KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: TRUNG TÂM MASTER EDUCATIPM- 25 THẠCH HÃN

CS 2: TRUNG TÂM 133 XUÂN 68

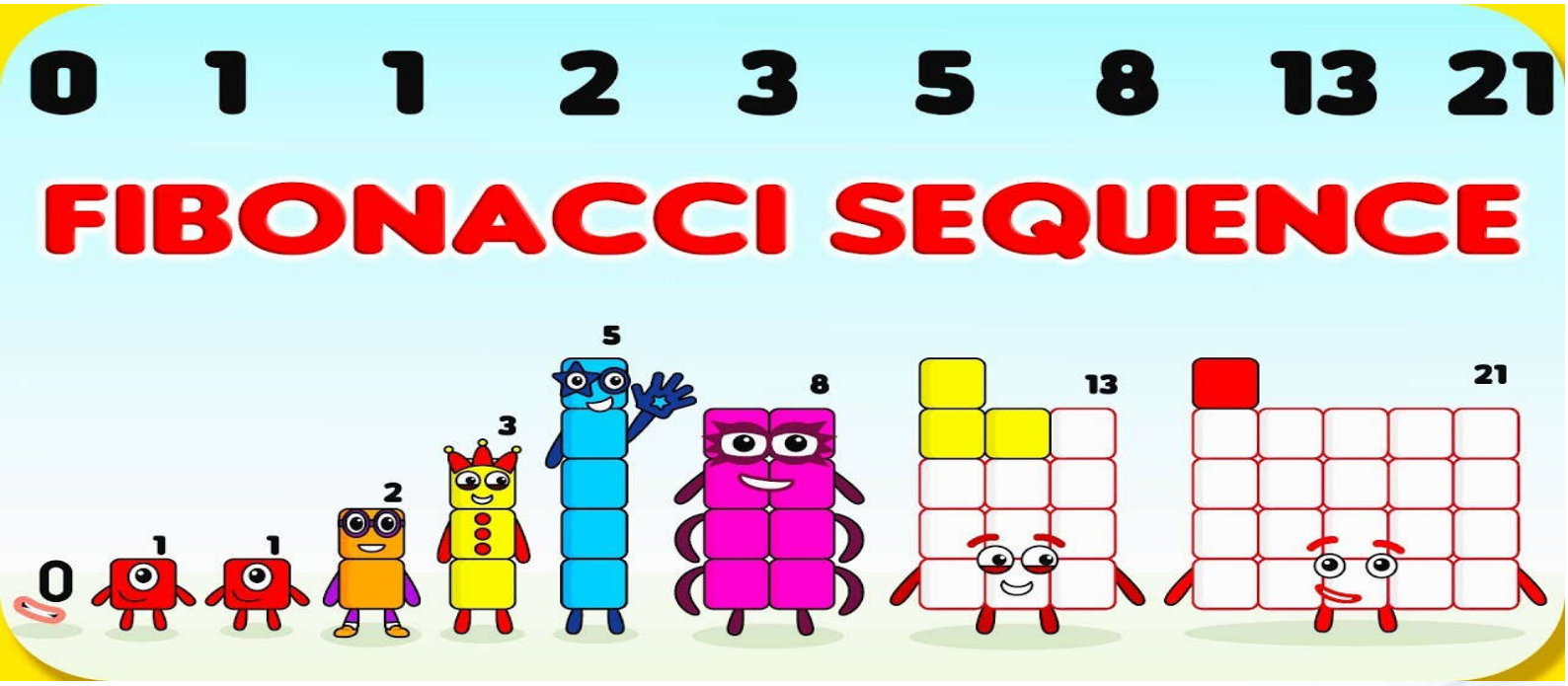
CS 3: TRUNG TÂM 168 MAI THÚC LOAN

CS 4: TRUNG TÂM TRƯỜNG NGUYỄN TRƯỜNG TỘ

BÀI GIẢNG CHƯƠNG 2

DÃY SỐ VÀ CẤP SỐ

TOÁN 11 KNTT VỚI CS



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

CHƯƠNG II: DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

BÀI 5: DÃY SỐ

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

a) Nhận biết dãy vô hạn

- Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vố hạn (gọi tắt là dãy số), kí hiệu là $u=u(n)$.

- Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u=u(n)$ bởi (u_n), do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$ Số u_1 gọi là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và gọi là số hạng tổng quát của dãy số.

Chú ý. Nếu $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n=c$ thì (u_n) được gọi là dãy số không đổi.

a) Nhận biết dãy hữu hạn

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M=\{1;2;3;\ldots,m\}$ với $m\in\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.

- Dạng khai triển của dãy số hữu hạn là $u_1,u_2,\ldots,u_m$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối.

2. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);

- Công thức của số hạng tổng quát;

- Phương pháp mô tả;

- Phương pháp truy hồi.

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

a) Nhận biết dãy số tăng giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1}>u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1}<u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Nhận biết dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n\le M$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n\ge m$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m,M sao cho $m\le u_n\le M$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm số hạng của dãy số

1. Phương pháp

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Một dãy số có thể cho bằng:

- Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);

- Công thức của số hạng tổng quát;

- Phương pháp mô tả;

- Phương pháp truy hồi.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải

Ta có $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1} \Rightarrow u_1 = 0; u_2 = \dfrac{3}{5}; u_3 = \dfrac{2}{7}; u_4 = \dfrac{5}{9}; u_5 = \dfrac{4}{11}$.

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n), từ đó dự đoán u_n

a) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$; b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có:

$u_1 = 5$

$u_2 = 5 + 1.3$

$u_3 = 5 + 2.3$

$u_4 = 5 + 3.3$

...

$u_n = 5 + (n-1).3$ (*)

b) Ta có

$u_1 = 3$

$u_2 = 3.4$

$u_3 = 3.4^2$

$u_4 = 3.4^3$

...

$u_n = 3.4^{n-1}$ (*)

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n), từ đó dự đoán u_n

a) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$; b) $(u_n): \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$u_1 = 1 = 2^2 - 3$

$u_2 = 5 = 2^3 - 3$

$u_3 = 13 = 2^4 - 3$

$u_4 = 29 = 2^5 - 3$

...

$u_n = 2^{n+1} - 3 (*)$

b) Ta có

$u_1 = 3 = \sqrt{3^2 + 0}$

$u_2 = \sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1}$

$u_3 = \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + 2}$

$u_4 = \sqrt{12} = \sqrt{3^2 + 3}$

...

$u_n = \sqrt{3^3 + n - 1}\ (*)$

Dạng 2. Tính tăng giảm của dãy số

1. Phương pháp

- *(u_n) là dãy số tăng* $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n,\ \forall n \in N^*$.

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0,\ \forall n \in N^* \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1, \forall n \in N^*\ (u_n > 0)$.

- *(u_n) là dãy số giảm* $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ *với* $\forall n \in N^*$.

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0,\ \forall n \in N^* \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,\ \forall n \in N^*\ (u_n > 0).$$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n = 2n + 3$ b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

Lời giải

a) Ta có: $u_n = 2n + 3; u_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = (2n+5) - (2n+3) > 0$

Suy ra $u_{n+1} > u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy tăng.

b) Ta có: $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}; u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$

Giả sử: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\dfrac{n+1}{n} > 1 \Leftrightarrow n + 1 > 4n \Leftrightarrow 3n < 1 \Rightarrow$ vô lý.

Vậy $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy số đã cho là dãy số giảm.

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}$ b) $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-n}{n}$

Lời giải

a) Ta có: $u_n=\dfrac{n}{n^2+1};u_{n+1}=\dfrac{n+1}{(n+1)^2+1}=\dfrac{n+1}{n^2+2n+2}$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+1}{n^2+2n+2}-\dfrac{n}{n^2+1}=\dfrac{(n+1)\left(n^2+1\right)-n\left(n^2+2n+2\right)}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+2\right)}$

$=\dfrac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+2\right)}=\dfrac{-n^2-n+1}{\left(n^2+1\right)\left(n^2+2n+2\right)}<0\forall n\ge 1\Rightarrow\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

b) $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-n}{n}=\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}-1\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1}-1$

Khi đó ta có: $u_{n+1}-u_n=\left(\dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1}-1\right)-\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}-1\right)=\dfrac{\sqrt{n+2}}{n+1}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}=\dfrac{n\sqrt{n+2}-(n+1)\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$

Giả sử: $u_{n+1}-u_n>0\Leftrightarrow n\sqrt{n+2}-(n+1)\sqrt{n+1}>0\Leftrightarrow n\sqrt{n+2}>(n+1)\sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow n^2(n+2)>(n+1)^3\Leftrightarrow n^3+2n^2>n^3+3n^2+3n+1\Leftrightarrow n^2+3n+1<0\Rightarrow$ vô lý.

Vậy $u_{n+1}-u_n<0\Rightarrow\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n=\dfrac{1}{n}-2$ b) $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$

Lời giải

a) $u_n=\dfrac{1}{n}-2\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}-2\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\left(\dfrac{1}{n+1}-2\right)-\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=-\dfrac{1}{n(n+1)}<0\Rightarrow u_{n+1}<u_n$

Vậy dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

b) $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}=1-\dfrac{2}{n+1}$

Khi đó: $u_{n+1}=1-\dfrac{2}{n+2}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)-\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}>0\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$

Vậy dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

Ví dụ 4. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n=\dfrac{2n+1}{5n+2}$ b) $u_n=2n^2+5$

Lời giải

a) $u_n=\dfrac{2n+1}{5n+2}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5(5n+2)}\Rightarrow u_{n+1}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5(5n+7)}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Khi đó: $u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5n+7)}\right)-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5(5n+2)}\right)=-\frac{1}{(5n+2)(5n+7)}>0\Rightarrow u_{n+1}<u_n$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm.

b) $u_n=2n^2+5\Rightarrow u_{n+1}=2(n+1)^2+5$

Khi đó $u_{n+1}-u_n=2(n+1)^2+5-(2n^2+5)=4n+2>0\Rightarrow u_{n+1}>u_n\Rightarrow(u_n)$ là dãy số tăng

Ví dụ 5. Xét tính đơn điệu của dãy số sau:

a) $u_n=\frac{2n^2-1}{n^2+1}$ b) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Lời giải

a) $u_n=\frac{2n^2-1}{n^2+1}=2-\frac{3}{n^2+1}\Rightarrow u_{n+1}=2-\frac{3}{(n+1)^2+1}$

Với $n\in N^*\Rightarrow(n+1)^2>n^2\Leftrightarrow\frac{1}{(n+1)^2+1}<\frac{1}{n^2+1}\Leftrightarrow 2-\frac{3}{(n+1)^2+1}>2-\frac{3}{n^2+1}\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$

$\Rightarrow(u_n)$ là dãy số tăng.

b) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

Do $n\in\mathbb{N}^*$ nên $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\Rightarrow u_{n+1}<u_n\Rightarrow(u_n)$ là dãy số giảm.

Ví dụ 6. Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n=\frac{3n^2-2n+1}{n+1}$ b) $u_n=\frac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

Lời giải

a) $u_n=\frac{3n^2-2n+1}{n+1}=3n-5+\frac{6}{n+1}\Rightarrow u_{n+1}=3n-2+\frac{6}{n+1}$

Khi đó: $u_{n+1}-u_n=3n-2+\frac{6}{n+2}-\left(3n-5+\frac{6}{n+1}\right)=3-\frac{6}{(n+1)(n+2)}$

Với $\begin{cases}n\geq 1\\ n\in N\end{cases}\Rightarrow(n+1)(n+2)\geq 6\Leftrightarrow\frac{6}{(n+1)(n+2)}\leq 1\Leftrightarrow 3-\frac{6}{(n+1)(n+2)}\geq 2\Rightarrow u_{n+1}>u_n$

$\Rightarrow(u_n)$ là dãy số tăng.

b) Ta có: $u_n=\frac{\sqrt{n+1}-1}{n}=\frac{n}{n\left(\sqrt{n+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Khi n tăng thì dễ thấy mẫu số tăng, phân số giảm nên dãy số đã cho là dãy số giảm.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 7. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{3}{2} > 1$

Do $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ tăng.

Ví dụ 8. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$

Với $\forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$

Mà $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ giảm.

Ví dụ 9. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

Khi đó: $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow n < \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ mà $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 1$.

$\frac{u_n}{u_{n+1}} < 1 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{n} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ mà $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 2$.

Hơn nữa $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $\begin{cases} u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow n = 1 \\ u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow n \geq 2 \end{cases}$

Do đó $u_1 > u_2$ và $u_2 < u_3 < \ldots < u_n < u_{n+1} < \ldots \Rightarrow (u_n)$ không tăng và cũng không giảm.

Ví dụ 10. Xét tính tăng - giảm của dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

Lời giải

Ta có: $u_{n+1} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.

Lại có: $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^2 - \left(2\sqrt{n}\right)^2 = 2n + 2\sqrt{n^2-1} - 4n = 2\left(\sqrt{n^2-1} - n\right) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ giảm.

Ví dụ 11. Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n), với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) là dãy số tăng.

b) là dãy số giảm

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{na+2}{n+1} = a + \dfrac{2-a}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = 2 + \dfrac{2-a}{n+2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{a-2}{(n+1)(n+2)}$.

a) Để (u_n) là dãy số tăng thì $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a-2}{(n+1)(n+2)} > 0 \Leftrightarrow a > 2$.

b) Để (u_n) là dãy số giảm thì $u_{n+1} - u_n = \dfrac{a-2}{(n+1)(n+2)} < 0 \Leftrightarrow a < 2$

Dạng 3. Dãy số bị chặn

1. Phương pháp

- *(u_n) là dãy số bị chăn trên* $\Leftrightarrow \exists M \in R: u_n \le M, \ \forall n \in N^*$.
- *(u_n) là dãy số bị chặn dưới* $\Leftrightarrow \exists m \in R: u_n \ge m, \ \forall n \in N^*$.
- *(u_n) là dãy số bị chặn* $\Leftrightarrow \exists m, M \in R: m \le u_n \le M, \ \forall n \in N^*$.

Chú ý:

+) Trong các điều kiện về bị chặn ở trên thì không nhất thiết phải xuất hiện dấu '='

+) Nếu một dãy số tăng thì luôn bị chặn dưới bởi u_1; còn dãy số giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$ b) $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7}$

Lời giải

a) Viết lại u_n dưới dạng: $u_n = \dfrac{n^2 - \frac{3}{2}}{2n^2-3} + \dfrac{5}{2(2n^2-3)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2(2n^2-3)}$

Với $\begin{cases} n = 0 \Rightarrow u_0 = -\dfrac{1}{3} \\ n = 1 \Rightarrow u_1 = -2 \\ \forall n \ge 2 \Rightarrow 2n^2 - 3 > 0 \Rightarrow u_n > \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u_n \ge -2$

Xét: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2-3} \cdot \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$

Nhận thấy $\forall u_n > 0$ thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow (n^2+2n+2)(2n^2-3) < (n^2+1)(2n^2+4n-1)$

$\Leftrightarrow 4n^4 - 3n^2 + 4n^3 - 6n + 4n^2 - 6 < 4n^4 + 4n^3 - n^2 + 2n^2 + 4n - 1 \Leftrightarrow n^2 - 6n - 6 < n^2 + 4n - 1$

$\Leftrightarrow 0 < 10n + 5 \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó: $u_{n+1} < u_n < \ldots < u_2 = 1$

Vậy $-2 < u_n < 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

b) Viết lại u_n dưới dạng $u_n = \dfrac{7n+5}{5n+7} = \dfrac{\frac{7}{5}(5n+7)-\frac{24}{5}}{5n+7} = \dfrac{7}{5} - \dfrac{24}{5(5n+7)} < \dfrac{7}{5} \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n > \dfrac{5}{7}$

Do đó, $\dfrac{5}{7} < u_n < \dfrac{7}{5} \Rightarrow (u_n)$ bị chặn

Ví dụ 2. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-3}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Lời giải

a) Với $\begin{cases} n=0 \Rightarrow u_0 = -\dfrac{1}{3} \\ n=1 \Rightarrow u_1 = -1 \\ \forall n \geq 2 \Rightarrow 2n^2-3 > 0, \Rightarrow u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow u_n \geq -1$

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n^2-3}{2(n+1)^2-3} < 1 \Leftrightarrow n < n+1$

Do đó, suy ra: $u_n < u_{n-1} < \ldots < u_2 = \dfrac{1}{5}$. Vậy $-1 \leq u_n < \dfrac{1}{5} \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

b) Ta dễ dàng thấy:

- $u_n > 0$ do đó nó bị chặn dưới.
- Vì $n(n+1) \geq 2 \Leftrightarrow u_n \leq \dfrac{1}{2}$ do đó nó bị chặn trên.

Vậy ta được $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$, do đó nó bị chặn.

Ví dụ 3. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{1}{2n^2-1}$ b) $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$

Lời giải

a) Với $n=0 \Rightarrow u_0 = -1 \forall n \in N^*: 2n^2-1 \geq 0$ nên $u_n > 0$

do đó: $u_n \geq -1 \quad \forall n$

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n^2-1}{2(n+1)^2-1} < 1 \Leftrightarrow n < n+1$

Do đó, suy ra $u_n < u_{n-1} < \ldots < u_2 < u_1 = 1$

Vậy $-1 < u_n < 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

b) Với $n=0 \Rightarrow u_0 = -1 \quad \forall n \in N^*: n-1 \geq 0$ và $\sqrt{n^2+1} > 0$ nên $u_n \geq 0$

do đó $u_n \geq -1 \quad \forall n$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Và $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} \le -1$, vậy $-1 \le u_n \le 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Ví dụ 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$.

b) $u_n = \dfrac{2n^2+2n+1}{n^2+n+4}$.

Lời giải

a) Vì $\begin{cases} 2n^2 \ge 0 \\ n^2+1>0 \end{cases} \forall n \in N \Rightarrow u_n \ge 0$

Mặt khác, $u_n = \dfrac{2(n^2+1)-2}{n^2+1} = 2 - \dfrac{2}{n^2+1} < 2$. Vậy $0 \le u_n < 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

b) Vì $\begin{cases} 2n^2+2n+1 = 2(n^2+1)+1>0 \\ n^2+n+4 = n(n+1)+4>0 \end{cases} \forall n \in N \Rightarrow u_n > 0$

Mặt khác, $u_n = \dfrac{2n^2+2n+1}{n^2+n+4} = \dfrac{2(n^2+n+4)-7}{n^2+n+4} = 2 - \dfrac{7}{n^2+n+4} < 2$

Vậy $0 < u_n < 2 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{4n+(-1)^{n+1}}$

a) Tính 6 số hạng dầu tiên của dãy, nêu nhận xét về tính đơn điệu của dãy số.

b) Tính u_{2n} và u_{2n+1}. Chứng minh rằng $0 < u_n \le \dfrac{3n+4}{4n-1}$.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = \dfrac{2}{5}; u_2 = 1; u_3 = \dfrac{8}{13}; u_4 = \dfrac{13}{15}; u_5 = \dfrac{16}{21}; u_6 = \dfrac{19}{23}$, nhận xét thấy dãy số không tăng cũng không giảm.

b) Ta có $\begin{cases} u_{2n} = \dfrac{6n+1}{8n-1} \\ u_{2n+1} = \dfrac{6n+2}{8n+5} \end{cases}$

Tổng quát, với $n = 2k (k \ge 1, k \in Z) \Rightarrow u_n = \dfrac{3n+1}{4n-1} \Rightarrow 0 < u_n \le \dfrac{3n+1}{4n-1}$

Với $n = 2k+1 (k \ge 0, k \in Z) \Rightarrow u_n = \dfrac{3n-1}{4n+1} \Rightarrow \begin{cases} u_n > 0 \\ u_n = \dfrac{3n-1}{4n+1} < \dfrac{3n+4}{4n+1} < \dfrac{3n+4}{4n-1} \end{cases} \Rightarrow 0 < u_n \le \dfrac{3n+4}{4n+1}$

Vậy với mọi n thì $0 < u_n \le \dfrac{3n+4}{4n-1}$

Ví dụ 6. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) $u_n=\dfrac{2n+3}{n+2}$ b) $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

Lời giải

a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2n+5}{n+3}-\dfrac{2n+3}{n+2}=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)}>0$ nên dãy là dãy tăng.

Hơn nữa $u_n=\dfrac{2n+3}{n+2}=\dfrac{2(n+2)-1}{n+2}=2-\dfrac{1}{n+2}<1\Rightarrow u_n$ bị chặn trên bởi 2, chặn dưới bởi $u_1=\dfrac{5}{3}$.

Vậy dãy đã cho bị chặn.

b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n}{n+2}<1\Rightarrow$ dãy là dãy giảm và bị chặn trên bởi $u_1=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 7. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$ b) $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

Lời giải

a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n^2+2n+1+2n+2}{n^2+2n+1+n+1+1}-\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}=\dfrac{n^2+4n+3}{n^2+3n+3}-\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}>0$ và

$$u_n=\dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}=\dfrac{n^2+n+1+n}{n^2+n+1}=1+\dfrac{n}{n^2+n+1}>1$$

Nên dãy đã cho là dãy tăng, bị chặn dưới bởi 1.

b) Ta có $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\dfrac{n(\sqrt{n^2+2n}-n)}{2n}=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{2}>0$. Lại có

$$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sqrt{n^2+4n+3}-n-1}{\sqrt{n^2+2n}-n}>1\Leftrightarrow\sqrt{n^2+4n+3}>\sqrt{n^2+2n}+1$$

$$\Leftrightarrow n^2+4n+3>n^2+2n+1+2\sqrt{n^2+2n}\Leftrightarrow n+1>\sqrt{n^2+2n}\Leftrightarrow n^2+2n+1>n^2+2n\ (*)$$

Do (*) hiển nhiên đúng nên ta có dãy đã cho là dãy tăng, và bị chặn dưới bởi $u_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$.

