

Kỹ năng:

- Phương pháp đại số.
- Phương pháp hình học.
- Phương pháp bất modun.
- Phương pháp casio.

Một số tính chất cần nhớ.

1. Môđun của số phức:

▪ Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z . Kí hiệu $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

▪ Tính chất

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overrightarrow{OM}|$
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
- $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, (z' \neq 0)$
- $|z - z'| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$
- $|kz| = |k| \cdot |z|, k \in \mathbb{R}$

★ Chú ý: $|z^2| = |a^2 - b^2 + 2abi| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Lưu ý:

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \geq 0)$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \leq 0)$
- $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \leq 0)$
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1 = kz_2 (k \geq 0)$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- $|z|^2 = |\bar{z}| |z| = |\bar{z}|^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2. Một số quỹ tích cần nhớ

Biểu thức liên hệ x, y	Quỹ tích điểm M
$ax + by + c = 0$ (1) $ z - a - bi = z - c - di $ (2)	(1) Đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ (2) Đường trung trực đoạn AB với $(A(a, b), B(c, d))$
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ hoặc $ z - a - bi = R$	Đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R
$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ hoặc	Hình tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R

$ z - a - bi \leq R$	
$r^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ hoặc $r \leq z - a - bi \leq R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$, bán kính lần lượt là r, R
$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c \end{cases} (c \neq 0)$	Parabol
$\frac{(x+a)^2}{b^2} + \frac{(y+c)^2}{d^2} = 1(1) \text{ hoặc}$ $ z - a_1 - b_1 i + z - a_2 - b_2 i = 2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a > AB$, $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ Đoạn AB nếu $2a = AB$
$\frac{(x+a)^2}{b^2} - \frac{(y+c)^2}{d^2} = 1$	Hypebol

Một số dạng đặc biệt cần lưu ý:

Dạng 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = |z|$, tìm $|z|_{\min}$. Khi đó ta có

✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a; b)$

$$\checkmark \begin{cases} |z|_{\min} = \frac{1}{2}|z_0| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i \end{cases}$$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = |z - c - di|$. Tìm $|z|_{\min}$. Ta có

✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a; b), B(c; d)$

$$\checkmark |z|_{\min} = d(O, AB) = \frac{|a^2 + b^2 - c^2 - d^2|}{2\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}}$$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - a - bi| = |z - c - di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|\bar{z} - a - bi| = |z - c - di| \Leftrightarrow |z - a + bi| = |z - c - di|.$$

✓ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|iz - a - bi| = |z - c - di|$. Khi đó ta biến đổi

$$|iz - a - bi| = |iz - c - di| \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a-bi}{i} \right| = \left| z + \frac{-c-di}{i} \right| \Leftrightarrow |z + b + ai| = |z + d + ci|.$$

Dạng 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

TQ: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = R > 0$ ($|z - z_0| = R$). Tìm $|z|_{\max}, |z|_{\min}$. Ta có

✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a; b)$ bán kính R

$$\begin{cases} |z|_{\max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R = |z_0| + R \\ |z|_{\min} = |OI - R| = \left| \sqrt{a^2 + b^2} - R \right| = \left| |z_0| - R \right| \end{cases}$$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz - a - bi| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a-bi}{i} \right| = \frac{R}{|i|}$ (Chia hai vế cho $|i|$)

$$\Leftrightarrow |z + b + ai| = R$$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} - a - bi| = R \Leftrightarrow |z - a + bi| = R$ (Lấy liên hợp 2 vế)

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$$|(c + di)z - a - bi| = R \Leftrightarrow \left| z + \frac{-a-bi}{c+di} \right| = \frac{R}{|c+di|} = \frac{R}{\sqrt{c^2 + d^2}}$$

Hay viết gọn $|z_0 z - z_1| = R \Leftrightarrow \left| z - \frac{z_1}{z_0} \right| = \frac{R}{|z_0|}$ (Chia cả hai vế cho $|z_0|$)

Dạng 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

TQ1: (Elip chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - c| + |z + c| = 2a, (a > c)$ Khi đó ta có

✓ Quỹ tích điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

$$\begin{cases} |z|_{\max} = a \\ |z|_{\min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$$

TQ2: (Elip không chính tắc). Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$

Thỏa mãn $2a > |z_1 - z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc (Kỹ thuật đổi hệ trục tọa độ).

Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a, (|z_1 - z_2| < 2a)$ và $z_1, z_2 \neq \pm c, \pm ci$. Tìm Max, Min của $P = |z - z_0|$.

Đặt $\begin{cases} z_1 - z_2 = 2c \\ b^2 = a^2 - c^2 \end{cases}$	
Nếu $\left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right = 0$	$\begin{cases} P_{\text{Max}} = a \\ P_{\text{Min}} = b \end{cases}$ (dạng chính tắc)
Nếu $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right > a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$\begin{cases} P_{\text{Max}} = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right + a \\ P_{\text{Min}} = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right - a \end{cases}$
Nếu $\begin{cases} \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right < a \\ z_0 - z_1 = k(z_0 - z_2) \end{cases}$	$P_{\text{Max}} = \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right + a$
Nếu $ z_0 - z_1 = z_0 - z_2 $	$P_{\text{Min}} = \left \left z_0 - \frac{z_1 + z_2}{2} \right - b \right $

PHẦN I : BÀI TẬP CÓ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT.

Dạng 1: Sử dụng tính chất của modun – bất đại số.

Phương pháp : Xem hướng dẫn trên lớp

Dạng 2: Sử dụng tính chất hình học.

Xem hướng dẫn trên lớp.

Dạng 3: Tả phỉ lù.

Phương pháp: Tin tưởng bạn ngồi bên cạnh

Câu 1: (TRẦN HƯNG ĐẠO – NB) Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

- A. $z = 1 - 2i$. B. $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$. C. $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$. D. $z = -1 + 2i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Phương pháp tự luận

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |z + 3i| &= |z + 2 - i| \Leftrightarrow |x + (y + 3)i| = |(x + 2) + (y - 1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \\ \Leftrightarrow 6y + 9 &= 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2y + 1 \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2y + 1)^2 + y^2} = \sqrt{5y^2 + 4y + 1} = \sqrt{5\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Suy ra } |z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ khi } y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

Vậy $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$.

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |z + 3i| = |z + 2 - i| &\Leftrightarrow |x + (y + 3)i| = |(x + 2) + (y - 1)i| \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \\ &\Leftrightarrow 6y + 9 = 4x + 4 - 2y + 1 \Leftrightarrow 4x - 8y - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa điều kiện $|z + 3i| = |z + 2 - i|$ là đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$.

Phương án A: $z = 1 - 2i$ có điểm biểu diễn $(1; -2) \notin d$ nên loại A.

Phương án B: $z = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \notin d$ nên loại B.

Phương án D: $z = -1 + 2i$ có điểm biểu diễn $(-1; 2) \notin d$ nên loại B.

Phương án C: $z = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ có điểm biểu diễn $\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right) \in d$

(Trong trường hợp có nhiều số phức thuộc đường thẳng thì ta tiếp tục so sánh modun, và nên thay luôn z vào dữ kiện ban đầu chứ không nên biến đổi)

Cách 3: Tính nhanh.

Quỹ tích các điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $\Delta: x - 2y - 1 = 0$.

Vậy $|z|_{\min} = d(O, \Delta) = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Cách 4: Công thức tính nhanh.

BT1: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = |z|$. Tìm $|z|_{\min}$?

$$\begin{cases} |z|_{\min} = \frac{1}{2}|z_0| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \\ z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i \end{cases}$$

BT2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $|z - a - bi| = |z - c - di|$. Tìm $|z|_{\min}$?

$$|z|_{\min} = \frac{|a^2 + b^2 - c^2 - d^2|}{2\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}}$$

Câu 2: (LẠNG GIANG SỐ 1) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| + |z + 3| = 8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $|z|$. Khi đó $M + m$ bằng

A. $4 - \sqrt{7}$.

B. $4 + \sqrt{7}$.

C. 7.

D. $4 + \sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Đại số

Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $8 = |z - 3| + |z + 3| \geq |z - 3 + z + 3| = |2z| \Leftrightarrow |z| \leq 4$.

Do đó $M = \max|z| = 4$.

Mà $|z - 3| + |z + 3| = 8 \Leftrightarrow |x - 3 + yi| + |x + 3 + yi| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} = 8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$8 = 1 \cdot \sqrt{(x - 3)^2 + y^2} + 1 \cdot \sqrt{(x + 3)^2 + y^2} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2) \left[(x - 3)^2 + y^2 + (x + 3)^2 + y^2 \right]}$$

$$\Leftrightarrow 8 \leq \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 18)} \Leftrightarrow 2(2x^2 + 2y^2 + 18) \geq 64$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 7 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{7} \Leftrightarrow |z| \geq \sqrt{7}.$$

Do đó $M = \min|z| = \sqrt{7}$.

Vậy $M + m = 4 + \sqrt{7}$.

Cách 2: Hình học (Đọc lại lý thuyết phần Elip)

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là elip $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ $\left(\begin{array}{l} F_1(-3;0), F_2(0,3) \\ a = \frac{8}{2} = 4 \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \end{array} \right)$

Do vậy $\begin{cases} |z|_{\max} = a = 4 \\ |z|_{\min} = b = \sqrt{7} \end{cases} \Rightarrow M + m = 4 + \sqrt{7}$

Cách 3: Tổng quát

Cho số phức z thỏa mãn $|z - c| + |z + c| = 2a, (a > c)$ ta luôn có .

➤ Tập hợp điểm biểu diễn z là Elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

➤ $\begin{cases} |z|_{\max} = a \\ |z|_{\min} = \sqrt{a^2 - c^2} \end{cases}$

Câu 3: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$.

B. 4.

C. 6.

D. $\sqrt{13} + 1$.

Hướng dẫn giải

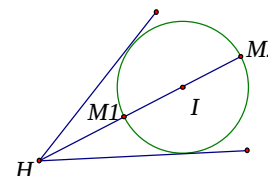
Chọn D

Cách 1: Gọi $z = x + yi$ ta có $z - 2 - 3i = x + yi - 2 - 3i = x - 2 + (y - 3)i$.

Theo giả thiết $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ nên điểm M biểu diễn cho số phức z nằm trên đường tròn tâm $I(2;3)$ bán kính $R = 1$.

Ta có $|\bar{z} + 1 + i| = |x - yi + 1 + i| = |x + 1 + (1 - y)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Gọi $M(x; y)$ và $H(-1;1)$ thì $HM = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$.



Gv : Lương Văn Huy – Thanh Trì – HN - 0969141404

Do M chạy trên đường tròn, H cố định nên MH lớn nhất khi M là giao của HI với đường tròn.

Phương trình HI : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$, giao của HI và đường tròn ứng với t thỏa mãn:

$$9t^2 + 4t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{13}} \text{ nên } M\left(2 + \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}\right), M\left(2 - \frac{3}{\sqrt{13}}; 3 - \frac{2}{\sqrt{13}}\right).$$

Tính độ dài MH ta lấy kết quả $HM = \sqrt{13} + 1$.

Cách 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|w| = |\bar{z} + 1 + i|$

Ta có $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + 3i| = 1 \Leftrightarrow |(\bar{z} + 1 + i) - 3 + 2i| = 1 \Leftrightarrow |w - 3 + 2i| = 1$ (Đường tròn tâm $I(3, -2), R = 1$)

Vậy $|w|_{\max} = OI + R = \sqrt{3^2 + 2^2} + 1 = 1 + \sqrt{13}$

Lưu ý: Cho số phức z thỏa mãn $|z - a - bi| = R > 0$, khi đó ta có quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $I(a, b), R = R$ và

$$\begin{cases} |z|_{\max} = OI + R = \sqrt{a^2 + b^2} + R \\ |z|_{\min} = |OI - R| = \left| \sqrt{a^2 + b^2} - R \right| \end{cases}$$

Ngoài ra ta luôn có công thức biến đổi $|z - a - bi| = |\bar{z} - a + bi|$

Câu 4: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z - i}{2 + iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A| \leq 1$.

B. $|A| \geq 1$.

C. $|A| < 1$.

D. $|A| > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Đặt $a = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 1$ (do $|z| \leq 1$)

$$|A| = \left| \frac{2z - i}{2 + iz} \right| = \left| \frac{2a + (2b - 1)i}{2 - b + ai} \right| = \sqrt{\frac{4a^2 + (2b - 1)^2}{(2 - b)^2 + a^2}}$$

$$\text{Ta chứng minh } \frac{4a^2 + (2b - 1)^2}{(2 - b)^2 + a^2} \leq 1.$$

$$\text{Thật vậy ta có } \frac{4a^2 + (2b - 1)^2}{(2 - b)^2 + a^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4a^2 + (2b - 1)^2 \leq (2 - b)^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $a^2 + b^2 = 1$.

Vậy $|A| \leq 1$.

Cách 2: Trắc nghiệm

Chọn $\begin{cases} z=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |A| = \left| \frac{2z-i}{2+iz} \right| = \frac{1}{\frac{2\sqrt{34}}{17}} < 1 \Rightarrow |A| \leq 1$

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right|$.

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có: $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right| \leq \left| 1 \right| + \left| \frac{5i}{z} \right| = 1 + \frac{5}{|z|} = 6$. Khi $z = i \Rightarrow A = 6$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Cách 2: $A = \left| 1 + \frac{5i}{z} \right| = \frac{|z+5i|}{|z|} = |z+5i|$

Theo bài $|z|=1 \Leftrightarrow |z+5i-5i|=1 \Leftrightarrow |z+5i|_{\max} = \sqrt{5^2+1} = 6$

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất $M_{\max}$ và giá trị nhỏ nhất $M_{\min}$ của biểu thức $M = |z^2+z+1| + |z^3+1|$.

A. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 1$.

B. $M_{\max} = 5; M_{\min} = 2$.

C. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 1$.

D. $M_{\max} = 4; M_{\min} = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $M \leq |z|^2 + |z| + 1 + |z|^3 + 1 = 5$, khi $z=1 \Rightarrow M=5 \Rightarrow M_{\max}=5$.

Mặt khác: $M = \frac{|1-z^3|}{|1-z|} + |1+z^3| \geq \frac{|1-z^3|}{2} + \frac{|1+z^3|}{2} \geq \frac{|1-z^3+1+z^3|}{2} = 1$, khi

$z=-1 \Rightarrow M=1 \Rightarrow M_{\min}=1$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 7: Cho số phức z thỏa $|z| \geq 2$. Tìm tích của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \frac{z+i}{z} \right|$.

A. $\frac{3}{4}$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $P = \left| 1 + \frac{i}{z} \right| \leq 1 + \frac{1}{|z|} \leq \frac{3}{2}$. Mặt khác: $\left| 1 + \frac{i}{z} \right| \geq 1 - \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{2}$.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$, xảy ra khi $z = -2i$; giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$ xảy ra khi

$z = 2i$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z-2i$.

A. $\sqrt{26+6\sqrt{17}}$.

B. $\sqrt{26-6\sqrt{17}}$.

C. $\sqrt{26+8\sqrt{17}}$.

D. $\sqrt{26-4\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 2i = x + (y - 2)i$. Ta có:

$$|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

Đặt $x = 1 + 3\sin t$; $y = -2 + 3\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

$$\Rightarrow |z - 2i|^2 = (1 + 3\sin t)^2 + (-4 + 3\cos t)^2 = 26 + 6(\sin t - 4\cos t) = 26 + 6\sqrt{17}\sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$\Rightarrow \sqrt{26 - 6\sqrt{17}} \leq |z - 2i| \leq \sqrt{26 + 6\sqrt{17}} \Rightarrow |z - 2i|_{\max} = \sqrt{26 + 6\sqrt{17}} = 3 + \sqrt{17}$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Cách 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm môđun lớn nhất của số phức $z - 2i$.

$$\text{Ta có } |z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |(z - 2i) - 1 + 4i| = 3 \Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{1^2 + 4^2} + 3 = 3 + \sqrt{17} \text{ (đáp án A)}$$

Câu 9: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1 + z| + 3|1 - z|$.

