CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

*** Chú ý**

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

+) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại còn gọi là **cực đại** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

+) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

+) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_{CĐ}$	$\searrow$	

x	$x_0 - h$		x_0		$x_0 + h$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	

*** Chú ý**

+) Giá trị cực đại $f(x_0)$ của hàm số $y = f(x)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

+) Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm. Ngược lại, đạo hàm có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số không đạt cực trị tại điểm x_0.

4. Định lí 3: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

+) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

+) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

+) Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0$ thì phải lập bảng biến thiên để kết luận.

QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

a) Quy tắc 1

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

b) Quy tắc 2

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và ký hiệu x_i $(i = 1, 2, 3, ...)$ là các nghiệm của nó.

Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC.

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Câu 2: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$.

Câu 3: Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Câu 4: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Câu 5: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 5$.

Câu 6: Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Câu 7: Tìm cực trị của hàm số $y = (1-x)^3(3x-8)^2$.

DẠNG 2 : RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM BẬC 3

1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\ (a \neq 0), (1)$

a. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta' = b^2 - 3ac$

• Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$.

• Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

b. Trong trường hợp $\Delta' > 0$, gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1), trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $y' = 0$.

Ta có $f(x) = (mx+n).f'(x) + r(x)$, với $r(x)$ là nhị thức bậc nhất.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = r(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = r(x_2) \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ A, B thỏa mãn phương trình $y = r(x)$.

Do đó phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị A, B là $y = r(x)$.

Công thức tính nhanh: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị, của đồ thị hàm số (1) là: $y = r(x) = -\frac{2\Delta'}{9a}x + \frac{9ad - bc}{9a}$

Cách dùng MTCT

- Nhập biểu thức $ax^3 + bx^2 + cx + d - (3ax^2 + 2bx + c)\left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right)$

- Cho $x = i$ ta được kết quả $Ai + B$. Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = Ax + B$.

Câu 8: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4m+3\right)x+2021-2020m$ có cực trị?

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

Câu 10: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a.b$ bằng

Câu 11: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+4x-2021$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$ bằng

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ có hai điểm cực trị A,B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4, với $C(1;4)$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

Câu 14: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu đến gốc tọa độ. Tính tổng các phần tử của S.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m-1)x^2+\left(m^2-m+7\right)x+m-5$ có hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{74}$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+\left(m^2-2\right)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

Câu 18: Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$.

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị $\left(C_m\right)$ cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt $A;B$ sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-\left(m^2-2\right)x+m^2$ có đồ thị là đường cong (C). Biết rằng tồn tại hai số thực m_1, m_2 của tham số m để hai điểm cực trị của (C) và hai giao điểm của (C) với trục hoành tạo thành bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Tính $T=m_1^4+m_2^4$.

Câu 21: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tích các phần tử của S.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(m-1)x^2-3mx-\frac{3m}{2}$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-20;22)$ sao cho đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

Câu 23: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2021$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1+x_2=2$ bằng

Câu 24: Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ có điểm cực tiểu của nằm bên phải trục tung.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $2\sqrt{5}$.

DẠNG 4 : RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG

I: KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị là (C).

+) Đồ thị (C) có đúng một điểm cực trị khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+) Đồ thị (C) có ba điểm cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ và tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A.

II. CÔNG THỨC NHANH MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP THƯỜNG GẶP

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC NHANH	CHỨNG MINH
$\widehat{BAC} = \alpha$	$\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$	Áp dụng định lý cosin trong ΔABC ta có điều phải chứng minh.
ΔABC vuông	$b^3 + 8a = 0$	ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$ **Hoặc:** $\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$
ΔABC đều	$b^3 + 24a = 0$	ΔABC đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0$ **Hoặc** $\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$ $\cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$
$S_{\Delta ABC}$	$S_{\Delta ABC} = \lvert a\rvert\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5$	Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AI = \sqrt{\frac{-b}{2a}}.\left\lvert -\frac{b^2 - 4ac}{4a} - c\right\rvert$ $= \lvert a\rvert\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5$
Bán kính đường tròn	$R = \frac{b^3 - 8a}{8\lvert a\rvert b}$	Áp dụng công thức

ngoại tiếp ΔABC		$R=\frac{AB^2}{2AI}=\frac{AB.BC.AC}{4S_{\Delta ABC}}\Leftrightarrow R=\frac{b^3-8a}{8\|a\|b}$
Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC	$r=\frac{b^2}{4\|a\|+\sqrt{16a^2-2ab^3}}$	Áp dụng công thức $r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}$ $\Leftrightarrow r=\frac{b^2}{4\|a\|+\sqrt{16a^2-2ab^3}}$
ΔABC có trọng tâm là gốc tọa độ O	$b^2-6ac=0$	Áp dụng công thức tọa độ trọng tâm cho ΔABC ta có: $-\frac{b^2-4ac}{2a}+c=0\Leftrightarrow b^2-6ac=0$
ΔABC có trực tâm là gốc tọa độ O	$b^3+8a-4ac=0$	ΔABC có trực tâm là gốc tọa độ O khi $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow b^3+8a-4ac=0$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC	$x^2+y^2-\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}\right)$	
Phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị	$y=\frac{1}{2}bx^2+c$	Lấy y chia y' ta được phần dư là $r(x)=\frac{1}{2}bx^2+c$. Khi đó phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị là $y=r(x)=\frac{1}{2}bx^2+c$

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=2x^4-(m+1)x^2+4$ có ba điểm cực trị.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Câu 28: Cho hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có đồ thị (C_m). Xác định tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

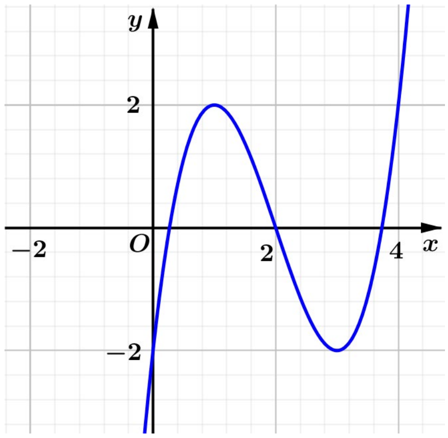
Câu 29: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Câu 30: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$, với m là tham số thực. Xác định các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba cực trị đồng thời các điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

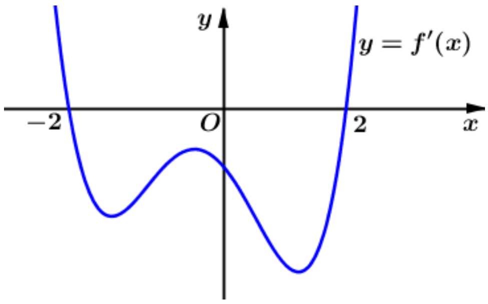
Câu 31: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1.

DẠNG 5: CỰC TRỊ CỦA HÀM $y=|f(x)|, y=f(|x|)$

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$.



Câu 33: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có $f\left(-2\right)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)\right|$.

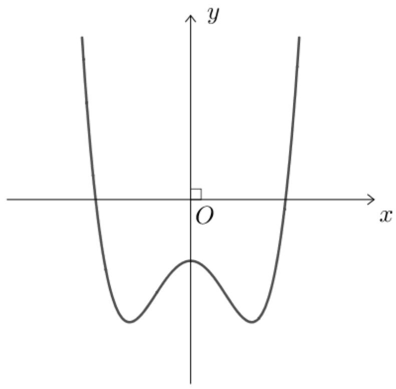
Câu 34: Cho hàm số $y=\left|x^3-3x\right|$. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

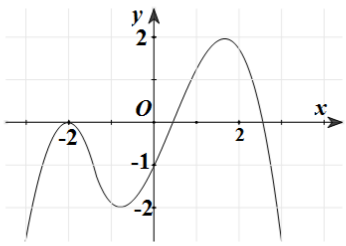
Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-\left(2m-1\right)x^2+\left(2-m\right)x+2$. Tập tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b};c\right)$ với a, b, c là các số nguyên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

Câu 38: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 39: Cho hàm số $y=\left|x\right|^3-\left(2m+1\right)x^2+3m\left|x\right|-5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m-1\right)x^3-5x^2+\left(m+3\right)x+3$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có đúng 3 điểm cực trị?

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-m\right|$ có 7 điểm cực trị là $\left(a;b\right)$. Tính $T=2b-a$.



CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0 \in (a;b)$.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0.

*** Chú ý**

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là $f_{CĐ}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

+) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại còn gọi là **cực đại** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1: Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2: Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $K=(x_0-h;x_0+h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$, với $h>0$.

+) Nếu $f'(x)>0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)<0$ trên $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y=f(x)$.

+) Nếu $f'(x)<0$ trên khoảng $(x_0-h;x_0)$ và $f'(x)>0$ trên $(x_0;x_0+h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	x_0-h		x_0		x_0+h
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_{CĐ}$	$\searrow$	

x	x_0-h		x_0		x_0+h
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	f_{CT}	$\nearrow$	

*** Chú ý**

+) Giá trị cực đại $f(x_0)$ của hàm số $y=f(x)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập xác định của nó.

+) Hàm số chỉ có thể đạt cực trị tại các điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số không có đạo hàm. Ngược lại, đạo hàm có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số không đạt cực trị tại điểm x_0.

4. Định lí 3: Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $K=(x_0-h;x_0+h)$ với $h>0$. Khi đó:

+) Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

+) Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)<0$ thì x_0 là điểm cực đại.

+) Nếu $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$ thì phải lập bảng biến thiên để kết luận.

QUY TẮC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

a) Quy tắc 1

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

b) Quy tắc 2

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và ký hiệu x_i $(i=1,2,3,...)$ là các nghiệm của nó.

Bước 3. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC.

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array} \right.$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CĐ} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Cách 2: $y'' = 6x - 6$.

$y''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CĐ} = 6$.

$y''(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Câu 2: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 3: Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -6x^2 - 6x - 6 = -6\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 4: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x^3 - 4x = 2x\left(x^2 - 2\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = -3$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = 6x^2 - 4$.

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CĐ} = -3$.

$y''\left(\pm\sqrt{2}\right) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Câu 5: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CĐ} = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = -12x^2 + 8$.

$y''\left(\pm\sqrt{2}\right) = -16 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CĐ} = -1$.

$y''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Câu 6: Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 8x$.

$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+8x=0 \Leftrightarrow x=0$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, $y_{CT}=1$.

Cách 2: $y''=12x^2+8$. $y''(0)=8>0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$, $y_{CT}=1$.

Câu 7: Tìm cực trị của hàm số $y=(1-x)^3(3x-8)^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=15(1-x)^2(3x-8)(2-x)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{8}{3} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘		↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=\frac{8}{3}$, $y_{CĐ}=0$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, $y_{CT}=-4$.