Hơn nữa $u_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n}<\dfrac{n}{n}=1\Rightarrow u_n$ bị chặn trên bởi 1. Vậy dãy đã cho bị chặn.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng dãy số $u_n=\dfrac{n+3}{n+1}$ giảm và bị chặn.

Lời giải

- Xét: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+4}{n+2}-\dfrac{n+3}{n+1}=\dfrac{(n+4)(n+1)-(n+2)(n+3)}{(n+2)(n+1)}=$

$$=\dfrac{n^2+5n+4-n^2-5n-6}{(n+2)(n+1)}=-\dfrac{2}{(n+2)(n+1)}$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Nhận thấy $u_{n+1}-u_n<0\Rightarrow u_{n+1}<u_n$, do đó, dãy số u_n giảm

- Viết lại u_n dưới dạng $u_n=1+\dfrac{2}{n+1}>1\Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới

Ví dụ 9. Chứng minh rằng dãy số $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ tăng và bị chặn trên.

Lời giải

Viết lại u_n dưới dạng

$$u_n=\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+\frac{4-3}{3.4}+\ldots+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Xét hiệu: $u_{n+1}-u_n=1-\dfrac{1}{n+2}-\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}>0\Rightarrow (u_n)$ tăng

Nhận thấy $u_n=1-\dfrac{1}{n+1}<1\Rightarrow (u_n)$ bị chặn trên.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng dãy số $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$ là một dãy số bị chặn.

Lời giải

Viết lại u_n dưới dạng $u_n=\dfrac{n^2-\dfrac{3}{2}}{2n^2-3}+\dfrac{5}{2\left(2n^2-3\right)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2\left(2n^2-3\right)}$

Với $\begin{cases} n=0\Rightarrow u_0=-\dfrac{1}{3} \\ n=1\Rightarrow u_1=-2 \\ \forall n\geq 2\Rightarrow 2n^2-3>0\Rightarrow u_n>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow u_n\geq -2$

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+1)^2+1}{2(n+1)^2-3}\cdot\dfrac{2n^2-3}{n^2+1}$

Nhận thấy: với $\forall u_n>0$ thì $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1\Leftrightarrow \left(n^2+2n+2\right)\left(2n^2-3\right)<\left(n^2+1\right)\left(2n^2+4n-1\right)$

$\Leftrightarrow 4n^4-3n^2+4n^3-6n+4n^2-6<4n^4+4n^3-n^2+2n^2+4n-1\Leftrightarrow n^2-6n-6<n^2+4n-1$

$\Leftrightarrow 0<10n+5\quad \forall n\in N^*$

Do đó, $u_{n+1}<u_n<\ldots<u_2=1$. Vậy $-2<u_n<1\Rightarrow (u_n)$ bị chặn

Ví dụ 11. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+4\end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_n<8$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) Giả sử tồn tại $u_n \ge 8 \Rightarrow u_{n-1} = 2(u_n - 4) = 8$

Lời giải

Như vậy nếu tồn tại $u_n \ge 8$ thì $u_{n-1} \ge 8,$ cũng suy ra $u_{n-2}, u_{n-3} \cdots u_2, u_1 \ge 8$ Vô lí do $u_1 = 0 < 8.$ Nên điều giả sử là sai. Suy ra $u_n < 8$

b) Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 4 - u_n = 4 - \frac{u_n}{2} = \frac{8 - u_n}{2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$

Suy ra dãy tăng. Mà $u_n < 8$ và $u_1 \ge 0 \Rightarrow u_n > 0.$ Suy ra dãy bị chặn dưới.

Vậy dãy tăng và bị chặn.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1} \end{cases}$

a) Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy số

b) Chứng minh rằng dãy số bị chặn dưới bởi 1 và bị chặn trên bởi $\frac{3}{2}$

Lời giải

a) $u_1 = 1; u_2 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{\frac{3}{2}+2}{\frac{3}{2}+1} = \frac{7}{5}; u_4 = \frac{\frac{7}{5}+2}{\frac{7}{5}+1} = \frac{17}{12}; u_5 = \frac{\frac{17}{12}+2}{\frac{17}{12}+1} = \frac{41}{29}$

b) $u_1 = 1 > 0 \Rightarrow u_n > 0$ suy ra $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n + 1} > 1$

Đặt $u_n = v_n + \sqrt{2}$, ta có $\begin{cases} v_1 = 1 - \sqrt{2} \\ v_{n+1} + \sqrt{2} = \dfrac{v_n + \sqrt{2} + 2}{v_n + \sqrt{2} + 1} \Rightarrow v_{n+1} = \dfrac{v_n(1 - \sqrt{2})}{v_n + 1 + \sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{1}{1 - \sqrt{2}} + \dfrac{1 + \sqrt{2}}{v_n} \end{cases}$

Đặt $x_n = \frac{1}{v_n} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \sqrt{2} \\ x_{n+1} = -1 - \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})x_n \end{cases}$

Đặt $y_n = x_n + \frac{-1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\dfrac{(1 + \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \\ y_{n+1} = (1 + \sqrt{2})y_n \end{cases}$

Do y_n là cấp số nhân công bội $1 + \sqrt{2} \Rightarrow y_n = -\frac{(1 + \sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \cdot (1 + \sqrt{2})^{n-1} = -\frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}}$

Suy ra $x_n = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{(1 + \sqrt{2})^{n+1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_n = \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})^{n+1}} \Rightarrow u_n = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})^{n+1}}$

Vậy ta có đpcm.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 13. Chứng minh rằng dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ tăng và bị chăn trên bởi 2.

Lời giải

Ta có $u_n > 1$

Giả sử tồn tại $u_n \geq 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n-1} + 2} \geq 2 \Rightarrow u_{n-1} \geq 2$

Như vậy, nếu tồn tại $u_n \geq 2$ thì suy ra $u_{n-1} \geq 2$, từ đó cũng suy ra được $u_{n-2}, u_{n-3} \ldots u_2, u_1 \geq 2$ vô lý

Do $u_1 = \sqrt{2} < 2$. Nên điều giả sử là sai.

Suy ra $u_n < 2$

Xét $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \dfrac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \dfrac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} > 0$

Suy ra $u_{n+1} > u_n$, nên đây là dãy tăng.

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 2.1. Viết năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của các dãy số (u_n) có số hạng tổng quát cho bởi:

a) $u_n = 3n - 2$; b) $u_n = 3 \cdot 2^n$; c) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Lời giải

a) $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 7, u_4 = 10, u_5 = 13, u_{100} = 298$

b) $u_1 = 6, u_2 = 12, u_3 = 24, u_4 = 48, u_5 = 96, u_{100} = 3,803 \times 10^{30}$

c) $u_1 = 2, u_2 = \dfrac{9}{4}, u_3 = \dfrac{64}{27}, u_4 = \dfrac{625}{256}, u_5 = 2,48832, u_{100} = 2,7148$

Bài 2.2. Dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi: $u_1 = 1, u_n = n \cdot u_{n-1}$ với $n \geq 2$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n.

Lời giải

a) $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 6, u_4 = 24, u_5 = 120$.

b) Ta có: $u_1 = 1 = 1!, u_2 = 2 = 2!, u_3 = 6 = 3!, u_4 = 24 = 4!, u_5 = 120 = 5!$

Vậy công thức số hạng tổng quát là: $u_n = n!$

Bài 2.3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n), biết:

a) $u_n = 2n - 1$; b) $u_n = -3n + 2$; c) $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$.

Lời giải

a) Ta có: $u_2 = 3 > u_1 = 1$ suy ra đây là dãy số tăng.

b) $u_2 = -4 < u_1 = -1$ suy ra đây là dãy số giảm.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

c) $u_2=\frac{-1}{4}<u_1=\frac{1}{2}$ suy ra đây là dãy số giảm.

Bài 2.4. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên, bị chặn?

a) $u_n=n-1;$ b) $u_n=\frac{n+1}{n+2};$

c) $u_n=\sin n$; d) $u_n=(-1)^{n-1}n^2$

Lời giải

a) Ta có $u_n=n-1\geq 0\left(\forall n\in N^*\right)$ suy ra u_n bị chặn dưới.

b) Ta có: $u_n=\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}<1; u_n=\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}\geq 0\left(\forall n\in N^*\right).$

Suy ra u_n bị chặn..

c) $u_n=\sin n$ do đó $-1\leq u_n\leq 1\left(\forall n\in N^*\right)$

Suuy ra u_n bị chặn

d) Ta có: $u_n=(-1)^{n-1}n^2>0$ nếu n là số tự nhiên lẻ

$u_n=(-1)^{n-1}n^2<0$ nếu n là số tự nhiên chẵn

Bài 2.5. Viết số hạng tổng quát của dãy số tăng gồm tất cả các số nguyên dương mà mỗi số hạng của nó:

a) Đều chia hết cho 3 ; b) Khi chia cho 4 dư 1 .

Lời giải

a) $u_n=3n\left(\forall n\in N^*\right)$

b) $u_n=4n+1\left(\forall n\in N^*\right)$

Bài 2.6. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n=100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.
b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Lời giải

a) Số tiền ông An nhận được sau 1 tháng: $A_1=100\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^1=100,5$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được sau 2 tháng: $A_2=100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^2=101,0025$ (triệu đồng)

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm: $A_{12}=100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12}=106,1678$ (triệu đồng)

Bài 2.7. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất $0,8\%$ số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n\left(n\in\mathbb{N}\right)$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n).

Lời giải

a) Ta có:

$A_0 = 100$

$A_1 = 100 + 100 \times 0,008 - 2 = 98,8$

$A_2 = 98,8 + 98,8 \times 0,008 - 2 = 97,59$

$A_3 = 97,59 + 97,59 \times 0,008 - 2 = 96,37$

$A_4 = 96,37 + 96,37 \times 0,008 - 2 = 95,14$

$A_5 = 95,14 + 95,14 \times 0,008 - 2 = 93,90$

$A_6 = 93,90 + 93,90 \times 0,008 - 2 = 92,65$

Vậy sau 6 tháng số tiền chị Hương còn nợ là $92,65$ triệu đồng.

b) Hệ thức truy hồ: $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} \times 0.008 - 2 = 1.008 A_{n-1} - 2$ (triệu đồng)

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{3}{4};-\dfrac{4}{5};-\dfrac{5}{6}$.

B. $-\dfrac{2}{3};-\dfrac{3}{4};-\dfrac{4}{5};-\dfrac{5}{6};-\dfrac{6}{7}$.

C. $\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};\dfrac{5}{6}$.

D. $\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4};\dfrac{4}{5};\dfrac{5}{6};\dfrac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_1 = -\dfrac{1}{2}; u_2 = -\dfrac{2}{3}; u_3 = -\dfrac{3}{4}; u_4 = -\dfrac{4}{5}; u_5 = -\dfrac{5}{6}$.

Nhận xét: (i) Dùng MTCT chức năng CALC để kiểm tra (tính) nhanh.

Câu 2: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{8}$.

B. $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{26}$.

C. $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{16}$.

D. $\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Dùng MTCT chức năng CALC: ta có

$u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{2}{3^2 - 1} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}; u_3 = \dfrac{3}{3^3 - 1} = \dfrac{3}{26}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 3: Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1;2;5$. **B.** $1;4;7$. **C.** $4;7;10$. **D.** $-1;3;7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_1 = -1; u_2 = u_1 + 3 = 2; u_3 = u_2 + 3 = 5$.

Câu 4: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \dfrac{1}{4}$. **B.** $u_5 = \dfrac{17}{12}$. **C.** $u_5 = \dfrac{7}{4}$. **D.** $u_5 = \dfrac{71}{39}$.

Lời giải

Chọn C

Thế trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_5 = \dfrac{2.5^2 - 1}{5^2 + 3} = \dfrac{49}{28} = \dfrac{7}{4}$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n .2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_1 = -2$. **B.** $u_2 = 4$. **C.** $u_3 = -6$. **D.** $u_4 = -8$.

Lời giải

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC:

$$u_1 = -2.1 = -2; u_2 = (-1)^2 .2.2 = 4, u_3 = (-1)^3 2.3 = -6; u_4 = (-1)^4 2.4 = 8.$$

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0$ khi n chẵn và ngược lại nên đáp án D sai.

Câu 6: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n . \dfrac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3.

A. $u_3 = \dfrac{8}{3}$. **B.** $u_3 = 2$. **C.** $u_3 = -2$. **D.** $u_3 = -\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Thay trực tiếp hoặc dùng chức năng CALC: $u_3 = (-1)^3 . \dfrac{2^3}{3} = -\dfrac{8}{3}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \dfrac{5}{9}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \dfrac{2}{3}$. **D.** $u_4 = \dfrac{14}{27}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn A

Ta có

$u_2=\frac{1}{3}(u_1+1)=\frac{1}{3}(2+1)=1;\ u_3=\frac{1}{3}(u_2+1)=\frac{2}{3};\ u_4=\frac{1}{3}(u_3+1)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{9}.$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 8: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+2\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_2=\frac{5}{2}$. **B.** $u_3=\frac{15}{4}$. **C.** $u_4=\frac{31}{8}$. **D.** $u_5=\frac{63}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases}u_2=\frac{u_1}{2}+2=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2};\ u_3=\frac{u_2}{2}+2=\frac{7}{4}+2=\frac{15}{4}\\ u_4=\frac{u_3}{2}+2=\frac{15}{8}+2=\frac{31}{8};\ u_5=\frac{u_4}{2}+2=\frac{31}{16}+2=\frac{63}{16}.\end{cases}$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" trong MTCT để tính nhanh.

Câu 9: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B. 6.** **C. 5.** **D. 7.**

Lời giải

Chọn D

Ta cần tìm n sao cho $u_n=\frac{n+1}{2n+1}=\frac{8}{15}\Leftrightarrow 15n+15=16n+8\Leftrightarrow n=7.$

Nhận xét: Có thể dùng chức năng CALC để kiểm tra nhanh.

Câu 10: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8. **B. 6.** **C. 9.** **D. 10.**

Lời giải

Chọn A

Dùng chức năng "lặp" để kiểm tra đáp án. Hoặc giải cụ thể như sau:

$u_n=\frac{2n+5}{5n-4}=\frac{7}{12}\Leftrightarrow 24n+60=35n-28\Leftrightarrow 11n=88\Leftrightarrow n=8.$

Câu 11: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1}=2^n.2$. **B.** $u_{n+1}=2^n+1$. **C.** $u_{n+1}=2(n+1)$. **D.** $u_{n+1}=2^n+2$.

Lời giải

Chọn A

Thay n bằng $n+1$ trong công thức u_n ta được: $u_{n+1}=2^{n+1}=2.2^n$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 12: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}.

A. $u_{2n-1} = 3^2.3^n - 1$. **B.** $u_{2n-1} = 3^n.3^{n-1}$. **C.** $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$. **D.** $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n = 3^n \xrightarrow{n \leftrightarrow 2n-1} u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^n.3^{n-1}$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n), với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}.

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. **B.** $u_{n-1} = 5^n$. **C.** $u_{n-1} = 5.5^{n+1}$. **D.** $u_{n-1} = 5.5^{n-1}$.

Lời giải

Chọn B

$u_n = 5^{n+1} \xrightarrow{n \leftrightarrow n-1} u_{n-1} = 5^{(n-1)+1} = 5^n$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n), với $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}.

A. $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. **B.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. **D.** $u_{n+1} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải

Chọn D

$u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3} \xrightarrow{n \leftrightarrow n+1} u_{n+1} = \left(\dfrac{(n+1)-1}{(n+1)+1}\right)^{2(n+1)+3} = \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 15: Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \cdots$ có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. **B.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n-1}{n}$. **D.** $u_n = \dfrac{n^2-n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $u_1 = 0$ nên loại các đáp án A và B

Ta kiểm tra $u_2 = \dfrac{1}{2}$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n = \dfrac{n-1}{n} \longrightarrow u_2 = \dfrac{1}{2}$

Xét đáp án D: $u_n = \dfrac{n^2-n}{n+1} \longrightarrow u_2 = \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{1}{2} \longrightarrow$ loại

Nhận xét: $u_1 = 0 = \dfrac{1-1}{1}; u_2 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2-1}{2}; u_3 = \dfrac{2}{3} = \dfrac{3-1}{3}, \ldots$ nên đoán $u_n = \dfrac{n-1}{n}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 16: Dãy số có các số hạnh cho bởi: $-1;1;-1;1;-1;\cdots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=1.$ **B.** $u_n=-1.$ **C.** $u_n=(-1)^n.$ **D.** $u_n=(-1)^{n+1}.$

Lời giải

Chọn C

Vì dãy số đa cho không phải là dãy hằng nên loại các đáp án A và B
Ta kiểm tra $u_1=-1$ ở các đáp án C, D:

Xét đáp án C: $u_n=(-1)^n\longrightarrow u_1=-1$

Xét đáp án D: $u_n=(-1)^{n+1}\longrightarrow u_1=(-1)^2=1\neq -1\longrightarrow$ loại D

Câu 17: Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2;0;2;4;6;\cdots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n=-2n.$ **B.** $u_n=n-2.$ **C.** $u_n=-2(n+1).$ **D.** $u_n=2n-4.$

Lời giải

Chọn D

Kiểm tra $u_1=-2$ ta loại các đáp án B, C
Ta kiểm tra $u_2=0$ ở các đáp án A, D:

Xét đáp án A: $u_n=2n\Rightarrow u_2=4\neq 0\longrightarrow$ loại A

Xét đáp án D: $u_n=2n-4=2.2-4=0$

Nhận xét: Dãy $2;4;6;...$ có công thức là $2n\,(n\in\mathbb{N}^*)$ nên dãy $-2;0;2;4;6;\cdots$. có được bằng cách "tịnh tiến" $2n$ sang trái 4 đơn vị, tức là $2n-4.$

Câu 18: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n=n^{n-1}.$ **B.** $u_n=2^n.$ **C.** $u_n=2^{n+1}.$ **D.** $u_n=2.$

Lời giải

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=2u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=2\\u_2=2u_1=2.2=4\\u_3=2u_2=2.4=8\end{cases}.$

Xét đáp án A với $n=1\longrightarrow u_1=1^{1-1}=1^0=1\longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n=1\longrightarrow u_1=2^{1+1}=2^2=4\longrightarrow$ C loại.

Dễ thấy đáp án D không thỏa mãn.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 19: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$. **B.** $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$. **C.** $u_n = \frac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ u_3 = u_2 - 2 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$.

Xét đáp án A với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} + 2(2-1) = \frac{5}{2} \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} - 2.2 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2} \longrightarrow$ C loại.

Xét đáp án D với $n = 1 \longrightarrow u_1 = \frac{1}{2} + 2.1 = \frac{5}{2} \longrightarrow$ D loại.

Câu 20: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$. **B.** $u_n = 2 + n^2$. **C.** $u_n = 2 + (n+1)^2$. **D.** $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải

Chọn A

Kiểm tra $u_1 = 2$ ta loại các đáp án B và C

Ta có $u_2 = u_1 + 2.1 - 1 = 3$.

Xét đáp án A: $u_n = 2 + (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 3$

Hoặc kiểm tra: $u_{n+1} - u_n = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Xét đáp án D: $u_n = 2 - (n-1)^2 \longrightarrow u_2 = 1 \longrightarrow$ loại D

Hoặc kiểm tra:

$u_{n+1} - u_n = (n-1)^2 - n^2 = -2n + 1 \neq 2n - 1$.

Câu 21: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. **B.** $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. **D.** $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A

Ta có $u_2 = u_1 + 1^2 = 2$.

Xét đáp án B: $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.6}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ B loại.

Xét đáp án C: $u_n = u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.1.3}{6} = 2$

Xét đáp án D: $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}. \longrightarrow u_2 = 1 + \frac{2.3.2}{6} = 3 \neq 2 \longrightarrow$ D loại.

Câu 22: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$. **B.** $u_n = \frac{n+1}{n}$. **C.** $u_n = -\frac{n+1}{n}$. **D.** $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra $u_1 = -2$ ta loại các đáp án A, B

Ta có $u_2 = -2 - \frac{1}{u_1} = -\frac{3}{2}$.

Xét đáp án C: $u_n = -\frac{n+1}{n} \longrightarrow u_2 = -\frac{3}{2}$

Xét đáp án D : $u_n = -\frac{n}{n+1} \longrightarrow u_2 = -\frac{2}{3} \longrightarrow$ D loại.

Câu 23: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n$. **B.** $u_n = 1 - n$. **C.** $u_n = 1 + (-1)^{2n}$. **D.** $u_n = n$.

Lời giải

Chọn D

Kiểm tra $u_1 = 1$ ta loại đáp án A, B và C

Câu 24: Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2(3^n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n > 1 \end{cases}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn B

Vì $u_1 = 2.3^1 = 6$ nên ta loại các đáp án C và D

Ta có $u_2 = 2.3^2 = 18.$

Xét đáp án A: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1},\ n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 6u_1 = 6.6 = 36 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1},\ n > 1 \end{cases} \longrightarrow u_2 = 3u_1 = 3.6 = 18$

Câu 25: Cho dãy số (a_n), được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n,\ n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}.$ **B.** $a_{10} = \frac{3}{512}.$

C. $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}.$ **D.** $a_n = \frac{3}{2^n}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $a_1 = 3; a_2 = \frac{u_1}{2}; a_3 = \frac{u_2}{2} = \frac{u_1}{2^2}; a_4 = \frac{u_3}{2} = \frac{u_1}{2^3}, \ldots \longrightarrow u_n = \frac{u_1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^{n-1}}$ nên suy ra đáp án D sai.

Xét đáp án A:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right) = 3.\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{16} \longrightarrow \text{A đúng.}$$

Xét đáp án B: $a_{10} = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512} \longrightarrow$ B đúng.

Xét đáp án C

$a_{n+1} + a_n = \frac{3}{2^n} + \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{3 + 3.2}{2^n} = \frac{9}{2^n} \longrightarrow$ C đúng.

