

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN : TOÁN

Thời gian làm bài : 180 phút

Ngày thi : 19/12/2023

(Đề thi gồm có 01 trang)

Bài 1 (3,0 điểm).

1. Giải phương trình $\sin^2 x + \sin x + 3 \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - \cos x(\cos x + \sqrt{3})$.
2. Gọi S là tập hợp tất cả ước nguyên dương của số $a = 648000$. Chọn ngẫu nhiên hai phần tử khác nhau của S . Tính xác suất để hai số được chọn đều không chia hết cho 3.

Bài 2 (3,5 điểm). Giải các phương trình sau:

1. $3x^3 - 10x^2 + 11x - 3 = 3\sqrt[3]{\frac{x^2 + x - 3}{3}}$.
2. $4\log_2^2 x + x \log_2(x+2) = 2\log_2 x \cdot [x + \log_2(x+2)]$.

Bài 3 (5,5 điểm).

1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cot x - 3}{\cot x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = -3x + m$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để (d) cắt (C) tại hai điểm A, B và (d) lần lượt cắt trục hoành, trục tung tại hai điểm C, D mà diện tích tam giác OCD gấp đôi diện tích tam giác OAB (trong đó O là gốc tọa độ).
3. Với hai số thực a, b thay đổi trên đoạn $[1; 3]$, tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 96 \cdot \sqrt{\frac{ab}{a^2 + ab + b^2}}$.

Bài 4 (5,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $AB = 2a, AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của OA . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, AD . Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là 45° .

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
2. Cho điểm Q trên đoạn thẳng SA mà $QS = 2QA$. Tính thể tích khối đa diện $ABCNQM$.
3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SN, CM .

Bài 5 (3,0 điểm).

1. Tìm tất cả bộ hai số thực (x, y) thỏa mãn đẳng thức $x^{\log_2 x} + 4^y + (x-5)2^{y+1} + 57 = 18x$.
2. Cho ba số thực x, y, z không âm sao cho không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng

$$(x+y+z)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2y + y^2z + z^2x} \right) + \frac{36}{x+y+z+1} \geq \frac{63}{4}.$$

-----HẾT-----

Lưu ý : Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh : ; Số báo danh :

Chữ ký của CBCTh số 01 :

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

MÔN : TOÁN

(Hướng dẫn chấm gồm có 07 trang)

Bài 1 (3,0 điểm).

- Giải phương trình $\sin^2 x + \sin x + 3 \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - \cos x(\cos x + \sqrt{3})$.
- Gọi S là tập hợp tất cả ước nguyên dương của số $a = 648000$. Chọn ngẫu nhiên hai phần tử khác nhau của S . Tính xác suất để hai số được chọn đều không chia hết cho 3.

Câu	Nội dung	Điểm
1. (1,5đ)	$\sin^2 x + \sin x + 3 \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - \cos x(\cos x + \sqrt{3})$	
	$\Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x + 6 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x = -4 \sin x \cos x$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = -\sin 2x$	0,25
	$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-2x)$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = -2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + k2\pi \end{cases}$	0,25
2. (1,5đ)	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} - k2\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$	0,25
	Ta có $a = 648000 = 5^3 \cdot 2^6 \cdot 3^4$	0,25
	Mỗi ước nguyên dương của a đều có dạng $5^i \cdot 2^j \cdot 3^k$ với $i \in \{0, 1, 2, 3\}$; $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.	0,25
	Số ước nguyên dương của a bằng số bộ (i, j, k) với i, j, k thuộc các tập trên. Do đó số phần tử của S là: $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$ số.	0,25
	Khi đó: $n(\Omega) = C_{140}^2$.	0,25
	Gọi A là biến cố “lấy được hai số từ S mà chúng đều không chia hết cho 3”. Ước của a mà không chia hết cho 3 có dạng $5^i \cdot 2^j \cdot 3^0$. Số ước của a không chia hết cho 3 là: $4 \cdot 7 = 28$ số.	0,25
	Khi đó: $n(A) = C_{28}^2$.	0,25
	Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{28}^2}{C_{140}^2} = \frac{27}{695}$.	