DẠNG 2 : RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM BẬC 3

1. Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\ \left(a\neq 0\right),\left(1\right)$

a. Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$; $\Delta'=b^2-3ac$

- Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'\leq 0$.
- Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0$.

b. Trong trường hợp $\Delta'>0$, gọi $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $\left(1\right)$, trong đó x_1,x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $y'=0$.

Ta có $f\left(x\right)=(mx+n).f'\left(x\right)+r\left(x\right)$, với $r\left(x\right)$ là nhị thức bậc nhất.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1=f\left(x_1\right)=r\left(x_1\right) \\ y_2=f\left(x_2\right)=r\left(x_2\right) \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ A,B thỏa mãn phương trình $y=r\left(x\right)$.

Do đó phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị A,B là $y=r\left(x\right)$.

Công thức tính nhanh: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị, của đồ thị hàm số $\left(1\right)$ là: $y=r\left(x\right)=-\dfrac{2\Delta'}{9a}x+\dfrac{9ad-bc}{9a}$

Cách dùng MTCT

- Nhập biểu thức $ax^3+bx^2+cx+d-\left(3ax^2+2bx+c\right)\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{b}{9a}\right)$

- Cho $x=i$ ta được kết quả $Ai+B$. Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y=Ax+B$.

Câu 8: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4m+3\right)x+2021-2020m$ có cực trị?

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-4m+3\right)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-\left(m^2-4m+3\right)>0$ $\Leftrightarrow 4m-3>0\Leftrightarrow m>\dfrac{3}{4}$. Vậy $m>\dfrac{3}{4}$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

Lời giải

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $\Leftrightarrow (x-1)\left[mx^2-(m-1)x+m+1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ mx^2-(m-1)x+m+1=0(*) \end{array}\right.$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m-(m-1)+m+1 \neq 0 \\ (m-1)^2-4m(m+1)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \\ -3m^2-6m+1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=-1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 10: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là khoảng $(a;b)$. Giá trị $a.b$ bằng

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$;

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT}<0$.

Ta có: $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0 \Leftrightarrow (x-m)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thi hàm số là: $y=-2x-m$.

Khi đó: $y_{CD}.y_{CT}=y(m+1).y(m-1)=(-2m-2-m)(-2m+2-m)=(3m+2)(3m-2)$

$y_{CD}.y_{CT}<0 \Leftrightarrow (3m+2)(3m-2)<0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}<m<\dfrac{2}{3} \Rightarrow a=-\dfrac{2}{3};b=\dfrac{2}{3}$.

Khi đó: $a.b=-\dfrac{4}{9}$.

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}mx^2+4x-2021$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$ bằng

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=x^2-mx-4$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow x^2-mx-4=0$.

Ta có $\Delta=m^2+16>0$, $\forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m\in\mathbb{R}$ hay hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $\forall m\in\mathbb{R}$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y'=0$ nên theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1.x_2=-4 \end{cases}$.

$P=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)=\left(x_1x_2\right)^2-\left(x_1^2+x_2^2\right)+1=\left(x_1x_2\right)^2-\left(x_1+x_2\right)^2+2x_1x_2+1$

$=16-m^2-8+1=-m^2+9\le 9$, $\forall m\in\mathbb{R}$.

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng 9 khi $m=0$.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị là $\left(C_m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ có hai điểm cực trị A,B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4, với $C\left(1;4\right)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm $y'=3x^2-6mx$

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Đồ thị có hai điểm cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt, khi $m\ne 0$

Tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(0;4m^2-2\right)$; $B\left(2m;-4m^3+4m^2-2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(2m;-4m^3\right) \Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2\left|m\right|\sqrt{1+4m^4}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $2m^2x+y-4m^2+2=0$

Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB là: $d\left(C,AB\right)=\dfrac{\left|6-2m^2\right|}{\sqrt{1+4m^4}}$.

Suy ra, diện tích tam giác ABC là: $S=\dfrac{1}{2}.d\left(C,AB\right).AB=\left|6m-2m^3\right|$.

Từ giả thiết suy ra: $\left|6m-2m^3\right|=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm 2 \end{array}\right.$.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

Lời giải

$y'=-3x^2+6mx$; $y'=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2m$.

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\ne 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0;-3m-1)$; $B(2m;4m^3-3m-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;4m^3)$.

Trung điểm I của AB có toạ độ: $I(m;2m^3-3m-1)$.

Đường thẳng d: $x+8y-74=0$ có một VTCP $\vec{u}=(8;-1)$.

Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua d.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I\in d \\ AB\perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+8(2m^3-3m-1)-74=0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3-23m-82=0 \\ -4m^3+16m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 14: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ có hai điểm cực trị sao cho khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu đến gốc tọa độ. Tính tổng các phần tử của S.

Lời giải

$$y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m \Rightarrow y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$$

Do hệ số $a=1>0$ nên $\left[\begin{array}{l} x_{CD}=m-1 \Rightarrow y_{CD}=-2m+2 \\ x_{CT}=m+1 \Rightarrow y_{CT}=-2m-2 \end{array}\right.$

Theo giả thiết ta có

$$(m-1)^2+(-2m+2)^2=2\left[(m+1)^2+(2m+2)^2\right] \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow m_1+m_2=-6.$$

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m-1)x^2+(m^2-m+7)x+m-5$ có hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{74}$.

Lời giải

Có $y'=x^2-2(2m-1)x+m^2-m+7$.

Để hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (2m-1)^2-(m^2-m+7)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-1 \end{array}\right..$$

Gọi $x_1;x_2$ là hoành độ 2 điểm cực trị của hàm số. Điều kiện $x_1>0$, $x_2>0$.

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=2(2m-1)>0 \\ P=x_1.x_2=m^2-m+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Để hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{74} \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2=74 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=74$.

$\Leftrightarrow 4(2m-1)^2-2(m^2-m+7)=74 \Leftrightarrow 14m^2-14m-84=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $m=3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

Lời giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

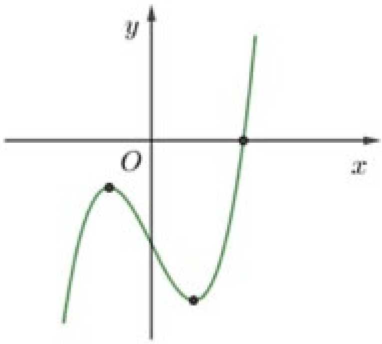
$y'=3x^2-2(m+1)x+m^2-2$ có $\Delta'=-2m^2+2m+7$.

Để đồ thị hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^2+3$ có hai cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$\Delta'>0 \Leftrightarrow -2m^2+2m+7>0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2}<m<\frac{1+\sqrt{15}}{2}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên được $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Lúc này, hai nghiệm $x_1;x_2$ của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm cùng 1 phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1).f(x_2)>0$,tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm, tức là, phương trình $x^3-(m+1)x^2+(m^2-2)x-m^3=0$ có duy nhất một nghiệm thực.



Xét $m=-1$ thì phương trình là $x^3-x+2=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=-1$.

Xét $m=0$ thì phương trình là $x^3-x^2-2x+3=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=0$.

Xét $m=1$ thì phương trình là $x^3-2x^2-x+2=0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt nên loại $m=1$.

Xét $m=2$ thì phương trình là $x^3-3x^2+2x-1=0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m=2$.

Đáp số: $m\in\{-1;0;2\}$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (1).

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là:

$$y = \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)x + \frac{1}{3}m(m+2).$$

Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu dương thì $y_1 + y_2 > 0$ và đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m$.

Nên $y_1 + y_2 > 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3}\right)(2m) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \Leftrightarrow 2m\left(-2m^2 + 3m + 6\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right) (**)$$

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0(2)$ có một nghiệm đơn duy nhất.

Ta có $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3mx + 3m + 6\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0(3) \end{array}\right.$.

Để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} \ (***)$.

Kết hợp $(*), (**), (***)$ ta được tập các giá trị của m thoả mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2:

Ta có : $y' = x^2 - 2mx + m + 2; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0(1)$.

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right. (*).$$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y=0$ có 1 nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0(2)$ có một nghiệm đơn duy nhất.

Ta có $\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x=0 \Leftrightarrow x(x^2-3mx+3m+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3mx+3m+6=0(3) \end{array}\right.$

Để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện là $\Delta=9m^2-12m-24<0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3}<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$ $(**)$

Để giá trị tại điểm uốn luôn dương: $y'=x^2-2mx+m+2, y''=2x-2m$.

$y''=0 \Leftrightarrow 2x-2m=0 \Leftrightarrow x=m$. Ta có : $y_{(m)}>0 \Rightarrow \frac{m^3}{3}-m^3+m(m+2)>0$

$\Leftrightarrow m(-2m^2+3m+6)>0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty;\frac{3-\sqrt{57}}{3}\right) \cup \left(0;\frac{3+\sqrt{57}}{3}\right)(***)$.

Kết hợp $(*),(**),(***)$ ta được tập các giá trị của m thoả mãn là $2<m<\frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 18: Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$.

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2+2ax+2$. Hàm số $y=f(x)$ có cực trị khi: $a^2-6>0 \Leftrightarrow a<-\sqrt{6} \vee a>\sqrt{6}$

$g'(x)=-3x^2+2bx-3$. Hàm số $y=g(x)$ có cực trị khi: $b^2-9>0 \Leftrightarrow b<-3 \vee b>3$.

Giả sử x_0 là điểm cực trị của cả hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3{x_0}^2+2ax_0+2=0 \\ -3{x_0}^2+2bx_0-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{1}{2x_0} \\ b=\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{x_0}-\frac{3}{2}x_0 \\ b=\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right) \end{cases}.$$

$$P=|a|+|b|=\left|\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right|+\left|\frac{3}{2}\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)\right| \ge \left|\frac{5}{2x_0}+3x_0\right|$$

$$\Rightarrow P^2=\frac{25}{4{x_0}^2}+9{x_0}^2+15 \ge 2\sqrt{\frac{25}{4{x_0}^2}.9{x_0}^2}+15=30 \Rightarrow P \ge \sqrt{30}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)>0 \\ \frac{25}{4{x_0}^2}=9{x_0}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{x_0}+\frac{3}{2}x_0\right)\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)>0 \\ x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}} \end{cases} \Rightarrow x_0=\pm\sqrt{\frac{5}{6}}$$

Với 2 giá trị x_0, ta tìm được hai cặp giá trị a,b thoả mãn.

Vậy $\min P=\sqrt{30}$.

Câu 19: Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của đồ thị (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt $A;B$ sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3-6mx+4$ có tập xác định $\mathbb{R}$. $y'=3x^2-6m;\ y'=0\Leftrightarrow x^2=2m.$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần.