A. $3\sqrt{15}$

B. $6\sqrt{5}$

C. $\sqrt{20}$

D. $2\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x \in [-1; 1]$.

$$\text{Ta có: } P = |1 + z| + 3|1 - z| = \sqrt{(1 + x)^2 + y^2} + 3\sqrt{(1 - x)^2 + y^2} = \sqrt{2(1 + x)} + 3\sqrt{2(1 - x)}.$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2(1 + x)} + 3\sqrt{2(1 - x)}$; $x \in [-1; 1]$. Hàm số liên tục trên $[-1; 1]$ và với

$$x \in (-1; 1) \text{ ta có: } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + x)}} - \frac{3}{\sqrt{2(1 - x)}} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{5} \in (-1; 1).$$

$$\text{Ta có: } f(1) = 2; f(-1) = 6; f\left(-\frac{4}{5}\right) = 2\sqrt{20} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{20}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Cách 2: (Casio)

Từ $|z| = 1$, đặt $z = x + yi \Rightarrow \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ Thay vào P rồi dùng mode 7 ra đáp án D

Cách 3: Hình học (Xem video live của thầy)

Câu 10: Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$. Tính giá trị của $M.m$.

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{39}{4}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow z.\bar{z} = 1$

Đặt $t = |z + 1|$, ta có $0 = |z| - 1 \leq |z + 1| \leq |z| + 1 = 2 \Rightarrow t \in [0; 2]$.

$$\text{Ta có } t^2 = (1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + z.\bar{z} + z + \bar{z} = 2 + 2x \Rightarrow x = \frac{t^2 - 2}{2}.$$

Suy ra $|z^2 - z + 1| = |z^2 - z + z\bar{z}| = |z||z - 1 + \bar{z}| = \sqrt{(2x-1)^2} = |2x-1| = |t^2 - 3|$.

Xét hàm số $f(t) = t + |t^2 - 3|, t \in [0; 2]$. Bằng cách dùng đạo hàm, suy ra

$$\max f(t) = \frac{13}{4}; \min f(t) = \sqrt{3} \Rightarrow M.n = \frac{13\sqrt{3}}{4}.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Câu 11: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = 2|z|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{6} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{3}+1}{6}$.

B. $\sqrt{5}-1 \leq |z| \leq \sqrt{5}+1$.

C. $\sqrt{6}-1 \leq |z| \leq \sqrt{6}+1$.

D. $\frac{\sqrt{2}-1}{3} \leq |z| \leq \frac{\sqrt{2}+1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $|u| + |v| \geq |u+v|$, ta được

$$2|z| + |-4| = |z^2 + 4| + |-4| \geq |z|^2 \Rightarrow |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \Rightarrow |z| \leq \sqrt{5} + 1.$$

$$2|z| + |z|^2 = |z^2 + 4| + |-z^2| \geq 4 \Rightarrow |z|^2 + 2|z| - 4 \geq 0 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{5} - 1.$$

Vậy, $|z|$ nhỏ nhất là $\sqrt{5} - 1$, khi $z = -i + i\sqrt{5}$ và $|z|$ lớn nhất là $\sqrt{5} + 1$, khi $z = i + i\sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

B. $\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$

C. $\sqrt{6 + 4\sqrt{5}}$

D. $\sqrt{5 + 6\sqrt{5}}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z - 1 + 2i| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Đặt $x = 1 + 2\sin t; y = -2 + 2\cos t; t \in [0; 2\pi]$.

Lúc đó: $|z|^2 = (1 + 2\sin t)^2 + (-2 + 2\cos t)^2 = 9 + (4\sin t - 8\cos t) = 9 + \sqrt{4^2 + 8^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow |z|^2 = 9 + 4\sqrt{5} \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in [-\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}; \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} \text{ đạt được khi } z = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} + \frac{-10 + 4\sqrt{5}}{5}i.$$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Cách 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

$$\text{Ta có } |z - 1 + 2i| = 2 \Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{1^2 + 2^2} + 2 = 2 + \sqrt{5} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

Câu 13: Cho số phức z thỏa mãn $|(1-i)z - 6 - 2i| = \sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $4\sqrt{5}$

B. $3\sqrt{5}$.

C. 3.

D. $3 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$\left| (1-i)z - 6 - 2i \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left| (1-i) \right| \cdot \left| z + \frac{-6-2i}{1-i} \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow |z - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5. \text{ Đặt}$$

$$x = 2 + \sqrt{5} \sin t; y = 4 + \sqrt{5} \cos t; t \in [0; 2\pi].$$

Lúc đó:

$$|z|^2 = (2 + \sqrt{5} \sin t)^2 + (4 + \sqrt{5} \cos t)^2 = 25 + (4\sqrt{5} \sin t + 8\sqrt{5} \cos t) = 25 + \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (8\sqrt{5})^2} \sin(t + \alpha); (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow |z|^2 = 25 + 20 \sin(t + \alpha) \Rightarrow z \in [\sqrt{5}; 3\sqrt{5}]$$

$$\Rightarrow z_{\max} = 3\sqrt{5} \text{ đạt được khi } z = 3 + 6i.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Cách 2: Cho số phức z thỏa mãn $\left| (1-i)z - 6 - 2i \right| = \sqrt{10}$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

$$\text{Ta có } \left| (1-i)z - 6 - 2i \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \left| z + \frac{-6-2i}{1-i} \right| = \frac{\sqrt{10}}{|1-i|} \Leftrightarrow |z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{2^2 + 4^2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Câu 14: Gọi $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn hai điều kiện $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$ và

$$\left| z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \right| \text{ đạt giá trị lớn nhất. Tính tích } xy.$$

A. $xy = \frac{9}{4}$.

B. $xy = \frac{13}{2}$.

C. $xy = \frac{16}{9}$.

D. $xy = \frac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Đặt $z = x + iy (x, y \in \mathbb{R})$. Thay vào điều kiện thứ nhất, ta được $x^2 + y^2 = 9$.

Đặt $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t$. Thay vào điều kiện thứ hai, ta có

$$P = \left| z - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}i \right| = \sqrt{18 - 18 \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \leq 6.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow t = -\frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 15: Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = |z - 2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z + 2i$.

A. $\sqrt{5}$

B. $3\sqrt{5}$.

C. $3\sqrt{2}$

D. $3 + \sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $z = x + yi; (x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có: } |z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x.$$

$$\text{Ta có: } |z + 2i|^2 = x^2 + (y+2)^2 = x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36 = 2(x-3)^2 + 18 \geq 18$$

$$\Rightarrow |z + 2i|_{\min} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ khi } z = 3 + i.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Cách 2: $|z - 2 - 4i| = |z - 2i| \Leftrightarrow |(z + 2i) - 2 - 6i| = |(z + 2i) - 4i| \Leftrightarrow |w - 2 - 6i| = |w - 4i|$

Trong đó $w = z + 2i$ (quay về dạng bài toán 1)

Câu 16: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z - 1 + i$.

- A. 4. B. $2\sqrt{2}$. **C. 2.** D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z - 1 + i = (x - 1) + (y + 1)i$. Ta có:

$$|z - 1 + 2i| = 9 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

Đặt $x = 1 + 3\sin t$; $y = -2 + 3\cos t$; $t \in [0; 2\pi]$.

$$\Rightarrow |z - 1 + i|^2 = (3\sin t)^2 + (-1 + 3\cos t)^2 = 10 - 6\cos t \Rightarrow 2 \leq |z - 2i| \leq 4 \Rightarrow |z - 1 + i|_{\min} = 2, \text{ khi } z = 1 + i.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án C.**

Cách 2: (Hình học + CT tính nhanh)

Ta có $|z - 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |(z - 1 + i) + i| = 3 \Rightarrow |z - 1 + i|_{\min} = |\sqrt{1^2 - 3}| = 2$

Câu 17: Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức

$M = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính môđun của số phức $z + i$.

- A. $|z + i| = 2\sqrt{41}$ B. $|z + i| = 3\sqrt{5}$.
C. $|z + i| = 5\sqrt{2}$ **D. $|z + i| = \sqrt{41}$.**

Hướng dẫn giải

Gọi $z = x + yi$; ($x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$). Ta có: $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (C): (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5$: tâm $I(3; 4)$ và $R = \sqrt{5}$.

Mặt khác:

$$M = |z + 2|^2 - |z - i|^2 = (x + 2)^2 + y^2 - [(x^2) + (y - 1)^2] = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow d: 4x + 2y + 3 - M = 0.$$

Do số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện nên d và (C) có điểm chung

$$\Leftrightarrow d(I; d) \leq R \Leftrightarrow \frac{|23 - M|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow |23 - M| \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq M \leq 33$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 30 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow z + i = 5 - 4i \Rightarrow |z + i| = \sqrt{41}.$$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 18: Cho số phức $z = \frac{-m + i}{1 - m(m - 2i)}$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm môđun lớn nhất của z .

- A. 1.** B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Hướng dẫn giải

Ta có: $z = \frac{-m+i}{1-m(m-2i)} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1}{m^2+1}} \leq 1 \Rightarrow |z|_{\max} = 1 \Leftrightarrow z = i; m = 0.$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Câu 19: (NGUYỄN TRÃI – HD) Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-1$

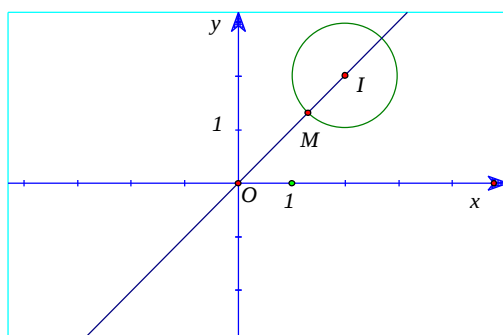
B. $\sqrt{5}+1$

C. $\sqrt{5}-2$

D. $\sqrt{5}+2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Cách 1: Gọi $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z-2-2i|=1 \Leftrightarrow |(x-2)+(y-2)i|=1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

Tập hợp các điểm trong mặt phẳng Oxy biểu diễn của số phức z là đường tròn (C) tâm $I(2;2)$ và bán kính $R=1$.

$|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = IM$, với $I(2;2)$ là tâm đường tròn, M là điểm chạy trên đường tròn.

Khoảng cách này ngắn nhất khi M là giao điểm của đường thẳng nối hai điểm $N(0;1) \in Oy, I(2;2)$ với đường tròn (C).

$IM_{\min} = IN - R = \sqrt{5} - 1$

Cách 2: Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất

Ta có $|z-2-2i|=1 \Leftrightarrow |(z-i)-2-i|=1 \Rightarrow |z-i|_{\min} = \left| \sqrt{2^2+1^2} - 1 \right| = \sqrt{5} - 1$

Câu 20: Trong mặt phẳng phức Oxy , các số phức z thỏa $|z+2i-1|=|z+i|$. Tìm số phức z được biểu diễn bởi điểm M sao cho MA ngắn nhất với $A(1,3)$.

A. $3+i$.

B. $1+3i$.

C. $2-3i$.

D. $-2+3i$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Gọi $E(1,-2)$ là điểm biểu diễn số phức $1-2i$

Gọi $F(0,-1)$ là điểm biểu diễn số phức $-i$

Ta có : $|z+2i-1|=|z+i| \Leftrightarrow ME=MF \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực $EF: x-y-2=0$.

Để MA ngắn nhất khi $MA \perp EF$ tại $M \Leftrightarrow M(3,1) \Rightarrow z=3+i \Rightarrow$ **Đáp án A.**

Câu 21: (CHUYÊN SƠN LA - L2) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện : $|z-1+2i|=\sqrt{5}$ và $w=z+1+i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

A. $2\sqrt{5}$.

B. $3\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z-1+2i=(x-1)+(y+2)i$

Ta có: $|z-1+2i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=5$

Suy ra tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức z thuộc đường tròn (C) tâm $I(1; -2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

Để thấy $O \in (C)$, $N(-1; -1) \in (C)$

Theo đề ta có:

$M(x; y) \in (C)$ là điểm biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

$w=z+1+i=x+yi+1+i=(x+1)+(y+1)i$

$\Rightarrow |z+1+i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=|MN|$

Suy ra $|z+1+i|$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất

Mà $M, N \in (C)$ nên MN lớn nhất khi MN là đường kính đường tròn (C)

$\Leftrightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow M(3; -3) \Rightarrow z=3-3i \Rightarrow |z|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

Câu 22: (CHU VĂN AN - HN) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z+i|+|z-2-i|$.

A. $\max T=8\sqrt{2}$.

B. $\max T=4$.

C. $\max T=4\sqrt{2}$.

D. $\max T=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$T=|z+i|+|z-2-i|=|(z-1)+(1+i)|+|(z-1)-(1+i)|$.

Đặt $w=z-1$. Ta có $|w|=1$ và $T=|w+(1+i)|+|w-(1+i)|$.

Đặt $w=x+yi$. Khi đó $|w|^2=2=x^2+y^2$.

$$\begin{aligned} T &= |(x+1)+(y+1)i| + |(x-1)+(y-1)i| \\ &= 1 \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} + 1 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2+1^2)((x+1)^2 + (y+1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2)} \\ &= \sqrt{2(2x^2 + 2y^2 + 4)} = 4 \end{aligned}$$

Vậy $\max T = 4$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$.

B. 4.

C. 6.

D. $\sqrt{13} + 1$.

(THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU - NGHỆ AN)

Lời giải

Cách 1: Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có $|z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |(a-2) + (b-3)i| = 1$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2} = 1 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 = 1 \quad (*)$$

Đặt $\begin{cases} a-2 = \sin t \\ b-3 = \cos t \end{cases}$ (vì $(*) \Leftrightarrow \sin^2 t + \cos^2 t = 1$). Khi đó $|\bar{z} + 1 + i| = |(a+1) + (1-b)i|$.

$$= \sqrt{(a+1)^2 + (1-b)^2} \rightarrow \text{xét biểu thức } P = (a+1)^2 + (1-b)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (a+1)^2 + (1-b)^2 &= (\sin t + 3)^2 + (\cos t + 2)^2 = \sin^2 t + 6\sin t + 9 + \cos^2 t + 4\cos t + 4 \\ &= (\sin^2 t + \cos^2 t) + 13 + 6\sin t + 4\cos t \\ &= 14 + 6\sin t + 4\cos t = P \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $(6\sin t + 4\cos t)^2 \leq (6^2 + 4^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)$

$$\Leftrightarrow (6\sin t + 4\cos t)^2 \leq 52 \Leftrightarrow 6\sin t + 4\cos t \leq \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow P \leq 14 + 2\sqrt{13}.$$

$$\text{Vậy } |\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{(a+1)^2 + (1-b)^2} \leq \sqrt{14 + 2\sqrt{13}} = \sqrt{(\sqrt{13} + 1)^2} = \sqrt{13} + 1. \text{ Chọn A.}$$

Cách 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$

$$\text{Ta có } |z - 2 - 3i| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z} - 2 + 3i| = 1 \Leftrightarrow |(\bar{z} + 1 + i) - 3 + 2i| = 1$$

$$\Rightarrow |\bar{z} + 1 + i|_{\text{Max}} = \sqrt{3^2 + 2^2} + 1 = \sqrt{13} + 1$$

Câu 24: (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 2) Cho các số phức z, w thỏa mãn

$$|z + 2 - 2i| = |z - 4i|, w = iz + 1. \text{ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức } |w| \text{ là}$$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó $z + 2 - 2i = a + 2 + (b-2)i$ và $z - 4i = a + (b-4)i$.

$$\text{Nên ta có } (a+2)^2 + (b-2)^2 = a^2 + (b-4)^2 \Leftrightarrow a+b=2 \Leftrightarrow b=2-a$$

Khi đó $w = iz + 1 = (a + bi)i + 1 = 1 - b + ai \Rightarrow |w| = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (a-1)^2}$.

