB} \& \vec{u}_d$ cùng phương. Trước hết cho thành phần tung độ $1+b-2=0 \Rightarrow b=1$ và khi đó tọa độ $B(2; 2; 1)$, tiếp theo trong các đáp án **B** và **D**, tính $\overline{M_0B}$ cùng phương $\vec{u}_d = (1; 0; 3)$ thì chọn. Trong **D** có $\overline{M_0B} = \vec{u}$. Như vậy theo cách này khá dài dòng. Cách thế trực tiếp để tìm giao điểm là nhanh nhất!

(Xem thêm phần phụ lục)

.....

VIII. BÀI TẬP TỔNG HỢP CUỐI PHẦN 1.

1. Đề bài.

Câu 110: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ và cắt các trục Ox , Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d . Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x + 2y + 5z - 5 = 0$. B. $x + 2y + 5z - 4 = 0$. C. $x + 2y - z - 4 = 0$. D. $2x - y - 3 = 0$.

Câu 111: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(2;3;0)$. Biết rằng tam giác ABC có trục tâm $H(0;3;2)$ tìm tọa độ của điểm C .

A. $C(3;2;3)$. B. $C(4;2;4)$. C. $C(1;2;1)$. D. $C(2;2;2)$.

Câu 112: [SGD Hà Tĩnh] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho độ dài OA , OB , OC theo thứ tự tạo thành cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ O tới mặt phẳng (α) .

A. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{21}$. C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. D. $9\sqrt{21}$.

Câu 113: [THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc] Biết rằng có n mặt phẳng có phương trình tương ứng là $(P_i): x + a_i y + b_i z + c_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) đi qua $M(1;2;3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox , Oy , Oz theo thứ tự tại A , B , C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Tính tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

A. $S = 3$. B. $S = 1$. C. $S = -4$. D. $S = -1$.

Câu 114: [Đề_2017_BGD] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

A. $M(-1; 0; -3)$. B. $M(2; 3; 3)$.
C. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 115: [THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;7;0)$ và $B(3;0;3)$. Phương trình đường phân giác trong của $\widehat{AOB}$ là

A. $d: \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$. B. $d: \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$. C. $d: \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$. D. $d: \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4}$.

Câu 116: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases}$ ($t, t' \in \mathbb{R}$). Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$.

Câu 117: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2;0;-1)$, $B(1;-2;-7)$ và $C(5;-14;-1)$.
Viết phương trình đường phân giác trong góc $\widehat{ABC}$.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z+7}{-18}$. B. $\frac{x+9}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{7}$.
C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-7}{9}$. D. $\frac{x-1}{-9} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+7}{1}$.

Câu 118: [THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+9=0$, đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$.
Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 119: [SGD Nam Định] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là: $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0;5;3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1;1;0)$ thuộc đường thẳng AC . Vector nào sau đây là vector chỉ phương của đường thẳng AC .

A. $\vec{u} = (1;2;3)$. B. $\vec{u} = (0;1;3)$. C. $\vec{u} = (0;-2;6)$. D. $\vec{u} = (0;1;-3)$.

Câu 120: [THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại C , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x+z-1=0$. Biết B là điểm có hoành độ dương, gọi $(a;b;c)$ là tọa độ điểm C , giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 3. B. 2. C. 4. D. 7.

Câu 121: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $C(3;2;3)$, đường cao AH nằm trên đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và BD là đường phân giác trong của góc B nằm trên đường thẳng d_2 có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Diện tích tam giác ABC bằng

A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $4\sqrt{3}$. D. 8.

Câu 122: [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường

phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

- A.** $\vec{u} = (2; 1; -1)$. **B.** $\vec{u} = (1; -1; 0)$. **C.** $\vec{u} = (0; 1; -1)$. **D.** $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Câu 123: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết điểm $A(1; 2; 3)$,

đường trung tuyến BM là $\begin{cases} x = 5t \\ y = 0 \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ và đường cao CH có phương trình là

$\frac{x-4}{16} = \frac{y+2}{-13} = \frac{z-3}{5}$. Viết phương trình đường phân giác góc A .

- A.** $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{10}$. **B.** $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{5}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$. **D.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-3}{-5}$.

Câu 124: [THPT Chuyên ĐHSPhà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 0)$, $C(-2; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A , trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

- A.** $4x - 2y - z + 4 = 0$. **B.** $4x - 2y + z + 4 = 0$. **C.** $4x + 2y + z - 4 = 0$. **D.** $4x + 2y - z + 4 = 0$.

Câu 125: [THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh] Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1; 0; 1)$, $B(1; 0; -3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua gốc tọa độ O . Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

- A.** $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$.

Câu 126: [THPT Chuyên Vĩnh Phúc] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 2; 1)$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) .

- A.** $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **B.** $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$. **C.** $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. **D.** $\Delta: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Câu 127: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho OAB là tam giác đều. Phương trình của Δ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=1+4t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases} \end{array}$$

Câu 128: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng

$$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}. \text{ Tìm } m \text{ để } (d) \text{ cắt } (S) \text{ tại hai điểm } M, N \text{ sao cho } MN = 8.$$

$$\text{A. } m = -24. \quad \text{B. } m = 8. \quad \text{C. } m = 16. \quad \text{D. } m = -12.$$

Câu 129: Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = 2+t \end{cases}$. Phương trình

mặt cầu (S) tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{2}. & \text{B. } x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}. \\ \text{C. } x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{3}. & \text{D. } x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{3}. \end{array}$$

Câu 130: [THPT Chuyên Phan Bội Châu] Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4} \text{ và mặt cầu } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2. \text{ Hai mặt phẳng } (P), (Q)$$

chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M và N là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng MN bằng?

$$\text{A. } 2\sqrt{2}. \quad \text{B. } \frac{4\sqrt{3}}{3}. \quad \text{C. } \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \text{D. } 4.$$

Câu 131: [THPT Chuyên Ngữ-Hà Nội] Trong không gian độ Oxyz, cho điểm $M(2;3;1)$ và mặt

cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

$$\text{A. } r = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \text{B. } r = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{C. } r = \frac{\sqrt{2}}{3}. \quad \text{D. } (2).$$

Câu 132: [THPT Số 1-484] Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5+t \\ y = -2-4t \\ z = -1-4t \end{cases}$, mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ có bán kính $R = \sqrt{19}$ và mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z - 1 = 0$. Trong các số $\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a + b + c + d = 43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc d và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

$$\text{A. } \{-6; -12; -14; 75\}. \quad \text{B. } \{6; 10; 20; 7\}. \quad \text{C. } \{-10; 4; 2; 47\}. \quad \text{D. } \{3; 5; 6; 29\}.$$

Câu 133: [THPT Lê Lai–Thanh hóa] Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=1 \\ y=1, \\ z=t \end{cases} \quad d': \begin{cases} x=2 \\ y=t' \\ z=1+t' \end{cases} \quad \text{và } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}. \text{ Gọi } (S) \text{ là mặt cầu có tâm thuộc } \Delta \text{ và tiếp}$$

xúc với hai đường thẳng d, d' . Phương trình của (S) là

A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$ **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1.$
C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$ **D.** $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(z-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$

Câu 134: [THPT Chuyên ĐH KHTN–Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5;0;0)$ và $B(3;4;0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}.$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}.$ **D.** $\sqrt{3}.$

Câu 135: [Đề Star Education] Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, đường thẳng

$$(d): \frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2} \text{ và mặt cầu } (S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16. \text{ Hỏi có bao nhiêu}$$

đường thẳng (Δ) qua A , vuông góc (d) và tiếp xúc với (S)

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 136: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $B(1;2;-5)$, đường thẳng $(d):$

$$\frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+1}{-1} \text{ và mặt cầu } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4. \text{ Hỏi có bao nhiêu}$$

đường thẳng (Δ) qua B , vuông góc (d) và tiếp xúc với (S)

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 137: Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Hỏi (P) song song với mặt phẳng nào?

A. $3x - y + 2z = 0.$ **B.** $2x - 2y + z + 5 = 0.$ **C.** $x + y + z = 0.$ **D.** $x + 3y + z + 5 = 0.$

Câu 138: [SGD Bắc Ninh] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1;0;0), B(2;1;3); C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r = \sqrt{3}.$ **B.** $r = 6$ **C.** $r = 3.$ **D.** $r = \sqrt{6}.$

Câu 139: [SGD Phú Thọ] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của ba hình tròn đó bằng

- A. 12π . B. 3π . C. 22π . D. 11π .

Câu 140: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Trên d lấy điểm M và kẻ 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ, \widehat{BMC} = 90^\circ, \widehat{CMA} = 120^\circ$. Biết tọa độ $M(a;b;c)$ với $a < 0$. Tổng $a+b+c$ bằng:

- A. -1 . B. 2 . C. -2 . D. 1 .

Câu 141: [Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và $(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C) .

- A. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$. B. $J\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$. C. $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. D. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Câu 142: [THPT Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ và điểm } M(x_0; y_0; z_0) \in (d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-3t \end{cases} \text{ Ba điểm } A, B, C \text{ phân biệt cùng}$$

thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1;1;2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng:

- A. 30 . B. 26 . C. 20 . D. 21 .

Câu 143: [HỘI 8 TRƯỜNG CHUYÊN] Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ và $(S'): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khoảng cách từ O đến (P) bằng

- A. $\frac{14}{3}$. B. $\frac{17}{7}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{19}{2}$.

Câu 144: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 3; 0)$ song song mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 1 = 0$ và vuông góc với đường thẳng $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{4}$. Phương trình tham số của đường thẳng d là:

- A. $\begin{cases} x = 2 - 11t \\ y = 3 - 10t \\ z = 13t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 13 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 3t \end{cases}$.

Câu 145: [THTT số 6-489] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng

$$(P): 2x - y + z - 10 = 0 \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}. \text{ Tìm phương trình đường thẳng}$$

Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm đoạn MN .

A. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$.

B. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$.

D. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$.

Câu 146: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-8}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{m-1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. Giá

trị của m để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau là

A. $m = -\frac{25}{8}$.

B. $m = \frac{25}{8}$.

C. $m = 3$.

D. $m = -3$.

Câu 147: [THPT Kinh Môn-Hải Dương] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}. \text{ Tìm hình chiếu vuông góc của } \Delta \text{ trên mặt phẳng } (Oxy).$$

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 148: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường

$$\text{thẳng } d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}. \text{ Hình chiếu của } d \text{ trên } (P) \text{ là đường thẳng } d'. \text{ Trong các điểm}$$

sau, điểm nào thuộc đường thẳng d' ?

A. $M(2;5;-4)$.

B. $N(1;-1;3)$.

C. $P(1;3;-1)$.

D. $Q(2;7;-6)$.

Câu 149: [Đề chính thức TNTHPT 2021 – BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1} \text{ và mặt phẳng } (P): x + 2y + z - 4 = 0. \text{ Hình chiếu vuông góc của } d \text{ lên}$$

(P) là đường thẳng có phương trình:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$.

B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$.

C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$.

D. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 150: [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;-2)$,

$B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Điểm $M(a,b,c)$ thuộc (P) sao cho mặt

phẳng (ABM) vuông góc với (P) và $MA^2 + MB^2 = 246$. Tính $S = a + b + c$.

A. 0.

B. -1.

C. 10.

D. 13.

Câu 151: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 1 = 0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là

A. $(3; -2; -1)$. **B.** $(-3; 8; -3)$. **C.** $(0; 3; -2)$. **D.** $(6; -7; 0)$.

Câu 152: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z + 4 = 0$ và cắt cả hai đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}, d': \begin{cases} x = 3+t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$, trong các điểm sau, điểm nào thuộc đường thẳng Δ ?