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0.$ Ta có $y=\frac{1}{3}y'x-4mx+4.$

Gọi $M(x_1;y_1)$, $N(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $\begin{cases} y'(x_1)=y'(x_2)=0 \\ y_1=y(x_1)=\frac{1}{3}y'(x_1)x_1-4mx_1+4 \quad +4 \\ y_2=y(x_2)=\frac{1}{3}y'(x_2)x_2-4mx_2+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-4mx_1+4 \\ y_2=-4mx_2+4 \end{cases}$

Suy ra M, N thuộc đường thẳng d có phương trình $y=-4mx+4.$

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y=-4mx+4.$

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}.$

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B và tạo thành tam giác IAB

$\Leftrightarrow 0<d(I;d)<R\Leftrightarrow 0<d(I;d)<\sqrt{2}\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ \dfrac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}}<\sqrt{2} \end{cases}$

Cách 1:

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4), IK=\sqrt{17}>R\Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A,B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I.

Do đó $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB.\sin AIB\le\frac{1}{2}IA.IB$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow IA\perp IB\Leftrightarrow d(I,d)=\frac{R}{\sqrt{2}}=1\Leftrightarrow\frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}}=1\Leftrightarrow m=\frac{15}{32}.$

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK<\frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I. Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I,d)=t\,(0<t\le l)$, với l là độ dài đoạn thẳng IK, rồi tính $S_{\Delta IAB}f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0;l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+y^2=2\ (C)$

Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=2\\ y=-4mx+4\end{cases} \Rightarrow (16m^2+1)^2-2(16m+1)x+15=0\ (1)$

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $A,B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt a,b

$\Leftrightarrow (16m+1)^2-15(16m+1)>0$.

Khi đó $A(a;-4ma+4), B(b;-4mb+4) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\overrightarrow{IA}=(a-1;-4ma+4)\\ \overrightarrow{IB}=(b-1;-4mb+4)\end{array}\right.$

$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=ab-(a+b)+16\left[m^2ab-m(a+b)+1\right]+1=0$

$\Leftrightarrow ab-(a+b)+16m^2ab-16m(a+b)+17=0$

$\Leftrightarrow (16m^2+1)ab-(16m+1)(a+b)+17=0 \Leftrightarrow 15-\dfrac{2(16m+1)^2}{16m^2+1}+17=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(16m+1)^2}{16m^2+1}=16 \Leftrightarrow m=\dfrac{15}{32}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-(m^2-2)x+m^2$ có đồ thị là đường cong (C). Biết rằng tồn tại hai số thực m_1, m_2 của tham số m để hai điểm cực trị của (C) và hai giao điểm của (C) với trục hoành tạo thành bốn đỉnh của một hình chữ nhật. Tính $T=m_1^4+m_2^4$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6x-m^2+2$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-m^2+2=0\ \ (*)$

Ta có $\Delta'=9+3m^2-6=3m^2+3>0$ nên phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Do đó đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị với mọi $m\in\mathbb{R}$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

Ta có: $y=\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{3}\right).y'-\dfrac{2}{3}(m^2+1)x+\dfrac{2}{3}(m^2+1)$.

Vậy hai điểm cực trị của đồ thị (C) là $A\left(x_1;-\dfrac{2}{3}(m^2+1)x_1+\dfrac{2}{3}(m^2+1)\right)$ và

$C\left(x_2;-\dfrac{2}{3}(m^2+1)x_2+\dfrac{2}{3}(m^2+1)\right)$

Điểm uốn: $y''=6x-6$, $y''=0 \Rightarrow x=1$.

Với $x=1$ suy ra $y=0$. Vậy điểm uốn $U(1;0)$.

Ta có đoạn thẳng nối hai điểm cực trị luôn nhận điểm uốn U là trung điểm.

Xét phương trình $x^3-3x^2-(m^2-2)x+m^2=0\ (1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m^2=0(2) \end{array}\right.$.

Phương trình (2) luôn có hai nghiệm thực phân biệt x_3 và x_4.

Ta có $\dfrac{x_3+x_4}{2}=1$ và ba điểm $U(1;0)$, $B(x_3;0)$, $D(x_4;0)$ cùng nằm trên trục Ox.

Tứ giác $ABCD$ có $U(1;0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AC và đoạn thẳng BD nên tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Để tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì $AC=BD$.

Ta có $AC^2=(x_1-x_2)^2+\dfrac{4}{9}(m^2+1)^2(x_1-x_2)^2=\left[1+\dfrac{4}{9}(m^2+1)^2\right](x_1-x_2)^2$

$=\left[1+\dfrac{4}{9}(m^2+1)^2\right]\left[4-\dfrac{4(2-m^2)}{3}\right]=\dfrac{4}{3}\left[1+\dfrac{4}{9}(m^2+1)^2\right](m^2+1)$

Và $BD^2=(x_3-x_4)^2=4+4m^2$

Vậy ta có phương trình: $\dfrac{4}{3}\left[1+\dfrac{4}{9}(m^2+1)^2\right](m^2+1)=4(m^2+1)$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{4}{9}(m^2+1)^2=3 \Leftrightarrow (m^2+1)^2=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m^2=\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1$. Suy ra $m=\pm\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1}$

Do đó $T=m_1^4+m_2^4=2\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1\right)^2=11-6\sqrt{2}$.

Câu 21: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9$. Tính tích các phần tử của S.

Lời giải

Ta có: $y'=x^2-2mx+m^2-1=(x-m-1)(x-m+1)$;

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m+1 \\ x=m-1 \end{array}\right.$.

Vì $m-1\neq m+1$ với mọi giá trị m nên đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị là $A\left(m+1;\dfrac{m^3}{3}-m-\dfrac{2}{3}\right)$ và $B\left(m-1;\dfrac{m^3}{3}-m+\dfrac{2}{3}\right)$.

A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y=5x-9 \Leftrightarrow A\notin d: y=5x-9$ và trung điểm $I\left(m;\dfrac{m^3}{3}-m\right)$ của AB thuộc d.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m^3}{3} - m - \dfrac{2}{3} \neq 5m + 5 - 9 \\ \dfrac{m^3}{3} - m = 5m - 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow (m-3)(m^2 + 3m - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tích các phần tử của S bằng -27.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(m-1)x^2 - 3mx - \frac{3m}{2}$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-20;22)$ sao cho đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3(m-1)x - 3m$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = m \end{array}\right.$.

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $m \neq -1$.

Đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm cùng một phía đối với trục hoành

$$\Leftrightarrow y(-1).y(m) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}m(m^2 + 3m + 3) > 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Suy ra $m < 0$ và $m \neq -1$.

Vậy trong khoảng $(-20;22)$ có 18 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2021$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ bằng

Lời giải

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ thì $\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 2 & (2) \end{cases}$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow -2m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{6}}{2}\ (*)$.

Mặt khác ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m}\ (3)$.

Từ (2) và (3) ta có $x_1 = \frac{2}{m}$.

$$\text{Vì } y'(x_1) = 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{2}{m}\right)^2 - 2(m-1).\frac{2}{m} + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{4}{3} \end{array}\right..$$

Vậy tổng bình phương tất cả các giá trị của m thỏa mãn YCBT là: $2^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{52}{9}$.

Câu 24: Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ có điểm cực tiểu của nằm bên phải trục tung.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2+2x+m$

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

Điều này tương đương với pt $3x^2+2x+m=0\,(1)$ có hai nghiệm pb; có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'=1-3m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$.

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_{CD}, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_{CD}+x_{CT}=-\frac{2}{3}<0\,(2) \\ x_{CD}.x_{CT}=\frac{m}{3}\,(3) \end{cases}$, trong đó $x_{CD}<x_{CT}$ vì hệ số của x^3 lớn hơn 0.

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: $x_{CT}>0$, kết hợp (2) và (3) suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow x_{CD}.x_{CT}=\frac{m}{3}<0\Leftrightarrow m<0$.

Mà $m\in(-10;10), m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-9;-8;-7;...;-1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn YCBT là: -45.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có $y'=3x^2-3$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1;m-2)$, $B(-1;m+2)$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=-2x+m$ hay $2x+y-m=0$

Theo giả thiết $d(O;AB)\le 2\sqrt{5}\Leftrightarrow \frac{|-m|}{\sqrt{5}}\le 2\sqrt{5}\Leftrightarrow |-m|\le 10\Leftrightarrow -10\le m\le 10$

Mà m nguyên dương nên có 10 giá trị.

DẠNG 4 : RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG

I: KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị là (C).

+) Đồ thị (C) có đúng một điểm cực trị khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+) Đồ thị (C) có ba điểm cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ và tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A.

II. CÔNG THỨC NHANH MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP THƯỜNG GẶP

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC NHANH	CHỨNG MINH
$\widehat{BAC} = \alpha$	$\cos\alpha = \frac{b^3+8a}{b^3-8a} \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$	Áp dụng định lý cosin trong ΔABC ta có điều phải chứng minh.
ΔABC vuông	$b^3 + 8a = 0$	ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$ **Hoặc:** $\cos\alpha = \frac{b^3+8a}{b^3-8a} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$
ΔABC đều	$b^3 + 24a = 0$	ΔABC đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$ **Hoặc** $\cos\alpha = \frac{b^3+8a}{b^3-8a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$
$S_{\Delta ABC}$	$S_{\Delta ABC} = \lvert a\rvert\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5$	Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AI = \sqrt{\frac{-b}{2a}}.\left\lvert -\frac{b^2-4ac}{4a} - c\right\rvert$ $= \lvert a\rvert\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5$
Bán kính đường tròn	$R = \frac{b^3-8a}{8\lvert a\rvert b}$	Áp dụng công thức

ngoại tiếp ΔABC		$R=\dfrac{AB^2}{2AI}=\dfrac{AB.BC.AC}{4S_{\Delta ABC}}\Leftrightarrow R=\dfrac{b^3-8a}{8\|a\|b}$
Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC	$r=\dfrac{b^2}{4\|a\|+\sqrt{16a^2-2ab^3}}$	Áp dụng công thức $r=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$ $\Leftrightarrow r=\dfrac{b^2}{4\|a\|+\sqrt{16a^2-2ab^3}}$
ΔABC có trọng tâm là gốc tọa độ O	$b^2-6ac=0$	Áp dụng công thức tọa độ trọng tâm cho ΔABC ta có: $-\dfrac{b^2-4ac}{2a}+c=0\Leftrightarrow b^2-6ac=0$
ΔABC có trực tâm là gốc tọa độ O	$b^3+8a-4ac=0$	ΔABC có trực tâm là gốc tọa độ O khi $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow b^3+8a-4ac=0$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC	$x^2+y^2-\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=0$	
Phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị	$y=\dfrac{1}{2}bx^2+c$	Lấy y chia y' ta được phần dư là $r(x)=\dfrac{1}{2}bx^2+c$. Khi đó phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị là $y=r(x)=\dfrac{1}{2}bx^2+c$

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=2x^4-(m+1)x^2+4$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y'=8x^3-2(m+1)x$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{(m+1)}{4}\ (1)\end{array}\right..$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow\frac{(m+1)}{4}>0\Leftrightarrow m>-1.$$

Cách 2:

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi $ab<0\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1$.