Dễ thấy $a^2 + (a-1)^2 = 2\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |w| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \min_{|w|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Cách 2: Chuyển về phương trình đường thẳng (dạng 1)

Câu 25: (ĐỀ THPT LẦN 5 – 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z-4| + |z+4| = 10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là

A. 10 và 4 B. 5 và 4 C. 4 và 3. **D. 5 và 3.**

Hướng dẫn giải.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Theo giả thiết, ta có $|z-4| + |z+4| = 10$.

$$\Leftrightarrow |(x-4) + yi| + |(x+4) + yi| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 \quad (*)$$

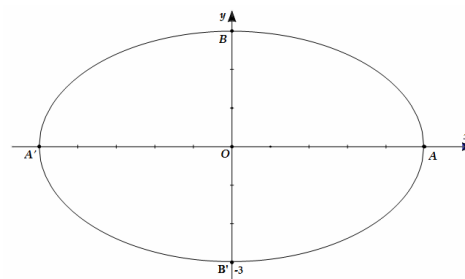
Gọi $M(x; y)$, $F_1(-4; 0)$ và $F_2(4; 0)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$ nên tập hợp các điểm $M(z)$ là đường elip (E) .

Ta có $c = 4$; $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$ và $b^2 = a^2 - c^2 = 9$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Vậy $\max|z| = OA = OA' = 5$ và $\min|z| = OB = OB' = 3$. **Chọn D.**



Câu 26: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Biết rằng số phức $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) có môđun nhỏ nhất. Tính $P = x^2 + y^2$.

A. $P = 10$. **B. $P = 8$.** C. $P = 16$. D. $P = 26$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1: Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$). Ta có $|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |(x-2) + (y-4)i| = |x + (y-2)i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y - 16 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x.$$

$$\text{Do đó } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (4-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16} = \sqrt{2(x-2)^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$. Vậy $P = 2^2 + 2^2 = 8$. **Chọn B.**

Cách 2: Chuyển về phương trình đường thẳng (bài tập 1)

Câu 27: Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$.

A. $\max|z| = 1$. **B. $\max|z| = 2$.** C. $\max|z| = \sqrt{2}$. D. $\max|z| = 3$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có } \left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1 \Leftrightarrow |-iz + 1| = 1 \Leftrightarrow |-i| \cdot \left| z + \frac{1}{-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - (-i)| = 1.$$

Vì $|(-i) - 0| = 1$ nên $\max|z| = r_1 + r_2 = 1 + 1 = 2$. **Chọn B.**

Câu 28: (THPT CHUYÊN KHTN - LẦN 1) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2}$. Tìm $\max|z|$.

A. $\max|z| = 4$.

B. $\max|z| = 3$.

C. $\max|z| = 7$.

D. $\max|z| = 6$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $|(1+i)z + 1 - 7i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|1+i\right| \left|z + \frac{1-7i}{1+i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - (3+4i)| = 1$.

Vì $|(3+4i) - 0| = 5$ nên $\max|z| = r_1 + r_2 = 1 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 6$. **Chọn D.**

Câu 29: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z-i}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|A| \leq 1$.

B. $|A| \geq 1$.

C. $|A| < 1$.

D. $|A| > 1$.

(THPT CHUYÊN HÀ NAM)

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $A = \frac{2z-i}{2+iz} \Leftrightarrow A(2+iz) = 2z-i \Leftrightarrow 2A + Azi = 2z-i$

$\Leftrightarrow 2A+i = z(Ai-2) \Leftrightarrow z = \frac{2A+i}{Ai-2}$. Mà $|z| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{2A+i}{Ai-2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow |2A+i| \leq |Ai-2|$ (*).

Đặt $A = x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó (*) $\Leftrightarrow |2x+(2y+1)i| \leq |-y-2+xi|$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+(2y+1)^2} \leq \sqrt{(y+2)^2+x^2} \Leftrightarrow 4x^2+4y^2+4y+1 \leq x^2+y^2+4y+4 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$.

Vậy môđun của $A = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$. **Chọn A.**

Câu 30: Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8+6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$.

B. $P = 2\sqrt{26}$.

C. $P = 4\sqrt{6}$.

D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)

Lời giải

❖ **Bổ đề.** Cho hai số phức z_1 và z_2 , ta luôn có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (*).

Chứng minh. Sử dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$ và $z.\overline{z} = |z|^2$. Khi đó

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= z_1.\overline{z_1} + z_1.\overline{z_2} + \overline{z_1}.z_2 + z_2.\overline{z_2} + z_1.\overline{z_1} - z_1.\overline{z_2} - \overline{z_1}.z_2 + z_2.\overline{z_2} \\ &= 2(z_1.\overline{z_1} + z_2.\overline{z_2}) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \rightarrow đpcm. \end{aligned}$$

❖ **Áp dụng** (*), ta được $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 4 - (\sqrt{3})^2 = 1 \Rightarrow |z_1 - z_2| = 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $P = |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = 2\sqrt{26}$. **Chọn B.**

- Câu 31:** Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.
- A. $P = 5 + 3\sqrt{5}$. B. $P = 2\sqrt{26}$. C. $P = 4\sqrt{6}$. D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

(THPT CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN - LẦN 4)

Lời giải

❖ **Bổ đề.** Cho hai số phức z_1 và z_2 , ta luôn có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (*).

Chứng minh. Sử dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$ và $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Khi đó

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 + z_2 \cdot \overline{z_2} + z_1 \cdot \overline{z_1} - z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1} \cdot z_2 + z_2 \cdot \overline{z_2} \\ &= 2(z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2}) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \rightarrow đpcm. \end{aligned}$$

❖ **Áp dụng** (*), ta được $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 4 - (\sqrt{3})^2 = 1 \Rightarrow |z_1 - z_2| = 1$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được $P = |z_1| + |z_2| \leq \sqrt{2(|z_1|^2 + |z_2|^2)} = 2\sqrt{26}$. **Chọn B.**

- Câu 32:** (THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI) Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)|$.

Tính $\min |w|$, với số phức $w = z - 2 + 2i$.

- A. $\min |w| = \frac{3}{2}$. B. $\min |w| = 2$. C. $\min |w| = 1$. D. $\min |w| = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $z^2 - 2z + 5 = (z - 1)^2 + 4 = (z - 1)^2 - (2i)^2 = (z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)$.

Khi đó, giả thiết $\Leftrightarrow |(z - 1 + 2i)(z - 1 - 2i)| = |(z - 1 + 2i)(z + 3i - 1)| \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 - 2i \\ |z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1| \end{cases}$

TH1. Với $z = 1 - 2i$, ta có $w = z - 2 + 2i = 1 - 2i - 2 + 2i = -1 \Rightarrow |w| = 1$.

TH2. Với $|z - 1 - 2i| = |z + 3i - 1|$ (*), đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có

$$(*) \Leftrightarrow |x - 1 + (y - 2)i| = |x - 1 + (y + 3)i| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

Do đó $w = z - 2 + 2i = x - \frac{1}{2}i - 2 + 2i = x - 2 + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(x - 2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}$. **Chọn A.**

- Câu 33:** (TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ LẦN 8) Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. 5.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a = \left| z + \frac{1}{z} \right| &\Leftrightarrow a^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \\ &= |z|^2 + \frac{z^2 + (\bar{z})^2}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^2} = \frac{|z|^4 + (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 + 1}{|z|^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } |z|^4 - |z|^2 \cdot (a^2 + 2) + 1 = -(z + \bar{z})^2 \leq 0 \Rightarrow |z| \in \left[\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}; \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right].$$

$$\text{Vậy } \max |z| = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}; \min |z| = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} \Rightarrow M + m = \sqrt{a^2 + 4} = \sqrt{13}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 34: (THPT NHÂN CHÍNH - HÀ NỘI) Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. C. $|z| > 2$. D. $|z| < \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Cách 1. Từ giả thiết, ta có } (1+2i)|z| &= \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i \Leftrightarrow (1+2i)|z| + 2 - i = \frac{\sqrt{10}}{z} \\ \Leftrightarrow |z| + 2|z|i + 2 - i &= \frac{\sqrt{10}}{z} \Leftrightarrow |z| + 2 + (2|z| - 1)i = \frac{\sqrt{10}}{z} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Lấy môđun hai vế của } (*), \text{ ta được } (*) \Leftrightarrow \sqrt{(|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{|z|}.$$

$$\text{Đặt } t = |z|, \text{ ta có } \sqrt{(t+2)^2 + (2t-1)^2} = \frac{\sqrt{10}}{t} \Leftrightarrow t^2(5t^2 + 5) = 10 \Leftrightarrow t^4 + t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy môđun của số phức } z \text{ bằng } 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}.$$

Cách 2. Sử dụng máy tính casio (hướng dẫn chi tiết ở **câu 26**) để tìm $|z|$.

Cách 3. Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và $c = |z|$, thay vào đẳng thức đã cho thì

$$\begin{aligned} Gt \Leftrightarrow (1+2i)c &= \frac{\sqrt{10}}{a+bi} - 2 + i \Leftrightarrow (1+2i)c = \frac{(a-bi)\sqrt{10}}{c^2} - 2 + i \\ \Leftrightarrow c - \frac{a\sqrt{10}}{c^2} + 2 + i \left(2c + \frac{b\sqrt{10}}{c^2} - 1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} c - \frac{a\sqrt{10}}{c^2} + 2 = 0 \\ 2c + \frac{b\sqrt{10}}{c^2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 2 = \frac{a\sqrt{10}}{c^2} \\ 1 - 2c = \frac{b\sqrt{10}}{c} \end{cases} \text{ nên } (c+2)^2 + (1-2c)^2 = \frac{10(a^2+b^2)}{c^4} = \frac{10}{c^2}$$

$$\text{Giải ra ta có } c = \pm 1 \text{ mà } c > 0 \text{ nên } c = 1 \text{ hay } |z| = 1. \text{ Do đó } \frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 35: (THPT CHUYÊN LÀO CAI) Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải

$$\text{Gọi } M(x; y) \rightarrow M'(x; -y) \text{ và } (4+3i)z = 4x-3y+(3x+4y)i \Rightarrow \begin{cases} N(4x-3y; 3x+4y) \\ N'(4x-3y; -3x-4y) \end{cases}$$

Dễ thấy $MM' \parallel NN'$ vì cùng vuông góc với Ox nên để $MM'N'N$ là hình chữ nhật.

$$\text{Khi và chỉ khi } \begin{cases} MM' = NN' \\ MN = M'N' \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow z=x-xi \Rightarrow |z+4i-5| = \sqrt{(x-5)^2 + (x-4)^2} \\ MN \parallel Ox \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (x-5)^2 + (x-4)^2 = \frac{1}{2}(2x-9)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow |z+4i-5|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 36: (THPT CHU VĂN AN - HÀ NỘI) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = |z+i| + |z-2-i|.$$

- A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$. C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.

Lời giải

$$\text{Đặt } z = x+yi \ (x, y \in \mathbb{R}), \text{ ta có } |z-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x-1+yi| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 1 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } T &= |z+i| + |z-2-i| = |x+(y+1)i| + |x-2+(y-1)i| \\ &= \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5} \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp với } (*), \text{ ta được } T = \sqrt{2x+2y+2} + \sqrt{6-2x-2y} = \sqrt{2(x+y)+2} + \sqrt{2-2(x+y)}$$

$$\text{Đặt } t = x+y, \text{ khi đó } T = f(t) = \sqrt{2t+2} + \sqrt{6-2t} \text{ với } t \in [-1; 1].$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+2}} - \frac{1}{\sqrt{6-2t}}; \ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow f(t)_{\max} = f(1) = 4. \text{ Chọn B.}$$

Câu 37: (ĐHNT HN) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = |z+i| + |z-2-i|$$

- A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 8$. C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x+yi \ (x, y \in \mathbb{R}),$ ta có:

$$|z-1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x-1+yi| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x+1 (*)$$

$$\text{Lại có: } T = |z+i| + |z-2-i| = |x+(y+1)i| + |x-2+(y-1)i|$$

$$= \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + 2y+1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$$

Kết hợp với (*), ta được:

$$T = \sqrt{2x+2y+2} + \sqrt{6-2x-2y}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhacopxki ta được

$$T \leq \sqrt{(1^2+1^2) \left[(\sqrt{2x+2y+2})^2 + (\sqrt{6-2x-2y})^2 \right]} = 4$$

Vậy $\max T = 4$.

Câu 38: Cho $w = \sin \alpha + i \cos \alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thỏa mãn $|w^2 + 1| = 2|w|$.

Giá trị của $P = \left(26|\overline{w}|^2 - 3 \right)^{2018}$ là

A. $P = 23^{2018}$.

B. $P = -23^{2018}$.

C. $P = 23^{2018}i$.

D. $P = 29^{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } w^2 + 1 = (\sin \alpha + i \cos \alpha)^2 + 1 = 1 - \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha \Rightarrow |w^2 + 1| = \sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}.$$

$$2|w| = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 2.$$

$$\text{Từ giả thiết: } |w^2 + 1| = 2|w| \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\Rightarrow w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{w} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |\overline{w}|^2 = 1.$$

$$\text{Vậy } P = 23^{2018}.$$

Câu 39: Cho các số phức $z_1 = -2+i, z_2 = 2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2 + |z-z_2|^2 = 16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $M^2 - m^2$ bằng

A. 15.

B. 7.

C. 11.

D. 8.

Lời giải

Chọn D.

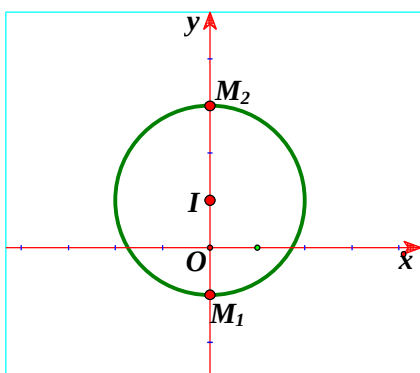
Gọi M là điểm biểu diễn của z .

Gọi $A(-2;1), B(2;1)$. Gọi $I(0;1)$ là trung điểm AB .

$$|z-z_1|^2 + |z-z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 16$$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 16 \Rightarrow MI = 2$$

Suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $I(0;1)$ bán kính $R = 2$.



Ta lại có : $|IM - IO| \leq OM \leq IM + IO \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 3$.

Do đó : $|z|_{\max} = 3 \Leftrightarrow M \equiv M_2$

$|z|_{\min} = 1 \Leftrightarrow M \equiv M_1$

$\Rightarrow M^2 - m^2 = 8$.

Bài tương tự

Câu 40: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

A. $m = \sqrt{2} - 1$.

B. $m = 2\sqrt{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 2\sqrt{2} - 2$

Lời giải

Chọn D.

Đặt $z_1 = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 = -b + ai$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = (a + b) + (b - a)i$.

Nên $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a + b)^2 + (b - a)^2} = \sqrt{2} \cdot |z_1|$

Ta lại có $2 = |z_1 + 1 - i| \leq |z_1| + |1 - i| = |z_1| + \sqrt{2}$

$\Rightarrow |z_1| \geq 2 - \sqrt{2}$. Suy ra $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \cdot |z_1| \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} < 0$.

Vậy $m = \min |z_1 - z_2| = 2\sqrt{2} - 2$.

Câu 41: Gọi số phức $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa điều kiện $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26$ và $|z - (2 + \sqrt{5}i)|$ lớn nhất.

Tính $T = x - y$.