Câu 26: Cho các dãy số sau. Dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$ **B.** $1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots$

C. $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots$ **D.** $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots$

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án A: $1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\cdots$ đây là dãy hằng nên không tăng không giảm.

Xét đáp án B: $1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots \longrightarrow u_1 > u_2 < u_3 \longrightarrow$ loại B

Xét đáp án C: $1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\cdots \longrightarrow u_n < u_{n+1},\ n \in \mathbb{N}^*$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Xét đáp án D: $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\cdots \longrightarrow u_1 > u_2 > u_3 \ldots > u_n > \ldots \longrightarrow$ loại D

Câu 27: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$. **D.** $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại A,B

Xét đáp án C: $u_n = \frac{n+5}{3n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_2 = \frac{7}{6} \end{cases} \longrightarrow u_1 > u_2 \longrightarrow$ loại C

Xét đáp án D: $u_n = \frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) > 0$

Câu 28: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$. **B.** $u_n = \frac{3}{n}$. **C.** $u_n = 2^n$. **D.** $u_n = (-2)^n$.

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án C: $u_n = 2^n \longrightarrow u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n > 0 \longrightarrow$

Vì $2^n; n$ là các dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}; \frac{1}{n}$ là các dãy giảm, do đó loại các đáp án A và B

Xét đáp án D: $u_n = (-2)^n \longrightarrow \begin{cases} u_2 = 4 \\ u_3 = -8 \end{cases} \longrightarrow u_2 > u_3 \longrightarrow$ loại D

Câu 29: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. **B.** $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = \sqrt{n+2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì 2^n là dãy dương và tăng nên $\frac{1}{2^n}$ là dãy giảm $\longrightarrow$

Xét B: $u_n = \frac{3n-1}{n+1} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{5}{3} \end{cases} \longrightarrow u_1 < u_2 \longrightarrow$ loại B

Hoặc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét C: $u_n = n^2 \longrightarrow u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1 > 0 \longrightarrow$ loại C

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Xét D: $u_n=\sqrt{n+2}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}=\dfrac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}>0\longrightarrow$ loại D

Câu 30: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n=\sin n.$ **B.** $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}.$ **C.** $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}.$ **D.** $u_n=(-1)^n.(2^n+1).$

Lời giải

Chọn C

A. $u_n=\sin n\Rightarrow u_{n+1}-u_n=2\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\sin\dfrac{1}{2}$ có thể dương hoặc âm phụ thuộc n nên đáp án A sai.

Hoặc dễ thấy $\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy $\sin n$ không tăng, không giảm.

B. $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}=n+\dfrac{1}{n}\Rightarrow u_{n+1}-u_n=1+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)}>0$ nên dãy đã cho tăng nên B sai.

C. $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, dãy $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}>0$ là dãy tăng nên suy ra u_n giảm.

D. $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách trắc nghiệm.

A. $u_n=\sin n$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên dãy này không tăng không giảm.

B. $u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$, ta có $\begin{cases}n=1\to u_1=2\\ n=2\to u_2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\longrightarrow u_1<u_2\longrightarrow u_n=\dfrac{n^2+1}{n}$ không giảm.

C. $u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, ta có $\begin{cases}n=1\to u_1=1\\ n=2\to u_2=\sqrt{2}-1\end{cases}\longrightarrow u_1>u_2$ nên dự đoán dãy này giảm.

D. $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy thay dấu nên không tăng không giảm.

Cách CASIO.

- Các dãy $\sin n;(-1)^n\left(2^n+1\right)$ có dấu thay đổi trên $\mathbb{N}^*$ nên các dãy này không tăng không giảm nên loại các đáp án A, D
- Còn lại các đáp án B, C ta chỉ cần kiểm tra một đáp án bằng chức năng TABLE.

Chẳng hạn kiểm tra đáp án B, ta vào chức năng TABLE nhập $F(X)=\dfrac{X^2+1}{X}$ với thiết lập $\text{Start}=1,\ \text{End}=10,\ \text{Step}=1.$

Nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị tăng thì loại B và chọn C, nếu ngược lại nếu thấy cột $F(X)$ các giá trị giảm dần thị chọn B và loại C

Câu 31: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n=\dfrac{1}{n}-2$ là dãy tăng.

B. Dãy số $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy giảm.

C. Dãu số $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n=2n+\cos\dfrac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Xét đáp án A: $u_n=\frac{1}{n}-2\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}<0\longrightarrow$ loại A

Xét đáp án B: $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$ là dãy có dấu thay đổi nên không giảm nên loại B

Xét đáp án C: $u_n=\frac{n-1}{n+1}=1-\frac{2}{n+1}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=2\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)>0\longrightarrow$ loại C

Xét đáp án D: $u_n=2n+\cos\frac{1}{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(2-\cos\frac{1}{n+1}\right)+\cos\frac{1}{n+2}>0$ nên

Câu 32: Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. Dãy số $u_n=\frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n=n+\sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải

Chọn C

Xét A: $u_n=\frac{1-n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}<0$ nên dãy (u_n) là dãy giảm nên C đúng.

Xét đáp án B: $u_n=2n^2-5$ là dãy tăng vì n^2 là dãy tăng nên B đúng. Hoặc

$$u_{n+1}-u_n=2(2n+1)>0 \text{ nên } (u_n) \text{ là dãy tăng.}$$

Xét đáp án C: $u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n>0\longrightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+2}{n+1}.\left(\frac{n+2}{n}\right)^n>1\longrightarrow(u_n)$ là dãy tăng nên

Xét đáp án D: $u_n=n+\sin^2 n\longrightarrow u_{n+1}-u_n=\left(1-\sin^2(n+1)\right)+\sin^2 n>0$ nên D đúng.

Câu 33: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_n=\frac{3n-1}{3n+1}=1-\frac{2}{3n+1}<1$. Mặt khác: $u_2=\frac{5}{7}>\frac{1}{2}>\frac{1}{2}>0$ nên suy ra dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 1.

Câu 34: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n=n^2$.

B. $u_n=2^n$.

C. $u_n=\frac{1}{n}$.

D. $u_n=\sqrt{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Các dãy số $n^2;2^n;n+1$ là các dãy tăng đến vô hạn khi n tăng lên vô hạn nên chúng không bị chặn trên (có thể dùng chức năng TABLE của MTCT để kiểm tra).

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Nhận xét: $u_n=\frac{1}{n}\le 1$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) bị chặn trên bởi 1.

Câu 35: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\cos n+\sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn trên.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n \xrightarrow{MTCT} u_1=\sin 1+\cos 1>1>0$ nên loại các đáp án A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần 1 số hạn nào đó của dãy số lớn hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn trên bởi α.)

Ta có $u_n=\cos n+\sin n=\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

Câu 36: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\sin n-\cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0. **B.** -1. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** Không bị chặn dưới.

Lời giải

Chọn C

$u_n \xrightarrow{MTCT} u_5=\sin 5-\cos 5<-1<0\longrightarrow$ loại A và B (dùng TABLE của MTCT để kiểm tra, chỉ cần có một số hạng nào đó của dãy số nhỏ hơn α thì dãy số đó không thể bị chặn dưới với số α.)

Ta có $u_n=\sqrt{2}\sin\left(n-\frac{\pi}{4}\right)\ge-\sqrt{2}$

Câu 37: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\sqrt{3}\cos n-\sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m=-2;\ M=2$. **B.** $m=-\frac{1}{2};\ M=\sqrt{3}+1$.

C. $m=-\sqrt{3}+1;\ M=\sqrt{3}-1$. **D.** $m=-\frac{1}{2};\ M=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$u_n \xrightarrow{MTCT\,(TABLE)} u_1>\sqrt{3}-1>\frac{1}{2}\longrightarrow$ loại C và D

$u_n \xrightarrow{MTCT\,(TABLE)} u_4<-\frac{1}{2}\longrightarrow$ loại B

Vậy

Nhận xét: $u_n=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin n-\frac{1}{2}\cos n\right)=2\sin\left(n-\frac{\pi}{6}\right)\longrightarrow -2\le u_n\le 2.$

Câu 38: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=(-1)^n.5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn D

Nếu n chẵn thì $u_n = 5^{2n+1} > 0$ tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn trên.

Nếu n lẻ thì $u_n = -5^{2n+1} < 0$ giảm xuống vô hạn (âm vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên dãy (u_n) không bị chặn dưới.

Vậy dãy số đã cho không bị chặn.

Câu 39: Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1; 2; 3\cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k(k+3)} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 40: Cho dãy số (u_n), với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2; 3; 4; \cdots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) bị chặn.

D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n > 0 \longrightarrow (u_n)$ bị chặn dưới bởi 0. Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \left(k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2\right)$ nên suy ra:

$$u_n < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

nên dãy (u_n) bị chặn trên, do đó dãy (u_n) bị chặn.

Câu 41: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. **B.** $u_n = n + \frac{1}{n}$. **C.** $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = \frac{n}{n+1}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn D

Các dãy số $n^2; n; 2^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn, nên các dãy $\sqrt{n^2+1}; n+\frac{1}{n}; 2^n+1$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0<u_n=\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1.$

Câu 42: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n=\frac{1}{2^n}.$ **B.** $u_n=3^n.$ **C.** $u_n=\sqrt{n+1}.$ **D.** $u_n=n^2.$

Lời giải

Chọn A

Các dãy số $n^2; n; 3^n$ dương và tăng lên vô hạn (dương vô cùng) khi n tăng lên vô hạn nên các dãy $n^2; \sqrt{n+1}; 3^n$ cũng tăng lên vô hạn (dương vô cùng), suy ra các dãy này không bị chặn trên, do đó chúng không bị chặn.

Nhận xét: $0<u_n=\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{2}.$

Câu 43: Cho dãy số (u_n), xác định bởi $\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{6}\le u_n<\frac{5}{2}.$ **B.** $\sqrt{6}\le u_n<3.$ **C.** $\sqrt{6}\le u_n<2.$ **D.** $\sqrt{6}\le u_n\le 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $u_2=\sqrt{12}>3>\frac{5}{2}>2$ nên loại các đáp án A, B, C

Nhận xét: Ta có

$$\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}\ge 0\end{cases}\longrightarrow u_n\ge 0\longrightarrow\begin{cases}u_1=6\\u_{n+1}=\sqrt{6+u_n}\ge\sqrt{6}\end{cases}\longrightarrow u_n\ge\sqrt{6}.$$

Ta chứng minh quy nạp $u_n\le 2\sqrt{3}.$

$$u_1\le 2\sqrt{3}; u_k\le 2\sqrt{3}\longrightarrow u_{k+1}=\sqrt{6+u_{k+1}}\le\sqrt{6+2\sqrt{3}}<\sqrt{6+6}=2\sqrt{3}.$$

Câu 44: Cho dãy số (u_n), với $u_n=\sin\frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1}=\sin\frac{\pi}{n+1}.$

B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn B

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \longrightarrow u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{(n+1)+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+2} \longrightarrow$ A sai.

$u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ B đúng.

$u_{n+1} - u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+2} - \sin\dfrac{\pi}{n+1} < 0 \left(0 < \dfrac{\pi}{n+2} < \dfrac{\pi}{n+1} \le \dfrac{\pi}{2}\right) \longrightarrow$ C, D sai.

Câu 45: Cho dãy số (u_n), với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải

Chọn C

$u_n = (-1)^n$ là dãy thay dấu nên không tăng, không giảm $\longrightarrow$ A, B sai.

Tập giá trị của dãy $u_n = (-1)^n$ là $\{-1;1\} \longrightarrow -1 \le u_n \le 1 \longrightarrow$ C đúng.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

BÀI 6: CẤP SỐ CỘNG

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH NGHĨA

a) Nhận biết dãy vô hạn

- Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d. Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

- Cấp số cộng (u_n) với công sai d được cho bởi hệ thức truy hồi

$u_n = u_{n-1} + d,\ (n \geq 2)$

Chú ý. Để chứng minh (u_n) là một cấp số cộng, hãy chứng minh hiệu hai số hạng liên tiếp $u_n - u_{n-1}$ không đổi.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức

$u_n = u_1 + (n-1)d.$

3. TỔNG CỦA n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ CỘNG

Cho cấp số cộng (u_n) với công sai d. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d].$$

Chú ý. Sử dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có thể viết tổng S_n dưới dạng

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Nhận dạng 1 dãy số là cấp số cộng

1. Phương pháp

Sử dụng định nghĩa (u_n) là một cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một hằng số.

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $d = u_{n+1} - u_n$

- Nếu d là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai d.
- Nếu d phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số sau là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2020(n+1) - 2021 - (2020n - 2021) = 2020$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2020$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 5 - (-2n + 5) = -2$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -2$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau không phải là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Lời giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$ phụ thuộc vào n.

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 3(n+1) - \left[(-1)^n + 3n\right] = -(-1)^n + 3 - (-1)^n = 3 - 2(-1)^n$ phụ thuộc vào n.

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Dạng 2. Xác định số hạng , công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 và công sai d
- Từ những giải thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và d rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} 15 = u_3 = u_1 + 2d \\ d = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 19 \\ d = -2 \end{cases} \rightarrow u_n = u_1 + (n-1)d = -2n + 21.$

Ví dụ 2: Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ 40 = u_8 = u_1 + 7d \end{cases} \longrightarrow d = 5$

Ví dụ 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Tìm số hạng u_{17}.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có công sai của cấp số cộng là $d=\frac{u_3-u_{15}}{3-15}=\frac{84}{-12}=-7$.

Suy ra $u_{17}=u_1+(17-1)d=11$.

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=123$ và $u_3-u_{15}=84$. Tìm số hạng u_{17}.

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1+2u_5=0$ và $S_4=14$. Tính số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng.

Lời giải

Ta có $u_1+2u_5=0\Leftrightarrow u_1+2(u_1+4d)=0\Leftrightarrow 3u_1+8d=0$.

$$S_4=14\Leftrightarrow\frac{4(2u_1+3d)}{2}=14\Leftrightarrow 2u_1+3d=7$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}3u_1+8d=0\\2u_1+3d=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=8\\d=-3\end{cases}$.

Dạng 3. Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng

1. Phương pháp

Tính tổng n số hạng đầu tiên nhờ công thức: $S_n=\frac{n(u_1+u_n)}{2}=\frac{n[2u_1+(n-1)d]}{2}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=4$ và $d=-5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải

$$S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d\longrightarrow S_{100}=100u_1+\frac{100.99}{2}d=-24350$$

Ví dụ 2: Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tính tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên

Lời giải

Số nguyên dương chia hết cho 3 có dạng $3n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ nên chúng lập thành cấp số cộng

$$u_n=3n\longrightarrow\begin{cases}u_1=3\\u_{50}=150\end{cases}\longrightarrow S_{50}=\frac{50}{2}(u_1+u_{50})=3825$$

Chú ý: $S_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$

Ví dụ 3: Tính tổng $S=1-2+3-4+5+\ldots+(2n-1)-2n$ với $n\geq 1$ và $n\in\mathbb{N}$.

Lời giải

Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$ thì $(2n-1)-2n=-1$.

Ta có $S=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+((2n-1)-2n)$. Do đó ta xem S là tổng của n số hạng, mà mỗi số hạng đều bằng -1 nên $S=-n$.

Nhận xét: Ta có $1;3;5;\cdots;2n-1$ và $2;4;6;\cdots;2n$ là các cấp số cộng có n số hạng nên

$$S=(1+3+5+\cdots+2n-1)-(2+4+6+\cdots+2n)$$

$$=\frac{n}{2}(1+2n-1)-\frac{n}{2}(2+2n)=n^2-(n^2+n)=-n.$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 4: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

Lời giải

Ta có $u_2+u_8+u_9+u_{15}=100 \Leftrightarrow 4u_1+30d=100 \Leftrightarrow 2u_1+15d=50.$

Khi đó $S_{16}=\frac{16}{2}(u_1+u_{16})=8(2u_1+15d)=8.50=400$

Ví dụ 5: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d=-3$ và $u_2^2+u_3^2+u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Lời giải

Đặt $a=u_1$ thì

$u_2^2+u_3^2+u_4^2=(a+d)^2+(a+2d)^2+(a+3d)^2=3a^2-36a+126=3(a-6)^2+18\ge 18$ với mọi a.

Dấu bằng xảy ra khi $a-6=0 \Leftrightarrow a=6$ .Suy ra $u_1=6$.

Ta có $S_{100}=\frac{100.[2u_1+(100-1)d]}{2}=-14250$.

Ví dụ 5. Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính S_{19}.

Hướng dẫn giải

Ta có $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$

$\Leftrightarrow u_1+3d+u_1+7d+u_1+11d+u_1+15d=224 \Leftrightarrow 4u_1+36d=224 \Leftrightarrow u_1+9d=56.$

Ta có $S_{19}=\frac{19}{2}(2u_1+18d)=19(u_1+9d)=19.56=1064.$

Dạng 4: Giải phương trình (tìm x trong cấp số cộng)

1. Phương pháp

Ba số a,b,c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a+c=2b.$

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các số $-4;1;6;x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x.

Lời giải.

Vì các số $-4;1;6;x$ theo thứ tự u_1,u_2,u_3,u_4 lập thành cấp số cộng nên

$u_4-u_3=u_3-u_2 \longrightarrow x-6=6-1 \Leftrightarrow x=11$

Ví dụ 2: Nếu các số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Ba số $5+m;\ 7+2m;\ 17+m$ theo thứ tự u_1,u_2,u_3 lập thành cấp số cộng nên

$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow (5+m)+(17+m)=2(7+2m) \Leftrightarrow m=4$

Nhận xét: Ta có thể dùng tính chất $u_3-u_2=u_2=u_1.$

Ví dụ 3: Với giá trị nào của x và y thì các số $-7;\ x;\ 11;\ y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số công?

Lời giải.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Bốn số $-7; x; 11; y$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3, u_4 lập thành cấp số cộng nên

$$\begin{cases} u_4 - u_3 = u_3 - u_2 \\ u_4 - u_3 = u_2 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 11 = 11 - x \\ y - 11 = x + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 22 \\ x - y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 20 \end{cases}$$

Dạng 5. Chứng minh một hệ thức trong cấp số cộng lập thành cấp số cộng, bài toán có sử dụng yếu tố cấp số cộng

1. Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Sử dụng các tính chất của cấp số cộng

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Chứng minh rằng ba số dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Ta sẽ chứng minh bằng phép biến đổi tương đương.

Ba số $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a}) = (\sqrt{c}-\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{b})$$

$\Leftrightarrow \quad b - a = c - b \Leftrightarrow a, b, c$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$ b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2.$

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c.$

a) Ta có $a^2 - 2ab = (2b - c)^2 - 2(2b - c).b = 4b^2 - 4bc + c^2 - 4b^2 + 2bc$

$= c^2 - 2bc.$

Vậy $a^2 - 2ab = c^2 - 2bc \Leftrightarrow a^2 + 2bc = c^2 + 2ab.$

b) Ta có $a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc = 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc$

$= 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b + c)^2.$

Ví dụ 3. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3a và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a.

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, z theo thứ tự là độ dài ba cạnh của tam giác $(x < y < z)$.

Chu vi của tam giác là $x + y + z = 3a.$ (1)

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có $x+z=2y.$ (2)

Tam giác đã cho vuông nên $x^2+y^2=z^2.$ (3)

Thay (2) và (1), ta được $3y=3a \Leftrightarrow y=a.$

Thay $y=a$ vào (2), ta được $x+z=2a \Rightarrow x=2a-z.$

Thay $x=2a-z$ và $y=a$ vào (3), ta được

$$(2a-z)^2+a^2=z^2 \Leftrightarrow 5a^2-4az=0 \Leftrightarrow z=\frac{5a}{4} \Rightarrow x=\frac{3a}{4}.$$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}.$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3-3mx^2+2m(m-4)x+9m^2-m=0$.

Lời giải

- *Điều kiện cần:* Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng. Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có $x_1+x_2+x_3=3m$. Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng nên $x_1+x_3=2x_2$. Suy ra $3x_2=3m \Leftrightarrow x_2=m$. Thay $x_2=m$ vào phương trình đã cho, ta được

$$m^3-3m.m^2+2m(m-4).m+9m^2-m=0 \Leftrightarrow m^2-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$$

- *Điều kiện đủ:*

+ Với $m=0$ thì ta có phương trình $x^3=0 \Leftrightarrow x=0$ (phương trình có nghiệm duy nhất). Do đó $m=0$ không phải giá trị cần tìm.

+ Với $m=1$, ta có phương trình $x^3-3x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x=1;\ x=-2;\ x=4.$

Ba nghiệm $-2;\ 1;\ 4$ lập thành một cấp số cộng nên $m=1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^4-10x^2+2m^2+7m=0$.

Lời giải.

Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$. Khi đó ta có phương trình: $t^2-10t+2m^2+7m=0$ (*).

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 5^2-(2m^2+7m)>0 \\ 2m^2+7m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<2m^2+7m<25.$

(do tổng hai nghiệm bằng $10>0$ nên không cần điều kiện này).

+ Với điều kiện trên thì (*) có hai nghiệm dương phân biệt là t_1, t_2 $(t_1<t_2)$.