Câu 27: Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x^3-4(m+1)x$.

$$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4(m+1)x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m+1\end{array}\right..$$

Đồ thị số có ba điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>-1\ (*)$.

Khi đó, ba điểm cực trị là: $A(0;m^2)$, $B(\sqrt{m+1};-2m-1)$, $C(-\sqrt{m+1};-2m-1)$

Ta thấy $A\in Oy$, B,C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A.

Do đó tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$.

$$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m+1};-(m+1)^2\right).$$

Suy ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(m+1)^4-(m+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\ (loại)\\m=0\ \ (thỏa\,mãn)\end{array}\right.$.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Chú ý có thể sử dụng điều kiện sau:

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H(0;-2m-1)$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $AH = BH \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^4} = \sqrt{m+1}$

$\Leftrightarrow m = 0$ thỏa mãn $(*)$.

Cách 2:

Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi: $b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow -8(m+1)^3 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 28: Cho hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có đồ thị (C_m). Xác định tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 8(m-1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8(m-1)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2(m-1) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2(m-1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là:

$A(0; 2m-1)$; $B\left(\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m - 1\right)$; $C\left(-\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m - 1\right)$ và tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A vì: $AB = AC = \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4}$; $BC = 2\sqrt{2(m-1)}$.

Do đó tam giác ABC đều khi $AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4} = 2\sqrt{2(m-1)}$.

$$\Leftrightarrow 16(m-1)^4 - 6(m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 1 = 0 \\ (m-1)^3 = \dfrac{3}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 1 & (loại) \\ m = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2} & (thỏa\, mãn) \end{array}\right..$$

Vậy $m = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2:

Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác đều khi: $b^3 + 24a = 0$

$\Leftrightarrow -64(m+1)^3 + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 1 + \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Câu 29: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = x^4 + 2mx^2 - 1$; $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m<0$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là: $A(0;-1)$, $B\left(-\sqrt{-m};-m^2-1\right)$, $C\left(\sqrt{-m};-m^2-1\right)$.

Gọi H là trung điểm BC nên $H\left(0;-m^2-1\right)$.

$AH=\sqrt{\left(-m^2\right)^2}=m^2$; $BC=\sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2}=2\sqrt{-m}$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\Leftrightarrow\frac{1}{2}.m^2.2\sqrt{-m}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy $m=-2$.

Cách 2:

Hàm số có ba điểm cực trị khi $m<0$.

Áp dụng công thức: $S_{\Delta ABC}=|a|\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)^5$,

ta có: $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{-\frac{2m}{2}}\right)^5=4\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{-m}=\sqrt{2}\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$, với m là tham số thực. Xác định các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba cực trị đồng thời các điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4mx$.

$y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4mx=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m\end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m>0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

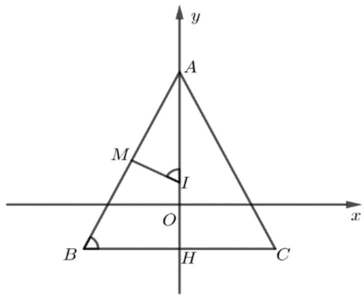
$A(0;m-1)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$.

Cách 1: Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|y_B-y_A|.|x_C-x_B|=m^2\sqrt{m}$ và $AB=\sqrt{m^2+m}, BC=2\sqrt{m}$.

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=\frac{\left(m^2+m\right).2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}$.

$R=1\Leftrightarrow\frac{\left(m^2+m\right)\sqrt{m}}{2m^2\sqrt{m}}=1\Leftrightarrow\frac{m+1}{2m}=1\Leftrightarrow m=1$.

Cách 2: Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AB, BC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



$AB=\sqrt{m^2+m}, AH=m^2$. Ta có ΔAMI đồng dạng $\Delta AHB \Rightarrow R=\dfrac{AB^2}{2AH}$.

$R=1 \Leftrightarrow \dfrac{AB^2}{2AH}=1 \Leftrightarrow \dfrac{m^2+m}{2m^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2m} \Leftrightarrow m=1$,.

Vậy $m=1$.

Câu 31: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m>0$

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m} \end{array}\right.$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị: $A\left(0;m\right)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2+m\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+m\right)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $H\left(0;-m^2+m\right)$.

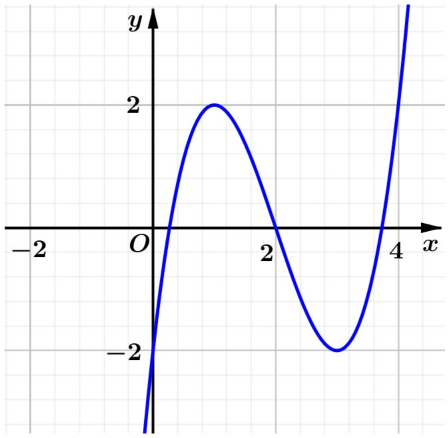
$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC=\dfrac{AB.AC.BC}{4R} \Leftrightarrow AB^2=2AH.R$ trong đó $\begin{cases} AH=m^2 \\ AB=\sqrt{m+m^4} \end{cases}$.

Suy ra $m+m^4=2m^2 \Leftrightarrow m\left(m^3-2m+1\right)=0 \Leftrightarrow m\left(m-1\right)\left(m^2+m-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta được $S=\left\{1;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

DẠNG 5: CỰC TRỊ CỦA HÀM $y=|f(x)|, y=f(|x|)$

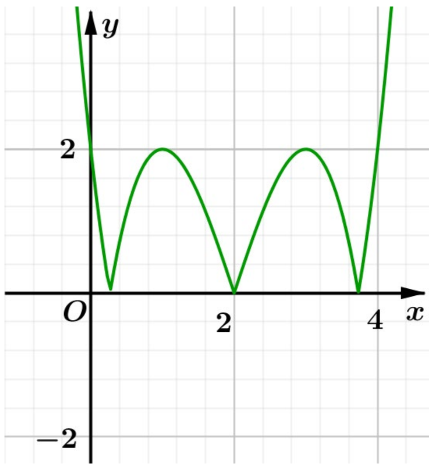
Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=|f(x)|$.



Lời giải

Ta có $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & khi\ f(x)\ge 0 \\ -f(x) & khi\ f(x)<0 \end{cases}$.

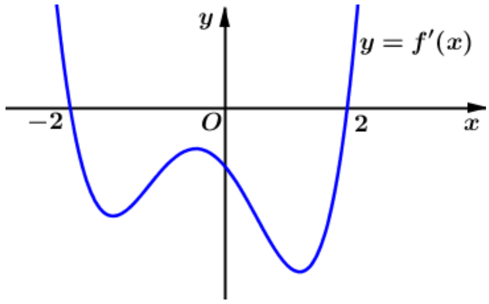
Do đó đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y=|f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

CÔNG THỨC TÍNH NHANH: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có $f(-2)<0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.

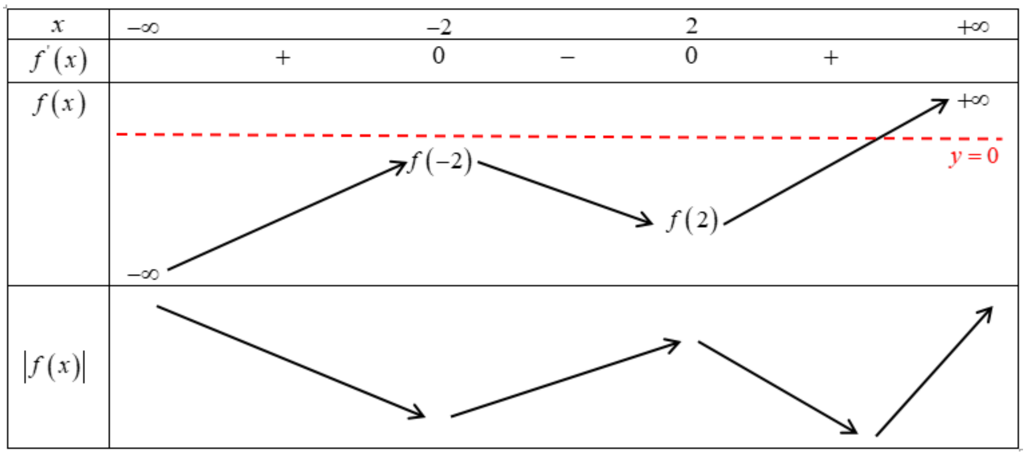


Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$.

Lời giải

Vì $y = f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $f(-2) < 0$, ta có bảng biến thiên sau:



Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 34: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x|$. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

Lời giải

+) Đặt $f(x) = x^3 - 3x$, tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

+) Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	2 ↘	0 ↘	-2 ↗	0 ↗	$+\infty$
$\lvert f(x)\rvert$	$+\infty$ ↘	0 ↗	2 ↘	0 ↗	2 ↘	0 ↗	$+\infty$

+) Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

Hàm số $y=f\left(\left|x-3\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Xét hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\left|x-3\right|\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=\left[f\left(\left|x-3\right|\right)\right]'=\left(\left|x-3\right|\right)'.f'\left(\left|x-3\right|\right)=\dfrac{x-3}{\left|x-3\right|}f'\left(\left|x-3\right|\right)$.

Có $g'\left(x\right)$ không xác định tại $x=3$.