A. $T = -2 + \sqrt{5}$

B. $T = 2 + \sqrt{5}$.

C. $T = -2 - \sqrt{5}$.

D. $T = 2 - \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Giả sử $z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có $|z - 2|^2 + |z + 2|^2 = 26 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 + (x + 2)^2 + y^2 = 26 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) tâm là gốc tọa độ O , bán kính $R = 3$.

$$\text{Ta có } |z - (2 + \sqrt{5}i)| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2}$$

Vì $2^2 + (\sqrt{5})^2 = 9$ nên điểm $N(2; \sqrt{5})$ thuộc đường tròn (C) .

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc (C) , khi đó $|z - (2 + \sqrt{5}i)| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2} = MN$.

Suy ra $|z - (2 + \sqrt{5}i)|$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ lớn nhất $\Leftrightarrow MN$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow M(-2; -\sqrt{5})$

Vậy $z = -2 - \sqrt{5}i$.

Câu 42: Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn phương trình $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$ Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \sqrt{2}$.

C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $P = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

HD: Cách 1. Ta có: $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2z - i|^2 = |2 + iz|^2 \Leftrightarrow (2z - i)(2\bar{z} + i) = (2 + iz)(2 - i\bar{z})$

$$\Leftrightarrow 4z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} - i^2 = 4 - 2i\bar{z} + 2iz - i^2 z\bar{z} \Leftrightarrow 3z\bar{z} = 3$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z_1| = 1 \text{ và } |z_2| = 1$$

Chú ý: $a\bar{a} = a^2 \Rightarrow |2z - i|^2 = (2z - i)(2\bar{z} - i) = (2z - i)(2\bar{z} + i)$

Tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 là đường tròn tâm O bán kính $R = 1$.

Gọi $M_1(z_1), M_2(z_2) \Rightarrow OM_1 = OM_2 = 1$

Ta có: $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}| = |\overrightarrow{M_2M_1}| = 1 \Rightarrow \Delta OM_1M_2$ đều

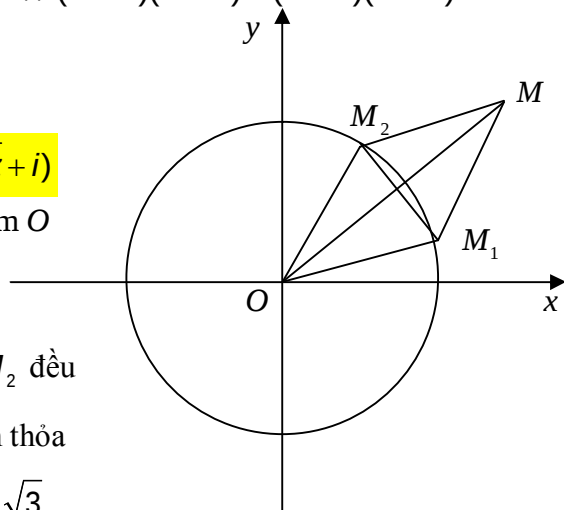
Mà $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}| = |\overrightarrow{OM}| = OM$ với M là điểm thỏa

mãn OM_1MM_2 là hình thoi cạnh 1 $\Rightarrow OM = \sqrt{3} \Rightarrow P = \sqrt{3}$.

Cách 2. Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có $2z - i = 2x + (2y - 1)i$ và $2 + iz = 2 - y + xi$.

$$\text{Khi đó: } |2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{(y - 2)^2 + x^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \end{cases}$$

Sử dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. **Chọn D.**



Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - 2i| = 4$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 2 + i|$. Tính giá trị của tổng $S = M^2 + m^2$.

A. $S = 82$.

B. $S = 34$.

C. $S = 68$.

D. $S = 36$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: (Phương pháp hình học)

Đặt số phức $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ có điểm biểu diễn hình học là $P(x, y)$.

$$\text{Ta có } |z - 1 - 2i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 16.$$

Vậy tập hợp điểm P là đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 4$.

$$\text{Ta có } |z + 2 + i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = AP, \text{ với } A(-2; -1).$$

Vậy từ hình vẽ ta nhận thấy:

$$\begin{cases} M = AP_{\max} = AP_2 = IA + R = 3\sqrt{2} + 4 \\ m = AP_{\min} = AP_1 = IA - R = 3\sqrt{2} - 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy ta suy ra } S = M^2 + m^2 = (3\sqrt{2} + 4)^2 + (3\sqrt{2} - 4)^2 = 68.$$

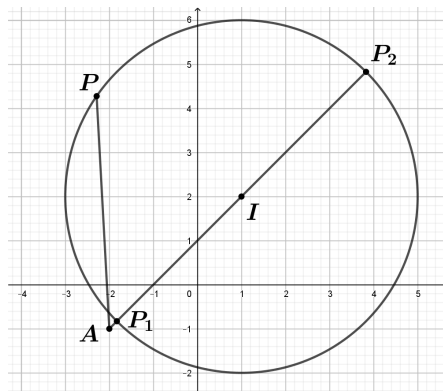
Cách 2: (Phương pháp đại số)

Công cụ cơ bản: $\|z_1\| - \|z_2\| \leq \|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$, với mọi số phức z_1, z_2 . Áp dụng, ta có:

$$\square |z + 2 + i| = |(z - 1 - 2i) + (3 + 3i)| \leq |z - 1 - 2i| + |3 + 3i| = 4 + 3\sqrt{2} \Rightarrow M = 4 + 3\sqrt{2}$$

$$\square |z + 2 + i| = |(z - 1 - 2i) + (3 + 3i)| \leq |z - 1 - 2i| - |3 + 3i| = 3\sqrt{2} - 4 \Rightarrow m = 3\sqrt{2} - 4$$

$$\text{Vậy ta có } S = M^2 + m^2 = (3\sqrt{2} + 4)^2 + (3\sqrt{2} - 4)^2 = 68.$$



Câu 44: [Phạm Minh Tuấn – Vted 15] Cho ba số phức z, z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{2} |(z - z_1)(z - z_2)| + |z(z - z_1)| + |z(z - z_2)|.$$

A. $30\sqrt{3}$.

B. $36\sqrt{2}$.

C. 50.

D. $50\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi A, B, M là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z , khi đó từ giả thiết ta suy ra tam giác OAB vuông cân tại O và bài toán quy về tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{2}MA \cdot MB + MO \cdot MA + MO \cdot MB$.

Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát

Cho tam giác ABC , đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, khi đó ta có

$$\frac{MB \cdot MC}{bc} + \frac{MC \cdot MA}{ca} + \frac{MA \cdot MB}{ab} \geq 1 \quad (*)$$

$$\text{Chứng minh: dùng bài toán kinh điển } x \cdot MA^2 + y \cdot MB^2 + z \cdot MC^2 \geq \frac{xyz^2 + yza^2 + zxb^2}{x + y + z} \quad (**)$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{MA}; y = \frac{b}{MB}; z = \frac{c}{MC} \text{ khi đó } x + y + z = \frac{aMB \cdot MC + bMC \cdot MA + cMA \cdot MB}{MA \cdot MB \cdot MC}$$

$$\text{và } xyz^2 + yza^2 + zxb^2 = abc \frac{aMA + bMB + cMC}{MA \cdot MB \cdot MC} \text{ từ đó sử dụng } (**) \text{ suy ra hệ thức } (*).$$

Áp dụng bài toán trên ta có $P \geq 36\sqrt{2}$, chọn B.

Ta có thể chứng minh bài toán (*) trên bằng ngôn ngữ số phức.

Gọi tọa độ các điểm A, B, C, M trên mặt phẳng phức là u, v, w, x khi đó $a = |v - w|$, $b = |w - u|$,

$c = |u - v|$, $MA = |x - u|$, $MB = |x - v|$, $MC = |x - w|$. Khi đó bất đẳng thức (*) tương đương

$$\frac{|x - v||x - w|}{|u - v||u - w|} + \frac{|x - w||x - u|}{|v - w||v - u|} + \frac{|x - u||x - v|}{|w - u||w - v|} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{(x - v)(x - w)}{(u - v)(u - w)} \right| + \left| \frac{(x - w)(x - u)}{(v - w)(v - u)} \right| + \left| \frac{(x - u)(x - v)}{(w - u)(w - v)} \right| \geq 1$$

Mặt khác :

$$\left| \frac{(x - v)(x - w)}{(u - v)(u - w)} \right| + \left| \frac{(x - w)(x - u)}{(v - w)(v - u)} \right| + \left| \frac{(x - u)(x - v)}{(w - u)(w - v)} \right| \geq \left| \frac{(x - v)(x - w)}{(u - v)(u - w)} + \frac{(x - w)(x - u)}{(v - w)(v - u)} + \frac{(x - u)(x - v)}{(w - u)(w - v)} \right|$$

Mà $\frac{(x - v)(x - w)}{(u - v)(u - w)} + \frac{(x - w)(x - u)}{(v - w)(v - u)} + \frac{(x - u)(x - v)}{(w - u)(w - v)} = 1$ nên suy ra (*).

Câu 45: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left| \bar{z} - \sqrt{2} - i \right| + \sqrt{2} \left| z - \sqrt{2} + 3i \right|$$

A. $\sqrt{3}$.

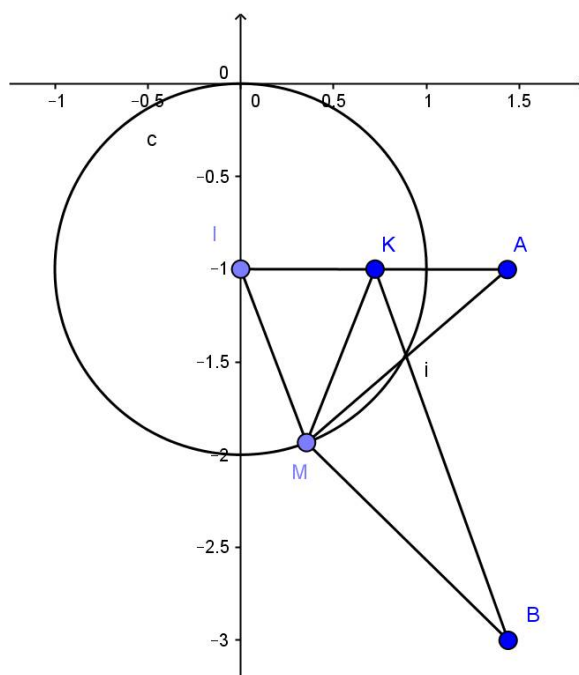
B. 3.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi điểm biểu diễn của z là M . Khi đó M nằm trên đường tròn tâm $I(0; -1)$, $R = 1$. Gọi tọa độ các điểm $A(\sqrt{2}; -1)$, $B(\sqrt{2}; -3)$ do đó:

$$P = |\bar{z} - \sqrt{2} - i| + \sqrt{2}|z - \sqrt{2} + 3i| = MA + \sqrt{2}MB. \text{ Gọi } K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -1\right) \text{ khi đó ta có: } \frac{IK}{IM} = \frac{IM}{IA} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $\triangle IMK$ và $\triangle IAM$ là hai tam giác đồng dạng. Khi đó: $MA = \sqrt{2}MK$.

$$\text{Vậy } P = \sqrt{2}(MK + MB).$$

$$\text{Theo bất đẳng thức tam giác: } P = \sqrt{2}(MK + MB) \geq \sqrt{2}BK.$$

$$\text{Vậy } \min(P) = \sqrt{2}BK = 3.$$

Câu 46: Với hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$, tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = 4\sqrt{6}$.

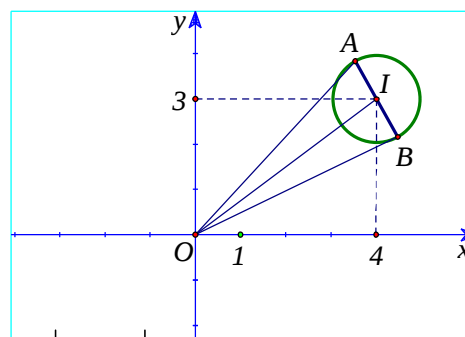
B. $P = 2\sqrt{26}$.

C. $P = 5 + 3\sqrt{5}$.

D. $P = 34 + 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.



Vì hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$ nên

$$\begin{cases} z_1 = 8 + 6i - z_2 \\ z_2 = 8 + 6i - z_1 \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - (4 + 3i)| = 1 \\ |z_2 - (4 + 3i)| = 1 \\ |z_1 - z_2| = 2 \end{cases} (*).$$

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của hai số phức z_1 và z_2 khi đó từ (*) suy ra A, B nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(4; 3)$, bán kính $R = 1$ và AB là đường kính của đường tròn (C).

$$\text{Như vậy } P = |z_1| + |z_2| = OA + OB.$$

$$\text{Ta có } \frac{OA^2 + OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = OI^2 \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = 2(5^2 + 1) = 52.$$

$$\text{Suy ra } 52 = OA^2 + OB^2 \geq 2OA \cdot OB \Rightarrow (OA + OB)^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB \leq 52 + 52 = 104$$

$$\Rightarrow P = |z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{104} = 2\sqrt{26}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } OA = OB.$$

Câu 47: Giả sử z_1, z_2 là hai trong số các số phức z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

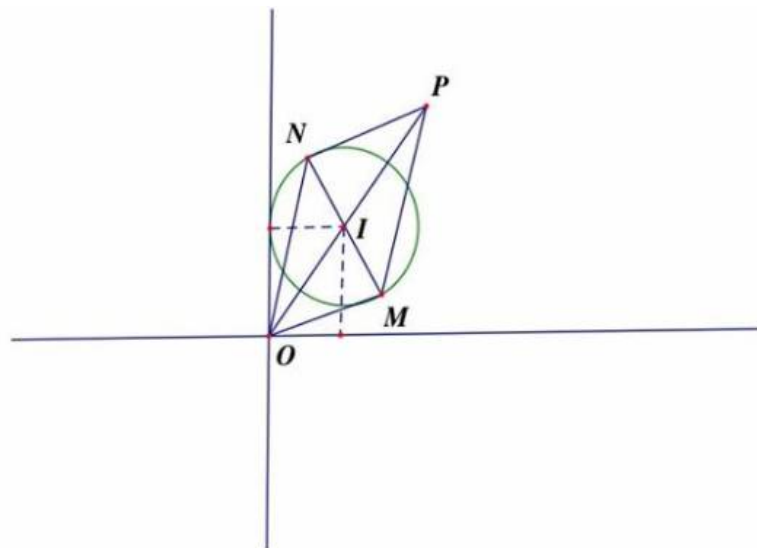
A. 4.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. 3.

Chọn A.



Ta có $|iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |i||z - i\sqrt{2} - 1| = 1 \Leftrightarrow |z - i\sqrt{2} - 1| = 1$.

Điểm biểu diễn z thuộc đường tròn tâm $I(1; \sqrt{2})$, $R = 1$.

Gọi M, N là điểm biểu diễn z_1, z_2 nên $MN = 2$ là đường kính. Dựng hình bình hành $OMNP$ ta có $|z_1 + z_2| = OP = 2\sqrt{3}$.

Ta có $(|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 16 \Rightarrow |z_1| + |z_2| \leq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow MN \perp OI$.