Bài 2 (3,5 điểm). Giải các phương trình sau:

1. $3x^3 - 10x^2 + 11x - 3 = 3\sqrt[3]{\frac{x^2 + x - 3}{3}}.$

2. $4\log_2^2 x + x\log_2(x+2) = 2\log_2 x \cdot [x + \log_2(x+2)].$

Câu	Nội dung	Điểm
1. (1,5đ)	$3x^3 - 10x^2 + 11x - 3 = 3\sqrt[3]{\frac{x^2 + x - 3}{3}}.$	0,25
	$\Leftrightarrow 3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3(x - 1) = x^2 + x - 3 + 3\sqrt[3]{\frac{x^2 + x - 3}{3}}$	
	$\Leftrightarrow (x-1)^3 + (x-1) = \frac{x^2 + x - 3}{3} + \sqrt[3]{\frac{x^2 + x - 3}{3}} \quad (*)$	0,25
	Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.	0,25
	Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x-1) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x^2 + x - 3}{3}}\right) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{\frac{x^2 + x - 3}{3}}$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)^3 = \frac{x^2 + x - 3}{3} \Leftrightarrow 3x^3 - 10x^2 + 8x = 0$	0,25
2. (2,0đ)	$\Leftrightarrow x(3x^2 - 10x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$	0,25
	Điều kiện: $x > 0$. $4\log_2^2 x + x\log_2(x+2) = 2\log_2 x \cdot [x + \log_2(x+2)].$ $\Leftrightarrow 4\log_2^2 x + x\log_2(x+2) - 2x\log_2 x - 2\log_2(x+2)\log_2 x = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2\log_2 x(2\log_2 x - x) + \log_2(x+2)(x - 2\log_2 x) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (2\log_2 x - x)[2\log_2 x - \log_2(x+2)] = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_2 x - \log_2(x+2) = 0 & (1) \\ 2\log_2 x - x = 0 & (2) \end{cases}$	0,25
	Giải (1): $(1) \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$. Kiểm tra điều kiện chọn $x = 2$.	0,25
2. (2,0đ)	Giải (2): $(2) \Leftrightarrow x^2 = 2^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$	0,25
	Xét hàm $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên $(0; +\infty)$, có $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$	0,25

Bảng biến thiên		$\frac{1}{e} \approx 0.368$
x	0	
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	
Ta thấy $f(2) = f(4) = \frac{\ln 2}{2}$. Do đó phương trình (2) có 2 nghiệm $x = 2; x = 4$. Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là $S = \{2; 4\}$.		0,5

Bài 3 (5,5 điểm).

1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cot x - 3}{\cot x + m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = -3x + m$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để (d) cắt (C) tại hai điểm A, B và (d) lần lượt cắt trục hoành, trục tung tại hai điểm C, D mà diện tích tam giác OCD gấp đôi diện tích tam giác OAB (trong đó O là gốc tọa độ).
3. Với hai số thực a, b thay đổi trên đoạn $[1; 3]$, tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 96 \sqrt{\frac{ab}{a^2 + ab + b^2}}.$$