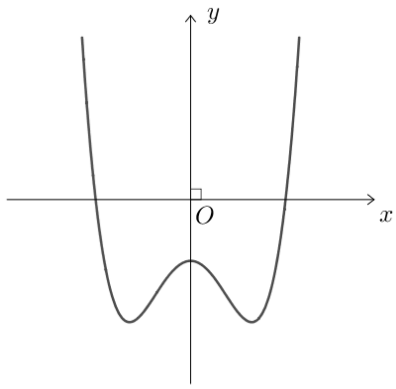
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(\left|x-3\right|\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x-3\right|=-2\\ \left|x-3\right|=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\ x=-1\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y=f\left(|x-3|\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây

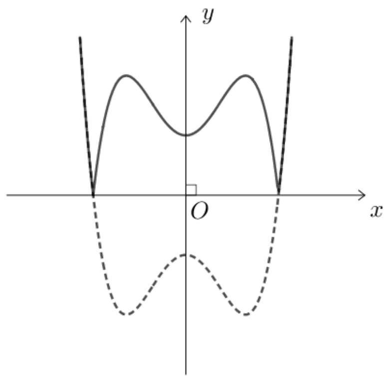


Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

Lời giải

Ta có: $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right) & khi\ \ f\left(x\right)\geq 0 \\ -f\left(x\right) & khi\ \ f\left(x\right)<0 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta suy ra đồ thị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như sau:



Dựa vào đồ thị, ta kết luận đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 37: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-\left(2m-1\right)x^2+\left(2-m\right)x+2$. Tập tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\dfrac{a}{b};c\right)$ với a, b, c là các số nguyên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b+c$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-2\left(2m-1\right)x+\left(2-m\right)$.

Đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ 2m-1 > 0 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \dfrac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \\ \dfrac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}; c\right) = \left(\frac{5}{4}; 2\right) \Rightarrow a = 5,\ b = 4,\ c = 2.$$

Vậy $a + b + c = 11$.

Câu 38: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị $(C): y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ luôn có 3 cực trị.

Do đó đồ thị $(H): y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 5 điểm cực trị khi phương trình $y = f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m - 32 < 0 \le m - 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 5 \le m < 32 \end{array}\right..$$

Mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{5; 6; ...; 31\}$

Vậy có $31-5+1=27$ giá trị m thỏa yêu cầu bài.

Câu 39: Cho hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$, có $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$.

Hàm số $y=f(|x|)=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có đúng một cực trị dương. Khi đó phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ sao cho $x_1\le 0<x_2$. +) $x_1=0<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}3m=0\\ \dfrac{2(2m+1)}{3}>0\end{cases} \Leftrightarrow m=0.$

+) $x_1<0<x_2 \Leftrightarrow 3.3m<0 \Leftrightarrow m<0$.

Kết hợp 2 trường hợp ta được: $m\le 0$.

Vậy $m\in(-\infty;0]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^3-5x^2+(m+3)x+3$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

Lời giải

- Tập xác định của các hàm số $y=f(x)$ và $y=f(|x|)$ đều là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương.

- Xét $m=1$, ta có $f(x)=-5x^2+4x+3$ có đúng một điểm cực trị là $x=\dfrac{2}{5}>0$. Khi đó hàm số $y=f(|x|)=-5x^2+4|x|+3$ có đúng 3 điểm cực trị là $x=-\dfrac{2}{5};x=0;x=\dfrac{2}{5}$. Nên $m=1$ thỏa mãn.

- Xét $m\ne 1$ thì $f(x)$ là hàm số bậc 3, ta có $f'(x)=3(m-1)x^2-10x+m+3$.

Hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương khi và chỉ khi $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1\le 0<x_2$.

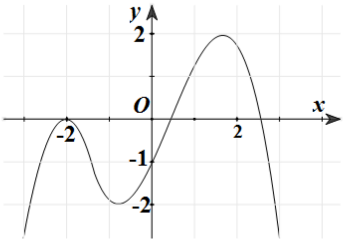
Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3(m-1)x^2-10x+m+3=0$

+) $x_1=0<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases}m+3=0\\ \dfrac{10}{3(m-1)}>0\end{cases}$.

+) $x_1<0<x_2 \Leftrightarrow 3(m-1)(m+3)<0 \Leftrightarrow -3<m<1$.

Kết hợp ta thấy tất cả có 4 số nguyên thỏa mãn bài toán là: $m=-2$, $m=-1$, $m=0$, $m=1$.

Câu 41: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y=g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-m\right|$ có 7 điểm cực trị là $\left(a;b\right)$. Tính $T=2b-a$.



Lời giải

Số cực trị của hàm số $g\left(x\right)$ bằng tổng số cực trị của hàm $y=f\left(x\right)-m$ và số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=m$.

Hàm số $y=f\left(x\right)-m$ có 3 điểm cực trị. Do đó hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x\right)-m\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt đơn hoặc bội lẻ.

Từ đồ thị của hàm số đã cho suy ra $-2<m<0$.

Khi đó $a=-2;b=0$. Vậy $T=2$

CHƯƠNG I

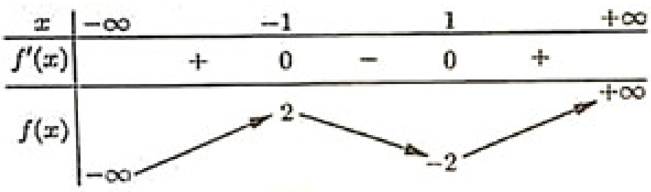
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

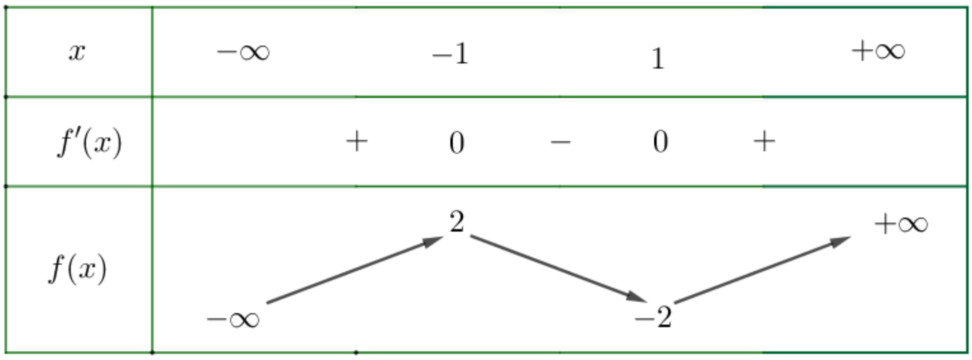


x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

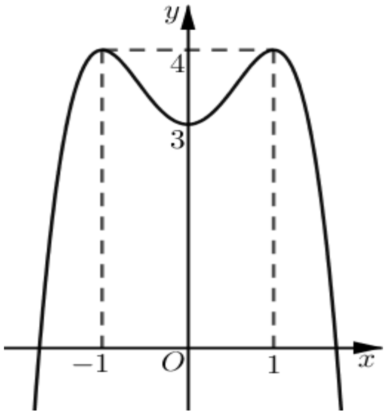


x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

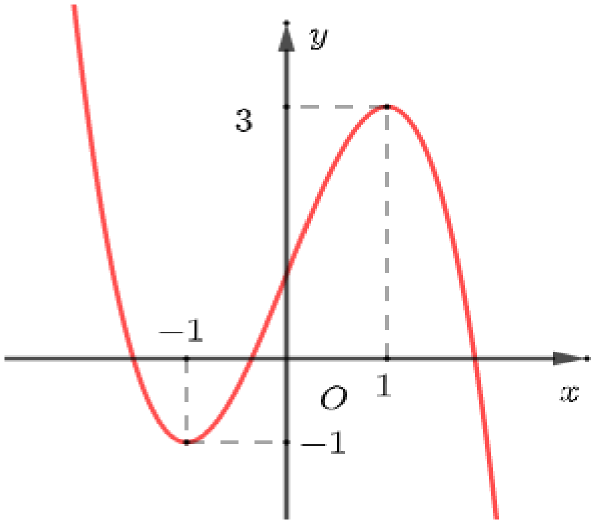
A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



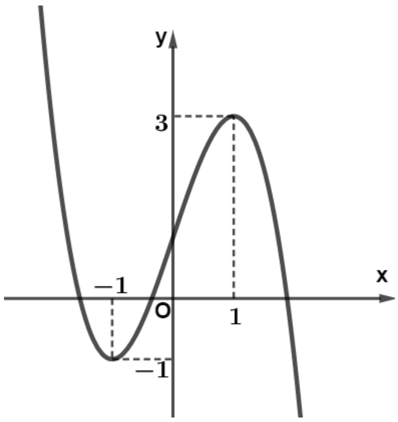
A. 1. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 4: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



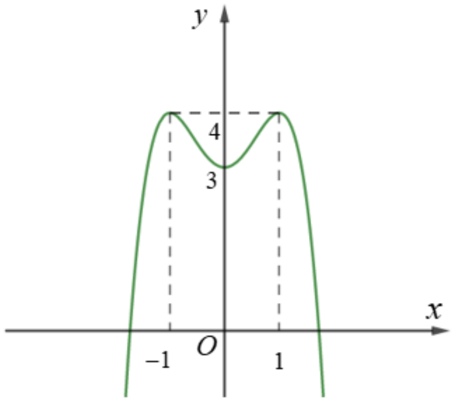
A. $\left(1;-1\right)$. **B.** $\left(3;1\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(-1;-1\right)$.

Câu 5: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



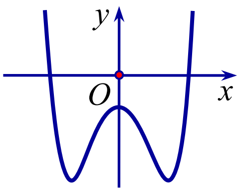
A. $\left(1;3\right)$. **B.** $\left(3;1\right)$. **C.** $\left(-1;-1\right)$. **D.** $\left(1;-1\right)$.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



A. 3. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 1.

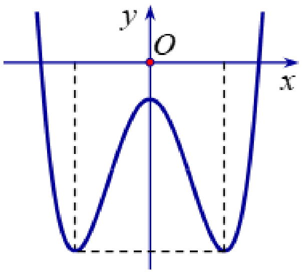
Câu 7: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 8: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9: **(MĐ 101-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 11.

Câu 10: **(MĐ 102-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = \left|x^4 + 2ax^2 + 8x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

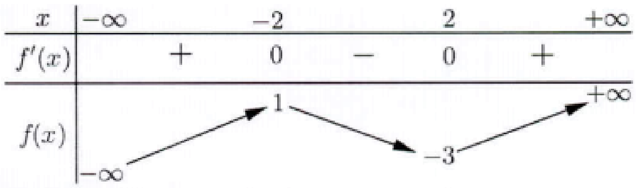
Câu 11: **(MĐ 103-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = \left|x^4 + ax^2 - 8x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 12: **(MĐ 104-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|x^4 - mx^2 - 64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 23. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 11.

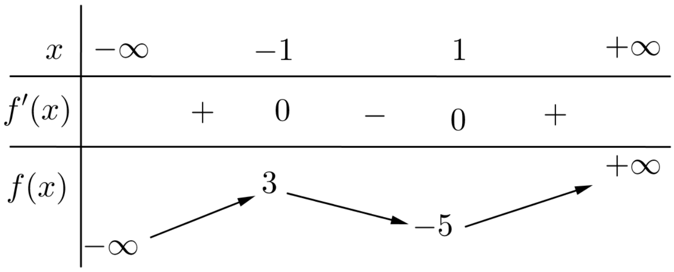
Câu 13: **(ĐTK 2020-2021)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. $x=-3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-2$.