Khi đó phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm này lập thành một cấp số cộng khi $-\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_2}\right)=\sqrt{t_1}-\left(-\sqrt{t_1}\right)=\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2=9t_1.$

Theo định lý Vi-ét ta có: $t_1+t_2=10;\ \ t_1.t_2=2m^2+7m.$

Suy ra ta có hệ phương trình $\begin{cases} t_2=9t_1 \\ t_1+t_2=10 \\ t_1.t_2=2m^2+7m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=1 \\ t_2=9 \\ 2m^2+7m=9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{9}{2}. \end{array}\right.$

C. GIẢI CHI TIẾT BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 2.8. Xác định công sai, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số cộng sau:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a) $4,9,14,19,\ldots$; b) $1,-1,-3,-5,\ldots$

Lời giải

a) $9-4=5;14-9=5$

Suy ra cấp số cộng có $u_1=4$, công sai $d=5$

Số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n=4+5(n-1)$

Số hạng thứ 5: $u_5=4+5(5-1)=24$

Số hạng thứ 100: $u_{100}=4+5(100-1)=499$

b) $-1-1=-2;-3-(-1)=-2$

Suy ra cấp số cộng có $u_1=1$, công sai $d=-2$

Số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n=1+(-2)(n-1)$

Số hạng thứ 5: $u_5=1+(-2)(5-1)=-7$

Số hạng thứ 100: $u_{100}=1+(-2)(100-1)=-197$

Bài 2.9. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xét xem nó có phải là cấp số cộng không. Nếu dãy số đó là cấp số cộng, hãy tìm công sai d và viết số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n=u_1+(n-1)d$.

a) $u_n=3+5n$; b) $u_n=6n-4$;

c) $u_1=2,u_n=u_{n-1}+n$; d) $u_1=2,u_n=u_{n-1}+3$.

Lời giải

a) $u_1=8;u_2=13;u_3=18;u_4=23;u_5=28$

Ta có: $u_n-u_{n-1}=3+5n-\left[3+5(n-1)\right]=5\forall x\geq 2$

Suy ra dãy số là cấp số cộng có $u_1=8$ và công sai $d=5$

Số hạng tổng quát: $u_n=8+5(n-1)$

b) $u_1=2;u_2=8;u_3=14;u_4=20;u_5=26$

Ta có: $u_n-u_{n-1}=6n-4-\left[6(n-1)-4\right]=6\forall x\geq 2$

Suy ra dãy số là cấp số cộng có $u_1=2$ công sai $d=6$

Số hạng tổng quát: $u_n=2+6(n-1)$

c) $u_1=2;u_2=4;u_3=7;u_4=11;u_5=16$

Ta có: $u_2-u_1=2\neq u_3-u_2=3$

Suy ra đây không phải cấp số cộng.

d) $u_1=2;u_2=5;u_3=8;u_4=11;u_5=14$

Ta có: $u_n-u_{n-1}=3$

Suy ra đây là dãy cấp số công có $u_1=2$ và công sai $d=3$

Số hạng tổng quát: $u_n=2+3(n-1)$

Bài 2. 10. Một cấp số cộng có số hạng thứ 5 bằng 18 và số hạng thứ 12 bằng 32 . Tìm số hạng thứ 50 của cấp số cộng này.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Gọi số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n-1)d$

Ta có: $u_5 = u_1 + 4d = 18; u_{12} = u_1 + 11d = 32$

Suy ra $u_1 = 10, d = 2$

Số hạng tổng quát: $u_n = 10 + 2(n-1)$

Số hạng thứ 50 là: $u_{50} = 108$

Bài 2. 11. Một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 5 và công sai bằng 2 . Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để có tổng bằng 2 700 ?

Lời giải

Gọi n là số các số hạng đầu cần lấy tổng, ta có:

$$2700 = S_n = \frac{n}{2}\left[2\times 5 + (n-1)\times 2\right] = \frac{n}{2}(8+2n)$$

Do đó $4n + n^2 - 2700 = 0$. Giải phương trình bậc hai này ta được $n = -54$ (loại) hoặc $n = 50$

Vậy phải lấy 50 số hạng đầu.

Bài 2. 12. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n-1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5-1) = 460$ (triệu đồng)

Bài 2.13. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu cua cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2}\left[2\times 15 + (n-1)\times 3\right] = \frac{n}{2}(27+3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)

Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Bài 2.14. Vào năm 2020 , dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030 .

Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n-1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11 u_{11} = 1200 + 30(11-1) = 1500$ (nghìn người)

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Dãy số nào sau đây **không** phải là cấp số cộng?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}....$ **B.** $15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};....$

C. $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};....$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};...$

Lời giải

Chọn C

Chỉ cần tồn tại hai cặp số hạng liên tiếp của dãy số có hiệu khác nhau: $u_{m+1}-u_m \neq u_{k+1}-u_k$ thì ta kết luận ngay dãy số đó không phải là cấp số cộng.

Xét đáp án A: $-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1;\frac{4}{3}....\longrightarrow \frac{1}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots\longrightarrow$ loại **A**

Xét đáp án B:

$$15\sqrt{2};12\sqrt{2};9\sqrt{2};6\sqrt{2};....\longrightarrow -3\sqrt{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3=\cdots\longrightarrow \text{loại } \mathbf{B}$$

Xét đáp án C: $\frac{4}{5};1;\frac{7}{5};\frac{9}{5};\frac{11}{5};....\longrightarrow \frac{1}{5}=u_2-u_1\neq u_3-u_2=\frac{2}{5}\longrightarrow$ **Chọn C**

Xét đáp án D: $\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{5}{\sqrt{3}};...\longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=u_2-u_1=u_3-u_2=u_4-u_3\longrightarrow$ loại **D**

Câu 2: Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=-\frac{1}{2}$, công sai $d=\frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2};0;1;\frac{1}{2};1.$ **B.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}.$ **C.** $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};2;\frac{5}{2}.$ **D.** $-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta dùng công thức tổng quát $u_n=u_1+(n-1)d=-\frac{1}{2}+(n-1)\frac{1}{2}=-1+\frac{n}{2}$, hoặc $u_{n+1}=u_n+d=u_n+\frac{1}{2}$ để tính các số hạng của một cấp số cộng.

Ta có $u_1=-\frac{1}{2};\ d=\frac{1}{2}\longrightarrow$
$$\begin{cases} u_1=-\frac{1}{2} \\ u_2=u_1+d=0 \\ u_3-u_2+d=\frac{1}{2} \\ u_4=u_3+d=1 \\ u_5=u_4+d=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Nhận xét: Dùng chức năng "lặp" của MTCT để tính:

Nhập: $X=X+\frac{1}{2}$ (nhập $X=X+d$).

Bấm CALC: nhập $-\frac{1}{2}$ (nhập u_1).

Để tính 5 số hạng đầu ta bấm dấu "=" liên tiếp để ra kết quả 4 lần nữa!

Câu 3: Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17, **B.** 6; 10; 14. **C.** 8; 13; 18. **D.** 6; 12; 18.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn A

Giữa 2 và 22 có thêm ba số hạng nữa lập thành cấp số cộng, xem như ta có một cấp số cộng có 5 số hạng với $u_1=2; u_5=22;$ ta cần tìm u_2, u_3, u_4.

Ta có $u_5=u_1+4d \Leftrightarrow d=\dfrac{u_5-u_1}{4}=\dfrac{22-2}{4}=5 \longrightarrow \begin{cases} u_2=u_1+d=7 \\ u_3=u_1+2d=12 \\ u_4=u_1+3d=17 \end{cases}$

Câu 4: Cho hai số -3 và 23. Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d=2$. Tìm n.

A. $n=12$. **B.** $n=13$. **C.** $n=14$. **D.** $n=15$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết thì ta được một cấp số cộng có $n+2$ số hạng với $u_1=-3, u_{n+2}=23$.

Khi đó $u_{n+2}=u_1+(n+1)d \Leftrightarrow n+1=\dfrac{u_{n+2}-u_1}{d}=\dfrac{23-(-3)}{2}=13 \Leftrightarrow n=12 \longrightarrow A$

Câu 5: Biết các số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n>3$. Tìm n.

A. $n=5$. **B.** $n=7$. **C.** $n=9$. **D.** $n=11$.

Lời giải

Chọn B

Ba số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự u_1, u_2, u_3 lập thành cấp số cộng nên

$$u_1+u_3=2u_2 \Leftrightarrow C_n^1+C_n^3=2C_n^2 \ (n\geq 3) \Leftrightarrow n+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}=2.\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{n^2-3n+2}{6}=n-1 \Leftrightarrow n^2-9n+14 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n=2 \\ n=7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow n=7 (n\geq 3).$$

Nhận xét: Nếu u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng thì ta có $u_{k-1}+u_{k+1}=2u_k$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; $\cdots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n=5n+1$. **B.** $u_n=5n-1$. **C.** $u_n=4n+1$. **D.** $u_n=4n-1$.

Lời giải

Chọn C

Các số 5; 9; 13; 17; $\cdots$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) nên

$$\begin{cases} u_1=5 \\ d=u_2-u_1=4 \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n=u_1+(n-1)d=5+4(n-1)=4n+1$$

Câu 7: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1=-3$ và $d=\dfrac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n=-3+\dfrac{1}{2}(n+1)$. **B.** $u_n=-3+\dfrac{1}{2}n-1$.

C. $u_n=-3+\dfrac{1}{2}(n-1)$. **D.** $u_n=-3+\dfrac{1}{4}(n-1)$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1 = -3 \\ d = \dfrac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{CTTQ} u_n = u_1 + (n-1)d = -3 + \dfrac{1}{2}(n-1)$

Câu 8: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 7 - 3n$. **B.** $u_n = 7 - 3^n$. **C.** $u_n = \dfrac{7}{3n}$. **D.** $u_n = 7.3^n$.

Lời giải

Chọn A

Dãy (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = an + b$ (a, b là hằng số).

Câu 9: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = (-1)^n (2n+1)$. **B.** $u_n = \sin\dfrac{\pi}{n}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Dãy (u_n) là một cấp số cộng $\Leftrightarrow u_n = u_{n-1} + d$ (d là hằng số).

Câu 10: Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n = -4n + 9$. **B.** $u_n = -2n + 19$. **C.** $u_n = -2n - 21$. **D.** $u_n = -2^n + 15$.

Lời giải

Chọn D

Dãy số $u_n = -2^n + 15$ không có dạng $an + b$ nên có không phải là cấp số cộng.

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15} = 34$. **B.** $u_{15} = 45$. **C.** $u_{13} = 31$. **D.** $u_{10} = 35$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases} \longrightarrow u_n = 3n - 8 \longrightarrow \begin{cases} u_{15} = 37 \\ u_{13} = 31 \\ u_{10} = 22 \end{cases}$

Câu 12: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \dfrac{1}{4}$ và $d = -\dfrac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5 = -\dfrac{5}{4}$. **B.** $S_5 = \dfrac{4}{5}$. **C.** $S_5 = \dfrac{5}{4}$. **D.** $S_5 = -\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ d = -\dfrac{1}{5} \end{cases} \longrightarrow S_5 = 5u_1 + \dfrac{5.4}{2}d = 5.\dfrac{1}{4} + 10.\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{5}{4}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 13: Cho cấp số cộng (u_n) có $d=-2$ và $S_8=72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1.

A. $u_1=16$. **B.** $u_1=-16$. **C.** $u_1=\frac{1}{16}$. **D.** $u_1=-\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} d=-2 \\ 72=S_8=8u_1+\frac{8.7}{2}d \end{cases} \longrightarrow 72=8u_1+28.(-2) \Leftrightarrow u_1=16$$

Câu 14: Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n=57$. **B.** $u_n=61$. **C.** $u_n=65$. **D.** $u_n=69$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} u_1=1,\ d=4 \\ 561=S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d \end{cases} \longrightarrow 561=n+\frac{n^2-n}{2}.4 \Leftrightarrow 2n^2-n-561=0 \Leftrightarrow n=17.$$

$$u_n=u_{17}=u_1+16d=1+16.4=65 \longrightarrow C$$

Câu 15: Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d=2$. **B.** $d=3$. **C.** $d=4$. **D.** $d=5$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u_{12}=23 \\ S_{12}=144 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1+11d=23 \\ \frac{12}{2}(u_1+u_{12})=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=1 \\ d=\frac{23-u_1}{11}=2 \end{cases}$$

Câu 16: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=\frac{3n^2-19n}{4}$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1=2;\ d=-\frac{1}{2}$. **B.** $u_1=-4;\ d=\frac{3}{2}$. **C.** $u_1=-\frac{3}{2};\ d=-2$. **D.** $u_1=\frac{5}{2};\ d=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{3n^2-19n}{4}=\frac{3}{4}n^2-\frac{19}{4}n=S_n=nu_1+\frac{n^2-n}{2}d=\frac{d}{2}n^2+\left(u_1-\frac{d}{2}\right)n$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2}=\frac{3}{4} \\ u_1-\frac{d}{2}=-\frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=-4 \\ d=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 17: Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n=n^2+4n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $u_n = 2n+3$. **B.** $u_n = 3n+2$. **C.** $u_n = 5.3^{n-1}$. **D.** $u_n = 5.\left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $n^2+4n = S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(u_1 - \frac{d}{2}\right)n \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{2} = 1 \\ u_1 - \frac{d}{2} = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 5 \\ d = 2 \end{cases} \longrightarrow u_n = 2n+3$

Câu 18: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

A. $u_{1001} = 4005$. **B.** $u_{1001} = 4003$. **C.** $u_{1001} = 3$. **D.** $u_{1001} = 1$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases} 2001 = u_2 = u_1 + d \\ 1995 = u_5 = u_1 + 4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2003 \\ d = -2 \end{cases} \longrightarrow u_{1001} = u_1 + 1000d = 3$

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n), biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d cảu cấp số cộng đó.

A. $d = -9$. **B.** $d = 7$. **C.** $d = -7$. **D.** $d = 9$.

Lời giải

Chọn D

$d = u_{n+1} - u_n = 8 - (-1) = 9$

Câu 20: Cho cấp số cộng (u_n). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\frac{u_{10}+u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$. **B.** $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$. **C.** $u_{10}.u_{30} = u_{20}$. **D.** $\frac{u_{10}.u_{30}}{2} = u_{20}$.

Lời giải

Chọn B

Xét đáp án A: $\begin{cases} \frac{u_{10}+u_{30}}{2} = \frac{u_1+9d+u_1+29d}{2} = u_1+19d \\ u_5+u_{10} = u_1+4d+u_1+9d = 2u_2+13d \end{cases} \longrightarrow$ loại

Xét đáp án B: $\begin{cases} u_{90}+u_{210} = 2u_2+298d = 2(u_1+149d) \\ 2u_{150} = 2(u_1+159d) \end{cases}$

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số cộng cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n = n\ (n \in \mathbb{N}^*)$.

Câu 21: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tính tổng S_{24} của \$24\$ số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

A. $S_{24} = 60$. **B.** $S_{24} = 120$. **C.** $S_{24} = 720$. **D.** $S_{24} = 1440$.

Lời giải

Chọn C

$u_2 + u_{23} = 60 \Leftrightarrow (u_1+d)+(u_1+22d) = 60 \Leftrightarrow 2u_1+23d = 60.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Khi đó $S_{24}=\frac{24}{2}(u_1+u_{24})=12\left(u_1+(u_1+23d)\right)=12(2u_1+23d)=12.60=720.$

Câu 22: Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=2.$ **B.** $d=-3.$ **C.** $d=4.$ **D.** $d=5.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases}u_1+u_6=17\\u_2+u_4=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+5d=17\\2u_1+6d=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=16\\d=-3\end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2u_7=75\end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $d=\frac{1}{2}.$ **B.** $d=\frac{1}{3}.$ **C.** $d=2.$ **D.** $d=3.$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases}u_7-u_3=8\\u_2u_7=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u_1+6d)-(u_1+2d)=8\\(u_1+d)(u_1+6d)=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=2\\(u_1+2)(u_1+12)=75\end{cases}$$

Câu 24: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1+u_7=26\\u_2{}^2+u_6{}^2=466\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}u_1=13\\d=-3\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=10\\d=-3\end{cases}.$ **C.** $\begin{cases}u_1=1\\d=4\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=13\\d=-4\end{cases}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}u_1+u_7=26\\u_2{}^2+u_6{}^2=466\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+6d=26\\(u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=13-3d&(1)\\(u_1+d)^2+(u_1+5d)^2=466&(2)\end{cases}.$

Thay (1) và (2) ta được: $(13-2d)^2+(13+2d)^2=466\Leftrightarrow 8d^2+338=466$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}d=4\Rightarrow u_1=1\\d=-4\Rightarrow u_1=25\end{bmatrix}$$

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=15\\u_1+u_6=27\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases}u_1=21\\d=3\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}u_1=21\\d=-3\end{cases}.$ **C.** $\begin{cases}u_1=18\\d=3\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}u_1=21\\d=4\end{cases}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=15\\u_1+u_6=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-(u_1+2d)+(u_1+4d)=15\\u_1+(u_1+5d)=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d=15\\2u_1+5d=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=21\\d=-3\end{cases}.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2+u_4+u_6=36 \\ u_2u_3=54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d<10$.

A. $d=3$. **B.** $d=4$. **C.** $d=5$. **D.** $d=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} u_2+u_4+u_6=36 \\ u_2u_3=54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1+d)+(u_1+3d)+(u_1+5d)=36 \\ (u_1+d)(u_1+2d)=54 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+3d=12 & (1) \\ (u_1+d)(u_1+2d)=54 & (2) \end{cases}$. Từ (1) suy ra $u_1=12-3d$. Thay vào (2), ta được $(12-2d)(12-d)=54 \Leftrightarrow d^2-18d+45=0 \Leftrightarrow d=3$ hoặc $d=15$.

Câu 27: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=27 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=275 \end{cases}$. Tính u_2.

A. $u_2=3$. **B.** $u_2=6$. **C.** $u_2=9$. **D.** $u_2=12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=27 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=275 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+(u_1+d)+(u_1+2d)=27 \\ u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2=275 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+d=9 & (1) \\ u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2=275 & (2) \end{cases}$.

Từ (1) suy ra $d=9-u_1$. Thay vào (2), ta được

$u_1^2+(u_1+9-u_1)^2+[u_1+2(9-u_1)]^2=275 \Leftrightarrow u_1^2-18u_1+65=0 \Leftrightarrow u_1=13$ hoặc $u_1=5$.

Vậy $\begin{cases} u_1=13 \\ d=-4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1=5 \\ d=4 \end{cases} \longrightarrow u_2=u_1+d=9$

Câu 28: Tính tổng $T=15+20+25+...+7515$.

A. $T=5651265$. **B.** $T=5651256$. **C.** $T=5651625$. **D.** $T=5651526$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1=15$ và công sai $d=5$.

Giả sử tổng trên có n số hạng thì $u_n=7515$

$\Leftrightarrow u_1+(n-1)d=7515 \Leftrightarrow 15+(n-1)5=7515 \Leftrightarrow n=1501$.

Vậy $T=S_{1501}=\dfrac{(2u_1+1500d).1501}{2}=\dfrac{(2.15+1500.5).1501}{2}=5651265$

Câu 29: Tính tổng $T=1000^2-999^2+998^2-997^2+...+2^2-1^2$.

A. $T=500500$. **B.** $T=500005$. **C.** $T=505000$. **D.** $T=500050$.

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $T=1.(1000+999)+1.(998+997)+...+1.(2+1)=1999+1995+...+3.$

Ta thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1=1999$ và công sai $d=-4.$

Giả sử tổng trên có n số hạng thì

$u_n=3\Leftrightarrow u_1+(n-1)d=3\Leftrightarrow 1999+(n-1)(-4)=3\Leftrightarrow n=500.$

Vậy $T=S_{500}=\dfrac{(u_1+u_{500}).500}{2}=\dfrac{(1999+3).500}{2}=500500$

Câu 30: Cho cấp số cộng $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots;\ u_n$ có công sai \$d,\$ các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác \$0.\$ Với giá trị nào của d thì dãy số $\dfrac{1}{u_1};\ \dfrac{1}{u_2};\ \dfrac{1}{u_3};\ \cdots;\ \dfrac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

A. $d=-1.$ **B.** $d=0.$ **C.** $d=1.$ **D.** $d=2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}u_2-u_1=d\\u_3-u_2=d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_1}=-\dfrac{d}{u_1u_2}\\\dfrac{1}{u_3}-\dfrac{1}{u_2}=-\dfrac{d}{u_2u_3}\end{cases}.$

Theo yêu cầu bài toán thì ta phải có $\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_1}=\dfrac{1}{u_3}-\dfrac{1}{u_2}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\\dfrac{1}{u_1}=\dfrac{1}{u_3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=0\\u_1=u_3=u_1+2d\end{array}\right.\Leftrightarrow d=0$

Câu 31: Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

A. 20° và $70^\circ.$ **B.** 45° và $45^\circ.$ **C.** 20° và $45^\circ.$ **D.** 30° và $60^\circ.$

Lời giải

Chọn D

Ba góc $A,\ B,\ C$ của một tam giác vuông theo thứ tự đó ($A<B<C$) lập thánh cấp số cộng nên $C=90,\ C+A=2B$.

Ta có $\begin{cases}A+B+C=180\\A+C=2B\\C=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3B=180\\A+C=2B\\C=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=60\\A=30\\C=90\end{cases}$

Câu 32: Ba góc $A,B,C\left(A<B<C\right)$ của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

A. $40^\circ.$ **B.** $45^\circ.$ **C.** $60^\circ.$ **D.** $80^\circ.$

Lời giải

Chọn A

Ba góc $A,\ B,\ C$ của một tam giác theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, thì $C=2A,\ C+A=2B$. Ta có

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\begin{cases} A+B+C=180^0 \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3B=180^0 \\ A+C=2B \\ C=2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=60^0 \\ A+C=120^0 \\ C=2A \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=40^0 \\ B=60^0 \\ C=80^0 \end{cases} \longrightarrow C-A=40^0.$$

Câu 33: Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

A. $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3};\ 1;\ \frac{5}{3}$. **C.** $\frac{3}{4};\ 1;\ \frac{5}{4}$. **D.** $\frac{1}{4};\ 1;\ \frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ba cạnh $a, b, c\ (a<b<c)$ của một tam giác theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thỏa yêu cầu thì $\begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ a+b+c=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ 3b=3 \\ a+c=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=c^2 \\ b=1 \\ a=2b-c-2-c \end{cases}$.