A. $M(6; 5; -4)$. **B.** $N(4; 5; 6)$. **C.** $P(5; 6; 5)$. **D.** $Q(4; 4; 5)$

Câu 153: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 3), B(2; -1; 1), C(-1; 1; 0), D(1; 2; -1)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. $\frac{4}{\sqrt{11}}$. **B.** $\frac{6}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Câu 154: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x + y - z - 7 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}; \Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$. Gọi M là điểm thuộc Δ_1 , M có tọa độ là các số dương, M cách đều Δ_2 và (P) . Khoảng cách từ điểm M đến (P) là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2 . **C.** 7 . **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 155: [THPT Nho Quan – Ninh Bình] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0; 1; 0), B(2; 2; 2), C(-2; 3; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

A. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{13}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{13}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{13}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

Câu 156: [PTNK - ĐHQG TP HCM] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = -3-t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 3+2t \\ z = 1-t \end{cases}$. Trên d_1 lấy hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 3$. Trên d_2 lấy hai điểm C, D thỏa mãn $CD = 4$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V = 7$. **B.** $V = 2\sqrt{21}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{21}}{3}$. **D.** $V = \frac{5\sqrt{21}}{6}$.

Câu 157: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}$

$d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}$ và $d_3: \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt d_1, d_2, d_3 lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $AB = BC$. Phương trình đường thẳng Δ là

- A.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ **B.** $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ **C.** $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$ **D.** $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Câu 158: [Chuyên ĐB Sông Hồng] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$, $d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=m \end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau

và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S .

- A.** -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

2. Hướng dẫn giải bài tập cuối phần 1.

Câu 110: Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$

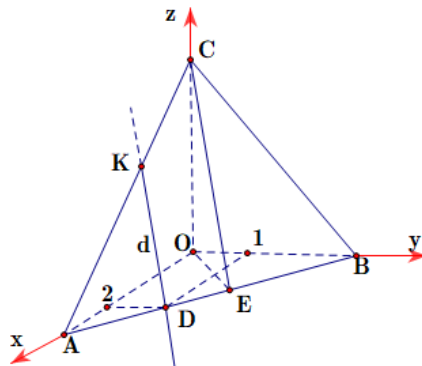
và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d . Phương trình của mặt phẳng (P) là

- A.** $x+2y+5z-5=0$. **B.** $x+2y+5z-4=0$. **C.** $x+2y-z-4=0$. **D.** $2x-y-3=0$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, ta có $\overrightarrow{BA} = (a; -b; 0) \perp \overrightarrow{u_d} = (1; 2; -1)$ suy ra $a = 2b$. Khi đó ta có $\overrightarrow{BA} = (2b; -b; 0) = b(2; -1; 0)$. Vào **Moode 9 1 2** nhập dòng đầu $1 = 2 = 1 =$ dòng hai là $2 = -1 = 0 =$ ta có $\vec{n} = (1; 2; 5)$ và do đó phương trình $(P): x+2y+5z-4=0$. **Chọn B.**

Cách 2. Về yếu tố phụ.



Đường thẳng d cắt AB tại D thuộc mặt phẳng (Oxy) , tọa độ $D(2;1;0)$. Do mp (P) chứa d và d không song song với Oz nên (P) cắt trục Oz tại C , kẻ CE vuông góc với AB ta có $CE \parallel d$.

Suy ra AB vuông góc với $\text{mp}(OCE)$ cố định, có $\overrightarrow{AB} = [\overrightarrow{u_d}, \vec{k}] = (2; -1; 0)$, do đó $\overrightarrow{n_p} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_d}] = (1; 2; 5)$ nên phương trình $(P): x + 2y + 5z - 4 = 0$. **Chọn B.**

Câu 111: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 0)$. Biết rằng tam giác ABC có trực tâm $H(0; 3; 2)$ tìm tọa độ của điểm C .

- A.** $C(3; 2; 3)$. **B.** $C(4; 2; 4)$. **C.** $C(1; 2; 1)$. **D.** $C(2; 2; 2)$.

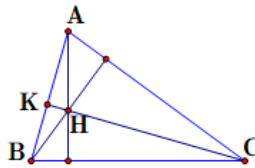
Hướng dẫn giải

Viết phương trình (ABH) , vào **MENU 9 1 3** giải hệ ba ẩn ta có: $x + z = 2$.

Phương trình mặt phẳng qua H và vuông góc với AB là: $x + 2y - z = 4$.

Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với HB là: $x - z = 0$.

Giải hệ ba ẩn trên ta được $C(1; 2; 1)$. **Chọn C.**



Cách 2.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AB , ghi $\frac{x+2y-z}{6}$ CALC nhập tọa độ véc tơ $\overrightarrow{AH}$

là $-1 = 2 = 1 ==$ STO **M** bấm $1 + M : 1 + 2M : 1 - M ==$ ta được $K\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{KH} = \left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{KC} = t\left(-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow C\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}t; \frac{5}{3} + \frac{4}{3}t; \frac{2}{3} + \frac{4}{3}t\right)$, suy ra

$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{-2}{3} - \frac{4}{3}t; \frac{-4}{3} + \frac{4}{3}t; \frac{2}{3} + \frac{4}{3}t\right) \perp \overrightarrow{HA} = (1; -2; -1)$ nên $-2 - 4t + 8 - 8t - 2 - 4t = 0$, giải ra

ta có $t = \frac{1}{4} \Rightarrow C(1; 2; 1)$. **Chọn C.**

Câu 112: [SGD Hà Tĩnh] Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; 1)$ và cắt tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho độ dài OA , OB , OC theo thứ tự tạo thành cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ O tới mặt phẳng (α) .

- A.** $\frac{4}{\sqrt{21}}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **D.** $9\sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, khi đó phương trình mặt phẳng (α) theo đoạn chắn: $bcx + cay + abz = abc$. Mặt khác theo giả thiết $b = 2a, c = 4a > 0$ thay vào ta có:

$4x + 2y + z = 4a$. Vì (α) đi qua $M(1; 2; 1)$ nên $9 = 4a$.

Phương trình (α) là $4x + 2y + z - 9 = 0$ và $d(O, (\alpha)) = \frac{9}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$. **Chọn C.**

Câu 113: [THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc] Biết rằng có n mặt phẳng có phương trình tương ứng là $(P_i): x + a_i y + b_i z + c_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) đi qua $M(1; 2; 3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Tính tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = -4$. **D.** $S = -1$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$, khi đó phương trình mặt phẳng (P) theo đoạn chắn: $bcx + cay + abz = abc$. Vì (P) đi qua $M(1; 2; 3)$ nên $bc + 2ca + 3ab = abc$ hay viết thành $b(c + a) + 2a(b + c) = abc$ (1).

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều nên $|a| = |b| = |c| = m > 0$. Từ (1) ta loại được ngay trường hợp $a = b = -c$, hoặc cả ba số cùng âm, còn lại ta xét:

+ $a = b = c = m$: thay vào (1) ta được $m = 6$, phương trình mặt phẳng (P_1) thỏa mãn đề bài là $(P_1): x + y + z = 6$. Như vậy $a_1 = 1$.

+ $a = c = m; b = -m$: thay vào (1) ta được $m = 2$, phương trình mặt phẳng (P_2) thỏa mãn đề bài là $(P_2): x - y + z = 2$. Như vậy $a_2 = -1$.

+ $a = c = -m; b = m$: thay vào (1) ta được $m = -2$ (loại).

+ $a = m; b = c = -m$: thay vào (1) ta được $m = -4$ (loại).

+ $a = -m; b = c = m$: thay vào (1) ta được $m = 4$, phương trình mặt phẳng (P_3) thỏa mãn đề bài là $(P_3): x - y - z = 4$. Như vậy $a_3 = -1$.

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn bài toán và $S = a_1 + a_2 + a_3 = -1$. **Chọn D.**

Câu 114: [Đề_2017_BGD] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

A. $M(-1; 0; -3)$.

B. $M(2; 3; 3)$.

C. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

D. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ đường thẳng rút ra $y = x + 1, z = 2x - 1$ và giả sử $M(x; x+1; 2x-1)$. Khi đó từ giả thiết ta có:

$$MA^2 + MB^2 = 28 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (x+2)^2 + (2x-3)^2 + (x+1)^2 + (x-1)^2 + (2x-4)^2 = 28$$

$$\text{SHIFT SOLVE 0.1} = \text{kết quả } x = \frac{1}{6} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right) \text{ (loại nghiệm } x = 2, z = 3).$$

Câu 115: [THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 7; 0)$ và $B(3; 0; 3)$. Phương trình đường phân giác trong của $\widehat{AOB}$ là

A. $d: \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$. **B.** $d: \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$. **C.** $d: \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$. **D.** $d: \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{4}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} OA = 5\sqrt{2} \\ OB = 3\sqrt{2} \end{cases}$. Một VTCP là $\overrightarrow{OA} + \frac{5}{3}\overrightarrow{OB} = (1; 7; 0) + \frac{5}{3}(3; 0; 3) = (6; 7; 5)$. **Chọn C.**

Câu 116: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases}$ ($t, t' \in \mathbb{R}$). Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2 .

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{3}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$. **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$.

Hướng dẫn giải

Các VTCP lần lượt là $\vec{a} = (1; 2; -1)$ và $\vec{b} = (-1; -1; 2)$.

Ta có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{6}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 < 0$, do đó ta đổi dấu đúng một véc tơ là $\vec{c} = (1; 1; -2)$.

Khi đó một VTCP cần tìm là $\vec{a} + \vec{c} = (2; 3; -3)$. Đến đây **chọn C**.

Câu 117: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-2; 0; -1)$, $B(1; -2; -7)$ và $C(5; -14; -1)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc $\widehat{ABC}$.

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z+7}{-18}$. **B.** $\frac{x+9}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{7}$.
C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-7}{9}$. **D.** $\frac{x-1}{-9} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+7}{1}$.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-3; 2; 6)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -12; 6) \Rightarrow BA = 7, BC = 14$. Suy ra một véc tơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm $\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \frac{7}{14}\overrightarrow{BC} = (-3; 2; 6) + (2; -6; 3) = (-1; -4; 9)$.

Câu 118: [THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu – Đồng Tháp] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với (P) .

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình mặt phẳng qua A và song song (P) là (Q): $x + y - z - 4 = 0$.

Giao điểm của Δ và (Q) là $B(2; 0; -2)$ suy ra $\vec{u}_{\Delta} = \vec{BA} = (-1; 2; 1)$. **Chọn D.**

Lưu ý sử dụng CASIO.

Để tìm giao điểm và VTCP ta làm như sau, ghi: $x+3 + 3x + 3 -2x - 4$ SHIFT SOLVE quay về sửa thành $1 -(x+3) : 2 -(3x+3) : -1-2x$ bấm $= = =$ ta có kết quả như trên.

Câu 119: [SGD Nam Định] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là: $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0; 5; 3)$ thuộc đường thẳng AB và điểm $N(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng AC . Vector nào sau đây là vector chỉ phương của đường thẳng AC .

A. $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

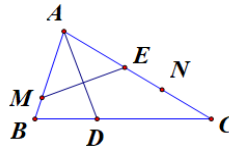
B. $\vec{u} = (0; 1; 3)$.

C. $\vec{u} = (0; -2; 6)$.

D. $\vec{u} = (0; 1; -3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi E là điểm đối xứng với M qua (d). Khi đó $E \in AC \Rightarrow$ đường thẳng AC có một vector chỉ phương là $\vec{NE}$. Ta xác định điểm E.

Ghi $\frac{x-4y-3z}{1+16+9}$ CALC nhập $0 = -1 = -3 =$ STO M.

