SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH**
GIA LAI	**TRUNG HỌC PHỔ THÔNG (BẢNG A)**
....	**NĂM HỌC 2022-2023**
	Môn: TOÁN
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề*)
(*Đề thi có 01 trang, 5 bài*)	Ngày thi: **08/11/2022**

Họ và tên thí sinh...*Số báo danh*...........................

Bài 1 (5 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng,

$$\frac{ab}{a^2+ab+bc}+\frac{bc}{b^2+bc+ca}+\frac{ca}{c^2+ca+ab}\leqslant 1.$$

Bài 2 (3 điểm). Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (a, b, c) sao cho với mọi số nguyên dương n không có ước nguyên tố nhỏ hơn 2022 ta luôn có a^n+b^n+n chia hết cho $n+c$.

Bài 3 (3 điểm). Cho hàm số $f:\ [0;1]\to[0;1]$ liên tục và thỏa mãn $f(f(x))=x^4,\ \forall x\in[0;1]$. Chứng minh rằng,

$$x^4<f(x)<x,\ \forall x\in(0;1).$$

Bài 4 (5 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), P là một điểm thay đổi trên cung nhỏ AC của (O) và K là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC.

a) Chứng minh rằng, đường thẳng qua K vuông góc với PA luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

b) Gọi H là hình chiếu của K lên PA. Chứng minh rằng, đường trung trực của đoạn AH luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 5 (4 điểm). Cho tập hợp $A=\{1;2;3;\cdots;2022\}$. Đặt

$$F=\{X\mid X\subset A\ \text{và}\ S(X)\ \text{chia hết cho}\ 3\}$$

với $S(X)$ là tổng các phần tử của X.

a) Tìm số phần tử của tập F có chứa 2022.

b) Hãy tính $\sum_{X\in F}S(X)$.

———————Hết———————

Thí sinh không sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
GIA LAI

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Gồm 08 câu, 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CẤP TỈNH (BẢNG B)
NĂM HỌC 2022-2023

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: **17/12/2022**

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Câu 1 (3,0 điểm)

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = mx - m$ cắt đồ thị $(\mathscr{C})$ của hàm số $y = -x^3 + (m+1)x^2 - m$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho OA, OB, OC là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông (O là gốc tọa độ) ?

Câu 2 (5,0 điểm)

a) Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x\,;y)$ thỏa mãn $\log_2(x^2+1) + 6 = 2^{2y} - 4x^2 + 2y$?

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \\ 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \end{cases}$ trên tập số thực.

Câu 3 (2,0 điểm)

Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 7 chữ số đôi một khác nhau. Tính xác suất để lấy được số có dạng $\overline{abcdefg}$, trong đó $a < b < c < d$ và $d > e > f > g$.

Câu 4 (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp thỏa mãn $R\left[2(a+b) - c\right] = ab\sqrt{3}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Câu 5 (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{5P_{n-1}.C_n^1}{A_{n+2}^n}, n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim(u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n)$.

Câu 6 (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(0\,;1)$, M là trung điểm của cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của đỉnh D lên đường thẳng CM là điểm $K(2\,;3)$. Tìm tọa độ đỉnh C biết điểm M thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 2 = 0$.

Câu 7 (2,0 điểm)

Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD và E, F là hai điểm lần lượt thuộc hai cạnh SB, SC.

a) Khi $ES = EB$ và $SC = 3SF$, hãy tính theo a thể tích của khối đa diện $BCNMEF$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đường gấp khúc $MEFN$ theo a.

Câu 8 (2,0 điểm)

Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2 \le x \le 3$ và $2 \le y \le 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x+4y}{x^2+5y+11} + \frac{y+4x}{y^2+5x+11} + \frac{4}{9(x+y-1)}.$$

---------------- **HẾT** ----------------

* Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;

* Giám thị **không** giải thích gì thêm.