Câu 48: Cho hai số phức z, ω thỏa mãn $|z - 1| = |z + 3 - 2i|$; $\omega = z + m + i$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Giá trị của m để ta luôn có $|\omega| \geq 2\sqrt{5}$ là:

A. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{cases}$

C. $-3 \leq m < 7$.

D. $3 \leq m \leq 7$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $z = a + ib, (a, b \in \mathbb{R})$ có biểu diễn hình học là điểm $M(x; y)$

$$|z - 1| = |z + 3 - 2i| \Leftrightarrow |x - 1 + iy| = |x + 3 + (y - 2)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = 6x + 9 - 4y + 4 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$$

Suy ra biểu diễn của số phức z là đường thẳng $\Delta: 2x - y + 3 = 0$.

$$\text{Ta có: } |\omega| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |z + m + i| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |x + m + (y + 1)i| \geq 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + m)^2 + (y + 1)^2} \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow MI \geq 2\sqrt{5} \text{ với } I(-m; -1).$$

Mà ta có $MI \geq d(I, \Delta)$

$$\text{Nên } MI \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow d(I, \Delta) \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-2m+4|}{\sqrt{5}} \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |-2m+4| \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+4 \geq 10 \\ -2m+4 \leq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 7 \end{cases}.$$

Câu 49: [PTNK TP HCM] Cho z là số phức thỏa mãn $|z-1+i|=2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z+2-i|^2 + |z-2-3i|^2$$

A. 18.

B. $14+2\sqrt{10}$.

C. $38+8\sqrt{10}$.

D. $16+2\sqrt{10}$.

Lời giải

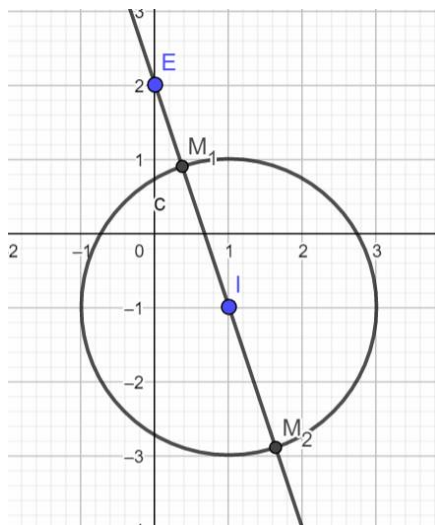
Chọn C.

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Do $|z-1+i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(1; -1)$, bán kính $R=2$.

Đặt $A(-2; 1)$, $B(2; 3)$, $E(0; 2)$ là trung điểm của AB . Khi đó

$$\begin{aligned} P &= |z+2-i|^2 + |z-2-3i|^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 = MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2} \\ &= 2ME^2 + 10. \end{aligned}$$



Do E nằm ngoài đường tròn, nên $ME_{\max} = EI + R = 2 + \sqrt{10} \Rightarrow P_{\max} = 38 + 8\sqrt{10}$.

Cách 2 :

$$\begin{aligned} P &= |z+2-i|^2 + |z-2-3i|^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 8y + 18 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8y + 18 - P = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra tọa độ điểm } M \text{ thỏa mãn } \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 8y + 18 - P = 0 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ (\Delta): 4x - 12y + 22 - P = 0 \end{cases}$$

$$\text{Hệ có nghiệm khi } d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow |P-38| \leq 8\sqrt{10} \Leftrightarrow 38-8\sqrt{10} \leq P \leq 38+8\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow P_{\max} = 38 + 8\sqrt{10}.$$

Câu 50: (CHuyên Hạ Long-lần 2-2018-Mã đề 108) Cho các số phức $z_1 = -2+i$, $z_2 = 2+i$ và số phức z thay

đôi thỏa mãn $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $M^2 - m^2$ bằng

A.15.

B.7.

C.11.

D.8

Lời giải:

Chọn D.

Cách 1:

Gọi số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$. Khi đó tập hợp các điểm $M(x, y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(-1, 0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $|z|_{\min} \Leftrightarrow OM_{\min}$, $|z|_{\max} \Leftrightarrow OM_{\max}$.

Đường thẳng OI có phương trình $y = 0$.

OI cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B có tọa độ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(1, 0); B(-3, 0).$$

Ta có $OA \leq OM \leq OB$ nên $|z|_{\min} = OA$, $|z|_{\max} = OB$.

Khi đó $M^2 - m^2 = 9 - 1 = 8$.

Cách 2:

Gọi số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$. Khi đó tập hợp các điểm $M(x, y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(-1, 0)$ và bán kính $R = 2$. $\Rightarrow |z + 1| = 2$

Ta có: $|z| \geq |z + 1| - 1 = 1 \Rightarrow |z|_{\min} = 1$, $|z| \leq |z + 1| + |-1| = 3 \Rightarrow |z|_{\max} = 3$.

Cách 3:

Gọi số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$. Khi đó tập hợp các điểm $M(x, y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(-1, 0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $OM_{\min} = |OI - R|$, $OM_{\max} = OI + R \Leftrightarrow |z|_{\min} = 1$, $|z|_{\max} = 3$

CÂU PHÁT TRIỂN

Câu 51: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $\frac{M^2 - m^2}{2Mn}$ bằng

A.12.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D.8

Lời giải:

Chọn C.

Gọi số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$, khi đó $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ta có: $|z - 2 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 15 = 4(x + 2y)$.

Áp dụng bất Bu-nhi-a-cốp-xki ta có: $|x + 2y| \leq \sqrt{5(x^2 + y^2)} = \sqrt{5}|z|$.

Khi đó ta có bất phương trình $|z|^2 + 15 \leq 4\sqrt{5}|z| \Leftrightarrow \sqrt{5} \leq |z| \leq 3\sqrt{5}$.

Do đó $\frac{M^2 - m^2}{2Mn} = \frac{4}{3}$.

Câu 52: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - i| + |z - 3 - 2i| = \sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 2i|$. Giá trị biểu thức $M^2 + m^2$ bằng

A. 25.

B. 35.

C. $\frac{15}{2}$.

D. 20.

Lời giải:

Chọn B.

Gọi $z = x + yi$ (với $x, y \in \mathbb{R}$) có điểm $M(x; y)$ biểu diễn z trên mặt phẳng tọa độ.

Ta có $|z - 1 - i| + |z - 3 - 2i| = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + [(y+2)-3]^2} + \sqrt{(x-3)^2 + [(y+2)-4]^2} = \sqrt{5} \quad (1).$$

Số phức $z + 2i = x + (y+2)i$ có điểm $M'(x; y+2)$ biểu diễn $z + 2i$ trên mặt phẳng tọa độ.

Đặt $A(1;3), B(3;4)$, từ (1) ta có $AM' + BM' = \sqrt{5}$.

Mặt khác $AB = \sqrt{5}$ nên M' thuộc đoạn AB . Khi đó $M = |z + 2i|_{\max} = OB = 5$,
 $m = |z + 2i|_{\min} = OA = \sqrt{10}$.

Vậy $M^2 + m^2 = 35$.

Nhận xét:

- GTLN, GTNN ở câu dạng này chỉ có thể đạt được tại 2 đầu A, B .
- Một sai lầm thường gặp là đánh giá $|z|_{\min} = d(O; AB)$ nhưng do góc OAB là góc tù nên không tồn tại điểm M trên đoạn AB sao cho $OM \perp AB$.

Câu 53: (Chuyên Hạ Long-lần 2-2018-Mã đề 123) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$. Khi đó modun của số phức $w = M + mi$

A. $2\sqrt{314}$.

B. $\sqrt{1258}$.

C. $3\sqrt{137}$.

D. $2\sqrt{309}$.

Lời giải

Chọn B.

Cách 1: Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) ta có $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$

Ta có $P = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow 4(x-3) + 2(y-4) = P - 23$

Ta có $[4(x-3) + 2(y-4)]^2 \leq 20[(x-3)^2 + (y-4)^2] = 100$

Suy ra $-10 \leq P - 23 \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$ suy ra $M = 33, m = 13$ do đó ta được $w = 33 + 13i$ vậy
 $|w| = \sqrt{1258}$.

Cách 2: Gọi $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5$. Suy ra, tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn cho số phức z trên hệ tọa độ Oxy là đường tròn (C) tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Lại có: $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 - P = 0 \Leftrightarrow 4x+2y+3-P=0$, đây là phương trình của đường thẳng $\Delta: 4x+2y+3-P=0$.

Ta thấy $M = \Delta \cap (C)$.

Điều kiện để Δ cắt (C) là: $d(I, \Delta) \leq R \Leftrightarrow \frac{|23-P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow -10 \leq 23-P \leq 10 \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33$.

Suy ra: $m=13, M=33$ và $w=33+13i \Rightarrow |w|=\sqrt{1258}$.

Cách 3:

Gọi $z=x+yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $P = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x+2y+3$ suy ra $y = \frac{P-4x-3}{2}$.

Từ $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5 \Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 + \left(\frac{P-4x-3}{2}-4\right)^2 - 5 = 0$.

Ta có $f'(x) = 2(x-3) - 4\left(\frac{P-4x-11}{2}\right) = -2P+10x+16$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, 2P-1, 6$. Suy ra $y=0, 1P+1, 7$.

Thay x, y vừa tìm được vào $f(x)$ ta được $(0, 2P-1, 6-3)^2 + (0, 1P+1, 7-4)^2 - 5 = 0$.

Ta giải được $P=33$ hoặc $P=13$. Đây tương ứng là GTLN và GTNN của P .

Vậy $M=33, m=13$. Khi đó, $|\omega|=\sqrt{1258}$.

Câu 54: Biết số phức $z=x+yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z|=|\bar{z}+4-3i|$ và biểu thức $P=|z+1-i|+|z-2+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=x+2y$.

A. $P = -\frac{61}{10}$.

B. $P = -\frac{253}{50}$.

C. $P = -\frac{41}{5}$.

D. $P = -\frac{18}{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Theo giả thiết $|z|=|\bar{z}+4-3i| \Leftrightarrow |x+yi| = |(x+4)-(y+3)i|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+4)^2+(y+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2+8x+16+y^2+6y+9$$

$$\Leftrightarrow 8x+6y+25=0.$$

$$\text{Ta có } P = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$$

Xét điểm $E(-1;1)$; $F(2;-3)$ và $M(x;y)$. Khi đó, $P=ME+MF$.

Bài toán trở thành tìm điểm $M \in \Delta: 8x+6y+25=0$ sao cho $ME+MF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Vì $(8x_E+8y_E+25) \cdot (8x_F+8y_F+25) > 0$ nên hai điểm E, F nằm cùng phía đối với đường thẳng Δ .

Gọi E' là điểm đối xứng với E qua Δ

Đường thẳng EE' đi qua điểm $E(1;-1)$ và có VTPT $\vec{n}_{EE'} = \vec{u}_\Delta = (3;-4)$ nên có phương trình

$$3(x+1)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+7=0$$

Gọi H là giao điểm của EE' và Δ . Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 4y = -7 \\ 8x + 6y = -25 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{71}{25} \\ y = -\frac{19}{50} \end{cases} \text{ suy ra } H\left(-\frac{71}{25}; -\frac{19}{50}\right)$$

$$E' \text{ đối xứng với } E \text{ qua } H \text{ nên } \begin{cases} x_{E'} = -\frac{117}{25} \\ y_{E'} = -\frac{44}{25} \end{cases}.$$

Ta có $ME + MF = ME' + MF \geq E'F$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của $E'F$ và đường thẳng Δ

Đường thẳng $E'F$ đi qua điểm $F(2; -3)$ và có VTPT $\vec{n}_{EE'} = (31; 167)$ có phương trình

$$31(x - 2) + 167(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 31x + 167y + 439 = 0$$

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} 31x + 167y = -439 \\ 8x + 6y = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{67}{50} \\ y = -\frac{119}{50} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = x + 2y = -\frac{61}{10}.$$

Câu 55: Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $|z - 1 + 2i| = |z + 1 + 2i|$ thỏa mãn $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Biết rằng w là số phức thỏa mãn $|w - 3 - 2i| = 2$. Tìm GTNN của biểu thức $P = |w - z_1| + |w - z_2|$.

A. $1 + \sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải.

Chọn D.

Giả sử $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$ ta có $|z - 1 + 2i| = |z + 1 + 2i| \Leftrightarrow x = 0$ suy ra tập hợp điểm biểu diễn z_1, z_2 là trục tung.

Giả sử A, B lần lượt là 2 điểm biểu diễn cho z_1, z_2 , ta có $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \Leftrightarrow AB = \sqrt{2}$.

Giả sử $w = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$ và M là điểm biểu diễn cho số

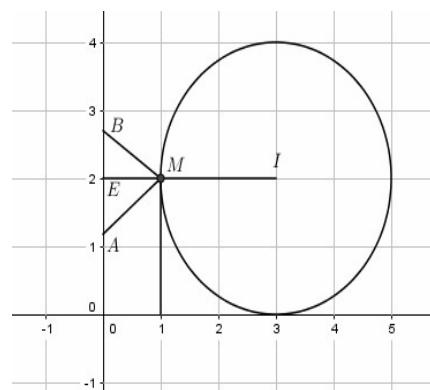
phức w , ta có $|w - 3 - 2i| = 2 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 2)^2 = 4$ suy ra tập

hợp điểm biểu diễn M cho số phức w là đường tròn tâm $I(3; 2)$

bán kính $R = 2$.

Ta có $P = MA + MB$, gọi E là hình chiếu vuông góc của I lên trục tung, ta thấy P nhỏ nhất khi E là trung điểm AB suy ra

$$MA = MB = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ vậy } \min P = 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$



Câu 56: Cho z là số phức thỏa $|z - 1 + i| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2$$

A. 18.

B. $38 + 8\sqrt{10}$.

C. $18 + 2\sqrt{10}$.

D. $16 + 2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\text{Ta có: } |z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x - 2y + 2 \quad (*)$$

Theo bài ra:

$$\begin{aligned} P &= |z + 2 - i|^2 + |z - 2 - 3i|^2 = |x + yi + 2 - i|^2 + |x + yi - 2 - 3i|^2 \\ &= (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2(x^2 + y^2) - 8y + 18 \end{aligned}$$

Thay (*) vào P ta được:

$$P = 4x - 12y + 22 = 4(x - 1) - 12(y + 1) + 38$$

Áp dụng bất Bunhiacopxki ta được

$$4(x - 1) - 12(y + 1) + 38 \leq \sqrt{(4^2 + 12^2)} \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} + 38 = \sqrt{(4^2 + 12^2)} \cdot 2 + 38 = 8\sqrt{10} + 38$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 8\sqrt{10} + 38.$$

Câu 57: Giả sử Z_1, Z_2 là hai trong số các số phức Z thỏa mãn $|iz + \sqrt{2} - i| = 1$ và $|Z_1 - Z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của $|Z_1| + |Z_2|$ bằng

A. 4.

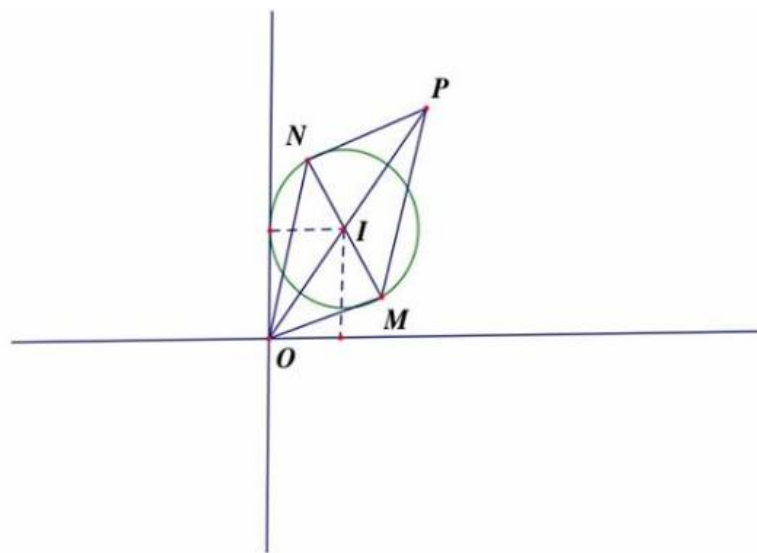
B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn A.



$$\text{Ta có } |iz + \sqrt{2} - i| = 1 \Leftrightarrow |i||z - i\sqrt{2} - 1| = 1 \Leftrightarrow |z - i\sqrt{2} - 1| = 1.$$

Điểm biểu diễn z thuộc đường tròn tâm $I(1; \sqrt{2})$, $R = 1$.

