

HÌNH LĂNG TRỤ XIÊN

Bài 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC có $AC = a\sqrt{3}$, $BC = 3a$, $\angle ACB = 30^\circ$. Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy góc 60° và mặt phẳng $(A'BC)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm H trên cạnh BC sao cho $HC = 3BH$ và mặt phẳng $(A'AH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'AC)$

Giải

$$\begin{cases} (A'BC) \perp (ABC) \\ (A'AH) \perp (ABC) \\ A'H = (A'BC) \cap (A'AH) \end{cases} \Rightarrow A'H \perp (ABC)$$

Suy ra $\angle A'AH = 60^\circ$

$$AH^2 = AC^2 + HC^2 - 2AC \cdot HC \cdot \cos 30^\circ = a^2 \Rightarrow AH = a$$

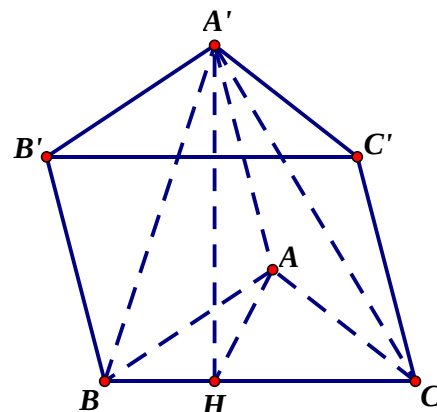
$$\Rightarrow A'H = AH \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{9a^3}{4}$$

$$\text{Vì } AH^2 + AC^2 = HC^2 \Rightarrow HA \perp AC \Rightarrow AA' \perp AC$$

$$S_{A'AC} = \frac{1}{2} AC \cdot AA' = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot 2a = a^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow d(B; (A'AC)) = \frac{3V_{A'ABC}}{S_{A'AC}} = \frac{\frac{9}{4}a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$$



Bài 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng a , $AA' = a$ và đỉnh A' cách đều A , B , C . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $A'B'$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN)

Giải

Gọi O là tâm tam giác đều $ABC \Rightarrow A'O \perp (ABC)$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}; S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$:

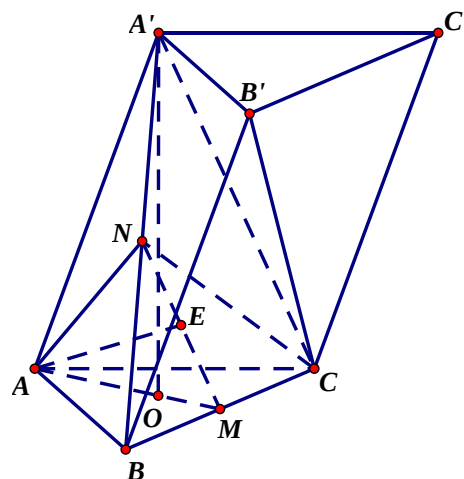
$$V = S_{\triangle ABC} \cdot A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$

Ta có:

$$V_{NAMC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AMC} \cdot d(N, (ABC)) \Rightarrow d(N, (ABC)) = \frac{3V_{NAMC}}{S_{\triangle AMC}}$$

$$S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}; d(N, (ABC)) = \frac{1}{2} A'O = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V_{NAMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$$

Lại có: $AM = AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, nên $\triangle AMN$ cân tại A .



Gọi E là trung điểm của MN, suy ra $AE \perp MN$, $MN = \frac{A'C}{2} = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow AE = \sqrt{AN^2 - NE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{11}}{4}; S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AE = \frac{a^2\sqrt{11}}{16}$$

$$\Rightarrow d(C, (AMN)) = \frac{3a^2\sqrt{2}}{48} : \frac{a\sqrt{11}}{16} = \frac{a\sqrt{22}}{11} \text{ (đvdd)}$$

Bài 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $ACB = 30^\circ$; M là trung điểm cạnh AC. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy của lăng trụ bằng 60° . Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BM. Tính theo a thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng (BMB')

Giải

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H$ là đường cao của hình lăng trụ.

AH là hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABC) \Rightarrow \angle A'AH = 60^\circ$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC}$$

$$AC = 2a, MA = MB = AB = a \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \frac{3a}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$$

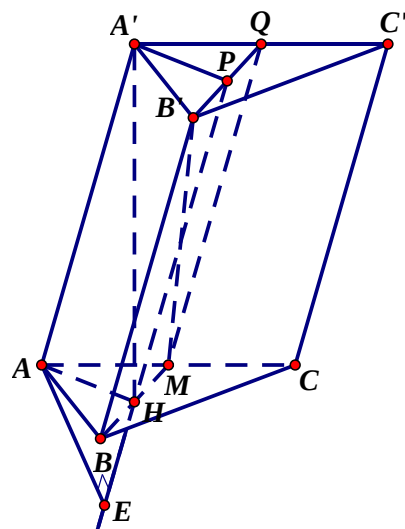
$$d(C', (BMB')) = d(C, (BMB')) = d(A, (BMB')) = \frac{3V_{A.BMB'}}{S_{BMB'}}$$

$$V_{A.BMB'} = V_{B'.AMB} = \frac{1}{6}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Do $BM \perp (AHA')$ nên $BM \perp AA' \Rightarrow BM \perp BB' \Rightarrow \triangle BMB'$ vuông tại B

$$\Rightarrow S_{BMB'} = \frac{1}{2}BB'.BM = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}. \text{ Suy ra } d(C', (BMB')) = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} : \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

(Cách 2: $d(A, (BMB')) = AE = AH.\sin \angle AHE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 60^\circ = \frac{3a}{4}$)



Bài 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 60° . Gọi M là trung điểm cạnh BC và I là trung điểm của AM. Biết rằng hình chiếu của điểm I lên mặt đáy $A'B'C'$ là trọng tâm G của $\triangle A'B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ đó.

Giải

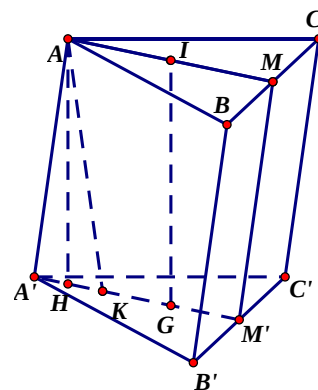
Gọi M' là trung điểm của $B'C'$; $K \in A'M'$ sao cho $A'K = KG = GM'$

Kẻ $A'H \perp A'M'$; $H \in A'M'$.

Ta có AHGI là hình bình hành nên $IG = AH$

Hơn nữa $AM' = A'M'$, I là trung điểm của AM, G là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$ nên H là trung điểm của $A'K$

$$\Rightarrow A'H = \frac{1}{6}A'M'$$



Ta có: $S_{A'B'C'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $A'M' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{12}$

$AH = A'H \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{4}$. Từ đó: $V_{ABC.A'B'C'} = AH \cdot S_{A'B'C'} = \frac{a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Bài 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, $AC = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, $BAC = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a và tính số đo góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ACC'A')$.