Ta có $a^2+b^2=c^2 \xrightarrow[a=2-c]{b=1} (2-c)^2+1=c^2 \Leftrightarrow -4c+5=0 \Leftrightarrow c=\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=1 \\ c=\frac{5}{4} \end{cases}$.

Câu 34: Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1635. **B.** 1792. **C.** 2055. **D.** 3125.

Lời giải

Chọn C

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 30 số hạng có công sai $d=3$ và $u_1=25$.

Tổng số ghế là $S_{30}=u_1+u_2+\cdots+u_{30}=30u_1+\frac{30.29}{2}d=2055$

Câu 35: Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,.Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

A. 73. **B.** 75. **C.** 77. **D.** 79.

Lời giải.

Chọn C

Số cây mỗi hàng (bắt đầu từ hàng thứ nhất) lập thành một cấp số cộng (u_n) có $u_1=1, d=1$. Giả sử có n hàng cây thì $u_1+u_2+\cdots+u_n=3003=S_n$.

Ta có $3003=S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d \Leftrightarrow n^2+n-6006=0 \Leftrightarrow n=77$

Câu 36: Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

A. 78. **B.** 156. **C.** 300. **D.** 48.

Lời giải

Chọn C

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giời) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1=1,$ công sai $d=1.$ Vậy số tiếng chuông được đánh trong 1 ngày là:

$$S=S_{24}=\frac{24}{2}(u_1+u_{24})=12(1+24)=300$$

Câu 37: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,… và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n. Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

A. 98. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 104.

Lời giải

Chọn B

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1=7, d=5.$ Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1+u_2+\cdots+u_n=25450=S_n.$ Ta có

$$25450=S_n=nu_1+\frac{n(n-1)}{2}d=7n+\frac{n^2-n}{2}.5$$

$$\Leftrightarrow 5n^2+9n-50900=0\Leftrightarrow n=100$$

Câu 38: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 5.2500.000 đồng. **B.** 10.125.000 đồng. **C.** 4.000.000 đồng. **D.** 4.245.000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Giá tiền khoang mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1=80\,000, d=5000.$ Do cần khoang 50 mét nên tổng số tiền cần trả là

$$u_1+u_2+\cdots+u_{50}=S_{50}=50u_1+\frac{50.49}{2}d=50.80\,000+1225.5000=10125000$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

BÀI 7: CẤP SỐ NHÂN

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐỊNH NGHĨA

- Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q. Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

- Cấp số nhân (u_n) với công bội q được cho bởi hệ thức truy hồi $u_n = u_{n-1} \cdot q$ với $n \geq 2$.

Chú ý. Để chứng minh dãy số (u_n) gồm các số khác 0 là một cấp số nhân, hãy chứng minh tỉ số $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ không đổi.

2. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, $(n \geq 2)$

3. TỔNG CỦA n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA CẤP SỐ NHÂN

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q}.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Chứng minh một dãy số là cấp số nhân

1. Phương pháp

- Xác định một cấp số nhân là xác định số hạng đầu u_1 và công bội q
- Từ những giải thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và q rồi giải hệ đó.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, \ (n \geq 1) \end{cases}$.

a) Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 3$, $n \geq 1$ là một cấp số nhân.

b) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

a) Ta có $v_n = u_n + 3$, suy ra $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = (4u_n + 9) + 3$. Do đó $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(4u_n + 9) + 3}{u_n + 3} = \frac{4(u_n + 3)}{u_n + 3} = 4$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 2 + 3 = 5$ và công bội $q = 4$.

b) Do (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = 5 \\ q = 4 \end{cases}$ nên số hạng tổng quát của $v_n = v_1 . q^{n-1} = 5.4^{n-1}$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n = v_n - 3 = 5.4^{n-1} - 3$.

Ví dụ 2: Xét trong các dãy số số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bối của cấp số nhân đó:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a). $u_n=(-3)^{2n+1}$ b). $u_n=(-1)^n.5^{3n+2}$

c). $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=u_n^2\end{cases}$ d). $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=\dfrac{9}{u_n}\end{cases}$

Lời giải

a). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}}=(-3)^2=9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=9$.

b). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(-1)^{n+1}.5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n.5^{3n+2}}=-1.5^3=-125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=-125$.

c). Ta có $u_2=u_1^2=4$, $u_3=u_2^2=16$, $u_4=u_3^2=256$, suy ra $\dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{4}{2}=2$ và $\dfrac{u_4}{u_3}=\dfrac{256}{16}=16$

$\Rightarrow\dfrac{u_2}{u_1}\neq\dfrac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\dfrac{9}{u_n}}{\dfrac{9}{u_{n-1}}}=\dfrac{u_{n-1}}{u_n}\Rightarrow u_{n+1}=u_{n-1},\forall n\geq 2$. Do đó có:

$u_1=u_3=u_5=....=u_{2n+1}....$ (1)

Và $u_2=u_4=u_6=....=u_{2n}=...$ (2)

Theo đề bài có $u_1=3\Rightarrow u_2=\dfrac{9}{u_1}=3$ (3)

Từ (1), (2),(3) suy ra $u_1=u_2=u_3=u_4=u_5=....=u_{2n}=u_{2n+1}....$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=1$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=4u_n+9\end{cases},\forall n\geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n=u_n+3,\forall n\geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

Vì có $v_n=u_n+3$ (1) $\Rightarrow v_{n+1}=u_{n+1}+3$ (2).

Theo đề $u_{n+1}=4u_n+9\Rightarrow u_{n+1}+3=4(u_n+3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1}=4v_n,\forall n\geq 1\Rightarrow\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q=4$ và số hạng đầu $v_1=u_1+3=5$.

Ví dụ 4: Cho x, 3, y theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4=y\sqrt{3}$. Tìm x, y.

Lời giải

Ta có: $x.y=9\Rightarrow y=\dfrac{9}{x}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Thay vào $x^4 = y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 = \frac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5 = \left(\sqrt{3}\right)^5 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

$\Rightarrow y = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Kết luận $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Dạng 2. Xác định các số hạng của cấp số nhân, tổng của cấp số nhân

1. Phương pháp

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1, giải hệ phương trình này tìm được q và u_1.

Để xác định số hạng thứ k, ta sử dụng công thức: $u_k = u_1.q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

Lời giải

a). $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^4\right) = 51 \quad (*) \\ u_1q\left(1+q^4\right) = 102 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q\left(1+q^4\right)}{u_1\left(1+q^4\right)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{17} = 3.$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 135 \\ u_1.q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right) = 135 \quad (*) \\ u_1q^3\left(1+q+q^2\right) = 40 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q^3\left(1+q+q^2\right)}{u_1\left(1+q+q^2\right)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{135}{1+q+q^2} = \frac{1215}{19}.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Kết luận có công bội $q=\frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1=\frac{1215}{19}$.

c) $\begin{cases}u_2=6\\S_3=43\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q=6\\u_1+u_2+u_3=43\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q=6\\u_1+u_1q+u_1q^2=43\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q=6\quad(*)\\u_1\left(1+q+q^2\right)=43\quad(**)\end{cases}$. Lấy $\frac{(*)}{(**)}\Leftrightarrow\frac{u_1q}{u_1\left(1+q+q^2\right)}=\frac{6}{43}$

$\Leftrightarrow 43q=6\left(1+q+q^2\right)\Leftrightarrow 6q^2-37q+6=0\Leftrightarrow q=6\vee q=\frac{1}{6}$

Với $q=6\Rightarrow u_1=1$. Với $q=\frac{1}{6}\Rightarrow u_1=36.$

Kết luận $\begin{cases}q=6\\u_1=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}q=\frac{1}{6}\\u_1=36\end{cases}$

Ví dụ 2: Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases}u_1+u_5=51\\u_2+u_6=102\end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.

b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?

c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

a). Ta có $\begin{cases}u_1+u_5=51\\u_2+u_6=102\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q^4=51\\u_1q+u_1q^5=102\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1(1+q^4)=51\quad(*)\\u_1q(1+q^4)=102\quad(**)\end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)}\Leftrightarrow\frac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)}=\frac{102}{51}\Leftrightarrow q=2\Rightarrow u_1=3.$

b). Có $S_n=3069\Leftrightarrow u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=3069\Leftrightarrow 3.\frac{1-2^n}{1-2}=3069\Leftrightarrow 2^n=1024\Rightarrow n=10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

c).Có $u_k=12288\Leftrightarrow u_1.q^{k-1}=12288\Leftrightarrow 3.2^{k-1}=12288\Leftrightarrow 2^{k-1}=4096=2^{12}$

$\Rightarrow k-1=12\Leftrightarrow k=13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

Ví dụ 3: Cho cấp số nhân (u_n). Tìm u_1 và q, biết rằng:

1) $\begin{cases}u_2+u_3+u_4=\frac{35}{2}\\u_1u_5=25\\u_i>0(i=1,...,5)\end{cases}$ 2) $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\u_1+u_7=325.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}u_2+u_4+u_6=-42\\u_3+u_5=20\end{cases}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

4) $u_1+u_6=165; u_3+u_4=60.$

5). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85. \end{cases}$

6) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0 \\ u_1^3+u_3^3=189 \end{cases}$

8) $\begin{cases} u_1u_2u_3=1728 \\ u_1+u_2+u_3=63 \end{cases}$

9). $\begin{cases} u_1+u_3=3 \\ u_1^2+u_3^2=5 \end{cases}$

10). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=7 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=21 \end{cases}$

Lời giải

1). $\begin{cases} u_2+u_3+u_4=\dfrac{35}{2} \\ u_1u_5=25 \\ u_i>0 (i=1,,,5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q+u_1.q^2+u_1.q^3=\dfrac{35}{2} \quad (1) \\ u_1.u_1.q^4=25 \quad (2) \end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow (u_1.q^2)=5^2 \Leftrightarrow u_1.q^2=5 \Rightarrow u_1=\dfrac{5}{q^2}$ thay vào (1) được:

$\dfrac{5}{q^2}(q+q^2+q^3)=\dfrac{35}{2} \Leftrightarrow 2(1+q+q^2)=79 \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}.$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=\dfrac{5}{4}$. Với $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=20.$

2). $\begin{cases} u_1-u_3+u_5=65 \\ u_1+u_7=325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1q^2+u_1q^4=65 \\ u_1+u_1q^6=325. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q^2+q^4)=65 \quad (1) \\ u_1(1+q^6)=325 \quad (2) \end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \dfrac{1+q^6}{1-q^2+q^4}=\dfrac{325}{65} \Leftrightarrow \dfrac{(1+q^2)(1-q^2+q^4)}{1-q^2+q^4}=5 \left(vi\ 1+q^6=1+(q^2)^3\right)$

$\Leftrightarrow 1+q^2=5 \Leftrightarrow q^2=4 \Leftrightarrow q=\pm 2.$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=\dfrac{65}{1-2^2+2^4}=5$. Với $q=-2 \Rightarrow u_1=\dfrac{65}{1-(-2)^2+(-2)^4}=5.$

3). $\begin{cases} u_2+u_4+u_6=-42 \\ u_3+u_5=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q+u_1.q^3+u_1.q^5=-42. \\ u_1.q^2+u_1.q^4=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(1+q^2+q^4)=-42 \quad (1) \\ u_1.q(1+q^2)=20 \quad (2) \end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{1+q^2+q^4}{q(1+q^2)}=-\dfrac{21}{10} \Leftrightarrow 10+10q^2+10q^4=-21q-21q^3$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$\Leftrightarrow 10q^4+21q^3+10q^2+21q+10=0 \Leftrightarrow 10q^2+21q+10+\frac{21}{q}+\frac{10}{q^2}=10$

$\Leftrightarrow 10\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)+21\left(1+\frac{1}{q}\right)+10=0 \quad (*)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \Leftrightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện $|t|\geq 2$

$(*) \Leftrightarrow 10\left(t^2-2\right)+21t+10=0 \Leftrightarrow 10t^2+21t-10=0 \Leftrightarrow$ t$=-\frac{5}{2} \vee t=\frac{2}{5}$ (loại).

Với $t=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0 \Leftrightarrow q=-\frac{1}{2} \ \vee \ q=-2$

- Nếu $q=-\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{20}{q^2+q^4}=\frac{20}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^4}=64$

- Nếu $q=-2 \Rightarrow u_1=\frac{20}{q^2+q^4}=\frac{20}{2^2+2^4}=1.$

4). $u_1+u_6=165;\ u_3+u_4=60.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q^5=165 \\ u_1q^2+u_1q^3=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^5\right)=165 \quad (1) \\ u_1q^2\left(1+q\right)=60 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q^5}{q^2(1+q)}=\frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{(1+q)\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right)}{q^2(1+q)}=\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow 4\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right)=11q^2 \Leftrightarrow 4q^4-4q^3-7q^2-4q+4=0$

$\Leftrightarrow \frac{4q^4}{q^2}-\frac{4q^3}{q^2}-\frac{7q^2}{q^2}-\frac{4q}{q^2}+\frac{4}{q^2}=0 \Leftrightarrow 4\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-4\left(q+\frac{1}{q}\right)-7=0 \quad (*)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t|\geq 2$.

$(*) \Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right)-4t-7=0 \Leftrightarrow 4t^2-4t-15=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \ \vee \ t=-\frac{3}{2}$ (loại).

Với $t=\frac{5}{2} \Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \ \vee$ q$=\frac{1}{2}$

- với $q=2 \Rightarrow u_1=\frac{165}{1+q^5}=\frac{165}{1^2+2^5}=5$ • với $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{165}{1+q^2}=\frac{165}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5}=160.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

5). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=15 \\ u_1^2+u_1^2q^2+u_1^2q^4+u_1q^6=85. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=15 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1+q+q^2+q^3\right)^2=15^2 \quad (1) \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85 \quad (2). \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{\left(1+q+q^2+q^3\right)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{\left[(1+q)+q^2(1+q)\right]^2}{\left(1+q^2\right)+q^4\left(1+q^2\right)}=\frac{45}{17}$

$\Leftrightarrow \frac{\left[(1+q)\left(1+q^2\right)\right]^2}{\left(1+q^2\right)+\left(1+q^4\right)}=\frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{(1+q)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\frac{45}{17} \Leftrightarrow \frac{\left(1+2q+q^2\right)\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\frac{45}{17}$

$\Leftrightarrow 17\left(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4\right)=45\left(1+q^4\right)$

$\Leftrightarrow 28q^4-34q^3-34q^2-34q+28=0 \Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2}-\frac{34q^3}{q^2}-\frac{34q^2}{q^2}-\frac{34q}{q^2}+\frac{28}{q^2}=0$ (vì dễ dàng thấy $q\neq 0$)

$\Leftrightarrow 28q^2-34q-34-\frac{34}{q}+28=0 \Leftrightarrow 14\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-17\left(q+\frac{1}{q}\right)-17=0 \quad (*)$

Đặt $t=q+\frac{1}{q} \Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t|\geq 2$.

$(*) \Leftrightarrow 14\left(t^2-2\right)-17t-17=0 \Leftrightarrow 14t^2-17t-45=0 \Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \vee t=-\frac{9}{7}$ (loại)

Với $t=\frac{5}{2} \Rightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\frac{1}{2}$

• với $q=2 \Rightarrow u_1=1$. • với $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{15}{1+q+q^2+q^3}=8$.

6). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=13 \quad (*) \\ u_1q^3\left(1+q+q^2\right)=351 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3=27 \Rightarrow q=3 \Rightarrow u_1=\frac{13}{1+q+q^2}=\frac{13}{1+3+9}=1$.

7). $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0 \\ u_1^3+u_3^3=189. \end{cases} \quad (1)$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}8u_1q-5\sqrt{5}u_1q^4=0\\ u_1{}^3+\left(u_1q^2\right)^3=189.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8=5\sqrt{5}q^3\Rightarrow q^3=\dfrac{8}{5\sqrt{5}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^3\Rightarrow q=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ u_1{}^3\left(1+q^6\right)=189\Rightarrow u_1{}^3=\dfrac{189}{1+q^6}=125\Rightarrow u_1=5.\end{cases}$

8). $\begin{cases}u_1u_2u_3=1728\\ u_1+u_2+u_3=63\end{cases}\quad(1)$

$(1)\Leftrightarrow\begin{cases}u_1.u_1.q.u_1.q^2=1728\\ u_1+u_1q+u_1q^2=\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(u_1q\right)^3=12^3\\ u_1\left(1+q+q^2\right)=63\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q=12\\ u_1\left(1+q+q^2\right)=63\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{12}{q}\\ \dfrac{12}{q}\left(1+q+q^2\right)=63\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=\dfrac{12}{q}\\ 12q^2-51q+12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=4\Rightarrow u_1=3\\ q=\dfrac{1}{4}\Rightarrow u_1=48.\end{cases}$

9). $\begin{cases}u_1+u_3=3\\ u_1{}^2+u_3{}^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q^2\right)=3\\ u_2\left(1+q^4\right)=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1{}^2\left(1+q^2\right)^2=9\quad(*)\\ u_1{}^2\left(1+q^4\right)=5\quad(**)\end{cases}$

Lấy $\dfrac{(*)}{(**)}\Leftrightarrow\dfrac{\left(1+q^2\right)^2}{1+q^4}=\dfrac{9}{5}$. Đặt: $t=q^2,t\ge0.$

$\Leftrightarrow5\left(1+t\right)^2=9\left(1+t^2\right)\Leftrightarrow4t^2-10t+4=0\Leftrightarrow t=2\ \vee\ \mathrm{t}=\dfrac{1}{2}$

Với $t=2\Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$

$\bullet q=\sqrt{2}\Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=1\quad\bullet q=-\sqrt{2}\Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=1$

Với $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow q=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\bullet q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=2\quad\bullet q=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow u_1=\dfrac{3}{1+q^2}=2.$

10). $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=7\\ u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=7\\ u_1{}^2+\left(u_1q\right)^2+\left(u_1q^2\right)^2=21\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=7\\ u_1{}^2\left(1+q^2+q^4\right)=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1{}^2\left(1+q+q^2\right)^2=49\ (*)\\ u_1{}^2\left(1+q^2+q^4\right)=21\ (**)\end{cases}$. Lấy $\dfrac{(*)}{(**)}$ được:

$\dfrac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4}=\dfrac{49}{21}\Leftrightarrow21\left(1+q^2+q^4+2q+2q^2+2q^3\right)=49\left(1+q^2+q^4\right)$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$\Leftrightarrow 21\left(1+2q+3q^2+2q^3+q^4\right)=49\left(1+q^2+q^4\right)\Leftrightarrow 28q^4-42q^3-14q^2-42q+28=0.$

$\Leftrightarrow \frac{28q^4}{q^2}-\frac{42q^3}{q^2}-\frac{14q^2}{q^2}-\frac{42q}{q^2}+\frac{28}{q^2}=0\Leftrightarrow 28q^2-42q-14-\frac{42}{q}+\frac{28}{q^2}=0$

$\Leftrightarrow 28\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-42\left(q+\frac{1}{q}\right)-14=0 \quad (2)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q}\Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2\Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t|\geq 2$

$(2)\Leftrightarrow 28\left(t^2-2\right)-42t-14=0\Leftrightarrow 28t^2-42t-70=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}\vee t=-1$ (loại)

Với $t=\frac{5}{2}\Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2 \ \vee \ q=\frac{1}{2}$

• $q=2\Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=1$ • $q=\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=4$

Ví dụ 3: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases}u_4-u_2=72\\u_5-u_3=144\end{cases}$ b) $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\u_1+u_7=325\end{cases}$ c) $\begin{cases}u_3+u_5=90\\u_2-u_6=240\end{cases}$

d) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=14\\u_1.u_2.u_3=64\end{cases}$ e) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=21\\\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{7}{12}\end{cases}$ f) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=30\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340\end{cases}$

Lời giải

a) $\begin{cases}u_4-u_2=72\\u_5-u_3=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^3-u_1q=72\\u_1q^4-u_1q^2=144\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q\left(q^2-1\right)=72 \quad (1)\\u_1q^2\left(q^2-1\right)=144 \quad (2)\end{cases}$

Lấy (2):(1) được: $q=2$, thay $q=2$ vào (1) được $u_1=12$

c) $\begin{cases}u_3+u_5=90\\u_2-u_6=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2+u_1q^4=90\\u_1q-u_1q^5=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2\left(1+q^2\right)=90 \quad (1)\\u_1q\left(1-q^4\right)=240 \quad (2)\end{cases}$

Lấy $\frac{(2)}{(1)}\Leftrightarrow\frac{u_1q\left(1-q^4\right)}{u_1q^2\left(1+q^2\right)}=\frac{240}{90}\Leftrightarrow\frac{\left(1-q^2\right)\left(1+q^2\right)}{q\left(1+q^2\right)}=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\frac{1-q^2}{q}=\frac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 3q^2+8q-3=0\Leftrightarrow q=\frac{1}{3}\vee q=-3$

Với $q=\frac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1=729$.