Câu 14: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 1.

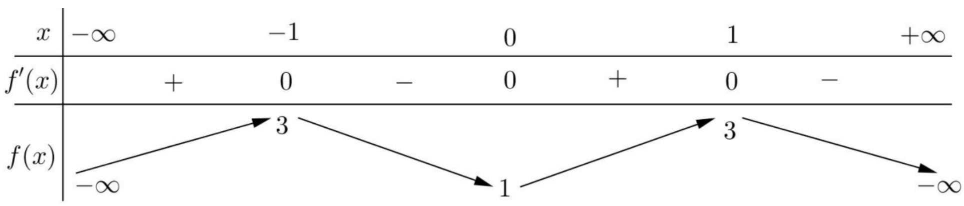
Câu 15: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 16: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

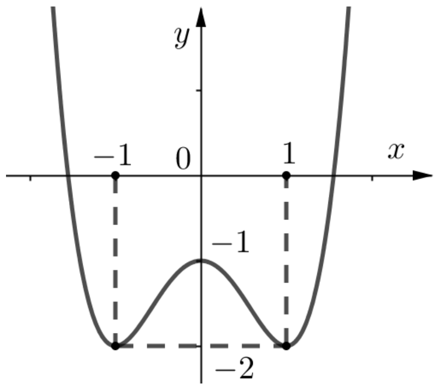
Câu 17: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 18: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a,b,c \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 0$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

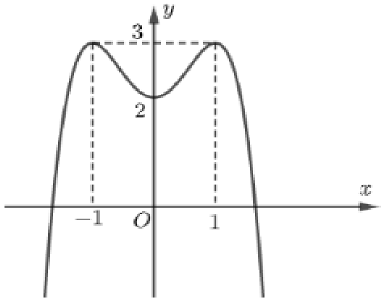
Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 21: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a,b,c \in R)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:



A. $x = -1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 0$.

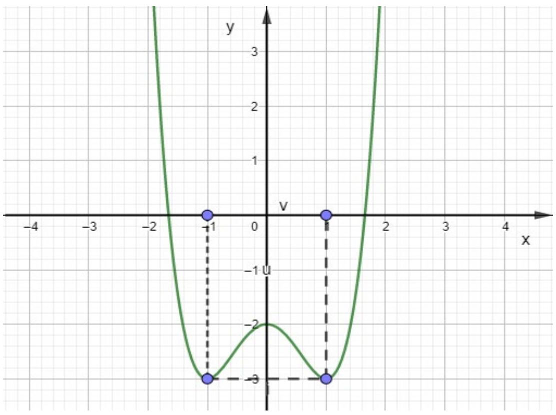
Câu 22: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hỏi số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 23: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a,b,c \in R)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x = 1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = -1$.

Câu 24: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 25: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

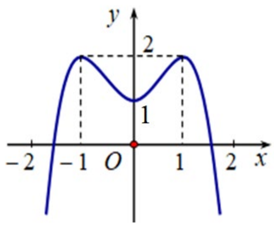
Câu 26: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 27: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\left(a, b, c \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số là:



A. $x = 0$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Câu 28: **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 29: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 30: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 31: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 32: **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Cho hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 35: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 36: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số có đúng một cực trị

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1

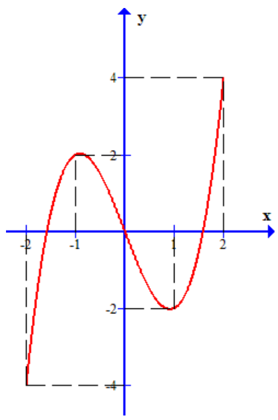
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 37: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CD} = 4$ **B.** $y_{CD} = 1$ **C.** $y_{CD} = 0$ **D.** $y_{CD} = -1$

Câu 38: **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$

Câu 39: **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3. **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1.

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6. **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Câu 40: **(Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$ **B.** $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = -2$

C. $y_{CĐ} = -2$ và $y_{CT} = 2$ **D.** $y_{CĐ} = 2$ và $y_{CT} = 0$

Câu 41: **(Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 42: **(Mã 102, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	$+$	0	-	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Hàm số có hai điểm cực tiểu **B.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 0

C. Hàm số có ba điểm cực trị **D.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 3

Câu 43: **(Mã 102, Năm 2017)** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $Q(-1;10)$ **B.** $M(0;-1)$ **C.** $N(1;-10)$ **D.** $P(1;0)$

Câu 44: **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có bốn điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

C. Hàm số không có cực đại. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$.

Câu 45: **(Mã 103, Năm 2017)** Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S=9$. **B.** $S=\dfrac{10}{3}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Câu 46: **(Mã 104, Năm 2017)** Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

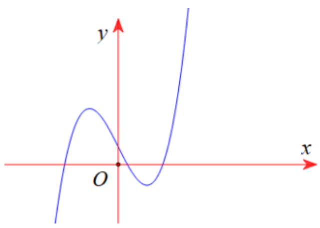
Câu 47: **(Tham khảo 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$ **B.** $x=0$ **C.** $x=5$ **D.** $x=2$

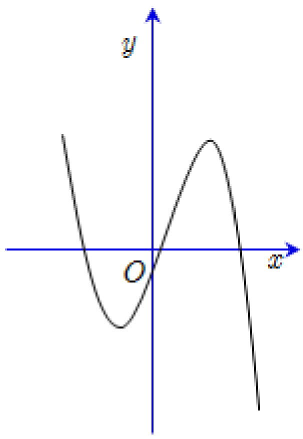
Câu 48: **(Mã 101, Năm 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2 **B.** 0

C. 3 **D.** 1

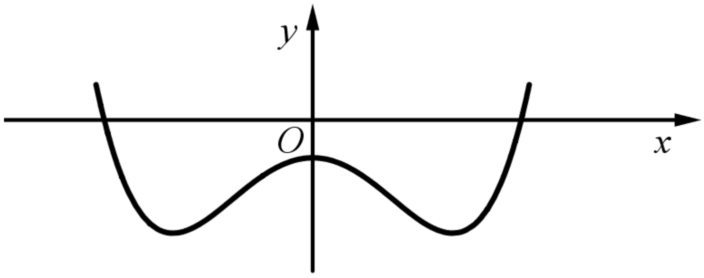
Câu 49: **(Mã 102, Năm 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 0 **B.** 1

C. 3 **D.** 2

Câu 50: **(Mã 103, Năm 2018)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



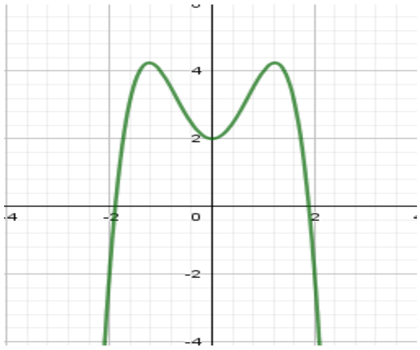
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Câu 51: **(Mã 104, Năm 2018)** Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 0 **B.** 1

C. 2 **D.** 3



Câu 52: **(Đề minh họa 1, Năm 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 53: **(Đề minh họa 1, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 54: **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3$.

Câu 55: **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 56: **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Câu 57: **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3

Câu 58: **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Câu 59: **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 60: **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Câu 61: **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 62: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **D.** $m=1$

Câu 63: **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $y(-2)=2$. **B.** $y(-2)=22$. **C.** $y(-2)=6$. **D.** $y(-2)=-18$.

Câu 64: **(Đề minh họa 3, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4-2(m-3)x^2+1$ không có cực đại.

A. $1\le m\le 3$. **B.** $m\le 1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $1<m\le 3$.

Câu 65: **(Đề minh họa 3, Năm 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** −6. **D.** 3.

Câu 66: **(Mã 101, Năm 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=-1$ **B.** $m=-7$ **C.** $m=5$ **D.** $m=1$

Câu 67: **(Mã 103, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m>0$. **B.** $m<1$. **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$. **D.** $0<m<1$.

Câu 68: **(Mã 104, Năm 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=\frac{3}{4}$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{1}{4}$.

Câu 69: **(Mã 104, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **B.** $m = -1; m = 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \neq 0$.

Câu 70: **(Tham khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 4

Câu 71: **(Mã 101, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** Vô số

Câu 72: **(Mã 102, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

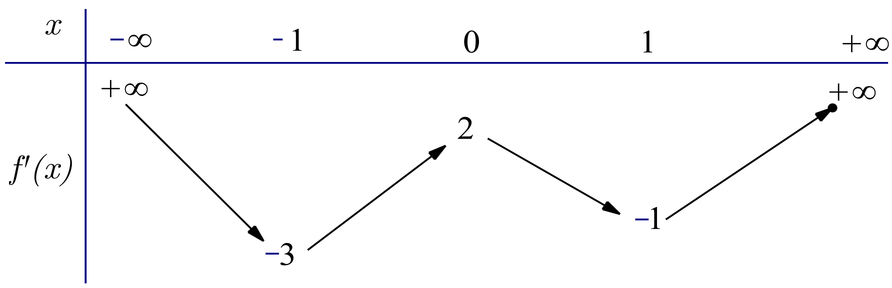
Câu 73: **(Mã 103, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 8 **B.** Vô số **C.** 7 **D.** 9

Câu 74: **(Mã 104, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 4 **B.** 7 **C.** 6 **D.** Vô số

Câu 75: **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 76: **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 77: **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 78: **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 79: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 80: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biên thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4[f(x-1)]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 81: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

Câu 82: **(ĐTK 2020-2021)** Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f(x^3)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 83: Cho hàm số $f(x)=x^4-12x^3+30x^2+(4-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 27. **B.** 31. **C.** 28. **D.** 30.

Câu 84: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)(x^2-9), \forall x\in\mathbb{R}$.

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 85: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-8)(x^2-9), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 86: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-10\right)\left(x^2-25\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^3+8x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 87: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-9\right)\left(x^2-16\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x^3+7x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 88: Cho hàm số $f(x)=x^4-12x^3+30x^2+(3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. **B.** 27. **C.** 26. **D.** 28.

Câu 89: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^4-10x^3+24x^2+\left(4-m\right)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 21.

Câu 90: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x)=x^4-10x^3+24x^2+(3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 21. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 22.