Giải

Gọi H là trung điểm BC . Từ giả thiết suy ra $C'H \perp (ABC)$.

Trong $\triangle ABC$ ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos 120^\circ = 7a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{7} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow C'H = \sqrt{C'C^2 - CH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra thể tích lăng trụ $V = C'H \cdot S_{ABC} = \frac{3a^3}{4}$

Hạ $HK \perp AC$. Vì $C'H \perp (ABC) \Rightarrow$ đường xiên $C'K \perp AC \Rightarrow ((ABC), (ACC'A')) = C'KH$ (1)

($\triangle C'HK$ vuông tại H nên $C'KH < 90^\circ$)

Trong $\triangle HAC$ ta có $HK = \frac{2S_{HAC}}{AC} = \frac{S_{ABC}}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan C'KH = \frac{C'H}{HK} = 1 \Rightarrow C'KH = 45^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $((ABC), (ACC'A')) = 45^\circ$

Ghi chú: Có thể tính độ dài AH và suy ra $\triangle HAC$ vuông tại A để suy ra $K \equiv A$)

Bài 6. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng $ABCD$ là trung điểm I của cạnh AB . Biết $A'C$ tạo với mặt phẳng đáy một góc α với $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ICD$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'AC)$

Giải

Theo bài ra ta có IC là hình chiếu vuông góc của $A'C$ trên mặt phẳng

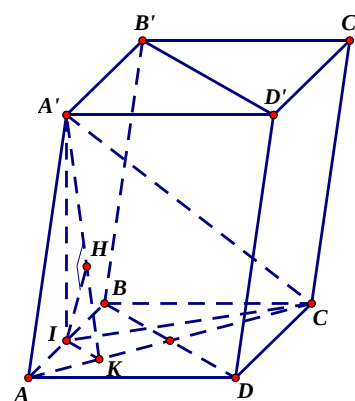
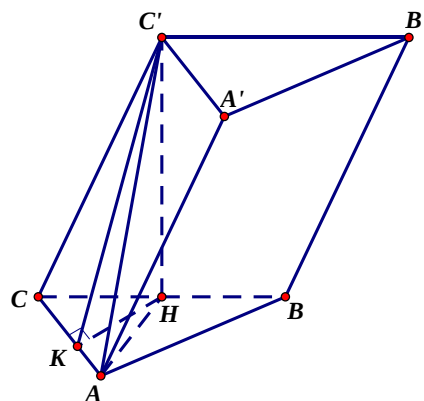
$(ABCD)$. Suy ra $(A'C, (ABCD)) = (A'C, CI) = A'CI = \alpha$

Xét tam giác vuông $A'IC$:

$$A'I = IC \cdot \tan A'CI = IC \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = a$$

Thể tích khối chóp $A'.ICD$ là:

$$V_{A'.ICD} = \frac{1}{3} A'I \cdot S_{\triangle ICD} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6} \text{ (đvtt)}$$



Ta có $BI \cap (A'AC) = A$ và I là trung điểm AB nên $d(B; (A'AC)) = 2d(I; (A'AC))$

Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ $IK // BD \Rightarrow IK \perp AC$, mà $A'I \perp AC$ (do $A'I \perp (ABCD)$) nên $AC \perp (A'IK)$. Kẻ $IH \perp A'K \Rightarrow IH \perp (A'AC) \Rightarrow d(I; (A'AC)) = IH$

Xét tam giác vuông $A'IK$ có $A'I = a$, $IK = \frac{BD}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{IA'^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow IH = \frac{a}{3}$$

Suy ra $d(B; (A'AC)) = \frac{2a}{3}$

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có mặt bên $AA'D'D$ là hình thoi cạnh bằng a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABCD) và cách BC một khoảng bằng $\frac{a}{2}$. Biết cạnh AA' hợp với mặt đáy (ABCD) một góc bằng 60° . Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Giải

Ta có: $(AA'D'D) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AD

(1)

Vẽ $A'H \perp AD$ và $BK \perp AD$; $H, K \in AD$

(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'H \perp (ABCD)$ và $BK \perp (AA'D'D)$

$\Rightarrow A'H = d((A'B'C'D'), (ABCD))$

$BK = d(B, (AA'D'D))$

$$= d(BC, (AA'D'D)) = \frac{a}{2}$$

(vì $BC // (AA'D'D)$)

Vì $A'H \perp (ABCD)$ nên góc hợp bởi AA' và (ABCD) là $\angle A'AH = 60^\circ$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H $\Rightarrow A'H = AA' \sin \angle A'AH = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$V = S_{ABCD} \cdot A'H = AD \cdot BK \cdot A'H = a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Biết tam giác $A'AB$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng hợp với đáy (ABCD) một góc bằng α . Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a và α .

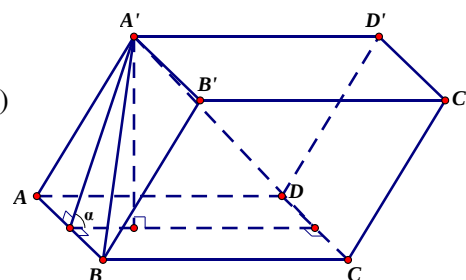
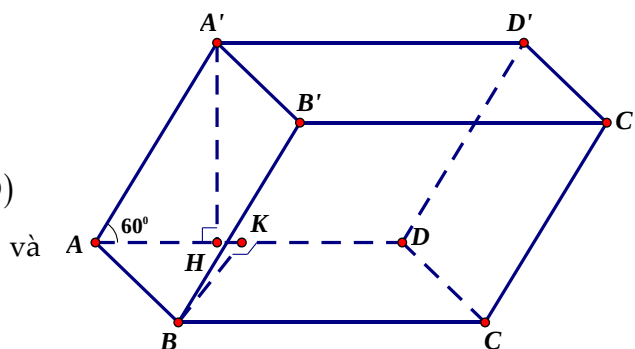
Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD, ta có:

$$\begin{cases} MN \perp AB \text{ (vì MN là đường trung bình của hình chữ nhật ABCD)} \\ A'M \perp AB \text{ (vì tam giác A'AB là tam giác đều)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \angle A'MN = \alpha$ (góc hợp bởi $(A'AB)$ và đáy (ABCD))

Ta cũng có $AB \perp (A'MN)$ (vì $AB \perp MN$ và $AB \perp A'M$)



$\Rightarrow (ABCD) \perp (A'MN)$ theo giao tuyến MN (1)

Vẽ $A'H \perp MN, H \in MN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'H \perp (ABCD) \Rightarrow A'H = d((A'B'C'D'), (ABCD))$

Tam giác $A'AB$ là tam giác đều có cạnh $AB = a \Rightarrow A'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác $A'HM$ vuông tại $H \Rightarrow A'H = A'M \sin A'MH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$

Vậy thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$V = S_{ABCD} \cdot A'H = AB \cdot AD \cdot A'H = a \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \alpha = a^3 \sqrt{3} \sin \alpha$$

Bài 9. Cho hai đoạn thẳng AB và CD chéo nhau, AC là đường vuông góc chung của chúng. Biết rằng $AC = h, AB = a, CD = b$ và góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 60° . Hãy tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

Giải

Dựng hình lăng trụ $ABE.FDC$ (BE song song và bằng DC , DF song song và bằng AB)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp AB \text{ (gt)} \\ AC \perp CD \text{ (gt)} \\ CD // BE \Rightarrow AC \perp BE \end{cases}$$

$\Rightarrow AC \perp (ABE) \Rightarrow AC = h$ là chiều cao của hình chóp $C.ABE$.