Với $q=-3$ thay vào (1) được $u_1=1$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

d) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=14 \\ u_1.u_2.u_3=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=14 \\ u_1u_1qu_1q^2=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=14 & (1) \\ \left(u_1q\right)^3=64 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow u_1q=4 \Rightarrow u_1=\dfrac{4}{q}$, thay vào (1) được $\dfrac{4}{q}\left(1+q+q^2\right)=14$

$\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=2$. Với $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=8$.

e) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}=\dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=21 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_1q}+\dfrac{1}{u_1q^2}=\dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=21 & (1) \\ \dfrac{q^2+q+1}{u_1q^2}=\dfrac{7}{12} & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 1+q+q^2=\dfrac{21}{u_1}$, thay vào (2): $\dfrac{21}{u_1}\cdot\dfrac{1}{u_1q^2}=\dfrac{7}{12} \Leftrightarrow \left(u_1q\right)^2=36 \Leftrightarrow u_1q=\pm 6$

Với $u_1=\dfrac{6}{q}$ thay vào (1): $\dfrac{6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$

Nếu $q=2 \Rightarrow u_1=3$. Nếu $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=12$

Với $u_1=-\dfrac{6}{q}$ thay vào (1):

$-\dfrac{6}{q}\left(1+q+q^2\right)=21 \Leftrightarrow 2q^2+9q+2=0 \Leftrightarrow q=\dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \vee q=\dfrac{-9-\sqrt{65}}{4}$

Nếu $q=\dfrac{-9+\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1=\dfrac{27+3\sqrt{65}}{2}$. Nếu $q=\dfrac{-9-\sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1=\dfrac{27-3\sqrt{65}}{2}$

f) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=30 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=30 \\ u_1^2+u_1^2q^2+u_1^2q^4+u_1^2q^6=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q\right)\left(1+q^2\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)^2=900 & (1) \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 & (2) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\dfrac{45}{17}$, quy đồng rút gọn được: $14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0$

$\Leftrightarrow 14q^2-17q-17-\dfrac{17}{q}+\dfrac{14}{q^2}=0$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$\Leftrightarrow 14\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-17\left(q+\frac{1}{q}\right)-17=0$. Đặt $t=q+\frac{1}{q}$, điều kiện $|t|\geq 2$

$\Leftrightarrow 14t^2-17t-45=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}\vee t=-\frac{9}{7}$ (loại).

Với $t=\frac{5}{2}\Rightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2\vee q=\frac{1}{2}$

Với $q=2\Rightarrow u_1=2$. Với $q=\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=16$

Ví dụ 4: Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1,a^2,b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}1+b=2a\\b^2=a^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+b=2a\,(1)\\b=\pm a^2\end{cases}$

Với $b=a^2$ thay vào (1) được $1+a^2=2a\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=1$

Với $b=-a^2$ thay vào (1) được $1-a^2=2a\Leftrightarrow a^2+2a-1=0\Leftrightarrow a=-1+\sqrt{2}\vee a=-1-\sqrt{2}$

• $a=-1+\sqrt{2}\Rightarrow b=-\left(-1+\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow b=-3+2\sqrt{2}$

• $a=-1-\sqrt{2}\Rightarrow b=-\left(-1-\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow b=-3-2\sqrt{2}$

Kết luận $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=-1+\sqrt{2}\\b=-3+2\sqrt{2}\end{cases}\vee\begin{cases}a=-1-\sqrt{2}\\b=-3-2\sqrt{2}\end{cases}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Ví dụ 5: Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

Lời giải

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}S_n=728\\u_n=486\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=728\\u_1q^{n-1}=486\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-u_1q^n=728(1-q)\\u_1q^n=486q\end{cases}\Rightarrow u_1-486q=728(1-q)\Leftrightarrow u_1=2$

Ví dụ 6: Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21.Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1,u_2,u_3 thành lập cấp số cộng.

Theo đề bài: $u_1+2;u_2+3;u_3+9$ là ba số liên tiếp tạo thành cấp số nhân.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Theo đề bài: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ u_1+u_3=2u_2 \\ (u_1+2)(u_3+9)=(u_2+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2=21 \\ u_1+u_3=2u_2 \\ (u_1+2)(u_3+9)=(u_2+3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2=7 \\ u_1=14-u_3 \\ (14-u_3+2)(u_3+9)=100 \quad (*) \end{cases}$

Giải $(*): (16-u_3)(u_3+9)=100 \Leftrightarrow -u_3^2+7u_3+44=0 \Leftrightarrow u_3=11 \vee u_3=-4$

Với $u_3=11 \Rightarrow u_1=3$. Với $u_3=-4 \Rightarrow u_1=18$.

Ví dụ 7: Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

Lời giải

Gọi u_1,u_2,u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1-1;u_3-19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=65 \\ u_1-1+u_3-19=2u_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=65 \\ u_1-2u_2+u_3=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1.q+u_1.q^2=65 \\ u_1-2u_1.q+u_1.q^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=65 \quad (1) \\ u_1(1-2q+q^2)=20 \quad (2) \end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\frac{65}{20}=\frac{13}{4} \Leftrightarrow 4(1+q+q^2)=13(1-2q+q^2)$

$\Leftrightarrow 9q^2-30q+9=0 \Leftrightarrow q=3 \vee q=\frac{1}{3}$

Vì u_1,u_2,u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q=3 \Rightarrow u_1=5$

Vậy $u_1=5;\ u_2=15;\ u_3=45$.

Ví dụ 8: Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1,u_2,u_3 với công bội là q. Theo đề bài ta có hệ

phương trình: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=19 \\ u_1.u_2.u_3=216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=19 \\ (u_1q)^3=6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2)=19 \quad (*) \\ u_1q=6 \Rightarrow u_1=\frac{6}{q} \end{cases}$

Thay $u_1=\frac{6}{q}$ vào $(*)$ được: $6q^2-13q+6=0 \Leftrightarrow q=\frac{3}{2}$ hoặc $q=\frac{2}{3}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Với $q=\frac{3}{2}\Rightarrow u_1=4,u_2=6,u_3=9$.

Với $q=\frac{2}{3}\Rightarrow u_1=9,u_2=6,u_3=4$.

Ví dụ 9: Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Lời giải

Theo đề bài ta có $\begin{cases}S_n=889\\u_n=448\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=889\\u_1q^{n-1}=448\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^n-u_1=889(q-1) & (1)\\u_1q^n=448q & (2)\end{cases}$

Thay (2) vào (1) được: $448q-7=889q-889\Leftrightarrow q=2$

Ví dụ 10: Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

Lời giải

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}u_1-u_2=35\\u_3-u_4=560\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-u_1q=35\\u_1q^2-u_1q^3=560\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1(1-q)=35 & (1)\\u_1q^2(1-q)=560 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2=16\Leftrightarrow q=\pm4$

Với $q=4$ thay vào (1) được $u_1=-\frac{35}{3},u_2=u_1q=-\frac{140}{3},u_3=-\frac{560}{3},u_3=-\frac{2240}{3}$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 11: Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b + 1)^2$, ab + 5, $(a + 1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Theo tính chất của CSC ta có: $a+(2a+b)=2(a+2b)$ (1)

Theo tính chất của CSN ta có: $(b+1)^2(a+1)^2=(ab+5)^2$ (2)

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a=3b$, thay vào (2):

$(b+1)^2(3b+1)^2=(3b^2+5)^2\Leftrightarrow(b+1)(3b+1)=\pm(3b^2+5)$

Với $(b+1)(3b+1)=3b^2+5\Leftrightarrow b=1\Rightarrow a=3$

Với $(b+1)(3b+1)=-3b^2-5\Leftrightarrow 6b^2+4b+6=0$ (vô nghiệm).

Kết luận $a=3,b=1$

Ví dụ 12: Tính các tổng sau:

a). $S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

b). $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$

c). $S_n=\left(3+\frac{1}{3}\right)^2+\left(9+\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\frac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666...6}_{n \text{ so } 6}$

Lời giải

a). Ta có dãy số $2,2^2,2^3,\cdots,2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=2$ và công bội $q=\frac{2^2}{2}=2$. Do đó $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=2.\frac{1-2^n}{1-2}=2\left(2^n-1\right)$.

b). Ta có dãy số $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{2}$ và công bội $q=\frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$. Do đó $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$.

c). $S_n=\left(3+\frac{1}{3}\right)^2+\left(9+\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(3^n+\frac{1}{3^n}\right)^2$

$=3^2+2+\frac{1}{3^2}+3^4+2+\frac{1}{3^4}+\cdots+3^{2n}+2+\frac{1}{3^{2n}}$

$=\left(3^2+3^4+\cdots+3^{2n}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{2n}}\right)+\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{n}$

- Có dãy số $3^2,3^4,\cdots,3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=3^2$ và công bội $q=\frac{3^4}{3^2}=9$. Do đó $S_1=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=9.\frac{1-9^n}{1-9}=\frac{9}{8}\left(9^n-1\right)$.

- Có dãy số $\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^4},\cdots,\frac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1=\frac{1}{3^2}$ và công bội $q=\frac{1}{9}$. Do đó $S_1=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{9}.\frac{1-\frac{1}{9^n}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)=\frac{9^n-1}{8.9^n}$.

Vậy $S_n=\frac{9}{8}\left(9^n-1\right)+\frac{9^n-1}{8.9^n}+2n=\frac{\left(9^n-1\right)\left(9^{n+1}+1\right)}{8.9^n}+2n$.

d). $S_n=6+66+666+\cdots+\underbrace{666...6}_{n \text{ so } 6}=\frac{6}{9}\left(9+99+999+\cdots+\underbrace{999...9}_{n}\right)$

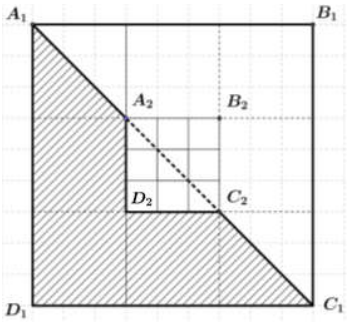
$=\frac{2}{3}\left[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^n-1)\right]$

$=\frac{2}{3}\left[10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n\right]=\frac{2}{3}\left[10.\frac{10^n-1}{10-1}-n\right]=\frac{20}{27}\left(10^n-1\right)-\frac{2n}{3}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Dạng 3. Các bài toán thực tế

Câu 1. Với hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ như hình vẽ bên, cách tô màu như phần gạch sọc được gọi là cách tô màu "đẹp". Một nhà thiết kế tiến hành tô màu cho một hình vuông như hình bên, theo quy trình sau:



Bước 1: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$.

Bước 2: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ thành 9 phần bằng nhau như hình vẽ.

Bước 3: Tô màu "đẹp" cho hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ là hình vuông ở chính giữa khi chia hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ thành 9 phần bằng nhau. Cứ tiếp tục như vậy. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bước để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$.

Lời giải

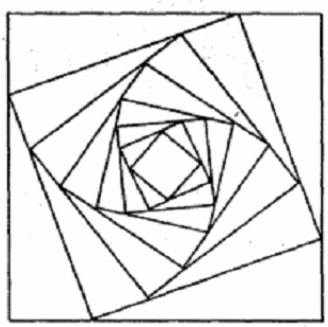
Gọi diện tích được tô màu ở mỗi bước là u_n, $n \in \mathbb{N}^*$. Dễ thấy dãy các giá trị u_n là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \dfrac{4}{9}$ và công bội $q = \dfrac{1}{9}$.

Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu trong cấp số nhân đang xét thì $S_k = \dfrac{u_1\left(q^k - 1\right)}{q - 1}$.

Để tổng diện tích phần được tô màu chiếm $49,99\%$ thì $\dfrac{u_1\left(q^k - 1\right)}{q - 1} \geq 0,4999 \Leftrightarrow k \geq 3,8$.

Vậy cần ít nhất 4 bước.

Câu 2. Cho hình vuông (C_1) có cạnh bằng a. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông (C_2)(Hình vẽ).



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Từ hình vuông (C_2) lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, .., C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông $C_i \left(i \in \{1,2,3,.....\}\right)$. Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + ...S_n + ...$ Biết $T = \frac{32}{3}$, tính a?

Lời giải

Cạnh của hình vuông (C_2) là: $a_2 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Do đó diện tích $S_2 = \frac{5}{8}a^2 = \frac{5}{8}S_1$

.

Cạnh của hình vuông (C_3) là: $a_3 = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a_2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a_2\right)^2} = \frac{a_2\sqrt{10}}{4} = a\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$. Do đó diện tích $S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 a^2 = \frac{5}{8}S_2$. Lý luận tương tự ta có các $S_1, S_2, S_3, ...S_n, ...$ tạo thành một dãy cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = S_1$ và công bội $q = \frac{5}{8}$.

$T = \frac{S_1}{1-q} = \frac{8a^2}{3}$. Với $T = \frac{32}{3}$ ta có $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 2.15. Xác định công bội, số hạng thứ 5, số hạng tổng quát và số hạng thứ 100 của mỗi cấp số nhân sau:

a) $1,4,16,\ldots$;

b) $2,-\frac{1}{2},\frac{1}{8},\ldots$

Lời giải

a) Ta có: $4:1 = 4, 16:4 = 4$

Do đó công bội $q = 4$

Số hạng tổng quát: $u_n = 4^{n-1}$

Số hạng thứ 5 : $u_5 = 4^{5-1} = 256$

Số hạng thứ 100: $u_{100} = 4^{100-1} = 4.017 \times 10^{59}$

b) Ta có: $\left(-\frac{1}{2}\right):2 = -\frac{1}{4}; \frac{1}{8}:\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Do đó công bội $q = -\frac{1}{4}$

Số hạng tổng quát: $u_n = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Số hạng thứ $5: u_5 = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{5-1} = \frac{1}{128}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Số hạng thứ 100: $u_{100}=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{100-1}=-4.978\times10^{-60}$

Bài 2.16. Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số (u_n) sau và xem nó có phải là cấp số nhân không. Nếu nó là cấp số nhân, hãy tìm công bội q và viết công thức số hạng tổng quát của nó dưới dạng $u_n=u_1\cdot q^{n-1}$.

a) $u_n=5n$;

b) $u_n=5^n$;

c) $u_1=1,u_n=nu_{n-1}$;

d) $u_1=1,u_n=5u_{n-1}$.

Lời giải

a) Năm số hạng đầu của dãy: $5;10;15;20;25$

Ta có: $10:5=2\neq15:10=\frac{3}{2}$ suy ra (u_n) không phải cấp số nhân

b) Năm số hạng đầu của dãy: $5;25;125;625;3125$

Ta có $u_n=5^n$ nên $u_{n+1}=5^{n+1}\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5^{n+1}}{5^n}=5(\forall n\geq2)$.

Do đó (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$

Số hạng tổng quát: $u_n=5\times5^{n-1}$

c) Năm số hạng đầu của dãy: $1;2;6;24;120$

Ta có: $2:1=2\neq6:2=3$ nên (u_n) không phải là cấp số nhân

d) Năm số hạng đầu của dãy: $1;5;25;125;625$

Ta có: $u_n=5u_{n-1}$ nên $\frac{u_n}{u_{n-1}}=5(\forall n\geq2)$

Do đó (u_n) là cấp số nhân với cong sai $q=5$

Số hạng tổng quát: $u_n=5^{n-1}$

Bài 2.17. Một cấp số nhân có số hạng thứ 6 bằng 96 và số hạng thứ 3 bằng 12 . Tìm số hạng thứ 50 của cấp số nhân này.

Lời giải

Gọi số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n=u_1\times q^{n-1}$

Ta có: $u_6=u_1\times q^5=96;u_3=u_1\times q^2=12$

Nên $\frac{u_1q^5}{u_1q^2}=\frac{96}{12}\Rightarrow q^3=8\Rightarrow q=2$

Do đó: $u_1=3$

Suy ra công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n=3\times2^{n-1}$

Vậy $u_{50}=3\times2^{50-1}=1.689\times10^{15}$

Bài 2.18. Một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 5 và công bội bằng 2 . Hỏi phải lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số nhân này đề có tổng bằng 5115 ?

Lời giải

Ta có số hạng tổng quát của dãy là $u_n=5\times2^{n-1}$

Gọi n là số các số hạng cần lấy tổng:

$$5115=S_n=\frac{5(1-2^n)}{1-2}=-5+5\times2^n\Rightarrow2^n=1024\Rightarrow n=10$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vậy số các số hạng cần lấy tổng là 10

Bài 2.19. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá trị của chiếc máy ủi mỗi năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 3 và công bội $q=0,8$

Giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là: $u_5=3\times 0,8^{5-1}=0,1875$ (tỷ đồng)

Bài 2.20. Vào năm 2020 , dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là $0,91\%$. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải

Dân số hằng năm lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 97 và công bội q= 1.0091

Dân số của quốc gia đó năm 2030 (tức $n=11$) là $u_{11}=97\times 1.0091^{11-1}=106.197$ (triệu người)

Bài 2.21. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50mg , và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày cảu bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q=0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu cảu cấp số nhân này và bằng: $S_n=\dfrac{50\left[1-(0.5)^{10}\right]}{1-0.5}=99.902(\text{mg})$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

A. $2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots$ **B.** $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots$

C. $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots$ **D.** $a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots (a\neq 0)$.

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án C: $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ 4^2;\ \cdots\longrightarrow \dfrac{u_2}{u_1}=4\neq\dfrac{9}{4}=\dfrac{u_3}{u_2}$

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

Nhận xét: Dãy (u_n) với $u_n\neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n=a.q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ

$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \ldots\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=2^n$.

$1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \cdots\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=(-1)^n$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$a;\ a^3;\ a^5;\ a^7;\ \cdots (a\neq 0)\longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n=a^{2n-1}=\frac{1}{a}.\left(a^2\right)^n$.

Câu 2: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ \cdots$ **B.** $3;\ 3^2;\ 3^3;\ 3^4;\ \cdots$ **C.** $4;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \cdots$ **D.** $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots$

Lời giải

Chọn D

Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là $2;3;\frac{1}{2}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi};\ \frac{1}{\pi^2};\ \frac{1}{\pi^4};\ \frac{1}{\pi^6};\ \cdots\longrightarrow \frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{\pi}\neq\frac{1}{\pi^2}=\frac{u_3}{u_2}$

Câu 3: Dãy số $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ \cdots$ là một cấp số nhân với:

A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.

B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.

D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân: $1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 32;\ldots\longrightarrow\begin{cases}u_1=1\\ q=\frac{u_2}{u_1}=2\end{cases}$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=-2$ và $q=-5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. $-2;\ 10;\ 50;\ -250$. **B.** $-2;\ 10;\ -50;\ 250$.

C. $-2;\ -10;\ -50;\ -250$. **D.** $-2;\ 10;\ 50;\ 250$.

Lời giải.

Chọn B

$$\begin{cases}u_1=-2\\ q=-5\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-2\\ u_2=u_1q=10\\ u_3=u_2q=-50\\ u_4=u_3q=250\end{cases}$$

Câu 5: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720. **B.** 81. **C.** 64. **D.** 56.

Lời giải

Chọn B

Ta có cấp số nhân (u_n) có:

$$\begin{cases}u_k=16\\ u_{k+1}=36\end{cases}\Rightarrow q=\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{9}{4}\longrightarrow u_{k+2}=u_{k+1}q=81$$

Câu 6: Tìm x để các số $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=14$. **B.** $x=32$. **C.** $x=64$. **D.** $x=68$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân $2;\ 8;\ x;\ 128$ theo thứ tự đó sẽ là $u_1; u_2; u_3; u_4$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{u_2}{u_1}=\dfrac{u_3}{u_2} \\ \dfrac{u_3}{u_2}=\dfrac{u_4}{u_3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{2}=\dfrac{x}{8} \\ \dfrac{128}{x}=\dfrac{x}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=32 \\ x^2=1024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=32 \\ x=32 \\ x=-32 \end{cases} \Leftrightarrow x=32$$

Câu 7: Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1;\ x;\ 2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $x=\pm\dfrac{1}{3}$. **C.** $x=\pm\sqrt{3}$. **D.** $x=\pm 3$.

Lời giải

Chọn A

Cấp số nhân $2x-1;\ x;\ 2x+1 \longrightarrow (2x-1)(2x+1)=x^2 \Leftrightarrow 3x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 8: Tìm x để ba số $1+x;\ 9+x;\ 33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=1$. **B.** $x=3$. **C.** $x=7$. **D.** $x=3;\ x=7$.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân $1+x;\ 9+x;\ 33+x \longrightarrow (1+x)(33+x)=(9+x)^2 \Leftrightarrow x=3$.

Câu 9: Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là $-2;\ x;\ -18;\ y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x=6 \\ y=-54 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-10 \\ y=-26 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=-54 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-6 \\ y=54 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Cấp số nhân: $-2;\ x;\ -18;\ y \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{-2}=\dfrac{-18}{x} \\ \dfrac{-18}{x}=\dfrac{y}{-18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 6 \\ y=\dfrac{324}{x}=\pm 54 \end{cases}$. Vậy

$(x;y)=(6;54)$ hoặc $(x;y)=(-6;-54)$

Câu 10: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $x;\ 12;\ y;\ 192$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1; y=144$. **B.** $x=2; y=72$. **C.** $x=3; y=48$. **D.** $x=4; y=36$.

Lời giải

Chọn C

Cấp số nhân: $x;\ 12;\ y;\ 192 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{12}{x}=\dfrac{y}{12} \\ \dfrac{y}{12}=\dfrac{192}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{144}{y} \\ y^2=2304 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 48 \end{cases}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 11: Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số $5; x; y; 320$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhận. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x=25 \\ y=125 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=15 \\ y=45 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=30 \\ y=90 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân: $5; x; y; 320 \longrightarrow \begin{cases} u_1=5 \\ q=\dfrac{x}{5} \\ y=u_3=u_1q^2=\dfrac{x^2}{5} \\ 320=u_4=u_1q^3=\dfrac{x^3}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}$.

Câu 12: Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6; x$ và y. Tìm y, biết rằng công bội của cấp số nhân là 6.

A. $y=216$. **B.** $y=\dfrac{324}{5}$. **C.** $y=\dfrac{1296}{5}$. **D.** $y=12$.

Lời giải

Chọn C

Cấp số nhân $x-6; x$ và y có công bội $q=6$ nên ta có

$$\begin{cases} u_1=x-6,\ q=6 \\ x=u_2=u_1q=6(x-6) \\ y=u_3=u_2q^2=36x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{36}{5} \\ y=36.\dfrac{36}{5}=\dfrac{1296}{5} \end{cases}$$

Câu 13: Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

A. $2x-1$. **B.** $2x+1$. **C.** $8x^3-4x^2-2x+1$. **D.** $8x^3+4x^2-2x-1$.

Lời giải

Chọn C

Công bội của cấp số nhân là: $q=\dfrac{4x^2-1}{2x+1}=2x-1$. Vậy số hạng thứ ba của cấp số nhân là: $(4x^2-1)(2x-1)=8x^3-4x^2-2x+1$

Câu 14: Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=u_n+1,\ n\geq 1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1=-1 \\ u_{n+1}=-3u_n,\ n\geq 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1=-2 \\ u_{n+1}=2u_n+3,\ n\geq 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1=\dfrac{\pi}{2} \\ u_n=\sin\left(\dfrac{\pi}{n-1}\right),\ n\geq 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1}=qu_n$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3}{2}.5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\frac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=5$ và số hạng đầu $u_1=\frac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q=\frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1=3$.