Ghi $2M : -8M + 12 - 5 : -6M + 12 - 3$ bấm $= = =$ ta có $E(1; 3; 6) \Rightarrow \vec{NE} = (0; 2; 6)$.

Một vector chỉ phương của AC là $\vec{u} = (0; 1; 3)$.

Lời bình.

Nếu các em không quen thuộc về điểm đối xứng qua đường thẳng thì có thể xem cách giải sau. **Cách 2.**

Đặt vtcp đường phân giác AD là $\vec{a} = (1; -4; -3)$ và gọi $A(x; 6-4x; 6-3x) \in AD$, khi đó ta có: $\vec{AM} = (-x; 4x-1; 3x-3)$, $\vec{AN} = (1-x; 4x-5; 3x-6)$.

Theo tính chất phân giác trong của góc A suy ra: $\left| \cos(\vec{a}, \vec{AM}) \right| = \left| \cos(\vec{a}, \vec{AN}) \right|$ hay

$$\frac{|-x+4-16x+9-9x|}{\sqrt{x^2+(4x-1)^2+(3x-3)^2}} = \frac{|1-x+20-16x+18-9x|}{\sqrt{(1-x)^2+(4x-5)^2+(3x-6)^2}} \quad \text{SHIFT SOLVE 2 =}$$

giải ra $x=1 \Rightarrow \vec{AN} = (0; -1; -3) \Rightarrow \vec{u} = (0; 1; 3)$.

Câu 120: [THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông

tại C , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $AB = 3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+8}{-4}$, đường thẳng AC nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x+z-1=0$. Biết B là điểm có hoành độ dương, gọi $(a;b;c)$ là tọa độ điểm C , giá trị của $a+b+c$ bằng

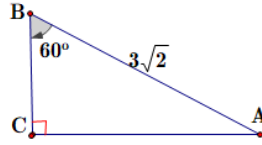
A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 7.

Hướng dẫn giải



Ta có A là giao điểm của đường thẳng AB với (α) . Tọa độ điểm A là $A(1;2;0)$.

Đặt $\overrightarrow{AB} = t(1;1;-4) \Rightarrow AB = |t| \cdot 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow t = \pm 1$, điểm B có hoành độ dương nên $t = 1$ và tọa độ $B(2;3;-4)$. Tam giác ABC vuông tại C , nên C là hình chiếu của B trên mp

(α) . Ghi $-\frac{x+0y+z-1}{2}$ CALC nhập $2=3=-4==$ STO **M**

Bấm AC ghi $M+x+0M+y+M+z$ kết quả bằng 4. **Chọn C.**

Câu 121: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $C(3;2;3)$, đường cao AH nằm trên đường

thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{-2}$ và BD là đường phân giác trong của góc B nằm trên đường

thẳng d_2 có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Diện tích tam giác ABC bằng

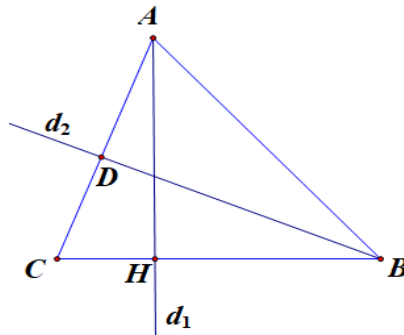
A. 4.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $4\sqrt{3}$.

D. 8.

Hướng dẫn giải



Mặt phẳng (P) qua C vuông góc với d_1 là $x+y-2z+1=0$, mp (P) cắt d_2 tại $B(1;4;3)$.

Lấy $A(2+t;3+t;3-2t) \in d_1$ suy ra $\overrightarrow{BA} = (1+t;-1+t;-2t)$, $\overrightarrow{BC} = (2;-2;0)$. Theo tính chất

phân giác ta có $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{u_2}) = \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{u_2}) \Leftrightarrow \frac{1+t+2-2t-2t}{\sqrt{(1+t)^2 + (-1+t)^2 + 4t^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = -1$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} = (0;-2;2)$. Diện tích ABC là $S = \frac{1}{2} \sqrt{(4+4)(4+4) - (4)^2} = 2\sqrt{3}$. **Chọn B.**

Câu 122: [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$,

phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường

phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ

phương là

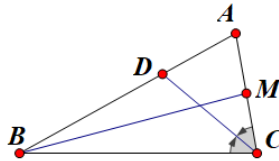
A. $\vec{u} = (2;1;-1)$.

B. $\vec{u} = (1;-1;0)$.

C. $\vec{u} = (0;1;-1)$.

D. $\vec{u} = (1;2;1)$.

Hướng dẫn giải



Gọi $M(3-t;3+2t;2-t)$ là trung điểm của AC , suy ra tọa độ $C(4-2t;3+4t;1-2t)$. Khi

đó C thuộc vào đường phân giác của góc C nên ta có $\frac{2-2t}{2} = \frac{4t-1}{-1} = \frac{-1-2t}{-1}$.

Suy ra $t=0$ và tọa độ $C(4;3;1)$. Lấy $B(3-b;3+2b;2-b)$, $b \neq 0$ thuộc trung tuyến, ta có:

$\vec{CB} = (-1-b;2b;1-b)$ và $\vec{CA} = (-2;0;2)$.

Do tính chất phân giác nên $\cos(\vec{CB}, \vec{u_d}) = \cos(\vec{CA}, \vec{u_d}) \Leftrightarrow \frac{-2-2b-2b-1+b}{\sqrt{6b^2+2}} = \frac{-4-2}{\sqrt{8}}$

Suy ra $\sqrt{3b^2+1} = b+1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow B(2;5;1) \Rightarrow \vec{AB} = (0;2;-2)$. **Chọn C.**

Câu 123: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết điểm $A(1;2;3)$,

đường trung tuyến BM là $\begin{cases} x=5t \\ y=0 \\ z=1+4t \end{cases}$ và đường cao CH có phương trình là

$\frac{x-4}{16} = \frac{y+2}{-13} = \frac{z-3}{5}$. Viết phương trình đường phân giác góc A .

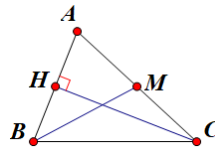
A. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{10}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{5}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-11} = \frac{z-3}{-5}$.

Hướng dẫn giải



Gọi $M(5t;0;1+4t)$ là trung điểm của AC , suy ra tọa độ $C(10t-1;-2;8t-1)$ thuộc đường

cao CH nên ta có $C(4;-2;3)$. Phương trình mp(P) qua A và vuông góc với CH là:

$16(x-1)-13(y-2)+5(z-3)=0$, cắt trung tuyến BM tại B, tọa độ $B(0;0;1)$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; -2; -2) \Rightarrow AB = 3 \\ \overrightarrow{AC} = (3; -4; 0) \Rightarrow AC = 5 \end{cases}$. Một VTCP của đường phân giác góc A là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = (-1; -2; -2) + \frac{3}{5}(3; -4; 0) = \frac{2}{5}(2; -11; -5)$. **Chọn D.**

Câu 124: [THPT Chuyên ĐHSPT-Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;0)$, $C(-2;0;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A , trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là
A. $4x - 2y - z + 4 = 0$. **B.** $4x - 2y + z + 4 = 0$. **C.** $4x + 2y + z - 4 = 0$. **D.** $4x + 2y - z + 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Tính $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -2)$, $\overrightarrow{CA} = (2; 1; 1)$. Vào **MENU 9 1 3** giải hệ ba ẩn, ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + 6y - 8z = 10$.

Phương trình mặt phẳng qua B và vuông góc với AC là $2x + y + z = 2$.

Phương trình mặt phẳng qua C và vuông góc với AB là $2x - 3y - 2z = -6$.

Giải hệ ba ẩn trên ta có trực tâm H của tam giác ABC là $H\left(-\frac{22}{101}; \frac{70}{101}; \frac{176}{101}\right)$.

Tính nhẩm hoặc ghi nháp $\overrightarrow{HA}$, vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $1 = 6 = 8 =$ và dòng hai là $22/101 = 1 - 70/101 = -(2 - 176/101) =$ ta có $x = -4, y = 2 \Rightarrow \vec{n}_p = (4; -2; -1)$. **Chọn A.**

Câu 125: [THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1;0;1)$, $B(1;0;-3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua gốc tọa độ O . Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

A. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chú ý hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$, mà $(ABCD)$ đi qua gốc O nên cả bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc mp (Oxz) .

Gọi $I(a;0;b)$ là tâm hình vuông thì $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB} \Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)(b+3) = 0$.

Mặt khác I thuộc mặt phẳng trung trực của BA nên $4b = \frac{2-10}{2} = -4 \Rightarrow b = -1$.

Suy ra $(a-1)^2 = 4 \Rightarrow a = -1 \cup a = 3$, vì D có hoành độ âm nên $a = -1 \Rightarrow I(-1;0;-1)$.

Vậy d đi qua $I(-1;0;-1)$ và có $\vec{u}_d = \vec{j} = (0;1;0)$. **Chọn A.**

Câu 126: [THPT Chuyên Vĩnh Phúc] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$, $B(-1;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) .

A. $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$ **B.** $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ **C.** $\Delta: \begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=1-t \end{cases}$ **D.** $\Delta: \begin{cases} x=-1+t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Xét vị trí tương đối.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (1; 0; 1)$; $\overrightarrow{OB} = (-1; 2; 1)$. Do $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ nên tam giác OAB vuông tại $O \Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là trung điểm $I(0; 1; 1)$ của đoạn AB .

Ta có $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (-2; -2; 2)$ nên $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 1; -1)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. **Chọn A.**

Cách 2. Tổng quát.

Mặt phẳng trung trực của OA là $x + z = 1$ và của OB là $-x + 2y + z = 3$.

Vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $1 = 0 = -1 =$ dòng hai $-1 = 2 = -1 =$

ta có $\overrightarrow{n_{OAB}} = (1; 1; -1)$ nên phương trình mp(OAB) là $x + y - z = 0$

Giải hệ ba ẩn ta được tâm $I(0; 1; 1)$, với $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 1; -1)$ và ta có **đáp án A.**

Câu 127: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho OAB là tam giác đều. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Xét vị trí tương đối.

Gọi H là trung điểm AB , vì OAB là tam giác đều nên $OH \perp AB$ và $OH = \frac{OA\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Nhận xét $OE = \sqrt{3}, E \in AB$ suy ra $E \equiv H$. Vậy $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{n_P}] = 4(2; -1; -1)$. **Chọn C.**

Câu 128: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng

$(d): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$. Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 8.

A. $m = -24$. **B.** $m = 8$. **C.** $m = 16$. **D.** $m = -12$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Trắc nghiệm Casio.

Đặt $h = d(I, d)$ ta có $R^2 = h^2 + \left(\frac{MN}{2}\right)^2$. Ghi $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(2x + y + 2z)^2}{9}$ CALC nhập tọa

độ I vào tử của d là $-2 = 2 = 1 =$ ta có $h^2 = 9$ suy ra $4 + 9 - m = 9 + 16 \Rightarrow m = -12$.

Chọn D.

Cách 2. Tự luận

Bạn đọc tự giải xem nhé!

Câu 129: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = 2+t \end{cases}$. Phương trình

mặt cầu (S) tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{2}$.

B. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{3}$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Trắc nghiệm Casio.

Viết lại $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ (nháp).

Ta có IAB là tam giác vuông cân nên $R = d(I, d) \cdot \sqrt{2}$.

Ghi $2 \left(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(1x+2y+1z)^2}{1+4+1} \right)$ CALC nhập $1=0=1=$ ta có $R^2 = \frac{8}{3}$. **Chọn B.**

Cách 2. Tự luận

IAB là tam giác vuông cân tại I .