Tam giác ABE có $AB = a, BE = CD = b$ và $\angle ABE = (\angle AB, CD) = 60^\circ$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \cdot \sin \angle ABE = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin 60^\circ = \frac{ab\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Ta có } V_{ABCD} = V_{C.ABD} = V_{C.AFD} = V_{A.CDF} = V_{C.ABE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE} \cdot CA = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{abh\sqrt{3}}{12}$$

Chú ý: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{ABE.FDC}$

Bài 10. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng a , $\angle A'AB = \angle BAD = \angle A'AD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Hãy tính thể tích của khối hộp.

Giải

Ta có $\triangle AA'B = \triangle AA'D$ (vì có cạnh chung là AA' ,

$A'A = A'A = a$ và $AB = AD = a$)

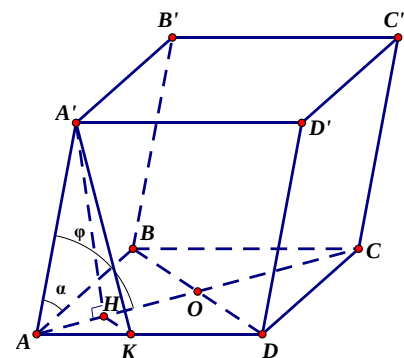
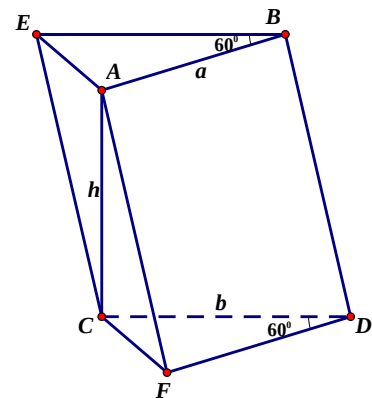
$\Rightarrow A'B = A'D$

Vẽ $A'H \perp AC$ ($H \in AC$) (1)

Tam giác $A'BD$ cân tại A' (do $A'B = A'D$)

$\Rightarrow BD \perp A'O$ (O là trung điểm của BD , O cũng là tâm của hình thoi $ABCD$)

Ta còn có $BD \perp AC$



$$\Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp A'H \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'H \perp (ABCD)$

Đặt $A'AO = \varphi$

Vẽ $A'K \perp AD (K \in AD) \Rightarrow HK \perp AK$ (định lý ba đường vuông góc)

Ta có: $\cos \varphi = \frac{AH}{AA'}$ (tam giác vuông $AA'H$)

$$\cos \alpha = \frac{AK}{AA'} \quad (\text{tam giác vuông } AA'K)$$

$$\text{và } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AK}{AH} \quad (\text{tam giác } AHK \text{ vuông tại } K \text{ và } HAK = \frac{BAD}{2} = \frac{\alpha}{2})$$

$$\Rightarrow \cos \varphi \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{AA'} \cdot \frac{AK}{AH} = \frac{AK}{AA'} = \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Tam giác $AA'H$ vuông tại H và có $A'AH = \varphi$ nên

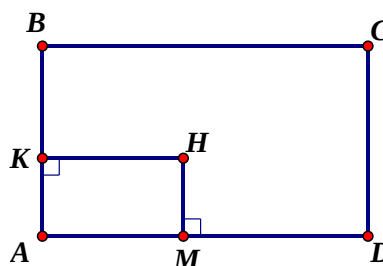
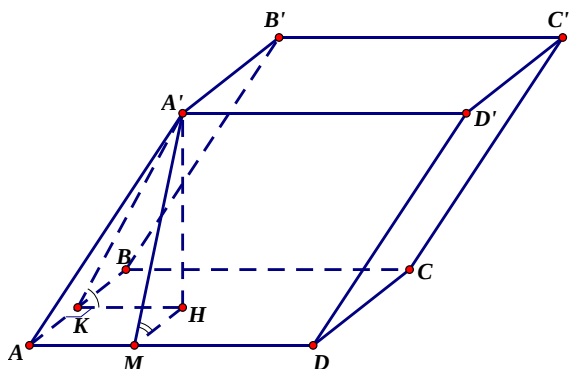
$$A'H = AA' \cdot \sin \varphi = a \sin \varphi = a \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = a \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = AB \cdot AD \cdot \sin BAD \cdot A'H = a^2 \sin \alpha \cdot \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

$$= a^2 \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha} = 2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha}$$

Bài 11. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Hãy tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1.

Giải



Vẽ $A'H \perp (ABCD) (H \in (ABCD))$, $HM \perp AD (M \in AD)$, $HK \perp AB (K \in AB)$

Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $AD \perp A'M$, $AB \perp A'K$

$$\Rightarrow \angle A'MH = 60^\circ, \angle A'KH = 45^\circ$$

Đặt $A'H = x$

Tam giác $A'HM$ vuông tại H và có $A'MH = 60^\circ$ nên $A'M = \frac{A'H}{\sin 60^\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}}$

Tam giác $A'AM$ vuông tại M nên

$$AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{1 - \frac{4a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} \quad (1)$$

$AKHM$ là hình chữ nhật và tam giác $A'AH$ vuông tại H nên $AM = HK$ và $HK = A'H \cdot \cot A'KH$

$$\Rightarrow AM = HK = x \cdot \cot 45^\circ = x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3 - 4x^2}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ hay } A'H = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = AB \cdot AD \cdot A'H = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 3$$

Bài 12. Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ mà mặt bên $ABB'A'$ có diện tích bằng 4. Khoảng cách giữa cạnh CC' và mặt $(ABB'A')$ bằng 7. Hãy tính thể tích khối lăng trụ.