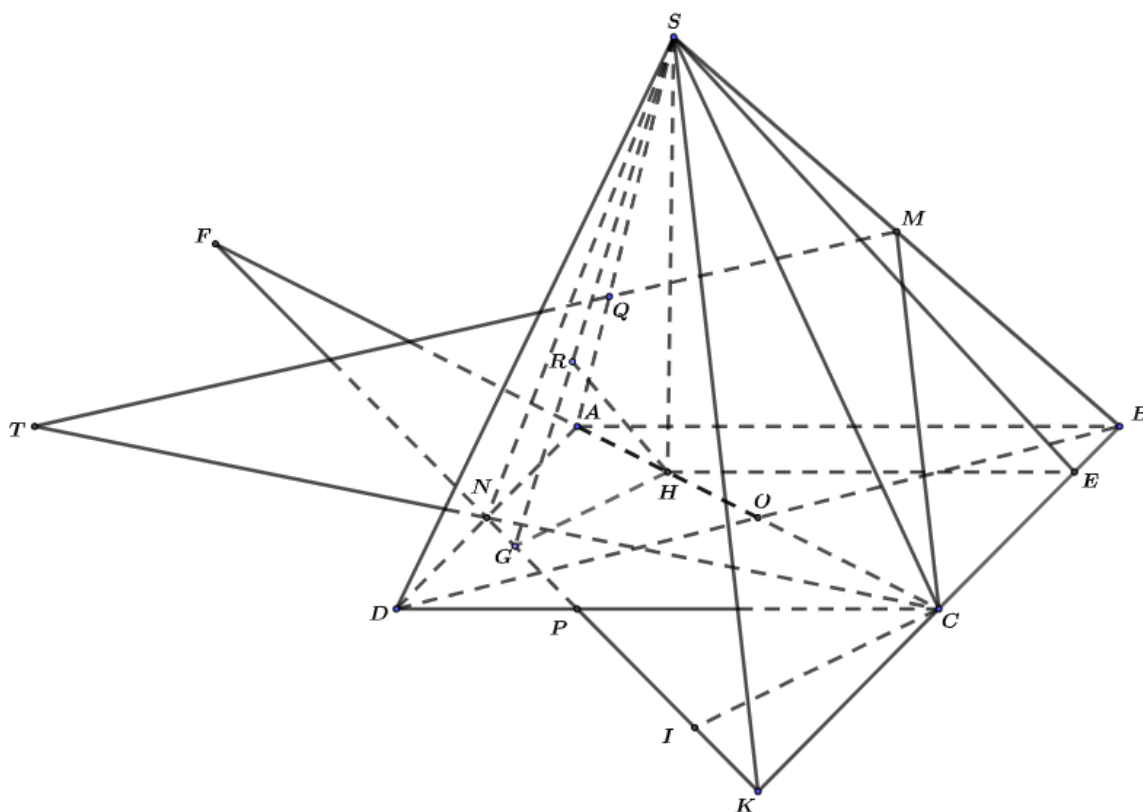
Câu	Nội dung	Điểm
1. (2,0đ)	Ta có $y' = \frac{m+3}{(\cot x + m)^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.	0,5
	Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{m+3}{(\cot x + m)^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{m+3}{(\cot x + m)^2} > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) (*)$	0,25
	Đặt $t = \cot x \Rightarrow t \in (0; 1)$ khi $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.	0,25
	$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ -m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ -m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases}$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases}.$	0,5
2. (2,0đ)	Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) là: $-3x + m = \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow 3x^2 - (m+1)x + m+1 = 0 (*) , (x \neq 1)$	0,25
	(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 3 - (m+1) + m+1 \neq 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 12(m+1) > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}$	0,25
	Khi đó: $A(x_1; -3x_1 + m), B(x_2; -3x_2 + m)$ và $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+1}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{m+1}{3} \end{cases}$	0,25
	(d) cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm phân biệt $C, D \Rightarrow C\left(\frac{m}{3}; 0\right), D(0; m)$	0,25
	Tam giác OCD và tam giác OAB có cùng đường cao hạ từ O nên $S_{\triangle OCD} = 2S_{\triangle OAB} \Leftrightarrow CD = 2AB \Leftrightarrow CD^2 = 4AB^2$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{m^2}{9} + m^2 = 4\left[(x_1 - x_2)^2 + 9(x_1 - x_2)^2\right] \Leftrightarrow \frac{m^2}{9} = 4(x_1 - x_2)^2$ $\Leftrightarrow \frac{m^2}{9} = 4\left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2\right] \Leftrightarrow \frac{m^2}{9} = 4\left[\left(\frac{m+1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{m+1}{3}\right)\right]$	0,25
	$\Leftrightarrow 3m^2 - 40m - 44 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{20 + 2\sqrt{133}}{3} \\ m = \frac{20 - 2\sqrt{133}}{3} \end{cases}.$ Kiểm tra điều kiện ta chọn $m = \frac{20 + 2\sqrt{133}}{3}; m = \frac{20 - 2\sqrt{133}}{3}.$	0,25
	Ta có $P = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 + 96 \sqrt{\frac{1}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}}.$ Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ta được $P = f(t) = t^2 + \frac{96}{\sqrt{t+1}} - 2.$	0,25
	Do $a, b \in [1; 3] \Rightarrow x = \frac{a}{b} \in \left[\frac{1}{3}; 3\right].$ Khi đó $t = g(x) = x + \frac{1}{x}$ với $x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right].$	0,25
	$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$ Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$	0,25