Lời giải

Chọn C

$u_n=\frac{3}{2}.5^n$ là cấp số nhân công bội $q=5$ và $u_1=\frac{15}{2}$

Câu 16: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=\frac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n=\frac{1}{3^n}-1$. **C.** $u_n=n+\frac{1}{3}$. **D.** $u_n=n^2-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Dãy $u_n=\frac{1}{3^{n-2}}=9.\left(\frac{1}{3}\right)^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases}u_1=3\\q=\frac{1}{3}\end{cases}$

Câu 17: Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n=7-3n$. **B.** $u_n=7-3^n$. **C.** $u_n=\frac{7}{3n}$. **D.** $u_n=7.3^n$.

Lời giải

Chọn D

Dãy $u_n=7.3^n$ là cấp số nhân có $\begin{cases}u_1=21\\q=3\end{cases}$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1;u_3;u_5;\ldots$ **B.** $3u_1;3u_2;3u_3;\ldots$

C. $\frac{1}{u_1};\frac{1}{u_2};\frac{1}{u_3};\ldots$ **D.** $u_1+2;u_2+2;u_3+2;\ldots$

Lời giải

Chọn D

Giả sử (u_n) là cấp số nhân công bội q, thì

Dãy $u_1;u_3;u_5;\ldots$ là cấp số nhân công bội q^2.

Dãy $3u_1;3u_2;3u_3;\ldots$ là cấp số nhân công bội $2q$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Dãy $\frac{1}{u_1};\ \frac{1}{u_2};\ \frac{1}{u_3};\ \ldots$ là cấp số nhân công bội $\frac{1}{q}$.

Dãy $u_1+2;\ u_2+2;\ u_3+2;\ \ldots$ không phải là cấp số nhân.

Nhận xét: Có thể lấy một cấp số nhân cụ thể để kiểm tra, ví dụ $u_n=2^n$.

Câu 19: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n=3^{n-1}$. **B.** $u_n=3^n$. **C.** $u_n=3^{n+1}$. **D.** $u_n=3+3^n$.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân $3;\ 9;\ 27;\ 81;\ \ldots\longrightarrow\begin{cases}u_1=3\\ q=\frac{9}{3}=3\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=3.3^{n-1}=3^n$.

Câu 20: Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q=3$. **B.** $q=-3$. **C.** $q=2$. **D.** $q=-2$.

Lời giải

Chọn A

Theo giải thiết ta có: $\begin{cases}u_1=2\\ u_6=486\end{cases}\longrightarrow 486=u_6=u_1q^5=2q^5\Leftrightarrow q^5=243\Leftrightarrow q=3.$

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=\frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_5=-\frac{27}{16}$. **B.** $u_5=-\frac{16}{27}$. **C.** $u_5=\frac{16}{27}$. **D.** $u_5=\frac{27}{16}$.

Lời giải

Chọn B

$\begin{cases}u_1=-3\\ q=\frac{2}{3}\end{cases}\longrightarrow u_5=u_1q^4=-3.\left(\frac{2}{3}\right)^4=-3.\frac{16}{81}=-\frac{16}{27}.$

Câu 22: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=-8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_6=130$. **B.** $u_5=256$. **C.** $S_5=256$. **D.** $q=-4$.

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = -8 = u_1 q = 2q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = -4 \\ S_5 = u_1.\dfrac{1-q^5}{1-q} = 2.\dfrac{1-(-4)^5}{1+4} = 410 \\ S_6 = 2.\dfrac{1-(-4)^6}{1+4} = -1638 \\ u_5 = u_1 q^4 = 2.(-4)^4 = 512. \end{cases}$$

Câu 23: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 5. **B.** Số hạng thứ 6.

C. Số hạng thứ 7. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải

Chọn C

$192 = u_n = u_1 q^{n-1} = 3.(-2)^{n-1} \Leftrightarrow (-1)^{n-1}.2^{n-1} = 64 = (-1)^6.2^6 \Leftrightarrow n = 7.$

Câu 24: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\dfrac{1}{10}$. Số $\dfrac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

A. Số hạng thứ 103. **B.** Số hạng thứ 104.

C. Số hạng thứ 105. **D.** Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{1}{10^{103}} = u_n = u_1 q^{n-1} = -1.\left(-\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} n \text{ chan} \\ n-1 = 103 \end{cases} \Leftrightarrow n = 104.$$

Câu 25: Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

A. 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$32805 = u_n = u_1 q^{n-1} = 5.3^{n-1} \Leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Leftrightarrow n = 9.$ Vậy u_9 là số hạng chính giữa của cấp số nhân, nên cấp số nhân đã cho có 17 số hạng.

Câu 26: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $q = \dfrac{1}{9}.$ **B.** $q = 9.$ **C.** $q = -9.$ **D.** $q = -\dfrac{1}{9}.$

Lời giải

Chọn A

Công bội $q = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{9}{81} = \dfrac{1}{9}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 27: Một dãy số được xác định bởi $u_1=-4$ và $u_n=-\frac{1}{2}u_{n-1}$, $n\geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n=2^{n-1}$. **B.** $u_n=(-2)^{n-1}$. **C.** $u_n=-4\left(2^{-n+1}\right)$. **D.** $u_n=-4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases}u_1=-4\\ u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}u_1=-4\\ q=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=-4.\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Câu 28: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=-2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10}=-511$. **B.** $S_{10}=-1025$. **C.** $S_{10}=1025$. **D.** $S_{10}=1023$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases}u_1=-3\\ q=-2\end{cases}\longrightarrow S_{10}=u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q}=-3.\frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)}=1023.$$

Câu 29: Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ⋯ Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n=4^{n-1}$. **B.** $S_n=\frac{n\left(1+4^{n-1}\right)}{2}$. **C.** $S_n=\frac{4^n-1}{3}$. **D.** $S_n=\frac{4\left(4^n-1\right)}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cấp số nhân đã cho có $\begin{cases}u_1=1\\ q=4\end{cases}\longrightarrow S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=1.\frac{1-4^n}{1-4}=\frac{4^n-1}{3}.$

Câu 30: Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6=32$. **B.** $u_6=104$. **C.** $u_6=48$. **D.** $u_6=96$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết: $\begin{cases}q=2\\ S_6=189=u_1\frac{1-q^6}{1-q}=u_1.\frac{1-2^6}{1-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=2\\ u_1=3\end{cases}\Rightarrow u_6=u_1q^5=3.2^5=96.$

Câu 31: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-6$ và $q=-2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n.

A. $n=9$. **B.** $n=10$. **C.** $n=11$. **D.** $n=12$.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $2046 = S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = -6.\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)} = 2\left((-2)^n - 1\right) \Rightarrow (-2)^n = 1024 \Leftrightarrow n = 10.$

Câu 32: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100.$ **B.** $u_4 = 124.$ **C.** $u_4 = 500.$ **D.** $u_4 = 624.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1}{q-1}\left(q^n - 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q-1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5 \end{cases}$. Khi đó

$u_4 = u_1 q^3 = 4.5^3 = 50$

Câu 33: Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \dfrac{2}{3^4}.$ **B.** $u_5 = \dfrac{1}{3^5}.$ **C.** $u_5 = 3^5.$ **D.** $u_5 = \dfrac{5}{3^5}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}} = 3\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = S_n = \dfrac{u_1}{1-q}\left(1 - q^n\right) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3(1-q) \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó

$u_5 = u_1 q^4 = \dfrac{2}{3^4}$

Câu 34: Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\dfrac{1}{2}$, công bội bằng $\dfrac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096. **B.** 2048. **C.** 1024. **D.** $\dfrac{1}{512}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} q = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{2} = u_7 = u_1 q^6 = \dfrac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \dfrac{4^6}{2} = 2048$

Câu 35: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.

A. $q = -3.$ **B.** $q = -\dfrac{1}{3}.$ **C.** $q = \dfrac{1}{3}.$ **D.** $q = 3.$

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$\begin{cases}-6=u_2=u_1q\\-486=u_6=u_1q^5=u_1q.q^4=-6.q^4\end{cases}\Rightarrow q^4=81=3^4\Rightarrow q=3.$

Câu 36: Cho cấp số nhân $u_1;\ u_2;\ u_3;\ \cdots$ với $u_1=1$. Tìm công bội q để $4u_2+5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q=-\frac{2}{5}.$ **B.** $q=0.$ **C.** $q=\frac{2}{5}.$ **D.** $q=1.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $4u_2+5u_3=4u_1q+5u_1q^2=5q^2+4q=5\left(q+\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\ge-\frac{4}{5}.$ Vậy

$\min\left(4u_2+5u_3\right)=-\frac{4}{5}$ khi $q=-\frac{2}{5}$

Câu 37: Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n=2^{n-1}.$ **B.** $u_n=2^n$ **C.** $u_n=2^{n+1}.$ **D.** $u_n=2n.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}4=u_2=u_1q\\64=u_6=u_1q^5=u_1q.q^4=4q^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\q=2\end{cases}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}=2.2^{n-1}=2^n.$

Câu 38: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k=u_1.q^{k-1}.$ **B.** $u_k=\frac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}.$ **C.** $u_k=\sqrt{u_{k+1}.u_{k+2}}.$ **D.** $u_k=u_1+(k-1)q.$

Lời giải

Chọn A

Câu 39: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\ne0$ và $q\ne0.$ Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7=u_4.q^3.$ **B.** $u_7=u_4.q^4.$ **C.** $u_7=u_4.q^5.$ **D.** $u_7=u_4.q^6.$

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases}u_4=u_1q^3\\u_7=u_1q^6\end{cases}\longrightarrow u_7=\left(u_1q^3\right).q^3=u_4q^3$

Câu 40: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1\ne0$ và $q\ne0.$ Với $1<k<m,$ đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m=u_k.q^k.$ **B.** $u_m=u_k.q^m.$ **C.** $u_m=u_k.q^{m-k}.$ **D.** $u_m=u_k.\mathrm{q}^{m+k}.$

Lời giải

Chọn C

$u_k=u_1q^{k-1}\longrightarrow u_m=u_1q^{m-1}=\left(u_1q^{k-1}\right).q^{m-k}=u_kq^{m-k}$

Câu 41: Cho một cấp số nhân có n số hạng $(n>k>55).$ Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $u_1.u_n=u_2.u_{n-1}.$ **B.** $u_1.u_n=u_5.u_{n-4}.$ **C.** $u_1.u_n=u_{55}.u_{n-55}.$ **D.** $u_1.u_n=u_k.u_{n-k+1}.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn C

$u_1u_n = u_1.u_1q^{n-1} = \left(u_1q^{k-1}\right).\left(u_1q^{m-1}\right) = u_k.u_m$ với $k+m=n+1$.

Câu 42: Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n), biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} 192 = u_6 = u_1q^5 \\ 384 = u_7 = u_1q^6 = \left(u_1q^5\right)q = 192q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{192}{q^5} = 6 \end{cases}.$$

Câu 43: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} 36 = u_4 - u_2 = u_1q\left(q^2-1\right) \\ 72 = u_5 - u_3 = u_1q^2\left(q^2-1\right) = \left[u_1q\left(q^2-1\right)\right]q = 36q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = \dfrac{36}{q\left(q^2-1\right)} = 6 \end{cases}.$$

Câu 44: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$. **B.** $q = -4$. **C.** $q = 4$. **D.** $q = -2$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^{19} = 8u_1q^{16} \\ u_1\left(1+q^4\right) = 272 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1 = \dfrac{272}{1+q^4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 16 \end{cases}.$$

Câu 45: Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\dfrac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\begin{cases} u_1, \\ u_2 > 0 \\ u_1.u_3 = 1 \\ u_3.u_5 = \dfrac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 > 0, \\ q > 0 \\ u_1^2 q^2 = 1 \\ \dfrac{1}{16} = u_1^2 q^6 = \left(u_1^2 q^2\right) q^4 = q^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = \dfrac{1}{q} = 2 \end{cases}.$$

Câu 46: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49\left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} + \dfrac{1}{u_4} + \dfrac{1}{u_5}\right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}.$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$.

A. $P = 24$. **B.** $P = 29$. **C.** $P = 34$. **D.** $P = 39$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: Nếu u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 là một cấp số nhân với công bội q thì $\dfrac{1}{u_1}, \dfrac{1}{u_2}, \dfrac{1}{u_3}, \dfrac{1}{u_4}, \dfrac{1}{u_5}$ cũng tạo thành cấp số nhân với công bội $\dfrac{1}{q}$.

Do đó từ giả thiết ta có $\begin{cases} u_1.\dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = 49\left(\dfrac{1}{u_1}.\dfrac{\dfrac{1}{q^5} - 1}{\dfrac{1}{q} - 1}\right) & (1) \\ u_1 + u_1 q^2 = 35 & (2) \end{cases}$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow u_1.\dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = \dfrac{49}{u_1}\left(\dfrac{q^5 - 1}{q^4(q - 1)}\right) \Leftrightarrow u_1^2 q^4 = 49 \Leftrightarrow u_1 q^2 = \pm 7$.

Với $u_1 q^2 = -7$. Thay vào (2), ta được $u_1 - 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 42$. Suy ra $q^2 = -\dfrac{7}{42}$: vô lý.

Với $u_1 q^2 = 7$. Thay vào (2), ta được $u_1 + 7 = 35 \Leftrightarrow u_1 = 28$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 28 \\ q = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. Khi đó $u_1 + 4q^2 = 29$.

Câu 47: Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

A. $q = \dfrac{5}{4}$. **B.** $q = 4$. **C.** $q = \dfrac{4}{3}$. **D.** $q = 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 + q + q^2\right) = 26 \\ u_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right) = 364 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1 + q + q^2\right)^2 = 26^2 & (1) \\ u_1^2\left(1 + q^2 + q^4\right) = 364 & (2) \end{cases}$.

Lấy (1) chia (2), ta

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

được $\frac{\left(1+q+q^2\right)^2}{1+q^2+q^4}=\frac{26^2}{364}\Leftrightarrow 3q^4-7q^3-4q^2-7q+3=0\Leftrightarrow 3\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-7\left(q+\frac{1}{q}\right)-4=0$.

Đặt $t=q+\frac{1}{q}$, $|t|\geq 2$. Phương trình trở thành $3t^2-7t-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (\text{loại})\\ t=-\frac{10}{3}\end{array}\right.$.

Với $t=-\frac{10}{3}$, suy ra $q+\frac{1}{q}=-\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3q^2-10q+3=0\Leftrightarrow q=3$ hoặc $q=\frac{1}{3}$. Vì $q>1$ nên $q=3$.

Câu 48: Các số $x+6y,\ 5x+2y,\ 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1,\ y+2,\ x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính x^2+y^2.

A. $x^2+y^2=40$. **B.** $x^2+y^2=25$. **C.** $x^2+y^2=100$. **D.** $x^2+y^2=10$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có $\left\{\begin{array}{l}(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y)\\ (x-1)(x-3y)=(y+2)^2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3y\\ (3y-1)(3y-3y)=(y+2)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=3y\\ 0=(y+2)^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-6\\ y=-2\end{array}\right.$.

Suy ra $x^2+y^2=40$.

Câu 49: Ba số $x;\ y;\ z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x;\ 2y;\ 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q.

A. $q=\frac{1}{3}$. **B.** $q=\frac{1}{9}$. **C.** $q=-\frac{1}{3}$. **D.** $q=-3$.

Lời giải

Chọn A

$\left\{\begin{array}{l}y=xq;\ z=xq^2\\ x+3z=2(2y)\end{array}\right.\Rightarrow x+3xq^2=4xq\Rightarrow x\left(3q^2-4q+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ 3q^2-4q+1=0\end{array}\right.$.

Nếu $x=0\Rightarrow y=z=0\Rightarrow$ công sai của cấp số cộng: $x;\ 2y;\ 3z$ bằng 0 (vô lí).

Nếu $3q^2-4q+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}q=1\\ q=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow q=\frac{1}{3}\ (q\neq 1)$.

Câu 50: Cho dãy số tăng $a,\ b,\ c\ (c\in\mathbb{Z})$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân; đồng thời $a,\ b+8,\ c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và $a,\ b+8,\ c+64$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $P=a-b+2c$.

A. $P=\frac{184}{9}$. **B.** $P=64$. **C.** $P=\frac{92}{9}$. **D.** $P=32$.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $\begin{cases} ac=b^2 \\ a+c=2(b+8) \\ a(c+64)=(b+8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac=b^2 & (1) \\ a-2b=16-c & (2) \\ ac+64a=(b+8)^2 & (3) \end{cases}.$

Thay (1) vào (3) ta được: $b^2+64a=b^2+16b+64 \Leftrightarrow 4a-b=4\ (4).$

Kết hợp (2) với (4) ta được: $\begin{cases} a-2b=16-c \\ 4a-b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{c-8}{7} \\ b=\dfrac{4c-60}{7} \end{cases} \quad (5)$

Thay (5) vào (1) ta được:

$$7(c-8)c=(4c-60)^2 \Leftrightarrow 9c^2-424c+3600=0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=36 \\ c=\dfrac{100}{9} \end{cases} \Leftrightarrow c=36\ (c\in\mathbb{Z}).$$

Với $c=36 \Rightarrow a=4, b=12 \Rightarrow P=4-12+72=64.$

Câu 51: Số hạng thứ hai, số hạng đầu và số hạng thứ ba của một cấp số cộng với công sai khác 0 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q. Tìm q.

A. $q=2.$ **B.** $q=-2.$ **C.** $q=-\dfrac{3}{2}.$ **D.** $q=\dfrac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Giả sử ba số hạng $a;b;c$ lập thành cấp số cộng thỏa yêu cầu, khi đó $b;a;c$ theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân công bội q. Ta có

$$\begin{cases} a+c=2b \\ a=bq; c=bq^2 \end{cases} \Rightarrow bq+bq^2=2b \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ q^2+q-2=0 \end{cases}.$$

Nếu $b=0 \Rightarrow a=b=c=0$ nên $a;b;c$ là cấp số cộng công sai $d=0$ (vô lí).

Nếu $q^2+q-2=0 \Leftrightarrow q=1$ hoặc $q=-2$. Nếu $q=1 \Rightarrow a=b=c$ (vô lí), do đó $q=-2.$

Câu 52: Cho bốn số a,b,c,d biết rằng a,b,c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân công bội $q>1$; còn b,c,d theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Tìm q biết rằng $a+d=14$ và $b+c=12.$

A. $q=\dfrac{18+\sqrt{73}}{24}.$ **B.** $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}.$ **C.** $q=\dfrac{20+\sqrt{73}}{24}.$ **D.** $q=\dfrac{21+\sqrt{73}}{24}.$

Lời giải

Chọn B

Giả sử a,b,c lập thành cấp số cộng công bội q. Khi đó theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} b=aq,\ c=aq^2 \\ b+d=2c \\ a+d=14 \\ b+c=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq+d=2aq^2 & (1) \\ a+d=14 & (2) \\ a(q+q^2)=12 & (3) \end{cases}$$

Nếu $q=0 \Rightarrow b=c=0=d$ (vô lí)

Nếu $q=-1 \Rightarrow b=-a; c=a \Rightarrow b+c=0$ (vô lí).

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vậy $q\neq 0, q\neq -1,$ từ (2) và (3) ta có: $d=14-a$ và $a=\dfrac{12}{q+q^2}$ thay vào (1) ta được:

$$\frac{12q}{q+q^2}+\frac{14q^2+14q-12}{q+q^2}=\frac{24q^3}{q+q^2}\Leftrightarrow 12q^3-7q^2-13q+6=0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)\left(12q^2-19q+6\right)=0\Leftrightarrow q=\frac{19\pm\sqrt{73}}{24}$$

Vì $q>1$ nên $q=\dfrac{19+\sqrt{73}}{24}.$

Câu 53: Gọi $S=1+11+111+...+111...1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S=\dfrac{10^n-1}{81}.$ **B.** $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right).$

C. $S=10\left(\dfrac{10^n-1}{81}\right)-n.$ **D.** $S=\dfrac{1}{9}\left[10\left(\dfrac{10^n-1}{9}\right)-n\right].$

Lời giải

Chọn D

Ta có $S=\dfrac{1}{9}\left(9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{\text{n số 9}}\right)=\dfrac{1}{9}.\left[10.\dfrac{1-10^n}{1-10}-n\right].$

Câu 54: Biết rằng $S=1+2.3+3.3^2+...+11.3^{10}=a+\dfrac{21.3^b}{4}.$ Tính $P=a+\dfrac{b}{4}.$

A. $P=1.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=4.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $3S=3+2.3^2+3.3^3+...+11.3^{11}$. Do đó

$$-2S=S-3S=1+3+3^2+...+3^{10}-10.3^{11}=\frac{1-3^{11}}{1-3}-11.3^{11}=-\frac{1}{2}-\frac{21.3^{11}}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{4}+\frac{21}{4}.3^{11}.$$

Vì $S=\dfrac{1}{4}+\dfrac{21.3^{11}}{4}=a+\dfrac{21.3^b}{4}\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}, b=11\longrightarrow P=\dfrac{1}{4}+\dfrac{11}{4}=3.$

Câu 55: Một cấp số nhân có ba số hạng là $a,\ b,\ c$ (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q\neq 0.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{bc}.$ **B.** $\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{ac}.$ **C.** $\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{ba}.$ **D.** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{c}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $ac=b^2\Rightarrow\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{ac}$

Câu 56: Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 27 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

A. $56^0.$ **B.** $102^0.$ **C.** $252^0.$ **D.** $168^0.$

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn C

Giả sử 4 góc A, B, C, D (với $A<B<C<D$) theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân thỏa yêu cầu với công bội q. Ta có

$$\begin{cases} A+B+C+D=360 \\ D=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\left(1+q+q^2+q^3\right)=360 \\ Aq^3=27A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q=3 \\ A=9 \\ D=Aq^3=243 \end{cases} \Rightarrow A+D=252.$$

Câu 57: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nữa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288\ m^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

A. $6m^2$. **B.** $8m^2$. **C.** $10m^2$. **D.** $12m^2$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$ và $u_1=\frac{12288}{2}=6\,144$. Khi đó diện tích mặt trên cùng là

$$u_{11}=u_1q^{10}=\frac{6144}{2^{10}}=6$$

Câu 58: Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khác trên thắng hay thua bao nhiêu?