Giải

Dựng khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ta có:

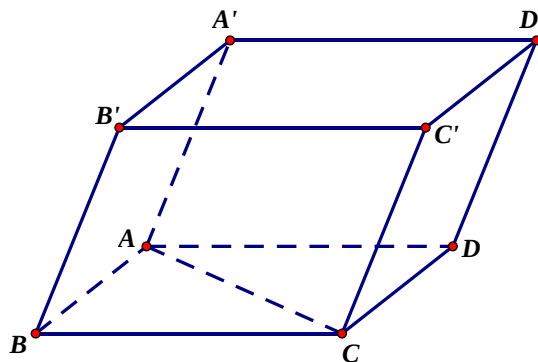
$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

Xem khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là khối lăng trụ có hai đáy là $ABB'A'$ và $DCC'D'$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABB'A'} \cdot h$ trong đó

$$h = d((CDD'C'), (ABB'A')) \\ = d(CC', (ABB'A')) = 7$$

$$\text{và } S_{ABB'A'} = 4 \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$$



Bài 13. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền bằng $AB = \sqrt{2}$. Cho biết mặt phẳng $(AA'B)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $AA' = \sqrt{3}$, góc $A'AB$ nhọn, góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

Giải

$$(AA'B) \perp (ABC) \text{ theo giao tuyến } AB \quad (1)$$

$$\text{Vẽ } A'K \perp AB \text{ (với } K \in AB) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow A'K \perp (ABC)$$

Góc $A'AB$ nhọn nên K thuộc tia AB .

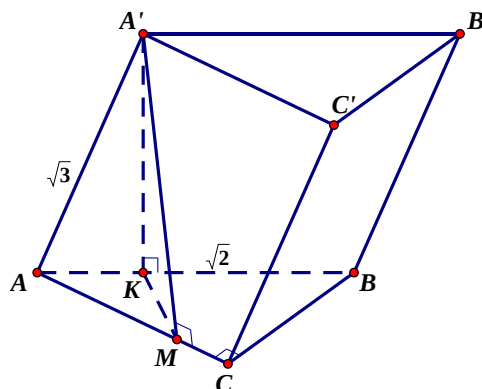
Vẽ $KM \perp AC$ ($M \in AC$)

$\Rightarrow A'M \perp AC$ (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và (ABC) là

$$\angle A'MK = 60^\circ$$

Đặt $A'K = x$, ta có:



$$\begin{cases} AK = \sqrt{A'A^2 - A'K^2} = \sqrt{3 - x^2} \\ MK = AK \sin KAM = \sqrt{3 - x^2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3 - x^2} \quad (3) \\ MK = A'K \cot A'MK = A'K \cdot \cot 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad (4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{\sqrt{2 \cdot (3 - x^2)}}{2} = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}} \text{ hay } A'K = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Tam giác ABC vuông cân với cạnh huyền $AB = \sqrt{2}$ nên $AC = CB = 1$.

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'K = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot A'K = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Bài 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = b$, cạnh bên AA' hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc bằng 60° , mặt bên $AA'D'D$ là hình thoi có góc $A'AD$ nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$

- Tính thể tích của khối tứ diện $ACDD'$
- Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa AA' và CD .

Giải

a. Ta có $(AA'D'D) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AD

(1)

Vẽ $A'H \perp AD$, $H \in AD$

(2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A'H \perp (ABCD)$

$\Rightarrow$ Góc hợp bởi AA' và $(ABCD)$ là $A'AH = 60^\circ$

Tam giác $AA'H$ vuông tại H , $AA' = AD = b$ ($AA'D'D$ là

hình thoi) và $A'AH = 60^\circ \Rightarrow A'H = \frac{b\sqrt{3}}{2}$

Ta có:

$$V_{A'CDD'} = V_{A'.CDD'} = V_{A'.CC'D'} = \frac{1}{2} V_{A'.CC'D'D}$$

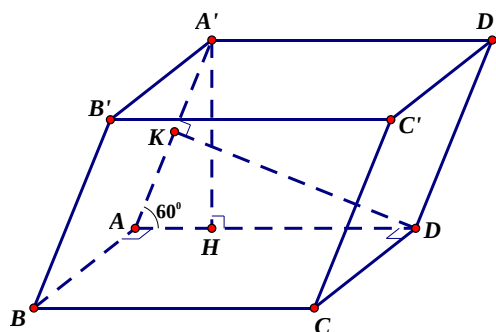
$$= \frac{1}{2} (V_{ACD.A'C'D'} - V_{A'.ACD}) = \frac{1}{2} \left(V_{ACD.A'C'D'} - \frac{1}{3} V_{ACD.A'C'D'} \right)$$

$$= \frac{1}{3} V_{ACD.A'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{6} S_{ABCD} \cdot A'H = \frac{1}{6} AB \cdot AD \cdot A'H = \frac{1}{6} ab \cdot \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{hay } V_{A'CDD'} = \frac{ab^2\sqrt{3}}{12}$$

Chú ý: ta có thể tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$ bằng cách khác.

Ta có $(AA'D'D) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AD và $AB \perp AD$



$$\Rightarrow AB \perp (AA'D'D)$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{AA'D'D} \cdot AB = AD \cdot AA' \cdot \sin A'AD \cdot AB = a \cdot b \cdot b \cdot \sin 60^\circ = \frac{ab^2\sqrt{3}}{2}$$

b. Ta có $(AA'D'D) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AD và $CD \perp AD$

$$\Rightarrow CD \perp (AA'D'D) \quad (1)$$

Trong mặt phẳng $(AA'D'D)$, vẽ $DK \perp AA'$, $K \in AA'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DK$ là đoạn vuông góc chung của AA' và CD .

Tính DK :

$AA'D'D$ là hình thoi có cạnh bằng b và $A'AD = 60^\circ$

$$\Rightarrow \text{Tam giác } AA'D \text{ là tam giác đều có cạnh bằng } b \Rightarrow DK = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

Bài 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a , các góc $BAA' = BAD = DAA' = 60^\circ$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ theo a .

Giải

Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu của A' lên $(ABCD)$, AB , AD .

Ta có:

$$\begin{cases} A'H \perp AB \\ A'I \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI)$$

$$\Rightarrow AB \perp HI$$

Tương tự: $HJ \perp AD$. Hai tam giác vuông $A'AI$ và $A'AJ$ có AA' chung và $A'AI = A'AJ = 60^\circ$

$$\Rightarrow \Delta A'AI = \Delta A'AJ, AI = AJ = AA' \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow HI = HJ$$

Vậy H cách đều AB và AD nên nằm trên đường phân giác của góc $BAD \Rightarrow H \in AC$

$$\text{Ta có: } AH = \frac{AI}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}; A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow A'H = a\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'H \cdot S_{ABCD} = a\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} \text{ (đvtt)}$$

Bài 16. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Mặt bên $ABB'A'$ là hình thoi, mặt bên $BCC'B'$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt này hợp với nhau một góc bằng α .

1. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$. Xác định góc α .
2. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Giải

1. Tính $d(A, (BCC'B'))$. Xác định α .

Dựng $AH \perp BC$ ($H \in BC$)

$$\begin{cases} (BCC'B') \perp (ABC) \\ (BCC'B') \cap (ABC) = BC \\ AH \subset (ABC), AH \perp BC \end{cases}$$

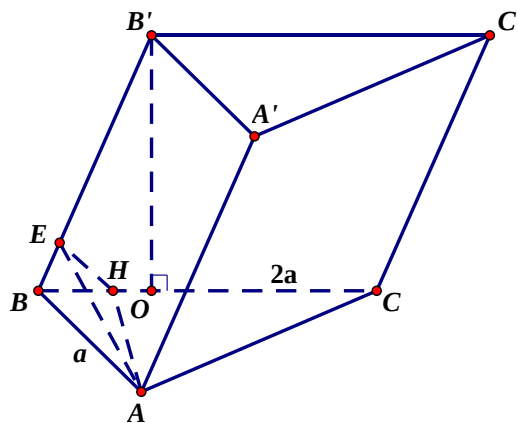
$$\Rightarrow AH \perp (BCC'B')$$

Dựng $HE \perp BB'$ ($E \in BB'$) ta có:

$$\begin{cases} BB' \perp AH \\ BB' \perp HE \end{cases} \Rightarrow BB' \perp (AHE)$$

$$\begin{cases} (ABB'A') \cap (BCC'B') = BB' \\ (AHE) \perp BB' \\ (AHE) \cap (ABB'A') = AE \\ (AHE) \cap (BCC'B') = HE \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((ABB'A'), (BCC'B')) = (AE, HE)$$



Mặt khác tam giác AHE vuông tại H (do $AH \perp HE$) nên AEH là góc nhọn.

$$\text{Do đó } ((ABB'A'), (BCC'B')) = (AE, HE) = AEH = \alpha$$

2. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$

Trong tam giác vuông ABC:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$$

$$AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$\text{Trong tam giác vuông AHE: } HE = AH \cot AEH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cot \alpha$$

Tứ giác $ABB'A'$ là hình thoi $AABB' = AB = a$

Gọi O là hình chiếu vuông góc của B' lên BC thì $B'O \perp (ABC)$ (chứng minh tương tự như chứng minh $AH \perp (BCC'B')$)

Hai tam giác vuông BEH và BOB' có chung góc nhọn B nên chúng đồng dạng.

$$\text{Suy ra } \frac{B'O}{EH} = \frac{BB'}{BH} \Rightarrow B'O = \frac{EH \cdot BB'}{BH} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cot \alpha}{\frac{a}{2}} = a\sqrt{3} \cot \alpha$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$

$$V = S_{ABC} \cdot B'O = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot B'O = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cot \alpha = \frac{3a^3 \cot \alpha}{2}$$

Bài 17. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, và $A'A = A'B = A'C = a\sqrt{\frac{7}{12}}$.

Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a và góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC)

Giải

Gọi H là hình chiếu của A trên (ABC)

Vì $A'A = A'B = A'C$ nên $HA = HB = HC$, suy ra H là tâm của tam giác đều ABC.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AB.

$$A'J = \sqrt{AA'^2 - AJ^2} = \sqrt{\frac{7a^2}{12} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$HJ = \frac{1}{3}CJ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'J^2 - HJ^2} = \frac{a}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

Vì $\begin{cases} A'J \perp AB \\ CJ \perp AB \end{cases} \Rightarrow (A'JC) \perp AB \Rightarrow A'JC$ chính là góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) . Khi đó

$$\tan A'JC = \frac{A'H}{JH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{3} \Rightarrow A'JC = 60^\circ$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) bằng 60° .

Bài 18. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' , $B'C'$.

Giải

Gọi H là trung điểm của BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$ và

$$AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$$

Do đó:

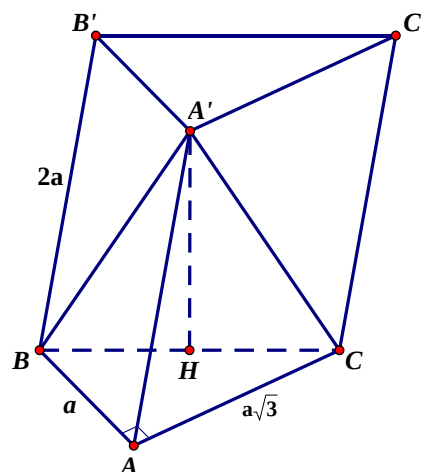
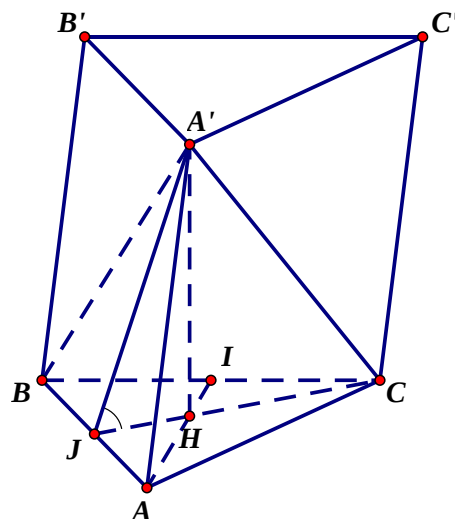
$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt)}$$

Trong tam giác vuông $A'B'H$ có $HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$ nên tam giác $B'BH$ là cân tại B'. Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ thì $\varphi = B'BH$

$$\text{Vậy } \cos \varphi = \frac{a}{2.2a} = \frac{1}{4}$$

Bài 19. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a.



Giải

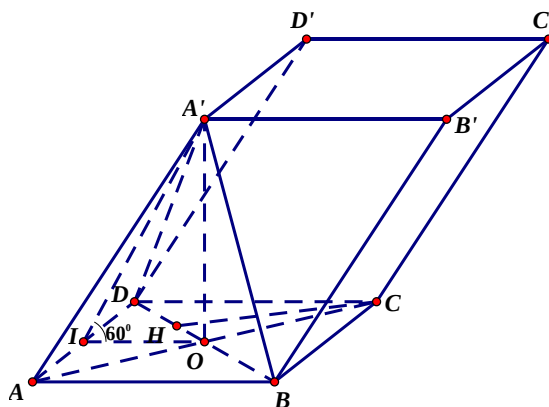
Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm của cạnh AD . Ta có $AD \perp (AOI)$

$$\Rightarrow \angle A'IO = ((ADD'A'), (ABCD)) = 60^\circ \text{ Vì } OI = \frac{a}{2} \text{ nên ta}$$

$$\text{suy ra } A'I = 2OI = a \Rightarrow A'O = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do đó $V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O \cdot S_{ABCD}$

$$= a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$$



Do $B'C \parallel A'D \Rightarrow B'C \parallel (A'BD) \Rightarrow d(B', (A'BD)) = d(C, (A'BD)) = CH$ trong đó CH là đường cao của tam giác vuông BCD .

$$\text{Ta có } CH = \frac{CD \cdot CB}{\sqrt{CD^2 + CB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } d(B', (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Bài 20. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\angle BAC = 120^\circ$ và AB' vuông góc với đáy $(A'B'C')$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CC' và $A'B'$, mặt phẳng $(AA'C')$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và cosin của góc giữa hai đường thẳng AM và $C'N$.