Gọi M, N là điểm biểu diễn z_1, z_2 nên $MN = 2$ là đường kính. Dựng hình bình hành $OMNP$ ta có $|z_1 + z_2| = OP = 2\sqrt{3}$.

Ta có $(|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 16 \Rightarrow |z_1| + |z_2| \leq 4$. Dấu bằng xảy ra khi $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow MN \perp OI$.

Câu 58: Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 - 3i| = 2\sqrt{2}$. Tính $P = 2a + b$ khi $|z + 1 + 6i| + |z - 7 - 2i|$ đạt giá trị lớn nhất.
A. $P = 1$. **B.** $P = -3$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 7$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z = x + yi$ với $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z + 2 - 3i| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$. Suy ra, tập hợp điểm $M(x, y)$ biểu diễn cho số phức z trên hệ tọa độ Oxy là đường tròn (C) tâm $I(-2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{8}$.

Gọi $A(-1; -6)$, $B(7; 2)$ và $J(3; -2)$ là trung điểm của AB .

Đặt $P = |z + 1 + 6i| + |z - 7 - 2i|$ suy ra $P = MA + MB \leq \sqrt{2(MA^2 + MB^2)}$. (BĐT Bunhiacopxki).

Phương trình đường trung trực Δ của AB là: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + t \end{cases}$.

Ta có: $MA^2 + MB^2 = 2MJ^2 + \frac{AB^2}{2}$ với J là trung điểm của AB .

Vì M chạy trên đường tròn, J cố định nên $MJ \leq IJ + R$.

Do vậy $P^2 \leq 4(IJ + R)^2 + AB^2$ nên $P_{\max} = \sqrt{4(IJ + R)^2 + AB^2}$.

Dấu « = » xảy ra khi $MA = MB$ và ba điểm M, I, J thẳng hàng. Điều này thỏa mãn nhờ $IA = IB$.

Do đó: $M = \Delta \cap (C)$, tọa độ của M là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + t \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + t \\ (t - 5)^2 + (t - 5)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ t = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \\ t = 7 \end{cases}$$

Mặt khác :

$$M(-4; 5) \Rightarrow P = MA + MB = 2\sqrt{130} \text{ và } M(0; 1) \Rightarrow P = MA + MB = 2\sqrt{50}.$$

Vậy để $P_{\max}$ thì $M(-4; 5)$ Suy ra $2a + b = -3$.

Câu 59: (SGD – HÀ TĨNH) Trong các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô-đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của hai số phức z_1 và z_2 bằng.
A. $8i$. **B.** 4 . **C.** -8 . **D.** 8 .

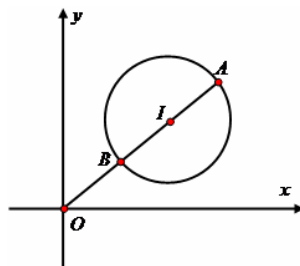
Lời giải

Chọn D.

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

Theo giả thiết $|z - (2 + 4i)| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - (2 + 4i)| = 2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$.

Suy ra $M \in (C) : (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$



Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (2 + 4i)| = 2$ là đường tròn (C) có tâm $I(2; 4)$ bán kính $R = 2$.

Đường OI có phương trình $y = 2x$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm $A\left(\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}; \frac{20 + 4\sqrt{5}}{5}\right)$,

$B\left(\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}; \frac{20 - 4\sqrt{5}}{5}\right)$. Do $OA > OB$ nên điểm A biểu diễn số phức có môđun lớn nhất, và điểm B biểu diễn số phức có môđun nhỏ nhất.

Câu 60: [HKII-SỞ BẠC LIÊU-2017-2018] Xét số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$ và $b > 0$) thỏa mãn $|z| = 1$.

Tính $P = 2a + 4b^2$ khi $|z^3 - z + 2|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 4$.

B. $P = 2 - \sqrt{2}$.

C. $P = 2$.

D. $P = 2 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1:

Từ giả thiết có $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 1 - a^2 > 0$ với $a \in (-1; 1)$ và $z \cdot \bar{z} = 1$.

$$\text{Ta có } |z^3 - z + 2| = |z^2| \cdot \left| z - \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} \right|$$

$$= |z - \bar{z} + 2\bar{z}^2| = |2bi + 2(a^2 - b^2 - 2abi)|$$

$$= 2|(a^2 - b^2) + (b - 2ab)i| = 2\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (b - 2ab)^2}$$

$$= 2\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + b^2(1 - 2a)^2} = 2\sqrt{(2a^2 - 1)^2 + (1 - a^2)(2a - 1)^2} = 2\sqrt{4a^3 - a^2 - 4a + 2}$$

Xét $f(a) = 4a^3 - a^2 - 4a + 2$, với $-1 < a < 1$.

$$f'(a) = 12a^2 - 2a - 4; f'(a) = 0 \Leftrightarrow 12a^2 - 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \in (-1; 1) \\ a = \frac{2}{3} \in (-1; 1) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

a	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	
$f'(a)$	+	0	-	0	+
$f(a)$		$\frac{13}{4}$			1

Suy ra $\max_{a \in (-1;1)} f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$, đạt được khi $a = -\frac{1}{2}$, $b^2 = \frac{3}{4}$.

Vậy $P = 2a + 4b^2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2$.

Cách 2:

Ta có $z = \cos x + i \sin x \Rightarrow z^3 = \cos 3x + i \sin 3x$. Vì $b > 0$ nên $\sin x > 0$, $\cos x \in (-1;1)$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
 |z^3 - z + 2| &= |(\cos 3x + i \sin 3x) - (\cos x + i \sin x) + 2| \\
 &= |(\cos 3x - \cos x + 2) + (\sin 3x - \sin x)i| \\
 &= \sqrt{(\cos 3x - \cos x + 2)^2 + (\sin 3x - \sin x)^2} \\
 &= \sqrt{(2 - 2\sin 2x \cdot \sin x)^2 + (2\cos 2x \cdot \sin x)^2} \\
 &= \sqrt{4 - 8\sin 2x \sin x + 4\sin^2 x \sin^2 2x + 4\cos^2 2x \sin^2 x} \\
 &= \sqrt{4 - 16\sin^2 x \cos x + 4\sin^2 x} \\
 &= \sqrt{4 - 16(1-t^2)t + 4(1-t^2)} = \sqrt{16t^3 - 4t^2 - 16t + 8} \text{ với } t = \cos x \in (-1;1).
 \end{aligned}$$

Đặt $f(t) = 16t^3 - 4t^2 - 16t + 8$, $t \in (-1;1)$.

$$f'(t) = 48t^2 - 8t - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \in (-1;1) \\ t = \frac{2}{3} \in (-1;1) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$		$\nearrow$ 13 $\searrow$		$\nearrow$	1

$\Rightarrow \max_{t \in (-1;1)} f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4} \Rightarrow t = -\frac{1}{2} = \cos x$.

Khi đó: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}$.

Vậy $P = 2a + 4b^2 = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2$.

Nhận xét: có thể đổi câu hỏi thành tìm Min

Câu 61: Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \sqrt{2}$.

C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $P = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1.

+ Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, ta có $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2x + (2y - 1)i| = |(2 - y) + xi|$

$$\sqrt{4x^2 + (2y - 1)^2} = \sqrt{(2 - y)^2 + x^2} \Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 4 - 4y + y^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$$

+ Sử dụng công thức: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ta có $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

Suy ra $P = \sqrt{3}$.

Cách 2.

+ Biến đổi: $|iz + 2| = |-i(i z + 2)| = |z - 2i|$

Ta có $|2z - i| = |z - 2i| \Rightarrow |2z - i|^2 = |z - 2i|^2 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$.

+ Sử dụng công thức bình phương mô đun

$$|mz_1 + nz_2|^2 = m^2 z_1^2 + 2mnz_1 z_2 \cos(z_1, z_2) + n^2 z_2^2$$

Trong đó (z_1, z_2) là góc $\angle MON$ với M, N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng phức

$$|z_1 - z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 - z_2|^2 = 1 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos(z_1, z_2) = 1 \Rightarrow \cos(z_1, z_2) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } P^2 = |z_1 + z_2|^2 = 1 \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| \cdot \cos(z_1, z_2) = 3 \Rightarrow P = \sqrt{3}.$$

Câu 62: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = |z + i| + |z - 2 - i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$.

B. $\max T = 4$.

C. $\max T = 4\sqrt{2}$.

D. $\max T = 8$

Lời giải

Chọn B.

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có $|z - 1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |x - 1 + yi| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 1 \quad (*)$$

Lại có $T = |z + i| + |z - 2 - i| = |x + (y + 1)i| + |x - 2 + (y - 1)i|$

$$= \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$$

Kết hợp với (*), ta được $T = \sqrt{2x + 2y + 2} + \sqrt{6 - 2x - 2y} = \sqrt{2(x + y) + 2} + \sqrt{6 - 2(x + y)}$

Áp dụng BĐT Cauchy schwarz ta có

$$T = \sqrt{2(x+y)+2} + \sqrt{6-2(x+y)} \leq \sqrt{2(2(x+y)+2+6-2(x+y))} = 4.$$

Câu 63: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức: $|z-2+3i|$?

A. $M = \frac{10}{3}$.

B. $M = 1 + \sqrt{13}$.

C. $M = 4\sqrt{5}$.

D. $M = 9$

Lời giải

Chọn C.

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x^2+(y-1)^2} &= \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} + 3\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \\ \rightarrow 5\sqrt{x^2+(y-1)^2} &\leq \sqrt{10} \cdot \sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2+(x-1)^2+(y+1)^2} \\ \Leftrightarrow 25[x^2+(y-1)^2] &- 10[(x+1)^2+(y-3)^2+(x-1)^2+(y+1)^2] \leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 &\leq 20 \Leftrightarrow |z-i| \leq 2\sqrt{5} \\ P = |z-2+3i| &= |z-i+(4i-2)| \leq |z-i| + |4i-2| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Câu 64: Cho hai số phức z, ω thỏa mãn $|z-1| = |z+3-2i|$; $\omega = z+m+i$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Giá trị của m để ta luôn có $|\omega| \geq 2\sqrt{5}$ là:

A. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{cases}$.

C. $-3 \leq m < 7$.

D. $3 \leq m \leq 7$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $z = a+ib, (a, b \in \mathbb{R})$ có biểu diễn hình học là điểm $M(x; y)$

$$\begin{aligned} |z-1| &= |z+3-2i| \Leftrightarrow |x-1+iy| = |x+3+(y-2)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2} \\ \Leftrightarrow -2x+1 &= 6x+9-4y+4 \Leftrightarrow 2x-y+3=0 \end{aligned}$$

Suy ra biểu diễn của số phức z là đường thẳng $\Delta: 2x-y+3=0$.

$$\text{Ta có: } |\omega| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |z+m+i| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |x+m+(y+1)i| \geq 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+m)^2+(y+1)^2} \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow MI \geq 2\sqrt{5} \text{ với } I(-m; -1).$$

Mà ta có $MI \geq d(I, \Delta)$

$$\text{Nên } MI \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow d(I, \Delta) \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-2m+4|}{\sqrt{5}} \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |-2m+4| \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+4 \geq 10 \\ -2m+4 \leq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 7 \end{cases}.$$

Câu 65: Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i|$

A. 20.

B. 10.

C. $12\sqrt{5}$.

D. $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $z = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } \left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1| = |z+3i| \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } P &= |z+i| + 2|\bar{z}-4+7i| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2} \\ &= \sqrt{4x+8y+8} + 2\sqrt{-4x-8y+72}. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \left(\sqrt{4x+8y+8} + 2\sqrt{-4x-8y+72} \right)^2 \leq 5.80 \Rightarrow \sqrt{4x+8y+8} + 2\sqrt{-4x-8y+72} \leq 20$$

Suy ra $P \leq 20$.

Câu 66: Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$ và có môđun nhỏ nhất. giá trị của $P = a.b$ là?

A. $\frac{3}{4}$.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D.

Ta có:

$$|a+bi| = |a-bi-3+4i| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (a-3)^2 + (b-4)^2 \Leftrightarrow 6a + 8b - 25 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{25-8b}{6}$$

Mô đun của số phức z là:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{25-8b}{6}\right)^2 + b^2} = \sqrt{\frac{100(b-2)^2 + 225}{36}} \geq \frac{15}{6}$$

$$\text{Số phức } |z|_{\min} \Leftrightarrow b = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow P = 3$$

Câu 67: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z = -1 + i$.

B. $z = -2 + 2i$.

C. $z = 2 + 2i$.

D. $3 + 2i$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi số phức z có dạng $z = a + bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i| = |z-2i|$

$$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i| = |a+(b-2)i|$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-4)^2 = a^2 + (b-2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 + b^2 - 8b + 16 = a^2 + b^2 - 4b + 4$$

$$\Leftrightarrow 4a + 4b = 16$$

$$\Leftrightarrow a + b = 4$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki.

$$16 = (a+b)^2 \leq (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \Rightarrow |z|^2 = a^2 + b^2 \geq 8$$

$$|z| \geq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu = xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{1} = \frac{b}{1} \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2 \Rightarrow z=2+2i$$

Câu 68: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Số phức z có mô đun bé nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$

B. 2.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 4.

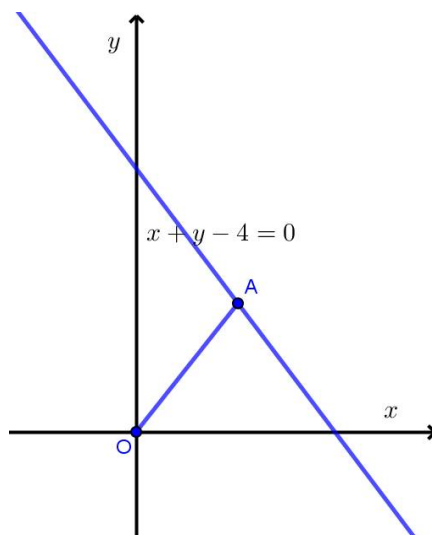
Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó $|z-2-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |x+yi-2-4i| = |x+yi-2i|$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = x^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow -4x - 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow x + y - 4 = 0.$$

Số phức có mô đun nhỏ nhất bằng khoảng cách từ O đến đường thẳng $\Delta: x + y - 4 = 0$.



$$|z|_{\min} = d(O; \Delta) = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 69: (Đề Star Education) Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$ là:

A. $\sqrt{26}$.

B. $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

C. 9.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1; z_2$.

Từ giả thiết : $|z_1 + z_2| = 5 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = 5 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OI}| = \frac{5}{2}$

với I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

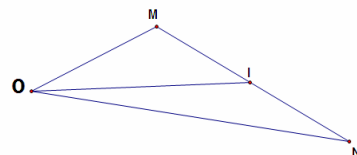
$|z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = 1 \Leftrightarrow MN = 1$.

Ta

có

$$OI^2 = \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \Leftrightarrow OM^2 + ON^2 = 2OI^2 + \frac{MN^2}{2} = 13$$

$P = |z_1| + |z_2| = OM + ON \Rightarrow P^2 \leq (1^2 + 1^2)(OM^2 + ON^2) = 26$. Vậy $P_{\max} = \sqrt{26}$.



Câu 70: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 + z_2| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1| + |z_2|$. Khi đó mô đun của số phức $M + m.i$ là :

A. $\sqrt{76}$.

B. 76.

C. $2\sqrt{10}$.

D. $2\sqrt{11}$.

Lời giải

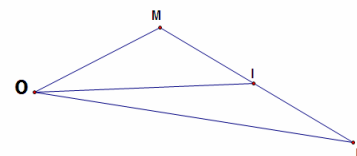
Chọn A.

Ta gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1; z_2$.

Từ giả thiết : $|z_1 + z_2| = 5 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = 5 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OI}| = \frac{5}{2}$ với I là trung điểm của đoạn thẳng MN .