A. Hòa vốn. **B.** Thua 20000 đồng.

C. Thắng 20000 đồng. **D.** Thua 40000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Số tiền du khác đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1=20\,000$ và công bội $q=2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9=u_1+u_2+\ldots+u_9=\frac{u_1\left(1-p^9\right)}{1-p}=10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10}=u_1.p^9=10240000$

Ta có $u_{10}-S_9=20\,000>0$ nên du khách thắng 20 000.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

GIẢI BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG SÁCH GIÁO KHOA

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 2.22: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Một dãy số tăng thì bị chặn dưới. **B.** Một dãy số giảm thì bị chặn trên.

C. Một dãy số bị chặn thì phải tăng hoặc giảm. **D.** Một dãy số không đổi thì bị chặn.

Lời giải

Chọn D

Câu 2.23: Cho dãy số $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots$ (số hạng sau bằng một nửa số hạng liền trước nó).

Công thức tổng quát của dãy số đã cho là

A. $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$. **C.** $u_n=\frac{1}{2n}$. **D.** $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2.24: Cho dãy số (u_n) với $u_n=3n+6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai $d=3$.

B. Dãy số (u_n). là cấp số cộng với công sai $d=6$.

C. Dãy số (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=3$.

D. Dãy số (u_n) là cấp số nhân với cộng bội $q=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S_{100}=\frac{100}{2}[2.1+(100-1).2]=10000$ $u_n-u_{n-1}=(3x+6)-[3(n-1)+6]=3$

Suy ra dãy số (u_n) là cấp số cộng với công sai d = 3

Câu 2.25: Trong các dãy số cho bởi công thức truy hồi sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_1=-1,u_{n+1}=u_n^2$. **B.** $u_1=-1,u_{n+1}=2u_n$.

C. $u_1=-1,u_{n+1}=u_n+2$. **D.** $u_1=-1,u_{n+1}=u_n-2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2.26: Tổng 100 số hạng đầu của dãy số (u_n) với $u_n=2n-1$ là

A. 199. **B.** $2^{100}-1$. **C.** 10000. **D.** 9999.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$u_1=2.1-1=1$

$u_n-u_{n-1}=(2n-1)-[2(n-u_n1)-1]=2$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vậy (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 1$ và công sai d=2

Suy ra $S_{100} = \frac{100}{2}[2.1 + (100-1).2] = 10000$

B. TỰ LUẬN

Bài 2.27. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Lời giải

Lúc 1 giờ đồng hồ đánh 1 tiếng chuông.

Lúc 2 giờ đồng hồ đánh 2 tiếng chuông.

.....

Lúc 12 giờ trưa đồng hồ đánh 12 tiếng chuông.

Do đó, từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh số tiếng chuông là:

$1+2+3+...+11+12$ $1+2+3+...+11+12$

Đây là tổng 12 số hạng của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 giờ đến 12 giờ truqa là:

$S_{12} = \frac{12.(1+12)}{2} = 78$

$S_{12} = \frac{12.(1+12)}{2} = 78$

Bài 2.28. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải

Số tế bào phân chia sau mỗi 20 phút tạo thành cấp số nhân với số hạng đầu là 2, công bội là 2.

Sau 24 giờ (tức $n = (24.60) : 20 = 72$) tế bào ban đầu phân chia thành số tế bào là: $u_{72} = 2.2^{71} = 4.722.10^{21}$

$u_{72} = 2.2^{71} = 4.722.10^{21}$

Bài 2.29. Chứng minh rằng:

a) Trong một cấp số cộng (u_n), mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối, nếu có) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2)$$

b) Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối, nếu có) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \quad (k \geq 2).$$

Lời giải

a) Ta có: $u_{n-1} = u_1 + (n-2)d$

$u_n = u_1 + (n-1)d$

$u_{n+1} = u_1 + nd$

Do đó:

$u_{n-1} + u_{n+1} = u_1 + (n-2)d + u_1 + nd = 2u_1 + (2n-2)d = 2\left[u_1 + (n-1)d\right] = 2u_n$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Suy ra $u_n = \dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$

b) Ta có: $u_{n-1} = u_1 \times q^{n-2}$

$u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$u_{n+1} = u_1 \times q^n$

Do đó $u_{n-1} \times u_{n+1} = \left(u_1 \times q^{n-2}\right) \times \left(u_1 \times q^n\right) = u_1^2 q^{2n-2} = \left(u_1 q^{n-1}\right)^2 = u_1^2$

Bài 2.30. Tìm ba số, biết theo thứ tự đó chúng lập thành cấp số cộng và có tổng bằng 21 , và nếu lần lượt cộng thêm các số $2;3;9$ vào ba số đó thì được ba số lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Gọi ba số cần tìm lần lượt là x, y, z .

Theo tính chất của cấp số cộng ta có $x+z=2y$

Kết hợp với giả thiết $\mathrm{x}+\mathrm{y}+\mathrm{z}=21$, ta suy ra $3y=21 \Leftrightarrow y=$

Gọi d là công sai của cấp số cộng thì $x=y-d=7-d$ và $z=y+d=7+d$

Sau khi thêm các số $2;3;9$ vào ba số x, y, z ta được ba số là $x+2, y+3, z+9$ hay $9-\mathrm{d}, 10, 16+d$

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có: $(9-d)(16+d)=10^2 \Leftrightarrow d^2+7d-44=0$

Giải phương trình ta được $d=-11$ hoặc $d=4$

Suy ra ba số cần tìm là $18,7,-4$ hoặc $3,7,11$

Bài 2.31. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5$ m . Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16 cm .

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải

a. Mỗi bậc thang cao $16 \text{ cm} = 0,16 \text{ m}$.

$\Rightarrow$ n bậc thang cao $0,16n(\mathrm{m})$

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân $0,5$ m nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là:

$\mathrm{h}_n = (0,5+0,16n)(\mathrm{m})$

b. Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 25$ là:

$\mathrm{h}_{25} = 0,5+0,16\times 25 = 4,5(\mathrm{m})$

Bài 2.32. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1 Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?

Lời giải

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ nhất là: $\dfrac{1}{9}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^0

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ hai là: $\dfrac{1}{9^2}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^1

...

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ năm là: $\dfrac{1}{9^5}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^4

Tổng diện tích các ô vuông màu xanh là : $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9^2}\times 8^1+\ldots+\dfrac{1}{9^5}\times 8^4 = 0,445$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 2

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Dãy số có $u_{n+1}=a.3^{n+1}$.
B. Hiệu số $u_{n+1}-u_n=3.a$.
C. Với $a>0$ thì dãy số tăng.
D. Với $a<0$ thì dãy số giảm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1}-u_n=a.3^{n+1}-a.3^n=a.3^n\left(3-1\right)=2a.3^n$.

Câu 2: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n=2n-1$. Dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số

A. Bị chặn trên bởi 1. **B.** Giảm. **C.** Bị chặn dưới bởi 2. **D.** Tăng.

Lời giải

Chọn D

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có: $u_{n+1}-u_n=2\left(n+1\right)-1-\left(2n-1\right)=2>0$ nên $u_{n+1}>u_n$ vậy dãy số $\left(u_n\right)$ tăng.

Câu 3: Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có $u_1=3$ và công sai $d=7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của $\left(u_n\right)$ đều lớn hơn 2018?

A. 287. **B.** 289. **C.** 288. **D.** 286.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_n=u_1+\left(n-1\right)d=3+7\left(n-1\right)=7n-4$; $u_n>2018\Leftrightarrow 7n-4>2018\Leftrightarrow n>\dfrac{2022}{7}$

Vậy $n=289$.

Câu 4: Xác định số hàng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có $u_9=5u_2$ và $u_{13}=2u_6+5$.

A. $u_1=3$ và $d=4$. **B.** $u_1=3$ và $d=5$. **C.** $u_1=4$ và $d=5$. **D.** $u_1=4$ và $d=3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_n=u_1+\left(n-1\right)d$. Theo đầu bài ta có hpt: $\begin{cases}u_1+8d=5\left(u_1+d\right)\\u_1+12d=2\left(u_1+5d\right)+5\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4u_1-3d=0\\u_1-2d=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=3\\d=4\end{cases}$.

Câu 5: Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ có $u_4=-12$, $u_{14}=18$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này.

A. $S_{16}=-24$. **B.** $S_{16}=26$. **C.** $S_{16}=-25$. **D.** $S_{16}=24$.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}u_1+3d=-12\\u_1+13d=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-21\\d=3\end{cases}$.

Khi đó, $S_{16}=\dfrac{\left(2u_1+15d\right).16}{2}=8\left(-42+45\right)=24$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_5=18$ và $4S_n=S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

A. $u_1=2;d=4$. **B.** $u_1=2;\ d=3$. **C.** $u_1=2;\ d=2$. **D.** $u_1=3;d=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_5=18\Leftrightarrow u_1+4d=18\ (1)$.

$$4S_n=S_{2n}\Leftrightarrow 4\left[nu_1+\frac{n(n-1)d}{2}\right]=\left[2nu_1+\frac{2n(2n-1)d}{2}\right]\Leftrightarrow 4u_1+2nd-2d=2u_1+2nd-d$$

$$\Leftrightarrow 2u_1-d=0\ (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $u_1=2;d=4$.

Câu 7: Bốn số tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tích của bốn số đó là :

A. 585. **B.** 161. **C.** 404. **D.** 276.

Lời giải

Chọn A

Gọi 4 số cần tìm là $a-3r$, $a-r$, $a+r$, $a+3r$.

Ta có: $\begin{cases}a-3r+a-r+a+r+a+3r=28\\(a-3r)^2+(a-r)^2+(a+r)^2+(a+3r)^2=276\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\r^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=7\\r=\pm2\end{cases}$.

Bốn số cần tìm là 1, 5, 9, 13 có tích bằng 585.

Câu 8: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases}u_5+3u_3-u_2=-21\\3u_7-2u_4=-34\end{cases}$. Tổng 15 số hạng đầu của cấp số cộng là.

A. -244. **B.** -274. **C.** -253. **D.** -285.

Lời giải

Chọn D

Giả sử cấp số cộng có số hạng đầu là u_1 và công sai là d.

Khi đó, $\begin{cases}u_5+3u_3-u_2=-21\\3u_7-2u_4=-34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+4d+3(u_1+2d)-(u_1+d)=-21\\3(u_1+6d)-2(u_1+3d)=-34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3u_1+9d=-21\\u_1+12d=-34\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2\\d=-3\end{cases}$.

Từ đó suy ra $S_{15}=\frac{15}{2}.\left[2.2+(15-1).(-3)\right]=-285$.

Câu 9: Cho dãy số u_n biết $\begin{cases}u_1=3\\u_{n+1}=3u_n\end{cases}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

A. $u_n=3^n$. **B.** $u_n=3^{n+1}$. **C.** $u_n=3^{n-1}$. **D.** $u_n=n^{n+1}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn A

Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3$.

Do đó dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1=3$, công bội $q=3$.

Vậy số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n=u_1.q^{n-1}=3.3^{n-1}=3^n$.

Câu 10: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=13\\u_4-u_1=26\end{cases}$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) là

A. $S_8=3280$. **B.** $S_8=9841$. **C.** $S_8=3820$. **D.** $S_8=1093$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=13\\u_4-u_1=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2\right)=13\\u_1\left(q^3-1\right)=26\end{cases}\Rightarrow\frac{\left(q^3-1\right)}{\left(1+q+q^2\right)}=\frac{26}{13}\Rightarrow q-1=2\Rightarrow q=3$

$\Rightarrow u_1=1$.

$S_8=\frac{1\left(1-3^8\right)}{1-3}=3280$.

PHẦN 2 : TỰ LUẬN

Câu 11: Tìm giá trị x dương nhỏ nhất thỏa mãn ba số $\sin x,\sin 2x,\sqrt{3}\cos x$ lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Theo bài ra, ba số $\sin x,\sin 2x,\sqrt{3}\cos x$ lập thành cấp số cộng nên suy ra

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin 2x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}.\cos x=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\2x=\pi-x-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in Z)$$

Nghiệm dương x nhỏ nhất sẽ ứng với $k=0$. Vậy $x=\frac{\pi}{3}$ hoặc $x=\frac{2\pi}{9}$.

Câu 12: Chứng minh rằng ba số dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Ba số $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}=\frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)=\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{b}\right)$$

$\Leftrightarrow b-a=c-b \Leftrightarrow a,b,c$ lập thành cấp số cộng.

Câu 13: Chu vi của một đa giác là 45 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d=3cm$. Biết cạnh lớn nhất là 15 cm, tính số cạnh của đa giác đó.

Lời giải

Gọi cạnh nhỏ nhất của đa giác là u_1 và số cạnh của đa giác là n.

Ta có $15=u_1+(n-1).3$ hay $u_1=18-3n>0\rightarrow n<6$.

Tổng các cạnh là 45 cm, ta có

$45=\frac{n(15+18-3n)}{2}$ hay $3n^2-33n+90=0$.

Giải phương trình với $n\in N^*; n<6$, ta được $n=5$.

Câu 14: Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết rằng:

a) Tổng của chúng bằng 15 và tích của chúng bằng 105.

b) Tổng của chúng bằng 21 và tổng bình phương của chúng bằng 155.

Lời giải

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng là $a,b,c \Rightarrow a+c=2b(*)$.

a) Theo bài ra, ta có $\begin{cases}a+b+c=15\\abc=105\end{cases}$, kết hợp với $(*)$, ta được $\begin{cases}a+b+c=15\\a+c=2b\\abc=105\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3b=15\\a+c=2b\\abc=105\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=5\\c=10-a\\5a(10-a)=105\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=5\\c=7\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a=7\\b=5\\c=3\end{cases}.$$

b) Theo bài ra, ta có $\begin{cases}a+b+c=21\\a^2+b^2+c^2=155\end{cases}$, kết hợp với $(*)$, ta được $\begin{cases}a+b+c=21\\a+c=2b\\a^2+b^2+c^2=155\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3b=21\\a+c=2b\\a^2+b^2+c^2=155\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=7\\c=14-a\\a^2+(14-a)^2+7^2=155\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5\\b=7\\c=9\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a=9\\b=7\\c=5\end{cases}.$$

Câu 15: Cho ba số a,b,c theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng $a^2+2bc=c^2+2ab$ và $a^2+8bc=(2b+c)^2$.

Lời giải

Vì a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng suy ra $a+c=2b$.

Ta có $a^2+2bc-c^2-2ab=(a-c)(a+c)+2b(c-a)=(a-c)(a+c-2b)=0$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Suy ra $a^2+2bc-c^2-2ab=0\Leftrightarrow a^2+2bc=c^2+2ab\rightarrow$ điều phải chứng minh.

Lại có $a^2+8bc-(2b+c)^2=a^2+4(a+c)c-(a+2c)^2=a^2+4ac+4c^2-a^2-4ac-4c^2$

Suy ra $a^2+8bc-(2b+c)^2=0\Leftrightarrow a^2+8bc=(2b+c)^2\rightarrow$ điều phải chứng minh.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}=4u_n+9,\ (n\geq 1)\end{cases}$.

a) Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n=u_n+3$, $n\geq 1$ là một cấp số nhân.

b) Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

a) Ta có $v_n=u_n+3$, suy ra $v_{n+1}=u_{n+1}+3=(4u_n+9)+3$. Do đó

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(4u_n+9)+3}{u_n+3}=\frac{4(u_n+3)}{u_n+3}=4.$$

Vậy (v_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $v_1=u_1+3=2+3=5$ và công bội $q=4$.

b) Do (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases}v_1=5\\q=4\end{cases}$ nên số hạng tổng quát của $v_n=v_1.q^{n-1}=5.4^{n-1}$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n=v_n-3=5.4^{n-1}-3$.

Câu 17: Cho cấp số nhân có $\begin{cases}u_1+u_5=51\\u_2+u_6=102\end{cases}$.

a) Tìm số hạng đầu tiên và công bội

b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.

c) Tổng của bao nhiêu số hạng đầu sẽ bằng 765.

d) Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

Ta có $\begin{cases}u_1+u_5=51\\u_2+u_6=102\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q^4=51\\u_1q+u_1q^5=102\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1(1+q^4)=51\\u_1q(1+q^4)=102\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=3\\q=2\end{cases}$.

a) Vậy số hạng đầu $u_1=3$ và công bội $q=2$.

b) Tổng của 10 số hạng đầu tiên $S_{10}=u_1.\frac{1-q^{10}}{1-q}=3.\frac{1-2^{10}}{1-2}=3069$.

c) Ta có $S_n=u_1.\frac{1-q^n}{1-q}=3.\frac{1-2^n}{1-2}=765\Leftrightarrow n=8$. Vậy tổng của 8 số hạng đầu tiên bằng 765.

d) Giả sử $u_n=12288$. Theo công thức tổng quát của cấp số nhân, ta có

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$u_n = u_1.q^{n-1} \Leftrightarrow 12288 = 3.2^{n-1} \Leftrightarrow n = 13.$$

Vậy 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân.

Câu 18: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp sống nhân (u_n), biết

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 240 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^4 - u_1 = 15 \\ u_1q^3 - u_1q = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(q^4 - 1\right) = 15 \quad (1) \\ u_1q\left(q^2 - 1\right) = 6 \quad (2) \end{cases}$.

Lấy (1) chia (2), ta được $\frac{q^2+1}{q} = \frac{15}{6} \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2$ hoặc $q = \frac{1}{2}$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -16 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$.

b) Ta có $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^{19} = 8u_1q^{16} \\ u_1q^2 + u_1q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^3 = 8 \\ u_1q^2 + u_1q^4 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 12 \\ q = 2 \end{cases}$.

c) Ta có $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q^2 + u_1q^4 = 65 \\ u_1 + u_1q^6 = 325 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 - q^2 + q^4\right) = 65 \quad (1) \\ u_1\left(1 + q^6\right) = 325 \quad (2) \end{cases}$.

Lấy (2) chia (1), ta được $\frac{1+q^6}{1-q^2+q^4} = \frac{325}{65} \Leftrightarrow 1 + q^2 = 5 \Leftrightarrow q = \pm 2$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = -2 \end{cases}$.

d) Ta có $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q - u_1q^3 + u_1q^4 = 10 \\ u_1q^2 - u_1q^4 + u_1q^5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q\left(1 - q^2 + q^3\right) = 10 \quad (1) \\ u_1q^2\left(1 - q^2 + q^3\right) = 20 \quad (2) \end{cases}$.

Lấy (2) chia (1), ta được $q = 2$. Vậy $\begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 2 \end{cases}$.

Câu 19: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp sống nhân (u_n), biết

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases}$. b) $\begin{cases} S_4 = 40 \\ S_8 = 680 \end{cases}$.

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_1.\frac{q^8 - 1}{q - 1} = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

b) Ta có $\begin{cases} S_4 = 40 \\ S_8 = 680 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.\dfrac{q^4-1}{q-1} = 40 \quad (1) \\ u_1.\dfrac{q^8-1}{q-1} = 680 \quad (2) \end{cases}$.

Lấy (2) chia cho (1), ta được $q^4+1=17 \Leftrightarrow q^4=16 \Leftrightarrow q=\pm 2$. Vậy $\begin{cases} u_1 = \dfrac{8}{3} \\ q=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -8 \\ q=-2 \end{cases}$.

Câu 20: Tìm ba số khác nhau tạo thành cấp số cộng có tổng bằng 6, biết rằng nếu hoán đổi vị trí số hạng thứ nhất và số hạng thứ hai đồng thời giữ nguyên số hạng thứ ba ta được cấp số nhân.

Lời giải

Gọi ba số cần tìm là $u_1,\ u_2,\ u_3$ với $u_1 \neq u_2 \neq u_3 \neq u_1$.

- $u_1,\ u_2,\ u_3$ tạo thành cấp số cộng với công sai $d \neq 0$ nên $u_1,\ u_2 = u_1 + d,\ u_3 = u_1 + 2d$.

Hơn nữa, $u_1 + u_2 + u_3 = 6 \Leftrightarrow u_1 + (u_1 + d) + (u_1 + 2d) = 6 \Leftrightarrow u_1 + d = 2$.

- $u_2,\ u_1,\ u_3$ tạo thành cấp số nhân hay $u_1 + d,\ u_1,\ u_1 + 2d$ tạo thành cấp số nhân

$\Leftrightarrow (u_1 + d)(u_1 + 2d) = u_1^2$

$$\Leftrightarrow (u_1 + d)(u_1 + d + d) = u_1^2 \Leftrightarrow 2(2 + 2 - u_1) = u_1^2 \Leftrightarrow u_1^2 + 2u_1 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_1 = 2 \\ u_1 = -4 \end{bmatrix}.$$

Với $u_1 = 2$, suy ra $d = 0$: không thỏa mãn.

Với $u_1 = -4$, suy ra $d = 6$. Vậy ba số cần tìm là $-4,\ 2,\ 8$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133