Giải

Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

$$= 3a^2$$

Gọi K là hình chiếu của B' lên $A'C'$, suy ra $A'C' \perp (AB'K)$

Do đó:

$$\angle AKB' = ((A'B'C'), (AA'C')) = 30^\circ \text{ Trong tam giác } A'KB' \text{ có}$$

$$\angle KA'B' = 60^\circ, A'B' = a \text{ nên } B'K = A'B' \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra } AB' = B'K \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\text{Thể tích khối lăng trụ: } V = AB' \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

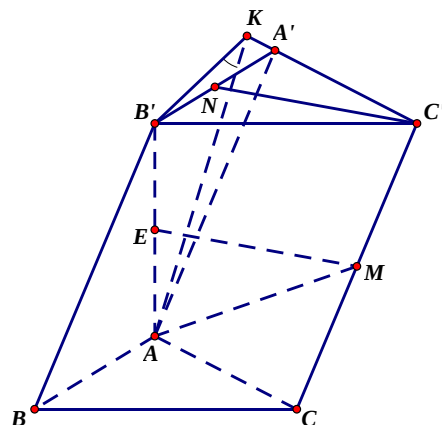
Gọi E là trung điểm của AB' , suy ra $ME \parallel C'N$ nên $(C'N, AM) = (EM, AM)$

Vì $AB' \perp C'N \Rightarrow AE \perp EM \Rightarrow (C'N, AM) = \angle AME$

$$AE = \frac{1}{2}AB' = \frac{a}{4}; EM^2 = C'N^2 = \frac{2(C'B'^2 + C'A'^2) - A'B'^2}{4} \Rightarrow EM = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$AM^2 = AE^2 + EM^2 = \frac{29a^2}{16} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{29}}{4}$$

$$\text{Vậy } \cos \angle AME = \frac{ME}{MA} = 2\sqrt{\frac{7}{29}}$$



Bài 21. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a , góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đoạn thẳng $B'C'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'C'$ theo a .

Giải

Ta có $A'H$ là hình chiếu của AA' lên mặt phẳng $(A'B'C')$

nên $\angle AA'H = 30^\circ$

Xét tam giác vuông AHA' ta có:

$$AH = AA' \sin 30^\circ = \frac{a}{2},$$

$$A'H = AA' \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Mà tam giác $A'B'C'$ đều nên H là trung điểm của $B'C'$.

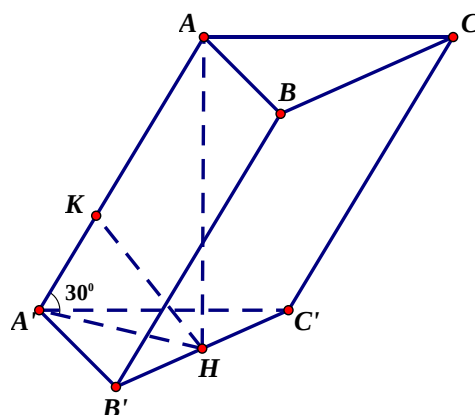
Thể tích của khối lăng trụ là:

$$V = AH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$$

Vẽ đường cao HK của tam giác AHA'

Ta có $B'C' \perp (AHA')$ nên $B'C' \perp HK$

$$\text{Suy ra } d(AA', B'C') = HK = \frac{AH \cdot A'H}{AA'} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$



Bài 22. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = a$, $\angle BAC = 120^\circ$, hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích của khối lăng trụ biết cạnh bên $AA' = 2a$.

Giải

Gọi H là tâm của đáy, M là trung điểm của cạnh BC , $SH \perp (ABC)$

$$AM = AB \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$$

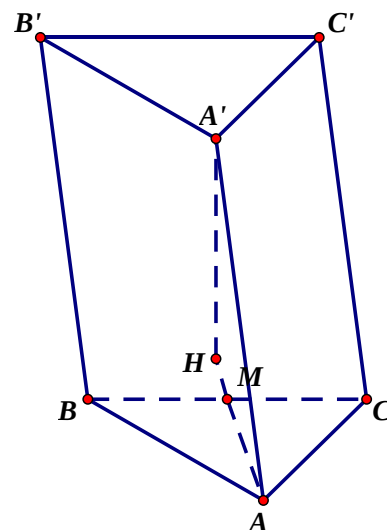
Áp dụng định lý sin ta có:

$$HA = R = \frac{BC}{2 \sin 120^\circ} = a,$$

$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3}{4}$$



Bài 23. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc

giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° , tam giác ABC vuông tại C và $\angle BAC = 60^\circ$.

Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC .

Tính thể tích khối tứ diện $A'.ABC$.

Giải

Gọi D là trung điểm AC , G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow B'G \perp (ABC) \Rightarrow B'BG = 60^\circ$$

$$\Rightarrow B'G = BB' \sin B'BG = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

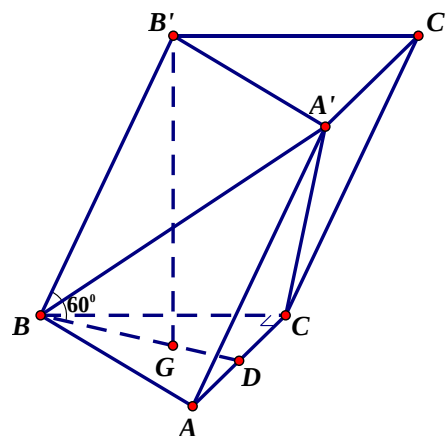
$$BG = \frac{a}{2} \Rightarrow BD = \frac{3a}{4}$$

$$\text{Trong } \triangle ABC \text{ ta có: } BC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}, AC = \frac{AB}{2} \Rightarrow CD = \frac{AB}{4}$$

$$BC^2 + BD^2 = BD^2 \Rightarrow \frac{3AB^2}{4} + \frac{AB^2}{16} = \frac{9a^2}{16}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{3a\sqrt{13}}{13}, AC = \frac{3a\sqrt{13}}{26}, S_{\triangle ABC} = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } A'.ABC \text{ là: } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} B'G \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{9a^3}{208}$$



Bài 24. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$ và hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC . Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

Giải

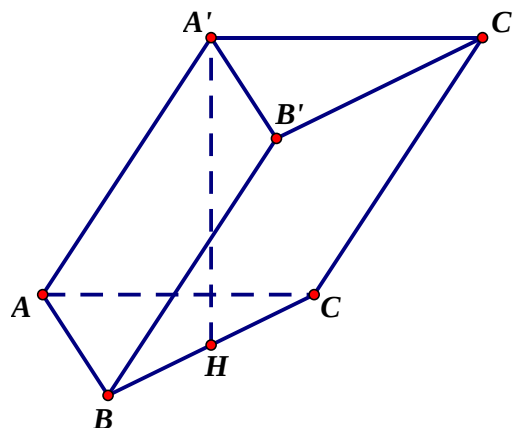
Gọi H là trung điểm của cạnh BC

$$\Rightarrow A'H \perp (ABC)$$

Tam giác vuông $A'HA$:

$$AH = \sqrt{A'A^2 - A'H^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{3a}{2} \quad S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{nên}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$$



Bài 25. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu của đỉnh C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là tâm của hình bình hành $ABB'A'$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Giải

Gọi O là tâm hình bình hành $ABB'A'$. Ta có $CO \perp (ABB'A')$.