Gọi H là trung điểm AB , có $H(-1+t; 2t; 2+t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1+t; 2t; t-1) \perp \vec{u} = (1; 2; 1)$

Suy ra: $-1+t+4t+t-1=0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{-2}{3} \right) \Rightarrow IH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Mà $R^2 = IA^2 = 2IH^2 = \frac{8}{3}$. **Chọn B.**

Câu 130: [THPT Chuyên Phan Bội Châu] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P), (Q)

chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M và N là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng MN bằng?

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Trắc nghiệm Casio.

Gọi K là hình chiếu của tâm I trên d . Ghi $\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + z^2 - \frac{(2(x-2)-y+4z)^2}{4+1+16}}$

CALC nhập tọa độ của I là $1=2=1=$ ta có $IK = \sqrt{6}$.

Mà $KM = \sqrt{IK^2 - R^2} = 2$ nên $MN = \frac{KM \cdot R}{IK} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C.**

Câu 131: [THPT Chuyên Ngũ – Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;3;1)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$. Từ M kẻ được vô số các tiếp tuyến tới (S) , biết tập hợp các tiếp điểm là đường tròn (C) . Tính bán kính r của đường tròn (C) .

- A.** $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $r = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** (2) .

Hướng dẫn giải

Gọi I là tâm của mặt cầu bán kính R , N là một tiếp điểm. Ta có $MN = \sqrt{MI^2 - R^2}$ thay số ta được $MN = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2 - 4} = \sqrt{2}$.

Mặt khác ta có: $r.MI = R.MN \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 132: [THTT Số 1-484] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ có bán kính $R = \sqrt{19}$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ và

mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z - 1 = 0$. Trong các số $\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a + b + c + d = 43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) ?

- A.** $\{-6; -12; -14; 75\}$. **B.** $\{6; 10; 20; 7\}$. **C.** $\{-10; 4; 2; 47\}$. **D.** $\{3; 5; 6; 29\}$.

Hướng dẫn giải

Ta có tâm $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) \equiv I(5+t; -2-4t; -1-4t) \Rightarrow a = -10-2t, b = 4+8t, c = 2+8t$.

Cho $(a; b; c)$ trùng với đáp án, ta có: $-10-2t = -6 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow b = -12, c = -14$ và khi đó $d = 75$, suy ra $R = \sqrt{3^2 + 6^2 + 7^2 - 75} = \sqrt{19}$, đồng thời $d(I; (P)) = \sqrt{19} = R$, thỏa mãn.

Thử tương tự các đáp án còn lại không thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 133: [THPT Lê Lai–Thanh hóa] Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x = 2 \\ y = t' \\ z = 1+t' \end{cases}$ và $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Δ và tiếp

xúc với hai đường thẳng d, d' . Phương trình của (S) là

- A.** $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. **B.** $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$.
C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. **D.** $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Hướng dẫn giải

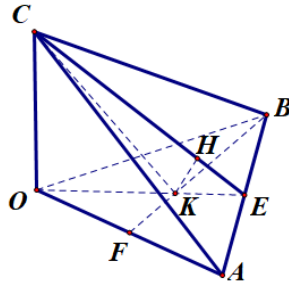
Tâm mặt cầu thuộc Δ có tọa độ $I(t+1; t; t+1)$. Bán kính mặt cầu $R = d(I, d) = d(I, d')$ nên ta có phương trình $t^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 - \frac{(t+1)^2}{1} = (t-1)^2 + t^2 + t^2 - \frac{(t+1)^2}{2} \Rightarrow t = 0$.
 Khi đó $R = 1$ và phương trình là $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. **Chọn A.**

Câu 134: [THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 0; 0)$ và $B(3; 4; 0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

- A.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $OA = OB = 5$ nên tam giác OAB cân tại O , gọi $E(4; 2; 0)$ là trung điểm của AB và K là trực tâm tam giác OAB .



Kẻ KH vuông góc với CE , ta có $AB \perp (OCE) \Rightarrow AB \perp KH \Rightarrow KH \perp (ABC)$.

Mặt khác $BF \perp (OCA) \Rightarrow BF \perp CA \Rightarrow CA \perp (BHF) \Rightarrow CA \perp BH$, tương tự $CB \perp AH$ nên H là trực tâm tam giác ABC .

Vậy H di chuyển trên đường tròn đường kính KE trong mp(OCE).

Đặt $\overrightarrow{OK} = t\overrightarrow{OE} = t(4; 2; 0) \Rightarrow K(4t; 2t; 0)$, ta có $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \Rightarrow 5(4t - 3) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{4}$.

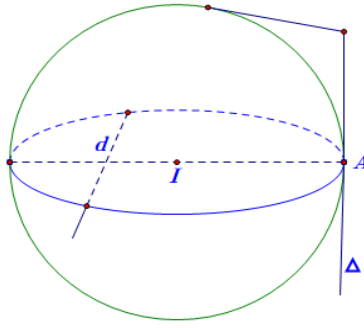
Do đó $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OE} \Rightarrow \overrightarrow{KE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE} \Rightarrow KE = \frac{1}{4}\sqrt{20}$. Vậy $r = \frac{1}{8}\sqrt{20} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. **Chọn A.**

Câu 135: [Đề Star Education] Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, đường thẳng $(d): \frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng (Δ) qua A , vuông góc (d) và tiếp xúc với (S)

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải.

Đường thẳng (Δ) vuông góc với (d) nên (Δ) nằm trong mp (P) vuông góc với (d) và có phương trình $(P): 1(x-1) + 3(y-2) - 2(z-3) = 0$.



Mặt khác $A(1;2;3)$ thuộc (S) nên có đúng 1 đường thẳng (Δ) tiếp xúc với (S) tại A.

Câu 136: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $B(1;2;-5)$, đường thẳng (d) :

$\frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng (Δ) qua B , vuông góc (d) và tiếp xúc với (S)

A. 0.

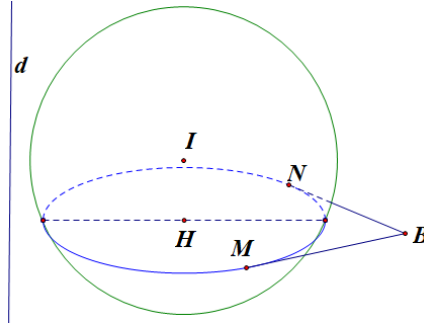
B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Biện luận vị trí tương đối.



Đường thẳng (Δ) vuông góc với (d) nên (Δ) nằm trong mp (P) vuông góc với (d) và có phương trình $(P): 1(x-1) + 4(y-2) - 1(z+3) = 0$.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{\sqrt{2}}{3} < 2 = R$ nên (P) cắt (S) là đường tròn tâm H. Mà B nằm ngoài (S) nên có hai tiếp tuyến với (S) là BM và BN. Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn bài toán.

Cách 2. Khảo sát.

Giả sử (Δ) có vtcp $\vec{u} = (a; b; c)$, do tính vuông góc với (d) nên $a + 4b - c = 0$ suy ra

$$\text{phương trình } (\Delta): \begin{cases} x = 1 + at \\ y = 2 + bt \\ z = -5 + (a + 4b)t \end{cases} \quad (a, b \text{ không đồng thời bằng } 0). \text{ Do điều kiện tiếp}$$

xúc nên phương trình ẩn t có nghiệm kép: $(at)^2 + (bt)^2 + ((a + 4b)t - 4)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + (a + 4b)^2)t^2 - 8(a + 4b)t + 12 = 0 \Rightarrow 16(a + 4b)^2 - 12(a^2 + b^2 + (a + 4b)^2) = 0$$

$$\Rightarrow 13b^2 + 8ab - 2a^2 = 0. \text{ Phương trình có hai cặp số } a, b \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

Câu 137: Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Hỏi (P) song song với mặt phẳng nào?

A. $3x - y + 2z = 0$.

B. $-2x + 2y - z - 5 = 0$.

C. $x + y + z = 0$.

D. $x + 3y + z + 5 = 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. (Khử dần ẩn)

Gọi VTPT của (P) là $\vec{n} = (a; b; c)$, vì (P) chứa Δ nên ta có $a(x-4) + by + c(z+4) = 0$ và $3a + b - 4c = 0 \Rightarrow b = 4c - 3a$.

$$\text{Khi đó vì } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } d(I, (P)) = R \Rightarrow \frac{|-a - 3b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3$$

$$\Rightarrow [-a - 3(4c - 3a) + 5c]^2 = 9(a^2 + (4c - 3a)^2 + c^2) \Rightarrow (8a - 7c)^2 = 9(10a^2 - 24ac + 17c^2)$$

$$\Rightarrow 26a^2 - 104ac + 104c^2 = 0 \Rightarrow 26(a - 2c)^2 = 0 \Rightarrow a = 2c \Rightarrow b = -2c \text{ nên } \vec{n} = (2; -2; 1) \text{ và phương trình } (P) \text{ là } 2x - 2y + z - 4 = 0. \text{ Chọn B.}$$

Cách 2. (Vị trí tương đối – Tụ luận)

Gọi K là hình chiếu vuông góc của tâm I trên Δ , tọa độ $K(4+3t; t; -4-4t)$ suy ra $\overrightarrow{KI} = (-1-3t; -3-t; 5+4t) \perp \vec{u} = (3; 1; -4)$ nên $3(-1-3t) - 3-t - 4(5+4t) = 0 \Rightarrow t = -1$.

Do đó $\overrightarrow{KI} = (2; -2; 1) \Rightarrow KI = 3 = R$ nghĩa là (S) tiếp xúc với Δ tại K . Vậy mặt phẳng (P) cần tìm có $\vec{n} = \overrightarrow{KI} = (2; -2; 1)$ đi qua K và có phương trình $2x - 2y + z - 4 = 0$. **Chọn B.**

Câu 138: [SGD Bắc Ninh] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(2; 1; 3)$; $C(0; 2; -3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r = \sqrt{3}$.

B. $r = 6$

C. $r = 3$.

D. $r = \sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

$$MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8 \Leftrightarrow OM^2 + OA^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} + 2OM^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 8$$

$$\Leftrightarrow 3OM^2 + OA^2 + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 8$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) + 1 - 14 - 2(3x + 3y) = 8 \Leftrightarrow (S'): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9.$$

Như vậy M thuộc đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S), (S')$ cùng bán kính $R = 3$

$$\text{các tâm } I(3; 3; 2), K(1; 1; 0), \text{ do đó } r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{KI}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 139: [SGD Phú Thọ] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của hình tròn đó bằng

- A. 12π . B. 3π . C. 22π . D. 11π .

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Xem A là một đỉnh của hình hộp chữ nhật có ba mặt phẳng đã cho, khi đó tâm I mặt cầu là trung điểm đường chéo, các cạnh hình hộp bằng hai lần khoảng cách $h_1; h_2; h_3$ từ I đến các mặt phẳng. Ta có $IA^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$, các bán kính đường tròn giao tuyến là $r_1^2 = R^2 - h_1^2$, $r_2^2 = R^2 - h_2^2$, $r_3^2 = R^2 - h_3^2$.

Tổng các diện tích là $S = \pi(3R^2 - h_1^2 - h_2^2 - h_3^2) = \pi(3R^2 - IA^2) = 22\pi$. **Chọn C.**

Cách 2.

Ba mặt phẳng $(P): x-1=0$, $(Q): y-1=0$ và $(R): z+1=0$ đều đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là các đường tròn $(C_1), (C_2)$ và (C_3) .