CHƯƠNG I

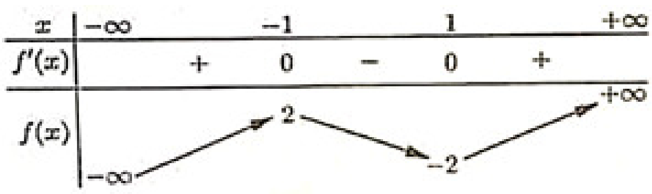
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

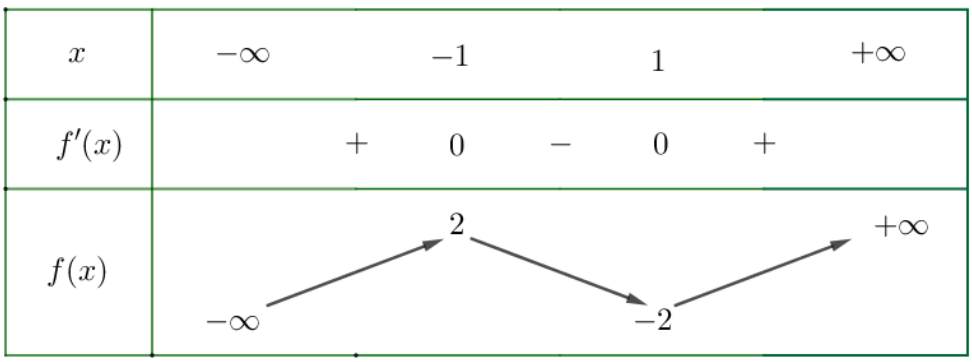
A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=1$

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

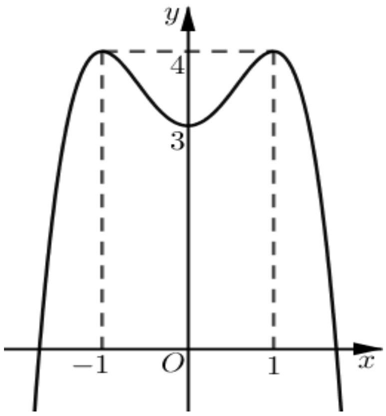
A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có điểm cực tiểu là $x=1$.

Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



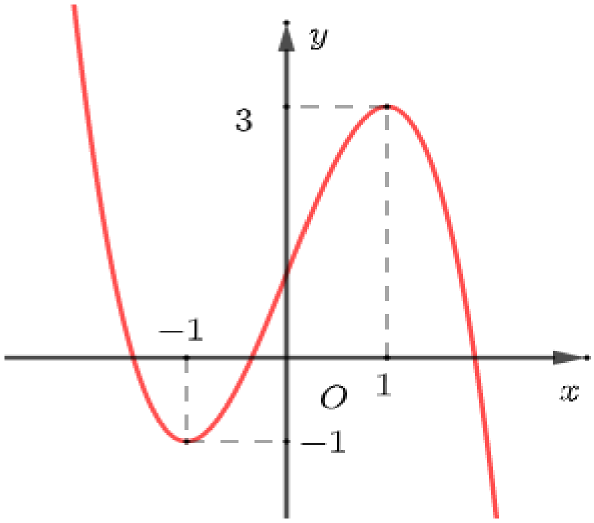
A. 1. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 3.

Câu 4: **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



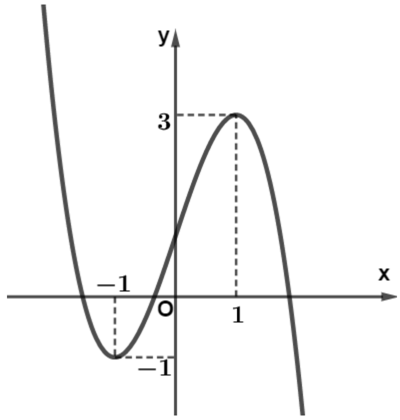
A. $(1;-1)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-1;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(-1;-1)$.

Câu 5: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



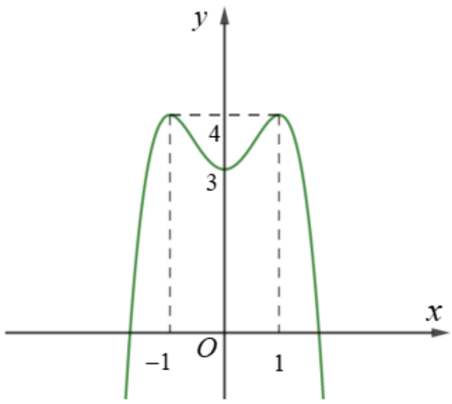
A. $(1;3)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(-1;-1)$. **D.** $(1;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(-1;-1)$.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



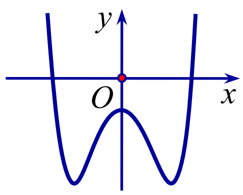
A. 3. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Giá trị cực tiểu: $y_{CT} = 3$.

Câu 7: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

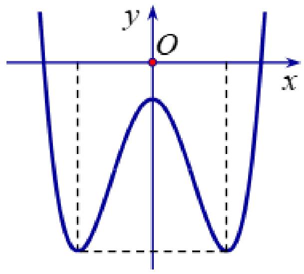
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 8: **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 9: **(MĐ 101-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f\left(x\right) = x^4 - 2mx^2 + 64x \Rightarrow f'\left(x\right) = 4x^3 - 4mx + 64$.

Ta có $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx + 64 = 0 \Rightarrow m = x^2 + \dfrac{16}{x}$.

Đặt $g\left(x\right) = x^2 + \dfrac{16}{x} \Rightarrow g'\left(x\right) = 2x - \dfrac{16}{x^2} \Rightarrow g'\left(x\right) = 0 \Rightarrow x = 2$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
g'(x)		||			
g(x)	$+\infty$ ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	12	↗ $+\infty$

Xét phương trình $f\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2mx^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^3 - 2mx + 64 = 0 \end{array}\right.$.

Suy ra $x^3 - 2mx + 64 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{32}{x}$.

Đặt $h\left(x\right) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{32}{x} \Rightarrow g'\left(x\right) = x - \dfrac{32}{x^2} \Rightarrow h'\left(x\right) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt[3]{4}$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$		0		$2\sqrt[3]{4}$		$+\infty$
$h'(x)$			‖				
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$12\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Nhận xét:</u> Số cực trị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng số cực trị hàm số $y=f\left(x\right)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Do đó yêu cầu bài toán suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có 1 cực trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ $\begin{cases} m\le 12 \\ m\le 12\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\le 12$.

Vì tham số m nguyên dương nên $m\in\left\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\right\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của tham số m thoả mãn.

Câu 10: **(MĐ 102-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y=\left|x^4+2ax^2+8x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **<u>D</u>.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4+2ax^2+8x \Rightarrow f'\left(x\right)=4x^3+4ax+8$.

Ta có $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 4x^3+4ax+8=0 \Rightarrow a=-x^2-\dfrac{2}{x}$.

Đặt $g\left(x\right)=-x^2-\dfrac{2}{x} \Rightarrow g'\left(x\right)=-2x+\dfrac{2}{x^2} \Rightarrow g'\left(x\right)=0 \Rightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

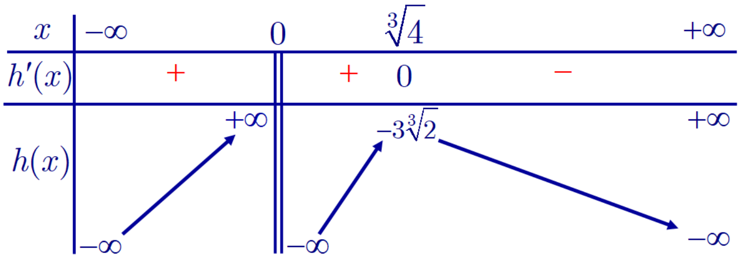
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Xét phương trình $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x^4+2ax^2+8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+2ax+8=0 \end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^3+2ax+8=0 \Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{4}{x}$.

Đặt $h\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{4}{x} \Rightarrow h'\left(x\right)=-x+\dfrac{4}{x^2} \Rightarrow h'\left(x\right)=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{4}$.

Bảng biến thiên



<u>Nhận xét:</u> Số cực trị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng số cực trị hàm số $y=f\left(x\right)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Do đó yêu cầu bài toán suy ra hàm số $y=f\left(x\right)$ có 1 cực trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ $\begin{cases} a\ge -3 \\ a>-3\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow a\ge -3$.

Vì tham số a nguyên âm nên $a\in\left\{-1;-2;-3\right\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm của tham số a thoả mãn.

Câu 11: **(MĐ 103-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y=\left|x^4+ax^2-8x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5. **<u>B.</u>** 6. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4+ax^2-8x$; $f'\left(x\right)=4x^3+2ax-8$

$$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+ax-8=0 \end{array}\right.$$

Vì phương trình bậc ba luôn có tối thiểu 1 nghiệm nên để hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có đúng ba điểm cực trị thì phương trình $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm phân biệt và $f'\left(x\right)=0$ có đúng 1 nghiệm bội lẻ.

Đặt $g\left(x\right)=x^3+ax-8\Rightarrow g'\left(x\right)=3x^2+a$.

Để $g\left(x\right)=0$ có 1 nghiệm duy nhất $\ne 0$ $\left(1\right)$

TH1: $3x^2+a=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow a\ge 0$

TH2: $3x^2+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{-a}{3}} \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) > 0 \\ g\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} + a\sqrt{-\frac{a}{3}} - 8 > 0 \\ \frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} - a\sqrt{-\frac{a}{3}} - 8 < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\sqrt{-\frac{a}{3}} > 6\,(sai) \\ a > -3\sqrt[3]{16} \end{array}\right.$$

Suy ra $a > -3\sqrt[3]{16}$

Để $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm bội lẻ (2)

TH1: $12x^2 + 2a = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow a \geq 0$

TH2: $12x^2 + 2a = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{-a}{6}} \end{cases}$

$$(2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(\sqrt{-\frac{a}{6}}\right) \geq 0 \\ f'\left(-\sqrt{-\frac{a}{6}}\right) \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\frac{a}{6}\sqrt{-\frac{a}{6}} + 2a\sqrt{-\frac{a}{6}} - 8 \geq 0 \\ 4\frac{a}{6}\sqrt{-\frac{a}{6}} - 2a\sqrt{-\frac{a}{6}} - 8 \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\sqrt{-\frac{a}{6}} \geq 6\,(sai) \\ a \geq -6 \end{array}\right.$$

Suy ra $a \geq -6$

Vậy $a \geq -6$ thỏa ycbt với $a \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Cách 2:

$y = \left|x^4 + ax^2 - 8x\right|$

$$y' = \frac{\left(x^4 + ax^2 - 8x\right)\left(4x^3 + 2ax - 8\right)}{\left|x^4 + ax^2 - 8x\right|} = \frac{2x\left(x^3 + ax - 8\right)\left(2x^3 + ax - 4\right)}{\left|x^4 + ax^2 - 8x\right|}$$

Để hàm số $y = \left|x^4 + ax^2 - 8x\right|$ có đúng ba điểm cực trị $\Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Vì $x = 0$ không là nghiệm của các phương trình $x^3 + ax - 8 = 0$ và $2x^3 + ax - 4 = 0$

Khi $x \neq 0$

Ta có $x^3 + ax - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 - x^3}{x} = g(x)$

$$g'(x) = \frac{-8 - 2x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{4}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g\left(-\sqrt[3]{4}\right)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Ta có $2x^3+ax-4=0 \Rightarrow a=\dfrac{4-2x^3}{x}=h(x)$

$h'(x)=\dfrac{-4-4x^3}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=-1$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow a \ge -6$ với $a \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 12: **(MĐ 104-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|x^4-mx^2-64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 23. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Xét $f(x)=x^4-mx^2-64x$. Ta có $f'(x)=4x^3-2mx-64=0 \Rightarrow m=2x^2-\dfrac{32}{x}$.