3. (1,5đ)	Ta có : $g(1) = 2; g(3) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} \Rightarrow$ miền giá trị của t là $\left[2; \frac{10}{3}\right]$.	
	$f'(t) = 2t - \frac{48}{\sqrt{(t+1)^3}} = \frac{2}{\sqrt{(t+1)^3}} \left(t\sqrt{(t+1)^3} - 24 \right)$ Phương trình $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t\sqrt{(t+1)^3} = 24$ Để thấy $t < 3 \Rightarrow t\sqrt{(t+1)^3} < 24$ và $t > 3 \Rightarrow t\sqrt{(t+1)^3} > 24$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t = 3$.	0,5
	$f(2) = 2 + 32\sqrt{3}; f(3) = 55; f\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{82}{9} + 96\sqrt{\frac{3}{13}} \Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 55 và giá trị lớn nhất là $2 + 32\sqrt{3}$.	0,25

Bài 4 (5,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và $AB = 2a, AD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của OA . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, AD . Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là 45° .

1. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.
2. Cho điểm Q trên đoạn thẳng SA mà $QS = 2QA$. Tính thể tích khối đa diện $ABCNQM$.
3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SN, CM .



Câu	Nội dung	Điểm
	Kẻ $HE \perp BC$ tại $E \Rightarrow \widehat{SEH} = ((SBC), (ABCD)) = 45^\circ$.	0,5

1. (2,0 đ)	$\frac{HE}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HE = \frac{3}{2}a.$	0,5
	Tam giác SHE vuông cân nên $SH = HE = \frac{3}{2}a.$	0,5
	$S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2.$ Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3}{2}a.2a^2 = a^3.$	0,5
2. (1,5 đ)	Gọi T là giao điểm của $CN, AB \Rightarrow A$ là trung điểm của $TB \Rightarrow Q$ là trọng tâm tam giác $SBT \Rightarrow T, Q, M$ thẳng hàng.	0,5
	Ta có $S_{CBT} = S_{ABCD}$ và M là trung điểm $SB \Rightarrow V_{MCBT} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}.$	0,5
	Theo công thức tỉ lệ thể tích thì $\frac{V_{TAQN}}{V_{TBMC}} = \frac{TA}{TB} \cdot \frac{TN}{TC} \cdot \frac{TQ}{TM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$	0,5
3. (1,5 đ)	$\Rightarrow V_{ABCNQM} = \frac{5}{6}V_{MCBT} = \frac{5}{12}V_{S.ABCD} = \frac{5}{12}a^3.$	0,5
	Lấy K đối xứng với B qua $C \Rightarrow CM \parallel SK \Rightarrow CM \parallel (SNK).$ Khi đó $d(CM; SN) = d(C; (SNK)).$ Cho CA, KN cắt nhau tại $F \Rightarrow A$ là trung điểm FC và $\frac{d(C; (SNK))}{d(H; (SNK))} = \frac{FC}{FH} = \frac{8}{5} \Rightarrow d(C; (SNK)) = \frac{8}{5}d(H; (SNK)).$	0,5
	Kẻ HG, CI vuông góc với FK tại $G, I.$ Kẻ $HR \perp SG$ tại $R \Rightarrow HR \perp (SNK).$ FK cắt CD tại $P \Rightarrow CP = \frac{2}{3}CD = \frac{4}{3}a.$ Ta có $\frac{1}{CI^2} = \frac{1}{CP^2} + \frac{1}{CK^2} = \frac{25}{16a^2} \Rightarrow CI = \frac{4}{5}a.$ Dễ thấy $\frac{GH}{CI} = \frac{5}{8} \Rightarrow GH = \frac{1}{2}a.$	0,5
3. (1,5 đ)	Ta có $\frac{1}{HR^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{40}{9a^2} \Rightarrow HR = \frac{3}{2\sqrt{10}}a.$ Vậy $d(CM; SN) = \frac{8}{5}HR = \frac{6\sqrt{10}}{25}a.$	0,5