Trong mặt phẳng (P) có giao tuyến $(C_1): (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5 \Rightarrow r_1 = \sqrt{5}$

Trong mặt phẳng (Q) có giao tuyến $(C_2): (x+1)^2 + (z+2)^2 = 9 \Rightarrow r_2 = 3$

Trong mặt phẳng (R) có giao tuyến $(C_3): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow r_3 = 2\sqrt{2}$

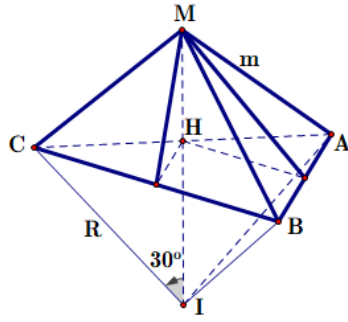
Tổng diện tích ba hình tròn là $S = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = 22\pi$. **Chọn C.**

Câu 140: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 13 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$. Trên d lấy điểm M và kẻ 3 tiếp tuyến MA, MB, MC đến mặt cầu (S) thỏa mãn $\widehat{AMB} = 60^\circ$, $\widehat{BMC} = 90^\circ$, $\widehat{CMA} = 120^\circ$. Biết tọa độ $M(a;b;c)$ với $a < 0$. Tổng $a+b+c$ bằng:

- A. $\frac{10}{3}$. B. 2 . C. -2 . D. 1 .

Hướng dẫn giải

Ta có tâm mặt cầu $I(1;2;-3)$, bán kính $R=3\sqrt{3}$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $MA=MB=MC=m$ suy ra tam giác MAB đều, tam giác MBC vuông cân. Ta tính được $AB=m, BC=m\sqrt{2}, CA=m\sqrt{3}$, do đó tam giác ABC vuông tại B mà có H là trung điểm của AC thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp ABC . Vậy M thuộc trục đường tròn tâm H nên $MH \perp (ABC)$ tại H. Mặt khác $IA=IB=IC=R$ nên I thuộc đường thẳng MH.



Tam giác MCI vuông tại C và có $\widehat{CIM} = 30^\circ$ nên $IM = \frac{R}{\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 6$.

Gọi $M(a; a-1; a+2) \in d, a < 0$ thì $(a-1)^2 + (a-3)^2 + (a+5)^2 = 36 \Rightarrow a = -1$.

Vậy $a+b+c = 3a+1 = -2$. **Chọn C.**

Câu 141: [Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định] Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và $(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C) .

- A. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$. B. $J\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$. C. $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. D. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(1; 1; 2)$ là tâm mặt cầu (S_1) . Trừ các vế hai mặt cầu, ta có đường tròn tâm J thuộc mặt phẳng $4x - 2y + 6z = -7 \Leftrightarrow (\alpha): 4x - 2y + 6z + 7 = 0$. Tâm J là hình chiếu của I trên mp (α) . Ghi $-\frac{4x-2y+6z+7}{16+4+36}$ CALC nhập $1=1=2==$ STO **M** bấm AC

ghi $4M+x:-2M+y:6M+z==$ ta có $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$. **Chọn D.**

Câu 142: [THPT Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương] Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (d): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 2-3t \end{cases}$. Ba điểm A, B, C phân biệt cùng

thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng:

- A. 30. B. 26. C. 20. D. 21.

Hướng dẫn giải.

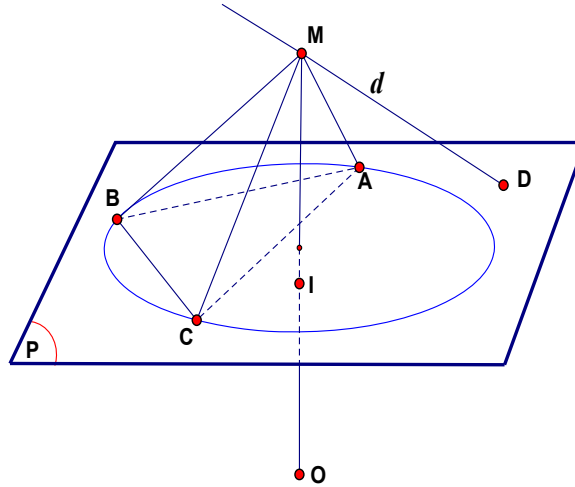
Ta có $A(x; y; z)$ thuộc mặt cầu đường kính OM có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - x_0x - y_0y - z_0z = 0$ mà $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nên $x_0x + y_0y + z_0z = 9$ (1).

Ba điểm A, B, C cùng thuộc mặt cầu đường kính OM nên $\overrightarrow{OM} = (x_0; y_0; z_0)$ là một véc tơ pháp tuyến của mp (ABC) , phương trình mp (ABC) là: $x_0(x-1) + y_0(y-1) + z_0(z-2) = 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $9 - x_0 - y_0 - 2z_0 = 0$. Mặt khác M thuộc đường thẳng d nên ta có:
 $9 - (1+t) - (1+2t) - 2(2-3t) = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow x_0 = 0; y_0 = -1, z_0 = 5 \Rightarrow T = 26$. **Chọn B.**

Lời bình.

Tương tự như đường tròn trong hình học phẳng (PP phân đôi tọa độ) thì trong không gian: Điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc tiếp diện của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nên $x_0x + y_0y + z_0z = 9$, trong đó $A(x; y; z)$ là tiếp điểm. Tương tự đối với các điểm B, C nên phương trình mp(ABC): $x_0x + y_0y + z_0z = 9$. Cho mặt phẳng đi qua $D(1; 1; 2)$ ta được $x_0 + y_0 + 2z_0 = 9$ lại cho $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc d và ta tìm được tham số t như trên. Tuy nhiên ta giải theo cách này thì học sinh khó hiểu hơn nhiều. Ta có thể vẽ thêm hình minh họa sau



Câu 143: [HỘI 8 TRƯỜNG CHUYÊN] Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ và $(S'): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S') và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π . Khoảng cách từ O đến (P) bằng

A. $\frac{14}{3}$.

B. $\frac{17}{7}$.

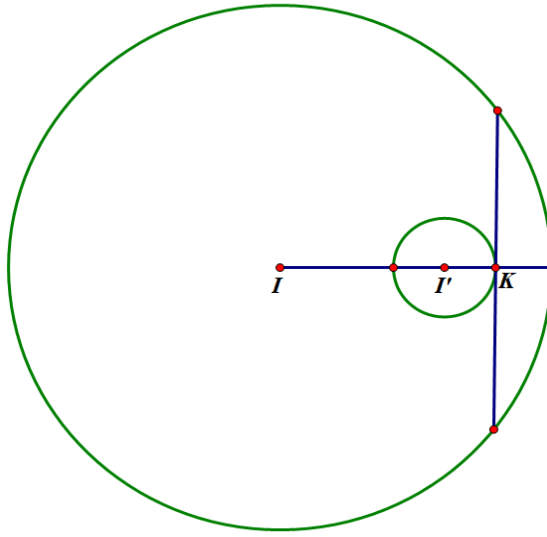
C. $\frac{8}{9}$.

D. $\frac{19}{2}$.

Hướng dẫn giải

Bán kính đường tròn giao tuyến $r = 6\pi / 2\pi = 3$ nên khoảng cách từ tâm $I(0; 0; 1)$ đến (P) là:

$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Khoảng cách từ $I'(1; 2; 3)$ đến (P) là $h' = 1$ và $\overrightarrow{II'} = (1; 2; 2)$.



Ta thấy (S') nằm trong (S) và giả sử tiếp điểm là K thì $h = IK = II' + I'K = 4$ nên (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{II'} = (1; 2; 2)$. Gọi $\overrightarrow{IK} = t(1; 2; 2) \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow K\left(\frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right)$. Phương trình (P) là $1\left(x - \frac{4}{3}\right) + 2\left(y - \frac{8}{3}\right) + 2\left(z - \frac{11}{3}\right) = 0$, ta có $d(O, (P)) = \frac{14}{3}$. **Chọn A.**

Câu 144: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2; 3; 0)$ song song mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 1 = 0$ và vuông góc với đường thẳng $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{4}$. Phương trình tham số của đường thẳng d là:

- A.** $\begin{cases} x = 2 - 11t \\ y = 3 - 10t \\ z = 13t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 13 + t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 3t \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $3 = -2 = -1 =$ dòng hai $2 = 3 = -4 =$ ta có $x = \frac{-11}{13}, y = \frac{-10}{13} \Rightarrow \vec{u}_d = (-11; -10; 13)$. **Chọn A.**

Câu 145: [THTT số 6-489] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 3; 2)$, mặt phẳng

$(P): 2x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng

Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm đoạn MN .

- A.** $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$. **B.** $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.
C. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$. **D.** $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Viết phương trình mp(Q) đối xứng với mp(P) qua điểm A là (Q): $2x - y + z + 8 = 0$.
 Điểm N là giao điểm của d và (Q) nên $2(-2 + 2t) - (1 + t) + 1 - t + 8 = 0 \Rightarrow t = -2$ ta có $N(-6; -1; 3) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \vec{NA} = (7; 4; -1)$. **Chọn D.**

Cách 2.

Gọi $N(-2 + 2n; 1 + n; 1 - n) \in d$ suy ra tọa độ $M(4 - 2n; 5 - n; 3 + n)$ đối xứng với N qua điểm A. Cho M thuộc (P): $2(4 - 2n) - (5 - n) + 3 + n - 10 = 0 \Rightarrow n = -2$, từ đó ta có $N(-6; -1; 3) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \vec{NA} = (7; 4; -1)$. **Chọn D.**

Cách 3.

Gọi $M(x; y; z) \in (P)$ suy ra tọa độ $N(2 - x; 6 - y; 4 - z)$ đối xứng với M qua điểm A.

$$\text{Cho N thuộc d, ta có: } \frac{2 - x + 2}{2} = \frac{6 - y - 1}{1} = \frac{4 - z - 1}{-1} \Leftrightarrow \frac{2x - 8}{-4} = \frac{5 - y}{1} = \frac{z - 3}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x - 8}{-4} = \frac{5 - y}{1} = \frac{z - 3}{1} = \frac{2x - y + z - 6}{-2} = \frac{10 - 6}{-2} = -2 \Rightarrow x = 8, y = 7, z = 1.$$

Do đó $N(-6; -1; 3) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \vec{NA} = (7; 4; -1)$. **Chọn D.**

Cách 4.

Do A và N cùng phía đối với (P), thay tọa độ A vào vế trái của (P) ta có $P(A) = -9$, suy ra $P(N) = -18$ hay ta có $2(-2 + 2t) - (1 + t) + 1 - t - 10 = -18 \Rightarrow t = -2$.

Do đó $N(-6; -1; 3) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = \vec{NA} = (7; 4; -1)$. **Chọn D.**

Lời bình.

Trong Cách 1 thì điểm N thuộc mp(Q) đối xứng với mp(P) qua điểm A, trong Cách 4 thì dựa vào khoảng cách từ A đến (P) và từ N đến (P). Như vậy: tính chất khác nhau nhưng biểu thức giống nhau, thực chất là biểu thức rút gọn thôi nhé! Đầy đủ là:

$d(N, (P)) = 2.d(A, (P))$, do tử cùng dấu và cùng mẫu thức nên rút gọn đi.

Câu 146: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-8}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{m-1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. Giá

trị của m để Δ_1 và Δ_2 cắt nhau là

- A.** $m = -\frac{25}{8}$. **B.** $m = \frac{25}{8}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -3$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy các VTCP $\vec{a} = (2; 4; m-1)$ và $\vec{b} = (4; -1; 2)$ luôn khác phương với mọi m.