$|z_1 - z_2| = 1 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = 1 \Leftrightarrow MN = 1$.

Ta có $OI^2 = \frac{OM^2 + ON^2}{2} - \frac{MN^2}{4} \Leftrightarrow OM^2 + ON^2 = 2OI^2 + \frac{MN^2}{2} = 20$.



$P = |z_1| + |z_2| = OM + ON \Rightarrow P^2 \leq (1^2 + 1^2)(OM^2 + ON^2) = 40$.

Vậy $\max P = 2\sqrt{10} = M$.

$P = |z_1| + |z_2| = |\overrightarrow{OM}| + |\overrightarrow{ON}| \geq |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = 5$.

Vậy $\min P = 5 = m$.

Suy ra $|M + m.i| = \sqrt{40 + 36} = \sqrt{76}$.

Câu 71: Cho số phức z thỏa mãn $|i.z + 3| = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |2z + 1 - 4i| + |z - 1 - 5i|$ là:

A. $2\sqrt{5}$.

B. 3.

C. $3\sqrt{5}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z .

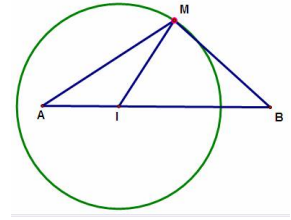
$$|i.z + 3| = \sqrt{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2 + (y - 3)^2 = \frac{5}{2}. \text{ Suy ra } M(x; y) \in C\left(I(0; 3); R = \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

Khi đó:

$$P = |2z + 1 - 4i| + |z - 1 - 5i| = 2\left|z + \frac{1}{2} - 2i\right| + |z - 1 - 5i| = 2|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}|,$$

$$\text{với } A\left(-\frac{1}{2}; 2\right); B(1; 5)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IA} = \left(-\frac{1}{2}; -1\right); \overrightarrow{IB} = (1; 2) \text{ suy ra } \overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{IA}.$$



$$\text{Theo định lý Stewart ta có: } \sqrt{5}MA^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}MB^2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}\left(MI^2 + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \Rightarrow 2MA^2 + MB^2 = 15$$

(Hoặc có thể chứng minh theo phương pháp véc tơ)

$$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$

Suy ra:

$$MI^2 = \frac{4}{9}MA^2 + \frac{1}{9}MB^2 + \frac{4}{9}MA \cdot MB \cdot \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{4}{9}MA^2 + \frac{1}{9}MB^2 + \frac{4}{9}MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{AMB}$$

$$= \frac{4}{9}MA^2 + \frac{1}{9}MB^2 + \frac{4}{9}MA \cdot MB \left(\frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2 \cdot MA \cdot MB} \right) = \frac{2}{3}MA^2 + \frac{1}{3}MB^2 - \frac{2}{9}AB^2$$

$$\Rightarrow 2MA^2 + MB^2 = 3MI^2 + \frac{2}{3}AB^2 = 15)$$

$$\text{Vậy } P = 2|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB}| = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot MA + MB) \leq \sqrt{(\sqrt{2}^2 + 1^2)(2MA^2 + MB^2)} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Câu 72: Cho hai số phức $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Gọi z là số phức thỏa mãn $|3z - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Đặt

M, n lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$. Tính modun của số phức $w = M + ni$

A. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

B. $\sqrt{13}$

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D. 4

Lời giải

$$\text{Giả sử } z = x + yi, (x, y \in R). \text{ Ta có } |3z - \sqrt{3}i| = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1(C)$$

Gọi $K(x; y), A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z, z_1, z_2

Ta tìm Max – Min của $T = OK + OA + OB$

Ta có A, B, O thuộc đường tròn (C) và $\triangle ABO$ đều $\Rightarrow T_{\min} = 2OA = 2$.

Gọi K thuộc cung $\widehat{OB}$. Ta có $KA \cdot OB = OA \cdot BK + AB \cdot OK \Leftrightarrow KA = KB + OK$

$$\Rightarrow T = 2KA \leq 2.2R = \frac{4\sqrt{3}}{3} = T_{\max}$$

$$\Rightarrow |w| = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

Câu 73: Cho số phức z thỏa mãn $5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i|$. Tìm giá trị lớn nhất M của $|z-2+3i|$?

A. $M = \frac{10}{3}$.

B. $M = 1 + \sqrt{13}$.

C. $M = 4\sqrt{5}$.

D. $M = 9$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(-1; 3), B(1; -1), C(0; 1) \Rightarrow C$ là trung điểm AB

$$\text{Suy ra } MC^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + 10.$$

$$\text{Mặt khác } 5|z-i| = |z+1-3i| + 3|z-1+i| \Rightarrow 5MC = MA + 3MB \leq \sqrt{10}\sqrt{MA^2 + MB^2}$$

$$\Rightarrow 25MC^2 \leq 10(2MC^2 + 10) \Rightarrow MC \leq 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Mà } |z-2+3i| = |z-i + (-2+4i)| \leq |z-i| + |-2+4i| \leq MC + 2\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $z = -2 + 5i$.

Câu 74: [Phạm Minh Tuấn, lần 3, năm 2018- Câu 46]

Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-2i| + |z-1-2i| = \frac{\sqrt{3}}{|z-2i|}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z-2i|.$$

A. $P = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $P = \sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Áp dụng tính chất: } |z+z_1|^2 + |z-z_1|^2 = 2|z|^2 + 2|z_1|^2$$

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt{3}}{|z-2i|} = |z+1-2i| + |z-1-2i| \leq \sqrt{2\left[|z-2i+1|^2 + |z-2i-1|^2\right]} = 2\sqrt{|z-2i|^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 4|z-2i|^4 + 4|z-2i|^2 - 3 \geq 0 \Rightarrow P = |z-2i| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Câu 75: [2D4-4] [THPT Chuyên LQĐ, LAI CHÂU, lần 1, 2018] Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn điều kiện $2|\overline{z_1} + i| = |\overline{z_1} - z_1 - 2i|$ và $|z_2 - i - 10| = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1 - z_2|$?

A. $\sqrt{10} + 1$.

B. $3\sqrt{5} - 1$.

C. $\sqrt{\sqrt{101} + 1}$.

D. $\sqrt{\sqrt{101} - 1}$.

Lời giải

Chọn B.

+) Gọi $z_1 = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

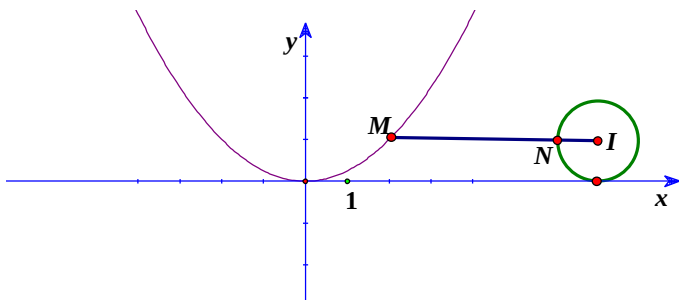
$$\text{Nên } 2|\overline{z_1} + i| = |\overline{z_1} - z_1 - 2i| \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(2b+2)^2} \Leftrightarrow b = \frac{a^2}{4}.$$

Do đó tập hợp điểm biểu diễn số phức z_1 là Parabol $y = \frac{x^2}{4}$.

+) Gọi $z_2 = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Khi đó } |z_2 - i - 10| = 1 \Leftrightarrow (a-10)^2 + (b-1)^2 = 1$$

Nên tập hợp điểm biểu diễn số phức z_2 là đường tròn (C) $(x-10)^2 + (y-1)^2 = 1$ tâm $I(10;1)$ bán kính $r = 1$.



$|z_1 - z_2|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MN nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } MN + IN \geq IM \Rightarrow MN \geq IM - IN = IM - 1.$$

Nên MN nhỏ nhất khi IM nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } IM^2 = (x-10)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2 + \frac{5}{2}(x-4)^2 + 45.$$

$$\Rightarrow IM \geq \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Do đó } MN \geq 3\sqrt{5} - 1.$$

$$\text{Vậy } |z_1 - z_2| = MN \geq 3\sqrt{5} - 1 \Rightarrow |z_1 - z_2|_{\min} = 3\sqrt{5} - 1.$$

Câu 76: [2D4-4] Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 1 - i| = 2$ và $z_2 = iz_1$. Tìm giá trị lớn nhất m của biểu thức

$$|z_1 - z_2|$$

A. $m = 2\sqrt{2} + 2$.

B. $m = \sqrt{2} + 1$.

C. $m = 2\sqrt{2}$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $|z_1 - z_2| = |z_1 - iz_1| = |1 - i| \cdot |z_1| = \sqrt{2} \cdot |z_1|$

Đặt $z_1 = a + bi$ với $(a, b \in \mathbb{R})$ theo đề bài ta có $(a+1)^2 + (b-1)^2 = 4$ (*). Ta cần tìm GTLN của

$$m = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

Đặt $t = a^2 + b^2$. Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4 = a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \Rightarrow 2(a-b) = 2-t$.

Mà $(a-b)^2 \leq (1^2 + (-1)^2) \cdot (a^2 + b^2)$ (***) nên

$$(2-t)^2 \leq 4(a-b)^2 \leq 8t \Leftrightarrow t^2 - 12t + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 6 - 4\sqrt{2} \leq t \leq 6 + 4\sqrt{2}$$

Kết hợp với $t = a^2 + b^2 \geq 0$ suy ra $0 \leq t \leq 6 + 4\sqrt{2}$

Suy ra $m = \sqrt{2t} \leq \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + 2$

Dấu "=" xảy ra khi (***) xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} \Leftrightarrow a = -b$. Kết hợp (*) ta được $z_1 = (-1 \pm \sqrt{2})(1-i)$

Vậy giá trị lớn nhất của m bằng $2\sqrt{2} + 2$.

Câu 77: [Chuyên Ngoại Ngữ - Hà Nội - 2018] Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.

A. $\sqrt{313} + 16$.

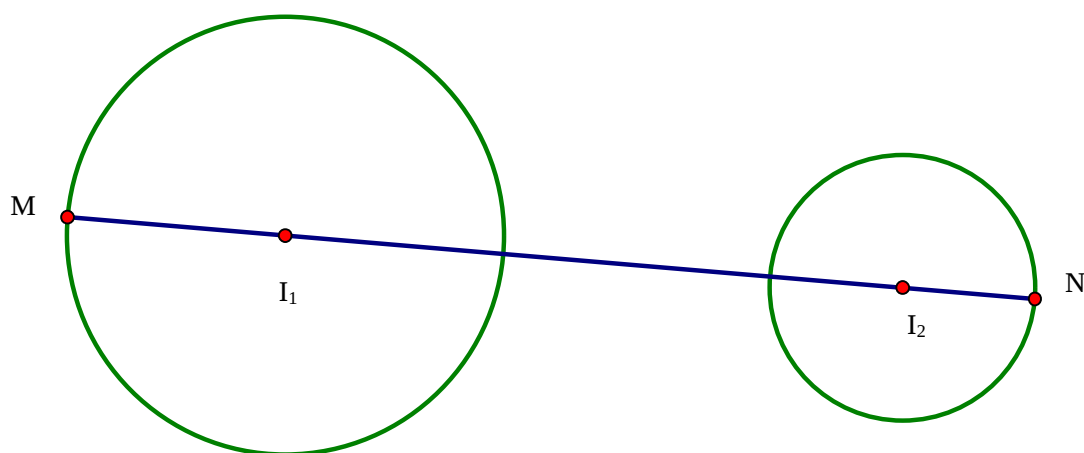
B. $\sqrt{313}$.

C. $\sqrt{313} + 8$.

D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$

Lời giải.

Chọn A



Ta có $|z_1 - 3i + 5| = 2 \Rightarrow |2iz_1 + 6 + 10i| = 4$.

Suy ra điểm M biểu diễn số phức $2iz_1$ nằm trên đường tròn (T_1) có tâm $I_1(-6; -10)$ và có bán kính là $R_1 = 4$.

Mặt khác, $|iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Rightarrow |-3z_2 - 6 - 3i| = 12$ nên điểm biểu diễn số phức $-3z_2$ là điểm N nằm trên đường tròn (T_2) có tâm $I_2(6; 3)$ và có bán kính là $R_2 = 12$.

Ta thấy $|2iz_1 + 3z_2| = |2iz_1 - (-3z_2)| = MN$.

T lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất, khi đó bốn điểm M, I_1, I_2, N theo thứ tự thẳng hàng.

Vậy giá trị lớn nhất của $MN = I_1I_2 + R_1 + R_2 = \sqrt{313} + 16$.

Câu 78: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases} |z - 3 - 2i| \leq 1 \\ |w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P = |z - w|.$$

A. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

B. $P_{\min} = \sqrt{2} + 1$.

C. $P_{\min} = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}$.

D. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1 :

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$|z - 3 - 2i| \leq 1 \Leftrightarrow (a - 3)^2 + (b - 2)^2 \leq 1 \quad (1)$$

$$|w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i| \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 \leq (x - 2)^2 + (y - 1)^2.$$

Suy ra $x + y = 0$.

$$P = |z - w| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} = \sqrt{(a - x)^2 + (b + x)^2}.$$

Từ (1) ta có $I(3; 2)$, bán kính $r = 1$. Gọi H là hình chiếu của I trên $d: y = -x$.

$$\text{Đường thẳng } HI \text{ có PTTS } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

$$M \in HI \Rightarrow M(3 + t; 2 + t)$$

$$M \in (C) \Leftrightarrow 2t^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow M\left(3 + \frac{1}{\sqrt{2}}; 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right), MH = \frac{5 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$t = 3 \Rightarrow M\left(3 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right), MH = \frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}.$$

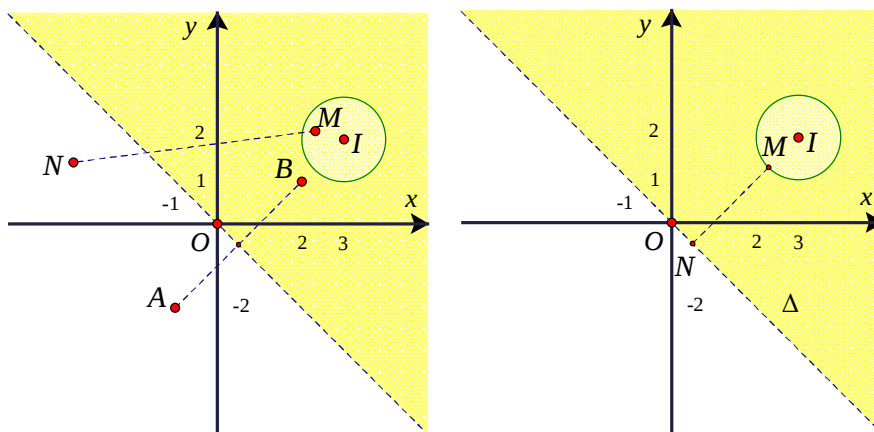
Cách 2 :

$|z - 3 - 2i| \leq 1$ điều này cho thấy $M(z)$ đang nằm trên hình tròn tâm $I(3; 2)$ bán kính bằng 1.

$|w + 1 + 2i| \leq |w - 2 - i|$ điều này cho thấy $N(w)$ đang thuộc nửa mặt phẳng tạo bởi đường thẳng Δ là trung trực của đoạn AB với $A(-1; -2), B(2; 1)$.

$$\Delta: x + y = 0.$$

(Minh hoạ như hình vẽ)



$$P = |z - w| = MN.$$

$$P_{\min} = d(I, \Delta) - R = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{5\sqrt{2} - 2}{2}.$$

Câu 79: [Nguyễn Khuyến, Bình Dương, 18/3, 2018] Cho $z_1 = a + bi$ và $z_2 = c + di$ là 2 số phức thỏa mãn:

$|z_1|^2 = 4$ và $|z_1|(c + d) = 10$. Gọi M là giá trị lớn nhất của biểu thức $T = ac + bd + cd$. Hãy chọn khẳng định đúng về M .