Vì $CA = CB$ nên $OA = OB$, suy ra hình thoi $ABB'A'$ là hình vuông.

$$\text{Do đó } OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}. \quad \text{Suy ra: } OC^2 = AC^2 - AO^2 = \frac{a^2}{2}$$

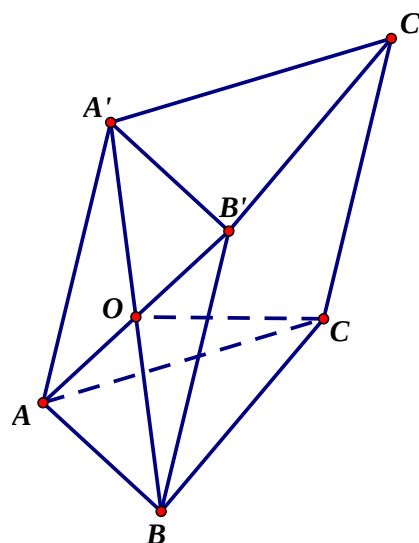
$$\Rightarrow OC = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Vậy thể tích của khối chóp:

$$V_{C.ABA'} = \frac{1}{3} CO \cdot S_{\triangle ABA'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Mà $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{C.ABA'}$ nên thể tích của khối lăng trụ

$$ABC.A'B'C' \text{ là: } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$



Bài 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a , $BAD = 60^\circ$, $BAA' = 90^\circ$, $DAA' = 120^\circ$. Tính thể tích khối hộp.

Giải

Từ giả thiết ta tính được $BD = a$, $A'B = a\sqrt{2}$, $A'D = a\sqrt{3}$ nên tam giác $A'BD$ vuông tại B .

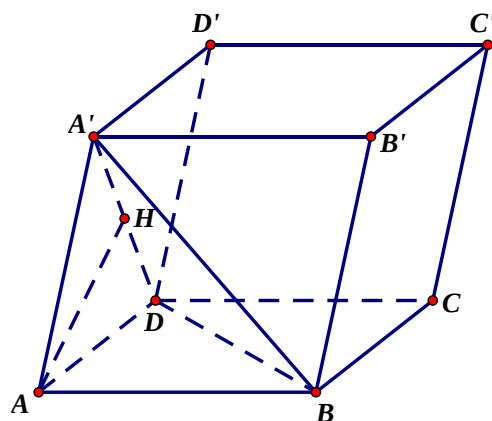
Vì $AB = AD = AA'$ nên hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'BD)$ trùng với tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'BD$ (do tam giác đó vuông nên H là trung điểm của $A'D$)

$$\text{Ta có } AH = AA' \cos 60^\circ = \frac{a}{2},$$

$$S_{A'BD} = \frac{1}{2} BA' \cdot BD = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}, \text{ do đó thể tích khối tứ diện } A' \cdot ABD$$

$$\text{là } V_{A' \cdot ABD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Ta đã biết } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6V_{A' \cdot ABD} \text{ nên } V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{2}$$



Bài 27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , góc $A = 60^\circ$. Chân đường vuông góc hạ từ B' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của hai đường chéo của đáy $ABCD$. Cho $BB' = a$.

1. Tính góc giữa cạnh bên và đáy.
2. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình hộp.

Giải

1. Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy.

Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết ta có $B'O \perp (ABCD)$

$$\begin{cases} B'B \cap (ABCD) = \{B\} \\ B'O \perp (ABCD), O \in (ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hình chiếu $B'B$ trên $(ABCD)$ là OB

$\Rightarrow (B'B, (ABCD)) = (B'B, BO) = B'BO$ Tam giác ABD có

$AB = AD = a$, $BAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều

$$\Rightarrow OB = \frac{a}{2}$$

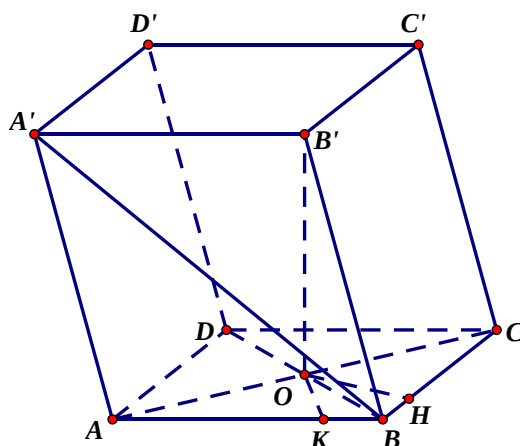
Trong tam giác vuông $B'OB$:

$$\cos B'OB = \frac{OB}{BB'} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'OB = 60^\circ.$$

Vậy góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là 60° .

2. Tính $V_{ABCD.A'B'C'D'}$

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot B'O; S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin BAD = a^2 \sin 60^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$



Trong tam giác vuông $B'O B$: $B'O = BB' \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{3a^3}{4}$

Tính S_{xq} của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$

Vì hai mặt đối diện của hình hộp là hai hình bình hành bằng nhau, do đó

$$S_{xq} = 2(S_{ABB'A'} + S_{BCC'B'})$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các cạnh BC và B.

Theo tính chất của hình thoi ta có $OH = OK$

Hai tam giác vuông $B'OH$ và $B'OK$ (vuông tại O) có cạnh $B'O$ chung, $OH = OK$ nên chúng bằng nhau.

$$\Rightarrow B'H = B'K \Rightarrow S_{BCC'B'} = B'H \cdot BC = B'K \cdot AB = S_{ABB'A'}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AKO: OK = AO \sin OAK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Trong tam giác vuông $B'OK$:

$$B'K^2 = B'O^2 + OK^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} = \frac{15a^2}{16}$$

$$\Rightarrow B'K = \frac{a\sqrt{15}}{4} \Rightarrow S_{ABB'A'} = B'K \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{15}}{4} \Rightarrow S_{xq} = 4S_{ABB'A'} = a^2\sqrt{15}$$

Bài 28. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cho $BAA' = 45^\circ$

1. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.
2. Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

Giải

1. Tính $V_{ABC.A'B'C'}$

Gọi E là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} OE \perp AB \\ A'O \perp AB \text{ (do } A'O \perp (ABC)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB \perp (A'OE) \Rightarrow AB \perp A'E$$

Tam giác vuông $A'EA$ có $A = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại E

$$\text{Suy ra } A'E = EA = \frac{a}{2}, AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