Trước tiên giải hệ hai ẩn $\begin{cases} 2t + 8 = 4 + 4t' \\ 4t - 2 = 3 - t' \end{cases}$ hay ta có $\begin{cases} t - 2t' = -2 \\ 4t + t' = 5 \end{cases}$, suy ra $t = \frac{8}{9}, t' = \frac{13}{9}$. Khi

đó thành phần $z = 3 + (m-1) \cdot \frac{8}{9} = 2 + \frac{26}{9}$. Giải ra ta có $m = \frac{25}{8}$. **Chọn B.**

Lưu ý sử dụng CASIO.

Để hai đường thẳng cắt nhau thì $\vec{x}\vec{a} + y\vec{b} = \overrightarrow{M_1M_2} = (-4; 5; -1)$. Vào MENU 9 1 2 nhập dòng đầu $2 = 4 = -4 =$ dòng hai $4 = -1 = 5 =$ ta có $x = \frac{8}{9}$ bấm STO x và $y = \frac{-13}{9}$ bấm STO y trở về MENU 1 bấm $\frac{-1-2y}{x} + 1$ bấm = ta có $m = \frac{25}{8}$.

Câu 147: [THPT Kinh Môn-Hải Dương] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Tìm hình chiếu vuông góc của Δ trên mặt phẳng (Oxy) .

- A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$.

Hướng dẫn.

Hình chiếu của $M(a; b; c)$ bất kỳ trên mặt phẳng (Oxy) là $M'(a; b; 0)$.

Chuyển đường thẳng về tham số. **Chọn B.**

Câu 148: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) là đường thẳng d' . Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đường thẳng d' ?

- A. $M(2; 5; -4)$. B. $N(1; -1; 3)$. C. $P(1; 3; -1)$. D. $Q(2; 7; -6)$.

Hướng dẫn.

Gọi $mp(Q) \perp mp(P)$ và $d \subset (Q)$, có $\vec{n}_Q = [\vec{n}_P, \vec{u}_d] = (-3; 2; 1)$ nên phương trình là

$(Q): -3x + 2y + z = 0$. Từ đó cho $x = t$ ta giải hệ $\begin{cases} y + z = 3 - t \\ 2y + z = 3t \end{cases} \Rightarrow y = -3 + 4t, z = 6 - 5t$

$\Rightarrow d': x = t, y = -3 + 4t, z = 6 - 5t$. Cho $t = 2 \Rightarrow x = 2, y = 5, z = -4$. **Chọn A.**

Nhận xét.

Ở đây về mức độ kiến thức không khó nhưng đòi hỏi kỹ năng giải nhanh!

Câu 149: [Đề chính thức TNTHPT 2021 – BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d lên (P) là đường thẳng có phương trình:

- A. $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$. B. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$. C. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-4}$. D. $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Gọi $mp(Q) \perp mp(P)$ và $d \subset (Q)$, có $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_P] = (3; -2; 1)$ nên phương trình là

$$(Q): 3x - 2y + z = 0. \text{ Từ đó cho } x = 2t \text{ ta giải hệ } \begin{cases} 2y + z = 4 - 2t \\ -2y + z = -6t \end{cases} \Rightarrow y = 1 + t, z = 2 - 4t$$

$\Rightarrow d': x = 2t, y = 1 + t, z = 2 - 4t$. **Chọn C.**

Cách 2.

Dễ thấy điểm $M(0; 1; 2) = d \cap (P)$ nên loại các đáp án **A** và **B**.

Gọi $\vec{u}'$ là hình chiếu của $\vec{u}$ trên (P) , ta có $\vec{u}' + t\vec{n} = \vec{u} \Rightarrow t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \frac{1}{3}$. Do đó $\vec{u}' = \vec{u} - t\vec{n}$ và

có $\vec{u}' = (1; 1; -1) - \frac{1}{3} \cdot (1; 2; 1) = \frac{1}{3}(2; 1; -4)$. **Chọn C. (Xem thêm Câu 77).**

Câu 150: [THPT Chuyên ĐH Vinh] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; -2)$, $B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Điểm $M(a, b, c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng (ABM) vuông góc với (P) và $MA^2 + MB^2 = 246$. Tính $S = a + b + c$.

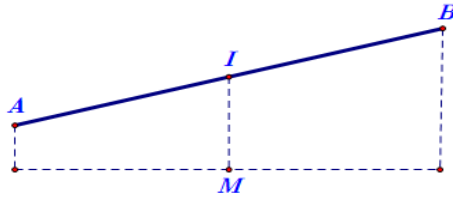
A. 0.

B. -1.

C. 10.

D. 13.

Hướng dẫn (Đã giải câu 82)



Cách 2. Phương pháp quỹ tích – khử dần ẩn.

Ta có $\vec{BA} = 2(1; -2; 8)$ do đó mp (ABM) có một véc tơ pháp tuyến $[\vec{BA}, \vec{n}_p]$ hay $\vec{n} = (2; 5; 1)$ và có phương trình $(Q): 2x + 5y + z - 11 = 0$. Điểm M thuộc đường thẳng giao

tuyến của (P) và (Q) có phương trình $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. Gọi $M(t; 2; 1 - 2t) \in d$ là điểm cần tìm

thì từ $MA^2 + MB^2 = 246$ ta có: $(1+t)^2 + 1 + (3-2t)^2 + (3+t)^2 + 25 + (19-2t)^2 = 246$

$\Leftrightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow M(4; 2; -7) \Rightarrow a + b + c = -1$. **Chọn B.**

Câu 151: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z + 1 = 0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là

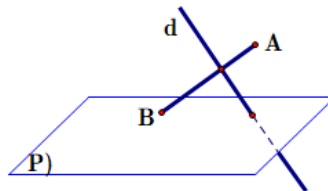
A. $(3; -2; -1)$.

B. $(-3; 8; -3)$.

C. $(0; 3; -2)$.

D. $(6; -7; 0)$.

Hướng dẫn giải



Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với d là (Q): $2x + y - z = 5$.

Trên d lấy hai điểm $C(1; -1; 2), D(3; 0; 1)$, vào MENU 9 1 3 viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A và d, ta có (R): $0x + y + z = 1$.

Ba mặt phẳng (P), (Q) và (R) cắt nhau tại B, tọa độ là $B(0; 3; -2)$. **Chọn C.**

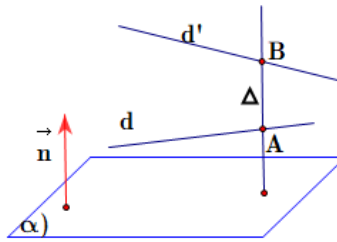
Câu 152: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng

$$(\alpha): x + 2y - z + 4 = 0 \text{ và cắt cả hai đường thẳng } d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}, d': \begin{cases} x = 3+t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}, \text{ trong}$$

các điểm sau, điểm nào thuộc đường thẳng Δ ?

- A. $M(6; 5; -4)$. B. $N(4; 5; 6)$. C. $P(5; 6; 5)$. D. $Q(4; 4; 5)$

Hướng dẫn giải



Giả sử $A(-3+a; 2-a; 2a) \in d, B(3+b; 3b; 2b) \in d'$ là các giao điểm của Δ với d, d' .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (b-a+6; a+3b-2; 2b-2a) / \vec{n} = (1; 2; -1)$, suy ra hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2b-2a+12 = a+3b-2 \\ b-a+6 = 2a-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b = 14 \\ a-b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ do đó } A(1; -2; 8) \text{ và phương trình}$$

$\Delta: x = 1+t, y = -2+2t, z = 8-t$. Cho $t = 3$ thì Δ đi qua điểm $Q(4; 4; 5)$.

Chọn D. (Xem thêm phần phụ lục)

Câu 153: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 3), B(2; -1; 1), C(-1; 1; 0), D(1; 2; -1)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

- A. $\frac{4}{\sqrt{11}}$. B. $\frac{6}{\sqrt{11}}$. C. $\frac{8}{\sqrt{11}}$. D. $\frac{10}{\sqrt{11}}$.

Hướng dẫn.

Tính $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -2), \overrightarrow{CD} = (2; 1; -1)$ nên hai đường thẳng AB và CD chéo nhau.

Vào MENU 9 1 2 nhập $1 = 1 = 2 = \& 2 = 1 = 1 =$ ta có $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-1; 3; 1)$.

(Viết phương trình mp chứa AB và song song CD rồi tính khoảng cách)

Nhập máy $\frac{|-1(x-1)+3(y+2)+1(z-3)|}{\sqrt{1+9+1}}$ CALC nhập tọa độ C, ta có $\frac{8\sqrt{11}}{11}$. **Chọn C.**

Câu 154: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x + y - z - 7 = 0$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}; \Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}. \text{ Gọi } M \text{ là điểm thuộc } \Delta_1, M \text{ có tọa độ là}$$

các số dương, M cách đều Δ_2 và (P). Khoảng cách từ điểm M đến (P) là

A. $2\sqrt{3}$.

B. 2.

C. 7.

D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Tổng quát (Công thức tính nhanh).

Từ phương trình Δ_1 rút ra $y = x, z = x + 1$ suy ra tọa độ $M(x; x; x + 1)$ và tính khoảng cách đến Δ_2 và (P) .

$$\text{Ghi } \sqrt{(x-2)^2 + (x-3)^2 + (x+5)^2 - \frac{(2(x-2) + 3(x-3) - 5(x+5))^2}{4+9+25}} = \frac{|x+x-x-1-7|}{\sqrt{3}}$$

SHIFT SOLVE 1 = kết quả $x = 2$ bấm $\blacktriangleleft$ trở về, xóa vế phải, bấm = ta có $2\sqrt{3}$.

Chọn A.

Cách 2. Xét vị trí tương đối.

$$\text{Gọi } M(m; m; m + 1) \in \Delta_1, m > 0, \text{ khi đó: } d(M, (P)) = \frac{|m-8|}{\sqrt{3}} \quad (1).$$

$$\text{Ta có } \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \text{ \& } \Delta_1 \cap \Delta_2 = K(0; 0; 1) \text{ cố định và độ dài } MK = d(M, \Delta_2) = \sqrt{3m^2} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } \sqrt{3m^2} = \frac{|m-8|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 8m^2 + 16m - 64 = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ (Vì } m > 0).$$

$$\text{Vậy } d(M, (P)) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 155: [THPT Nho Quan – Ninh Bình] Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(0; 1; 0)$,

$B(2; 2; 2)$, $C(-2; 3; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

A. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$.

B. $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{13}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{13}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{13}{2}; \frac{7}{4}; \frac{9}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (2; 1; 2), \overrightarrow{AC} = (-2; 2; 1) \text{ suy ra } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = -3(1; 2; -2) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{9}{2}.$$

Phương trình mp(ABC) là: $x + 2y - 2z - 2 = 0$. Gọi khoảng cách từ M đến mp(ABC) là h .

Ta có:

$$\frac{1}{3}Sh = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}h = 3 \Leftrightarrow h = 2 \Rightarrow \frac{|2t+1+2(-2-t)-2(3+2t)-2|}{3} = 2 \Rightarrow |-4t-11| = 6$$

$$\text{Suy ra } t = -\frac{5}{4} \cup t = -\frac{17}{4} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right). \text{ Chọn A.}$$

Câu 156: [PTNK - ĐHQG TP HCM] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=-3-t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x=4+3t \\ y=3+2t \\ z=1-t \end{cases}. \text{ Trên } d_1 \text{ lấy hai điểm } A, B \text{ thỏa mãn } AB=3. \text{ Trên } d_2$$

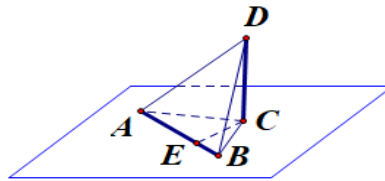
lấy hai điểm C, D thỏa mãn $CD=4$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

A. $V=7$. **B.** $V=2\sqrt{21}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{21}}{3}$. **D.** $V=\frac{5\sqrt{21}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ nên $d_1 \perp d_2$. Giả sử mp(P) chứa AB và vuông góc d_2 cắt d_2 tại C, từ C kẻ CE vuông góc với d_1 thì CE là đoạn vuông góc chung.