A. $M \in (11; 15)$.

B. $M \in (15; 17)$.

C. $M \in (11; 12)$.

D. Không tồn tại M .

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z_1|^2 = 4 \\ |z_1|(c + d) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \\ c + d = 5 \end{cases}.$$

Khi đó:

$$T = ac + bd + cd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c(5 - c) = 2\sqrt{c^2 + (5 - c)^2} + 5c - c^2.$$

$$\text{Đặt } f(c) = 2\sqrt{2c^2 - 10c + 25} + 5c - c^2.$$

$$\text{Ta có } f'(c) = \frac{4c - 10}{\sqrt{2c^2 - 10c + 25}} + 5 - 2c = (2c - 5) \left(\frac{2 - \sqrt{2c^2 - 10c + 25}}{\sqrt{2c^2 - 10c + 25}} \right) \Leftrightarrow c = \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên:

c	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(c)$	+	0	-
$f(c)$	$-\infty$	$5\sqrt{2} + \frac{25}{4}$	$-\infty$

Dựa vào

có $M = 5\sqrt{2} + \frac{25}{4} \approx 13,3$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = \sqrt{2} \\ c = d = \frac{5}{2} \end{cases}$.

bảng biến thiên ta

Câu 80: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$ và $M = \max \left|z + \frac{1}{z}\right|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M \in (-1; 2)$.

B. $M \in \left(2; \frac{7}{2}\right)$.

C. $M \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$.

D. $M^2 + M < 5$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| = \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \Leftrightarrow \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \leq 2.$$

$$\text{Mặt khác: } \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right)\right| \geq \left|z + \frac{1}{z}\right|^3 - 3\left|z + \frac{1}{z}\right|.$$

$$\text{Suy ra: } \left|z + \frac{1}{z}\right|^3 - 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2. \text{ Đặt } t = \left|z + \frac{1}{z}\right| \geq 0 \text{ ta được:}$$

$$t^3 - 3t - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 2.$$

Vậy $M = 2$.

Câu 81: Cho số phức $z = x + yi$ với x, y là các số thực không âm thỏa mãn $\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right| = 1$ và biểu thức

$$P = \left|z^2 - \bar{z}^2\right|^2 + i\left(z^2 - \bar{z}^2\right)\left[z(1-i) + \bar{z}(1+i)\right]. \text{ Gọi } M, m \text{ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của}$$

P . Môđun của $M + mi$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Chọn B.

Ta có $\left| \frac{z-3}{z-1+2i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-3| = |z-1+2i| \Leftrightarrow x+y=1$.

$$P = \left| z^2 - \bar{z}^2 \right|^2 + i \left(z^2 - \bar{z}^2 \right) \left[z(1-i) + \bar{z}(1+i) \right] = 16x^2y^2 - 8xy(x+y) = 16x^2y^2 - 8xy.$$

Đặt $t = xy$ ta có $0 \leq t \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = 16t^2 - 8t$, với $t \in \left[0; \frac{1}{4} \right]$ ta được $P_{\max} = 0$; $P_{\min} = -1$ Vậy

$$|M + mi| = 1.$$

Câu 82: (THPT Nguyễn Đăng Đạo – Bắc Ninh lần 3-2018) Cho hai số phức $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Gọi z là số phức thỏa mãn $|3z - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$T = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|.$$

Tính mô đun của số phức $w = M + mi$.

A. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

D. 4

Lời giải

Chọn A.

Giả sử M, A, B lần lượt biểu diễn số phức $z = x + yi, z_1, z_2$.

Từ giả thiết $|3z - \sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ ta có: $x^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$.

Nên M thuộc đường tròn tâm $I\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right), R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta có $T = MO + MA + MB$.

Để $T_{\min}$ thì M trùng O, A, B nên

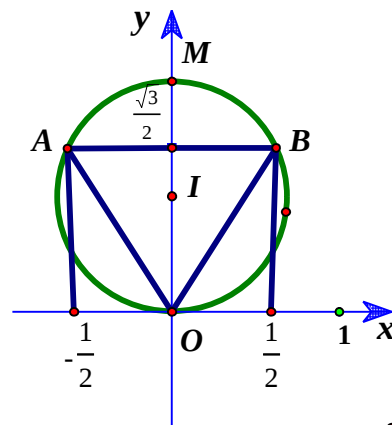
$$T_{\min} = 2OA = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2.$$

Để $T_{\max}$ thì $OM_{\max}$ và $(MA + MB)_{\max}$ nên $OM = 2R$ và M nằm

chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$ và $M\left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Do vậy

$$T_{\max} = OM + 2MA = \frac{2}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $|w| = \sqrt{M^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.



Câu 83: Cho hai số phức z và w thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} |iz - 2i - 2| \leq |z - 1| \\ \max\{|w + 2 - 2i|, |w|\} \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - w|$.

A. $\frac{9}{2\sqrt{5}}$.

B. $\frac{13}{2\sqrt{5}}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z, w với $M(x; y)$.

$$\text{Ta có } |iz - 2i - 2| \leq |z - 1| \Leftrightarrow |z - 2 + 2i| \leq |z - 1|$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leq (x - 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow -2x + 4y + 7 \leq 0.$$

Do đó, M thuộc nửa mặt phẳng bờ $\Delta: -2x + 4y + 7 = 0$ không chứa O , kể cả

Ta có $\max\{|w + 2 - 2i|, |w|\} \leq \sqrt{2}$ suy ra

$$\begin{cases} |w + 2 - 2i| \leq \sqrt{2} \\ |w| \leq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NI \leq \sqrt{2} \\ NO \leq \sqrt{2} \end{cases}, I(-2; 2).$$

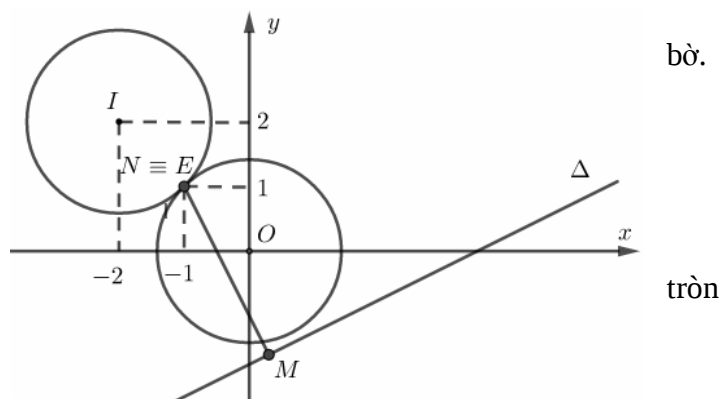
Do đó, N thuộc phần chung của hai hình $(I; \sqrt{2})$ và $(O; \sqrt{2})$.

Dễ thấy hai hình tròn này tiếp xúc ngoài tại điểm $E(-1; 1)$. Do đó, $N(-1; 1)$.

Ta thấy $|z - w| = MN$ nên $|z - w|$ nhỏ nhất khi MN ngắn nhất, khi đó M là hình chiếu của N trên Δ .

$$\text{Ta có } d(N, \Delta) = \frac{|-2(-1) + 4 \cdot 1 + 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2}} = \frac{13}{2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } \min|z - w| = \frac{13}{2\sqrt{5}}.$$



Câu 84: [CHUYÊN NGŨ LẦN 1-2018] Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $|z_1 - 3i + 5| = 2$ và $|iz_2 - 1 + 2i| = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2iz_1 + 3z_2|$.

A. $\sqrt{313} + 16$.

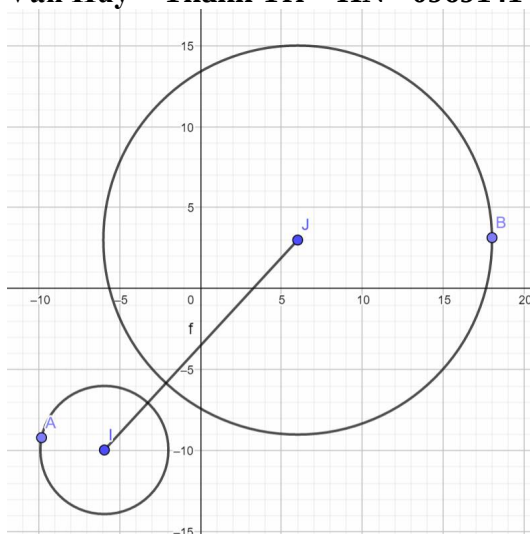
B. $\sqrt{313}$.

C. $\sqrt{313} + 8$.

D. $\sqrt{313} + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.



Đặt $2iz_1 = a + bi, -3z_2 = c + di$ ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$), gọi $A(a; b), B(c; d)$.

$$\text{Có } |z_1 - 3i + 5| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{a+bi}{2i} - 3i + 5 \right| = 2 \Leftrightarrow |(a+6) + (10+b)i| = 4 \Leftrightarrow (a+6)^2 + (b+10)^2 = 16 \text{ nên}$$

$A \in (I)$ có tâm $I(-6; -10)$ bán kính $R = 4$.

$$\text{Có } |iz_2 - 1 + 2i| = 4 \Leftrightarrow \left| i \cdot \frac{c+di}{-3} - 1 + 2i \right| = 4 \Leftrightarrow |(3-d) + (c-6)i| = 12 \Leftrightarrow (c-6)^2 + (d-3)^2 = 12^2 \text{ nên}$$

$B \in (J)$ có tâm $J(6; 3)$, bán kính $R' = 12$.

$$\text{Có } T = |2iz_1 + 3z_2| = |(a-c) + (b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = AB.$$

Do $A \in (I), B \in (J), IJ = \sqrt{313} > R + R' = 16$ nên $AB_{\max} = R + R' + IJ = 16 + \sqrt{313}$.

Câu 85: Xét các số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ biết biểu thức $S = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4 + \sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. $4 - \sqrt{3}$.

D. 3.

Lời giải:

Chọn A

Giả thiết $|z - 3 - 2i| = 2 \Leftrightarrow (T): (a-3)^2 + (b-2)^2 = 4$

Gọi $A(-1; 2), B(2; 5), M(a; b)$ lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + 2i, z_2 = 2 + 5i, z_3 = a + bi$

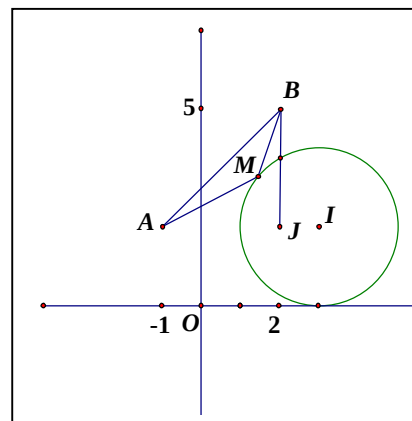
Bài toán trở thành: Tìm $M \in (T)$ sao cho biểu thức

$$S = MA + 2MB \text{ nhỏ nhất}$$

$$\text{Ta có } MA = \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2a - 4b + 5}$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 4b + 8}$$

$$= 2\sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2} = 2MC \text{ với } C(2; 2)$$



Ta có $MA + 2MB = 2(MB + MC) \geq 2BC$ dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi B, M, C theo thứ tự đó thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng $BC : x = 2$

M là giao của của BC và $(T) \Rightarrow M(2; 2 + \sqrt{3}) \Rightarrow a + b = 4 + \sqrt{3}$.

Câu 86: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $\sqrt{2}|z_1| = \sqrt{2}|z_2| = |z_1 - z_2| = 6\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|.$$

A. $P = 6\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

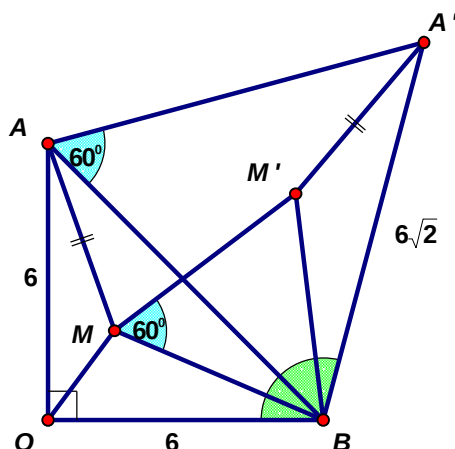
B. $P = 3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

C. $P = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

D. $P = \frac{9}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C.



Chọn A, B, M lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z ,

Dựa vào điều kiện $\sqrt{2}|z_1| = \sqrt{2}|z_2| = |z_1 - z_2| = 6\sqrt{2} \Rightarrow OA = OB = 6, AB = 6\sqrt{2}$.

Suy ra ta có tam giác OAB vuông cân tại O .

Phép quay tâm B góc quay -60° ta có:

$$Q_{(B, -60^\circ)} : A \mapsto A'$$

$$M \mapsto M'$$

Do tam giác $\triangle BMM'$ đều $\Rightarrow AM = A'M', BM = MM'$

Suy ra $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2| = OM + AM + BM = OM + MM' + A'M' \geq OA'$.

Dấu “=” xảy ra khi O, M, M', A' thẳng hàng.

Khi đó tam giác OBA' có $OB = 6, BA' = BA = 6\sqrt{2}$ và $\widehat{OBA'} = 105^\circ$.

Từ đó suy ra $OA' = \sqrt{OB^2 + BA'^2 - 2OB \cdot BA' \cdot \cos 105^\circ} = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Vậy $\min P = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Câu 87: Cho hai số phức z, ω thỏa mãn $|z - 1| = |z + 3 - 2i|; \omega = z + m + i$ với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Giá trị của m để ta luôn có $|\omega| \geq 2\sqrt{5}$ là:

A. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq 3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m \geq 7 \\ m \leq -3 \end{cases}$.

C. $-3 \leq m < 7$.

D. $3 \leq m \leq 7$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt $z = a + ib, (a, b \in \mathbb{R})$ có biểu diễn hình học là điểm $M(x; y)$

$$|z - 1| = |z + 3 - 2i| \Leftrightarrow |x - 1 + iy| = |x + 3 + (y - 2)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y - 2)^2}$$

$$\Leftrightarrow -2x + 1 = 6x + 9 - 4y + 4 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$$

Suy ra biểu diễn của số phức z là đường thẳng $\Delta: 2x - y + 3 = 0$.

Ta có: $|\omega| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |z + m + i| \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |x + m + (y + 1)i| \geq 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + m)^2 + (y + 1)^2} \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow MI \geq 2\sqrt{5} \text{ với } I(-m; -1).$$

Mà ta có $MI \geq d(I, \Delta)$

$$\text{Nên } MI \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow d(I, \Delta) \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-2m + 4|}{\sqrt{5}} \geq 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |-2m + 4| \geq 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 4 \geq 10 \\ -2m + 4 \leq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 7 \end{cases}.$$

Câu 88: Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z - 1}{z + 3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + i| + 2|\bar{z} - 4 + 7i|$

A. 20.

B. 10.

C. $12\sqrt{5}$.

D. $4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

$$\text{Ta có } \left| \frac{z - 1}{z + 3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z - 1| = |z + 3i| \Leftrightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y - 7 = 0.$$

$$\text{Lại có } P = |z + i| + 2|\bar{z} - 4 + 7i| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + 2\sqrt{(x - 4)^2 + (y - 7)^2}$$

$$= \sqrt{4x + 8y + 8} + 2\sqrt{-4x - 8y + 72}.$$

$$\text{Mặt khác } \left(\sqrt{4x + 8y + 8} + 2\sqrt{-4x - 8y + 72} \right)^2 \leq 5.80 \Rightarrow \sqrt{4x + 8y + 8} + 2\sqrt{-4x - 8y + 72} \leq 20$$

Suy ra $P \leq 20$.