Bài 5 (3,0 điểm).

1. Tìm tất cả bộ hai số thực (x, y) thỏa mãn đẳng thức : $x^{\log_2 x} + 4^y + (x-5)2^{y+1} + 57 = 18x.$
2. Cho ba số thực x, y, z không âm sao cho không có hai số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng :

$$(x+y+z)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2y + y^2z + z^2x} \right) + \frac{36}{x+y+z+1} \geq \frac{63}{4}.$$

Câu	Nội dung	Điểm
1. (1,5 đ)	Điều kiện : $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t \Rightarrow x^{\log_2 x} = (2^t)^t = 2^{t^2}$	0,25
	Ta có : $2^{t^2} + 16 \geq 2\sqrt{2^{t^2} \cdot 16} = 2 \cdot 2^{\frac{t^2+4}{2}} \geq 2 \cdot 2^{2t} = 2x^2 \Rightarrow x^{\log_2 x} \geq 2x^2 - 16$.	0,5
	Từ giả thiết được $18x \geq 2x^2 + 4^y + 2x \cdot 2^y - 10 \cdot 2^y + 41$ $\Rightarrow 18x \geq (x + 2^y)^2 + x^2 - 10 \cdot 2^y + 41$ $\Rightarrow (x + 2^y)^2 - 10(x + 2^y) + 25 + x^2 - 8x + 16 \leq 0$ $\Rightarrow (x + 2^y - 5)^2 + (x - 4)^2 \leq 0$	0,5
	Do đó $\begin{cases} x + 2^y - 5 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy có duy nhất cặp số $(x; y) = (4; 0)$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.	0,25
2. (1,5 đ)	Không giảm tổng quát giả sử y nhận giá trị ở giữa $x, z \Rightarrow (y - x)(y - z) \leq 0$ $\Rightarrow y^2 + xz \leq xy + yz \Rightarrow y^2z + z^2z \leq xyz + yz^2$ Do đó $x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2y + xyz + yz^2 = y(x^2 + xz + z^2) \leq y(x + z)^2$.	0,5
	Ta có $2y \cdot (x + z)(x + z) \leq \left(\frac{2y + x + z + x + z}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}(x + y + z)^3$ $\Rightarrow x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}(x + y + z)^3$	0,25
	Đặt $t = x + y + z$ ($t > 0$) và ký hiệu P là vế trái của bài toán thì $P \geq t^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{27}{4t^3} \right) + \frac{36}{t+1} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{27}{4t} + \frac{36}{t+1}$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Cô si thì $\frac{1}{2}t^2 + \frac{27}{4t} = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{27}{4t} \geq 3\sqrt[3]{\frac{27t^3}{64}} = \frac{9}{4}t$	0,25
	Do đó $P \geq \frac{9}{4}t + \frac{36}{t+1} = \frac{9}{4}(t+1) + \frac{36}{t+1} - \frac{9}{4} \geq 2\sqrt{\frac{9}{4}(t+1) \cdot \frac{36}{t+1}} - \frac{9}{4} = \frac{63}{4}$.	0,25

-----HẾT-----