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot CD \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot CE = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 \cdot CE = 2CE$.



Viết phương trình (Q) chứa d_1 và song song d_2 có vtpt $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (4; -2; 8)$ nên ghi vào

màn hình $\frac{|2(x-1)-1(y-2)+4(z+3)|}{\sqrt{2^2+1^2+4^2}}$ CALC nhập $4=3=1=$ thì $CE = \sqrt{21}$.

Vậy $V_{ABCD} = 2\sqrt{21}$. **Chọn B.**

Câu 157: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}$ và

$d_3: \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt d_1, d_2, d_3 lần lượt tại các điểm A, B, C

sao cho $AB=BC$. Phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. **B.** $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. **C.** $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{-1}$. **D.** $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1.

Gọi $A(a; 4-a; -1+2a), C(-1+5c; 1+2c; -1+c) \Rightarrow B\left(\frac{a+5c-1}{2}; \frac{-a+2c+5}{2}; \frac{2a+c-2}{2}\right)$

Cho B thuộc d_2 ta có hệ: $\begin{cases} -a+2c+5 = -3(a+5c-1)+4 \\ 2a+c-2 = -3(a+5c-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+17c=2 \\ 5a+16c=5 \end{cases} \Leftrightarrow a=1, c=0$

Từ đó suy ra $\vec{u}_{\Delta} = (1; 1; 1)$ đi qua $B(0; 2; 0)$. **Chọn B.**

Cách 2.

Vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $1 = -1 = -2 =$ dòng hai $5 = 2 = -1 =$ ta được

$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_3] = (-5; 9; 7)$. Mặt phẳng (P) song song cách đều d_1 và d_3 , đi qua điểm

$M\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -1\right)$ có phương trình là $(P): -5x + 9y + 7z = 18$.

Điểm B là giao điểm của d_2 và (P) , tọa độ $B(0; 2; 0)$.

Lấy điểm $A(a; 4-a; -1+2a) \in d_1$, suy ra tọa độ $C(-a; a; 1-2a) \in d_3$ nên ta có :

$$\frac{-a+1}{5} = \frac{a-1}{2} = \frac{2-2a}{1} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A(1; 3; 1).$$

$\Rightarrow \vec{BA} = \vec{u}_\Delta = (1; 1; 1)$ và đi qua $B(0; 2; 0)$. **Chọn B.**

Câu 158: [Chuyên ĐB Sông Hồng] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}, d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = m \end{cases}. \text{ Gọi } S \text{ là tập tất cả các số } m \text{ sao cho } d_1 \text{ và } d_2 \text{ chéo nhau}$$

và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S .

A. -11.

B. 12.

C. -12.

D. 11.

Hướng dẫn giải

Cách 1.

Ta có $\vec{u}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 0)$ khác phương và $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-3; 3; 1)$ là VTPT của mp (α) chứa d_1 và song song d_2 , có phương trình $(\alpha): -3x + 3y + z + 3 = 0$.

Tính khoảng cách từ điểm $(1; 2; m)$ đến (α) , ta có: $\frac{|m+6|}{\sqrt{19}} = \frac{5}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -11 \end{cases}$.

Vậy $S = \{-1; -11\}$. **Chọn C.**

Cách 2.

Ta có $\vec{u}_1 = (2; 1; 3)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 0)$ khác phương. Lấy $M(1+2t; t; 3t) \in d_1$, tính khoảng cách đến d_2 , ta có:

$$d^2 = (2t)^2 + (t-2)^2 + (3t-m)^2 - \frac{(3t-2)^2}{2} = \frac{19}{2}t^2 + 2(1-3m)t + 2 + m^2$$

$$d_{\min}^2 \text{ khi và chỉ khi } t = \frac{2(3m-1)}{19}, \text{ khi đó: } \frac{19}{2}t^2 + 2(1-3m)t + 2 + m^2 = \frac{25}{19}$$

$$\text{Hay ta có } \frac{-2}{19}(3m-1)^2 + 2 + m^2 = \frac{25}{19} \Leftrightarrow m^2 + 12m + 11 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \cup m = -11.$$

Lời bình.

Do hai véc tơ khác phương và khoảng cách khác 0 nên hai đường thẳng chéo nhau. Từ đây ta cũng có phương pháp tìm điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau.

Nếu các em học chương trình nâng cao và nắm được về “tích hỗn hợp” của ba véc tơ thì có thể giải cách khác.

IX. PHỤ LỤC

PHÂN TÍCH MỘT SỐ DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Sau đây chúng ta phân tích một số bài toán và phương pháp thường dùng, hy vọng các em nhìn nhận được những góc độ khác nhau trong giải toán, nhằm phát huy ưu thế của bản thân, rèn luyện kỹ năng giải toán, mạch lạc và trong sáng hơn khi học toán.

1. Phương pháp loại trừ.

Hướng 1: Chúng ta loại bỏ đi đáp án không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Hướng 2: Chúng ta chọn đáp án thỏa mãn dần từng yêu cầu bài toán.

Để nhanh hơn thì chúng ta kết hợp cả hai hướng trên, nói cách khác: loại bớt đáp án không thỏa mãn, kiểm tra ít hơn các đáp án thì sẽ nhanh hơn. Phương pháp này chỉ áp dụng trong một số trường hợp, không thể rộng rãi được.

Ví dụ 59. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục hoành và tạo với (P) một góc nhỏ nhất là

- A.** $y - 2z = 0$. **B.** $y - z = 0$. **C.** $2y + z = 0$. **D.** $x + z = 0$.

Phân tích.

Ta cần kiểm tra mặt phẳng nào chứa Ox và tạo với (P) góc nhỏ nhất.

+ Kiểm tra chứa Ox: Tức là mp đi qua hai điểm $O(0; 0; 0)$ và $A(1; 0; 0)$. **Loại đáp án D.**

+ Kiểm tra góc nhỏ nhất: Ghi vào máy $\cos^{-1}\left(\left|\frac{-B+2C}{\sqrt{6}\times\sqrt{B^2+C^2}}\right|\right)$ bấm CALC nhập bộ vptt

trong các đáp án: Đáp án A cho $24,09^\circ$, đáp án B cho 30° , đáp án C cho 90° .

Vậy **chọn A.**

Ví dụ 60. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2:$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{Viết phương trình d vuông góc với mặt phẳng (P): } 7x + y - 4z = 0 \text{ và cắt}$$

hai đường thẳng d_1, d_2

A. $\frac{x-7}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+6}{-4}$.

B. $\frac{x-2}{7} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-4}$.

C. $\frac{x-9}{7} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-4}$

D. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$.

Phân tích.

Ta cần loại bỏ đáp án mà “không vuông góc” và “không cắt”

Bước 1: Kiểm tra đường thẳng nào không vuông góc với (P) ?. Ở đây ta chỉ loại được đáp án D.

Bước 2: Kiểm tra đường thẳng d nào cắt cả hai đường thẳng đã cho? Rõ ràng quy về bài toán xét vị trí tương đối và phải xét $2.2 = 4$ lần thử. Tuy nhiên ta rút ngắn được bằng cách thử d_2 cắt d :

Thay $z = 3$ vào đáp án **A**, suy ra $x = \frac{-35}{4}$, $y = \frac{-1}{4}$. Thay trở về d_2 suy ra mâu thuẫn.

Thay $z = 3$ vào đáp án **B**, suy ra $x = \frac{-27}{4}$, $y = \frac{-9}{4}$. Thay trở về d_2 suy ra mâu thuẫn.

Vậy **chọn C**.

Nhận xét.

Với cách làm trên, trong bước 1 ta chỉ cần quan sát mẫu số là được, như thế chỉ mất vài giây; trong bước 2, ta nhầm + Casio thì cũng nhanh (tùy mỗi người nữa nhé!). Tuy nhiên ví dụ sau ta không nên làm tương tự!

Ví dụ 61. [MH_2018_BGD] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}; \quad d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{và mặt phẳng } (P): x+2y+3z-5=0.$$

Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}.$

B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}.$

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}.$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$

2. Phương pháp đại số.

Bước 1: Biểu diễn các yếu tố cần giải thông qua tham số (ẩn số).

Bước 2: Lập hệ phương trình từ giả thiết, yêu cầu đề bài.

Bước 3: Giải hệ phương trình, trả lời bài toán (Chọn đáp án).

Để nhanh hơn thì chúng ta kết hợp cả bước 2 và bước 3, nói cách khác: chúng ta cho thỏa mãn dần mỗi điều kiện, khử bớt được các ẩn, cuối cùng còn một ẩn. Ta tạm gọi là phương pháp khử dần ẩn (đồn biến).

Hướng dẫn.

Giả sử $A(3-a; 3-2a; -2+a) \in d_1$ và $B(5-3b; -1+2b; 2+b) \in d_2$ là các giao điểm của d với d_1 và d_2 . Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2+a-3b; -4+2a+2b; 4-a+b).$

Ta có $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{n}_p = (1; 2; 3)$ nên suy ra:

$$\frac{2+a-3b}{1} = \frac{-4+2a+2b}{2} = \frac{4-a+b}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-a+b = 6+3a-9b \\ -4+2a+2b = 4+2a-6b \end{cases}$$

Giải ra ta có $a=2, b=1$ nên tọa độ $A(1; -1; 0)$. **Chọn D.**

Ví dụ 63. [Sở GD Bắc Giang] Cho các số thực thay đổi a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a+b+c=3$ và

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1. \quad \text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức}$$

$$P = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

A. $\sqrt{3}-1.$

B. $\sqrt{3}+1.$

C. $4-2\sqrt{3}.$

D. $4+2\sqrt{3}.$

Phân tích.

Quan sát biểu thức ta thấy có thể dùng bất đẳng thức Mincopki hoặc B.C.S.

Cách 1. BĐT Mincopki kết hợp B.C.S.

$$\text{Biến đổi } \sqrt{P} + \sqrt{1} = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2}.$$

Khi đó $\sqrt{P} + 1 \geq \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c-2)^2}$ (1). Sử dụng bất đẳng thức B.C.S, ta có:

$$(a+1)^2 + (b+1)^2 + (c-2)^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{P} + 1 \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow P \geq (\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Cách 2. Bất đẳng thức B.C.S.

$$\text{Ta có } P = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c-x-y-z)^2 \quad (*).$$

Mặt khác ta có $3 = (1+1+1)[(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2] \geq (x+y+z)^2$, suy ra:

$$x+y+z \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow 3 - (x+y+z) \geq 3 - \sqrt{3} > 0 \quad (**).$$

Từ (*) và (**) suy ra $P \geq \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Nhận xét.

Cách giải theo phương pháp đại số hoàn toàn tự luận, phù hợp với các em ưa thích đại số, nhưng yêu cầu các em biến đổi thật nhanh! Kể cả như vậy cũng tiêu tốn nhiều thời gian. Nói vui một tí: “Nhà giàu tiêu xài không sợ lãng phí” nhưng “thời gian còn quý hơn vàng”, không nên nhé!. Còn về các bài toán min – max chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ hơn trong PHẦN 2. Nhưng bài sau ta lại xem xét thêm:

Ví dụ 64. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ và

$M(x_0; y_0; z_0) \in (S)$ sao cho $A = x_0 + 2y_0 + 2z_0$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 1.