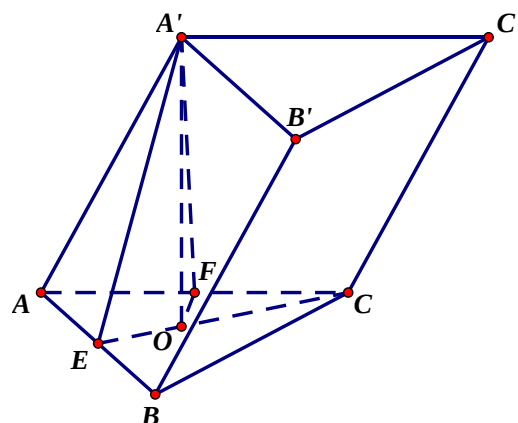
Tam giác vuông $A'OE$ (vuông tại O) có:

$$A'O^2 = A'E^2 - OE^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{6a^2}{36} \Rightarrow A'O = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Thể tích của khối lăng trụ } ABC.A'B'C': V = S_{ABC} \cdot A'O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$$

2. Tính S_{xq} của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

$$S_{ABB'A'} = AB \cdot A'E = \frac{a^2}{2}$$



Gọi F là trung điểm của AC: $\begin{cases} AC \perp A'O \\ AC \perp OF \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'OF) \Rightarrow AC \perp A'F$

$$\Rightarrow S_{ACC'A'} = AC.A'F$$

Hai tam giác vuông $A'OE$ và $A'OF$ có $A'O$ là cạnh chung, $OE=OF$ nên chúng bằng nhau

$$\Rightarrow A'F = A'E \Rightarrow S_{ACC'A'} = \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{cases} BC \perp A'O \\ BC \perp AO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'OA) \Rightarrow BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp BB'$$

Mặt khác theo tính chất của hình lăng trụ thì $BCC'B'$ là hình bình hành, lại có $BC \perp BB'$ nên $BCC'B'$ là hình chữ nhật, suy ra:

$$S_{BCC'B'} = BB'.BC = AA'.BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$S_{xq} = S_{ABB'A'} + S_{ACC'A'} + S_{BCC'B'} = a^2 + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2(2+\sqrt{2})}{2}$$

Bài 29. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ có $BD=a$ không đổi và $BAD=DCB=90^\circ$, $ABD=\alpha$, $CBD=\beta$. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ là hình thoi, vuông góc với đáy và $A'AC=60^\circ$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và tìm α, β để thể tích đó lớn nhất.

Giải

Tam giác vuông ABD có $ABD=\alpha$ nên $AB=a\cos\alpha$,
 $AD=a\sin\alpha$, suy ra diện tích của tam giác ABD là

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.AD = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\alpha$$

Tương tự ta có $S_{CBD} = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\beta$

Diện tích đáy của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABD} + S_{CBD} \\ &= \frac{1}{4}a^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) \\ &= \frac{1}{2}a^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

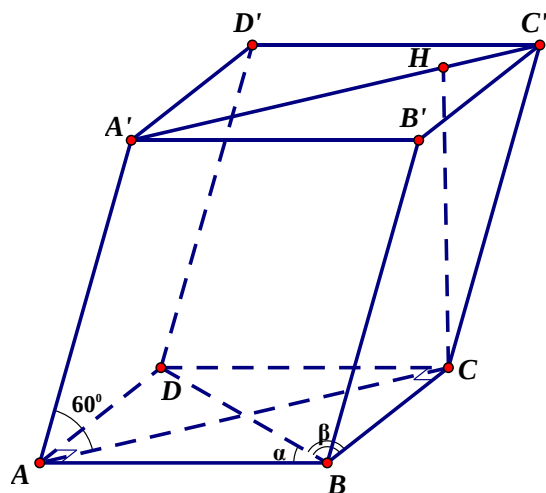
Vì $(AA'C'C) \perp (A'B'C'D')$ nên hạ $CH \perp A'C'$ thì

CH là đường cao của lăng trụ.

Mặt khác $AA'C'C$ là hình thoi có $A'AC=60^\circ$ do đó $CC'A'=60^\circ$

$$\text{Nên } CH = CC' \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho tam giác ABC ta có:



$$\begin{aligned}
 AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos B \\
 &= a^2 \left[\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) \right] \\
 &= a^2 \left[1 + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) \right] \\
 &= a^2 \left[1 + \cos(\alpha + \beta) (\cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta) \right] \\
 &= a^2 \left[1 - \cos^2(\alpha + \beta) \right] = a^2 \sin^2(\alpha + \beta) \\
 \Rightarrow AC &= a \sin(\alpha + \beta)
 \end{aligned}$$

Do đó $CH = \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin(\alpha + \beta)$, nên thể tích cần tìm là:

$$\begin{aligned}
 V &= S_{ABCD} \cdot CH = \frac{1}{2} a^2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a \sin(\alpha + \beta) \\
 &= \frac{\sqrt{3} a^3}{4} \sin^2(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

Tìm giá trị lớn nhất của V:

Ta có $\begin{cases} 0 \leq \sin^2(\alpha + \beta) \leq 1 \\ \cos(\alpha - \beta) \leq 1 \end{cases}$ nên $\sin^2(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) \leq 1$, do đó:

$$V \leq \frac{\sqrt{3} a^3}{4}. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi } \alpha = \beta = 45^\circ.$$

Vậy giá trị lớn nhất của V là $\frac{\sqrt{3} a^3}{4}$ đạt được khi $\alpha = \beta = 45^\circ$.

THẦY CHÚC CÁC EM HỌC SINH 12 ĐẠT KẾT QUẢ CAO TRONG KỲ THI SẮP TỚI

Lớp Toán Thầy Cư

SĐT: 01234332133

TRUNG TÂM	LỚP	LỊCH HỌC	GHI CHÚ
CƠ SỞ 1 4/101 LÊ HUÂN	TOÁN 12 (T1)	2,4,6 LÚC 17H15 (Cố định)	Chiều sinh thường xuyên
	TOÁN 12 (T2)	3,5,7 LÚC 17H30 (Cố định)	Chiều sinh thường xuyên
	TOÁN 11	Thứ 2: 15h30 Thứ 5,7: 9h15	Dạy kèm (Còn trống 3 chỗ)
CƠ SỞ 2 TẬP THỂ XÃ TẮC (Đường Ngô Thời Nhậm)	TOÁN 9, 10	LIÊN HỆ THẦY CƯ SĐT: 01234332133	NHÓM 5-7 NGƯỜI (DẠY KÈM-ĐỊNH HƯỚNG LÂU DÀI THI ĐẠI HỌC)

**Đặc
biệt**

- Giảm 100% học phí cho học sinh thuộc diện hộ nghèo
- Giảm 50% học phí cho học sinh thuộc diện cận nghèo
- Giảm 50% sách chuyên đề luyện thi THPT Quốc Gia do chính Thầy Trần Đình Cư biên soạn, phát miễn phí tài liệu trong suốt quá trình học.