Hướng dẫn

Chọn B

Viết lại A và sử dụng bất đẳng thức B.C.S, ta có:

$$|A - 6| = |1(x-2) + 2(y-1) + 2(z-1)| \leq \sqrt{(1+4+4)[(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]} = 9.$$

$$\text{Suy ra } -9 \leq A - 6 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq A \leq 15, \text{ do đó } \min A = -3 \Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} = -1.$$

Khi đó $x = 1, y = z = -1$. Suy ra $x_0 + y_0 + z_0 = -1$.

3. Phương pháp quỹ tích (Tập hợp điểm).

Chúng ta cần định hướng (hình dung) được tập hợp điểm là gì, sau đó:

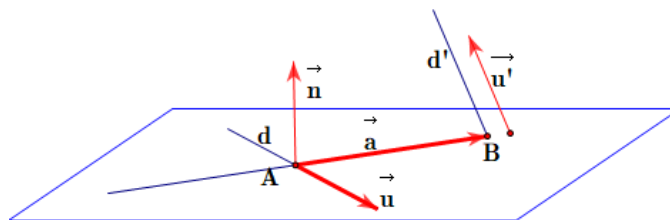
Bước 1: Lập phương trình của mỗi các đường.

Bước 2: Tìm giao của các đường vừa lập.

Bước 3: Tính toán trả lời bài toán (Chọn đáp án).

BÀI TOÁN: Phương trình đường thẳng cắt hai đường thẳng chéo nhau.

- Biết đường thẳng (AB) có phương $\vec{a}$.



Bước 1: Viết phương trình mp(P) chứa $M \in d$ và $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{a}]$.

Bước 2: Tìm giao điểm $B = (P) \cap d'$

Bước 3: Trả lời $B \in \Delta$ & $\vec{u}_\Delta = \vec{a}$.

Ví dụ 65. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là

$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$ và $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{3}$. Đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và song

song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$ có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+4}{-2}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-2}$.

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+4}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-2}$.

Hướng dẫn giải

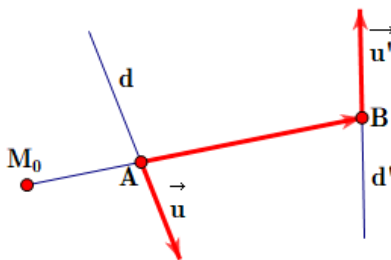
Mặt phẳng (P) đi qua $M_1(0; -1; 0)$ và có $\vec{n}_p = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_\Delta]$. Vào MENU 9 1 2 nhập dòng đầu

$1 = 2 = -1 =$ dòng hai $1 = 4 = 2 =$ ta có $\vec{n}_p = \left(-4; \frac{3}{2}; 1\right)$.

Phương trình mp(P): $-8x + 3y + 2z = -3$.

Ta có $B(1; -1; 4) = (P) \cap d_2$ nên phương trình $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{-2}$. **Chọn B.**

- Đường thẳng (AB) đi qua một điểm M_0 .



Bước 1: Viết phương trình mp(P) chứa M_0 & d . Phương trình mp(Q) chứa M_0 & d'

Bước 2: Tìm giao điểm $A = (Q) \cap d$ và giao điểm $B = (P) \cap d'$.

Bước 3: Tính $\vec{AB}$ và trả lời.

Ví dụ 66. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; -6)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 tại hai điểm A, B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A.** $\sqrt{38}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** 8. **D.** 12.

Hướng dẫn giải

Vào **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $2 = -1 = -1 =$ dòng hai $1 = -2 = 5 =$ (Thay M vào tử của d_1). Phương trình mp(P): $7x + 11y - 3z = 21$.

Trong **MENU 9 1 2** nhập dòng đầu $3 = 1 = -2 =$ dòng hai $4 = 0 = 8 =$ (Thay M vào tử của d_2). Phương trình mp(Q): $2x - 8y + z = 6$.

Ta có $A(3; 0; 0) = (Q) \cap d_1$ và $B(4; 1; 6) = (P) \cap d_2$ nên $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 6) \Rightarrow AB = \sqrt{38}$.

Chọn A

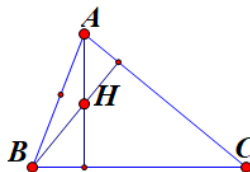
Nhận xét.

Đây là phương pháp tương đối trong sáng, chúng ta sử dụng máy tính CASIO hỗ trợ đắc lực trong giải toán, tiết kiệm thời gian.

Ví dụ 67. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$. Điểm H là trực tâm tam giác ABC , khi đó, độ dài đoạn OH bằng

- A.** $\frac{\sqrt{870}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{870}}{14}$. **C.** $\frac{\sqrt{870}}{16}$. **D.** $\frac{\sqrt{870}}{15}$.

Hướng dẫn giải



Điểm H thuộc mp(ABC), vào **MENU 9 1 3** nhập dòng đầu $2 = 3 = 1 = 1 =$ dòng hai $-1 = 2 = 0 = 1 =$ dòng ba $1 = 1 = -2 = 1 =$ suy ra mp(ABC): $-x + 8y - 5z = 17$.

Mặt phẳng (P) chứa AH và vuông góc với BC là: $2x - y - 2z = -1$.

Mặt phẳng (Q) chứa BH và vuông góc với CA là: $x + 2y + 3z = 3$.

Giải hệ ba ẩn bởi ba mặt phẳng ta có $H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; \frac{-5}{15}\right) \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{870}}{15}$. **Chọn D.**

Lời bình.

Phương pháp quỹ tích dùng nhiều nhất khi giải toán trong hệ tọa độ $Oxyz$, tập hợp điểm (điểm) cần tìm là giao của các đường khác.

4. Phương pháp véc tơ.

Véc tơ và tọa độ là cơ sở để xây dựng hình học không gian Oxyz, nhưng phương pháp véc tơ không phải dùng nhiều nhất, tuy nhiên nó tương đối ngắn gọn và súc tích:

Bước 1: Chuyển đổi các yếu tố hình học sang véc tơ; sử dụng tính chất hình học của một số hình đặc biệt; phép suy ngược từ phương trình về véc tơ (Nếu cần).

Bước 2: Tìm mối quan hệ và biến đổi cần thiết.

Bước 3: Tính toán trả lời bài toán (Chọn đáp án).

Ví dụ 68. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC, biết $A(1;1;1)$, $B(5;1;-2)$, $C(7;9;1)$. Tính độ dài phân giác trong AD của góc A

- A. $\frac{3\sqrt{74}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. C. $2\sqrt{74}$. D. $3\sqrt{74}$.

Hướng dẫn giải

Tính tỉ số $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{4^2 + 0^2 + (-3)^2}{6^2 + 8^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$. Khi đó điểm D thuộc đoạn BC sao cho

$$\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}. \text{ Suy ra } \overrightarrow{AD} = \left(\frac{14}{3}; \frac{8}{3}; \frac{-6}{3}\right) \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{74}}{3}.$$

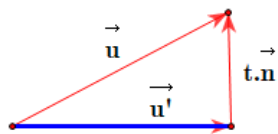
Chú ý.

Khi tính độ dài, tọa độ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ chúng ta tính trong căn rồi, nên $\overrightarrow{AD}$ nhầm được!

Ví dụ 69. [MH_2019_BGD] Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là

- A. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$. B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Hướng dẫn giải



Gọi $\vec{u'}$ là hình chiếu của $\vec{u}$ trên (P), ta có: $\vec{u'} + t.\vec{n} = \vec{u}$. Nhân hai vế với $\vec{n}$, suy ra:

$$t = \frac{\vec{n} \cdot \vec{u}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \frac{2}{3}. \text{ Thay trở về: } \vec{u'} = \vec{u} - \frac{2}{3}\vec{n} = (1; 2; -1) - \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(1; 4; -5).$$

Tìm được $M(1;1;1) = d \cap (P)$. **Chọn C.**

Lưu ý.

Ta có thể sử dụng CASIO như sau (nhất là các số không đẹp):

Ghi $\frac{x+y+z}{3}$ CALC nhập $1+2=-1==$ STO M ($t = \frac{2}{3}$ gán vào phím M)

Ghi $x - M : y - M : z - M$ bấm $\Rightarrow$ ta có $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{-5}{3}\right)$.

Ví dụ 70.[Đề_2021_BGD] Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2 = 0$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) là đường thẳng có phương trình:

- A. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{3}$ B. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{8}$ C. $\frac{x}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{3}$ D. $\frac{x}{14} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{8}$.

Hướng dẫn giải

Ghi $\frac{x+2y-2z}{9}$ CALC nhập $1 = -1 = 2 \Rightarrow$ STO M ($t = \frac{-5}{9}$ gán vào phím M)

Ghi $x - M : y - 2M : z + 2M$ bấm $\Rightarrow$ ta có $\vec{u} = \left(\frac{14}{9}; \frac{1}{9}; \frac{8}{9}\right)$. (Có 2 đáp án B, D)

Điểm $M(0; 0; -1) \notin (P)$, loại đáp án B. Chọn D.

PHÂN TÍCH MỘT SỐ KHÁI NIỆM TOÁN HỌC.

A. Khái niệm véc tơ.

“Véc tơ là một đoạn thẳng có hướng”. Nếu đoạn thẳng AB bị “thủng một lỗ” hay thiếu đi vài điểm ở giữa hai điểm A và B thì chúng ta sẽ không có đoạn thẳng AB, và do đó không có véc tơ $\overrightarrow{AB}$.

Đề xuất:

Nếu gọi O là điểm đầu (điểm gốc) và A là điểm cuối (điểm ngọn) thì ta có một véc tơ, ký hiệu là $\overrightarrow{OA}$.

Hướng của véc tơ $\overrightarrow{OA}$ là từ O đến A theo đường thẳng chứa hai điểm O, A. (Nhằm phân biệt với cung định hướng).

Nhận xét.

Định nghĩa theo cách đề xuất tuy hơi dài nhưng hoàn toàn dễ hiểu và phù hợp với toán học cao cấp và toán học hiện đại, chẳng hạn một ma trận hay một đa thức vẫn xem là một véc tơ.

Theo đ/n thì: véc tơ không có liên quan gì các điểm ở giữa hai điểm O và A. Để đ/n độ dài thì ta đ/n là khoảng cách giữa hai điểm O và A; ...

B. Khái niệm véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

“Véc tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ đgl VTPT của mặt phẳng (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α) ”.

Như vậy chúng ta lấy quan hệ của d (giá) và (α) để định nghĩa cho $\vec{n}$. Nếu d và (α) không vuông góc nhau thì VTPT không được định nghĩa. Nói cách khác: VTPT chạy theo (α) và phụ thuộc vào (α) .

Đề xuất:

“ Cho véc tơ $\vec{n} \neq \vec{0}$, mặt phẳng (α) **đgl có VTPT $\vec{n}$ nếu** (α) vuông góc với giá của $\vec{n}$ ”. Khi đó ta còn nói (α) **nhận $\vec{n}$ làm VTPT**.

Tình huống:

Cho trước cả $\vec{n}$ và (α) , giá của $\vec{n}$ **không vuông góc với** (α) . Khi đó: (α) có vô số VTPT khác nhau, nhưng không phải là $\vec{n}$; ngược lại $\vec{n}$ là VTPT của vô số mặt phẳng khác nhau, nhưng không phải của (α) .

Như thế:

Véc tơ pháp tuyến $\vec{n} \neq \vec{0}$ luôn tồn tại tự bản thân nó (nội tại – nội hàm) và cho trước rồi, còn nó trở thành VTPT của $(\alpha) \Leftrightarrow (\alpha) \perp d$. Hoàn toàn phù hợp với nhận xét: (α) được xác định khi biết $\vec{n}$ và điểm M_0 của nó.

.....
CHÚC MỌI NGƯỜI THÀNH CÔNG!.