Đặt $g(x)=2x^2-\dfrac{32}{x} \Rightarrow g'(x)=4x+\dfrac{32}{x^2} \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	24	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Xét phương trình $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x^4-mx^2-64x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3-mx-64=0 \end{array}\right.$.

Xét $x^3-mx-64=0 \Rightarrow m=x^2-\dfrac{64}{x}$.

Đặt $h\left(x\right)=x^2-\dfrac{64}{x} \Rightarrow h'\left(x\right)=2x+\dfrac{64}{x^2} \Rightarrow h'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{32}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{32}$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(-\sqrt[3]{32})$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=0$.

Suy ra yêu cầu bài toán trở thành hàm số $y=f\left(x\right)$ có 1 điểm cực trị và phương trình $f\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ $\left\{\begin{array}{l} m\le 24 \\ m\le h\left(-\sqrt[3]{32}\right)\approx 30,23 \end{array}\right. \Rightarrow m\le 24$.

Vì m nguyên dương nên có 24 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13: **(ĐTK 2020-2021)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. $x=-3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Vì $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi hàm số qua $x=-2$ nên $x_{CD}=-2$.

Câu 14: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 1.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3.

Câu 15: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Đạo hàm đổi dấu 4 lần nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 16: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực tiểu là $y = 1$.

Câu 17: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

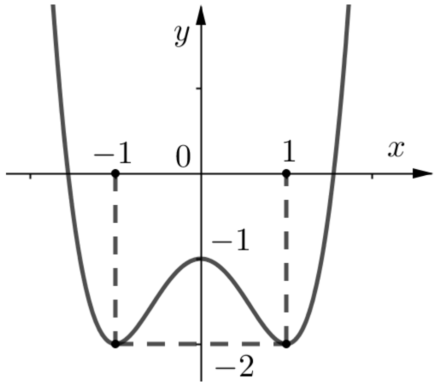
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $y = f(x)$ đổi dấu khi qua $x = -2$; $x = -1$; $x = 2$; $x = 4$.

Do đó, hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy điểm cực đại của hàm số là $x=0$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-5	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có hai điểm cực trị tại $x=1$ và $x=5$.

Câu 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

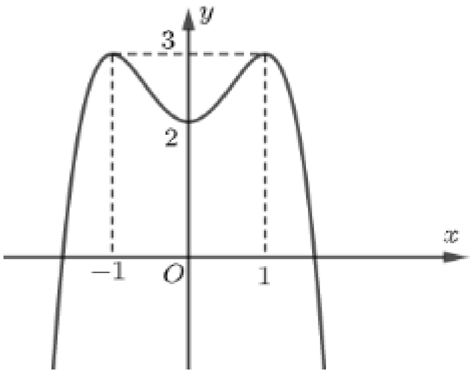
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị là $x=1$ và $x=5$.

Câu 21: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$, $\left(a,b,c\in R\right)$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:



A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có điểm cực tiểu là $x=0$.

Câu 22: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	3	↘	$-\infty$

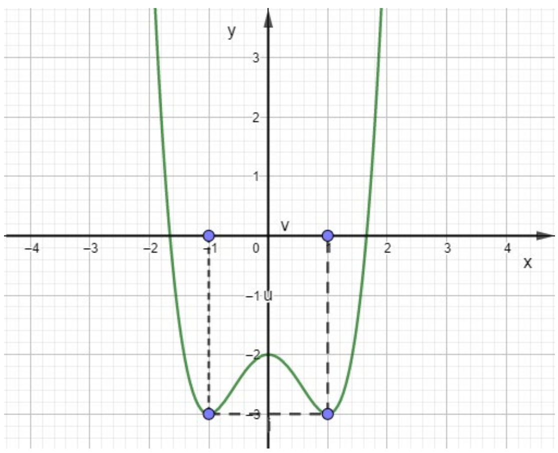
Hỏi số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 23: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ $\left(a,b,c\in R\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có điểm cực đại của hàm số là $x=0$.

Câu 24: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 25: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Theo bảng xét dấu, ta thấy đạo hàm đổi dấu 4 lần nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 26: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

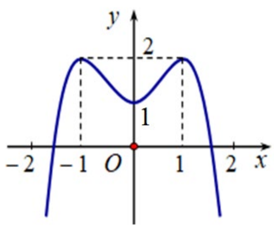
Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Quan sát bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại của hàm số là 3

Câu 27: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c\,(a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số là:

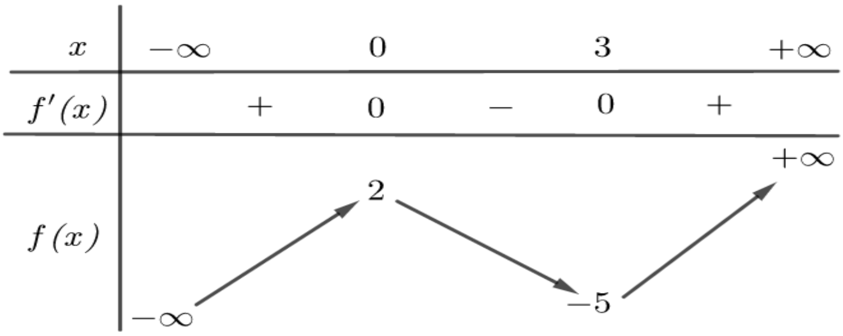


A. $x = 0$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x=0$.

Câu 28: **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

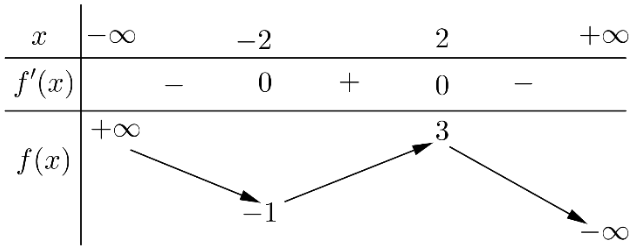
A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT ta có hàm số đạt giá trị cực tiểu $f(3)=-5$ tại $x=3$

Câu 29: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

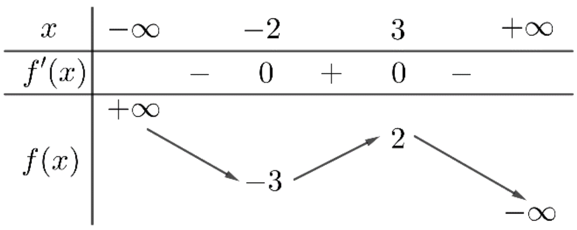
A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Gía trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -1.

Câu 30: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y_{CĐ}=2$.

Câu 31: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 32: **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1)=0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "−" khi đi qua các điểm $x=-1$, $x=1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 33: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua các điểm $x=-1; x=1$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 34: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Câu 35: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R có bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. 3. **B.** 1. **C.** **2.** **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0$, $f'(x)$ không xác định tại $x=-2; x=1; x=2, x=3$. Nhưng có 2 giá trị $x=-2; x=2$ mà qua đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Câu 36: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		↗	0	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				-1		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. Hàm số có đúng một cực trị

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Chọn A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị

Chọn B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y=-1$ khi $x=0$

Chọn C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Câu 37: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CD} = 4$ **B.** $y_{CD} = 1$ **C.** $y_{CD} = 0$ **D.** $y_{CD} = -1$

Lời giải

Chọn A

$y = x^3 - 3x + 2$ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ suy ra $y(-1) = 4; y(1) = 0$

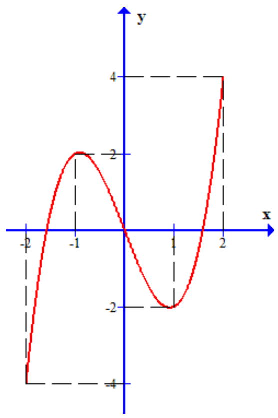
Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1; y_{CD} = 4$.

Câu 38: **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị, dấu $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

Câu 39: **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3. **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1.

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6. **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2.

Lời giải

Chọn D

** *Cách 1.***

Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

** *Cách 2.***

Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $x=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

$y'' = \dfrac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1)=1>0$; $y''(-3)=-1<0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 40: **(Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=0$ **B.** $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=-2$

C. $y_{CĐ}=-2$ và $y_{CT}=2$ **D.** $y_{CĐ}=2$ và $y_{CT}=0$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=0$.

Câu 41: **(Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Do đồ thị $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị $y = |f(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 42: **(Mã 102, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**

A. Hàm số có hai điểm cực tiểu
B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0
C. Hàm số có ba điểm cực trị
D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3

Lời giải

Chọn B

Câu 43: **(Mã 102, Năm 2017)** Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $Q(-1;10)$ **B.** $M(0;-1)$ **C.** $N(1;-10)$ **D.** $P(1;0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Câu 44: **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có bốn điểm cực trị.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
C. Hàm số không có cực đại.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ thấy mệnh đề hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ đúng.

Câu 45: **(Mã 103, Năm 2017)** Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 9$. **B.** $S = \frac{10}{3}$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=-3x^2+6x$, $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Nên $A(0;5), B(2;9) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;4) \Rightarrow AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.

Phương trình đường thẳng AB : $y=2x+5$.

Diện tích tam giác OAB là: $S=5$.

Câu 46: **(Mã 104, Năm 2017)** Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Có $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}>0, \forall x \neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 47: **(Tham khảo 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$ **B.** $x=0$ **C.** $x=5$ **D.** $x=2$

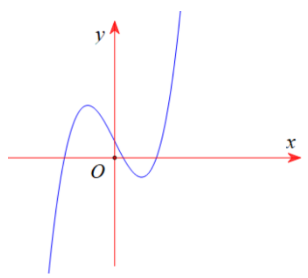
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ tại $x=2$.

Nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 48: **(Mã 101, Năm 2018)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

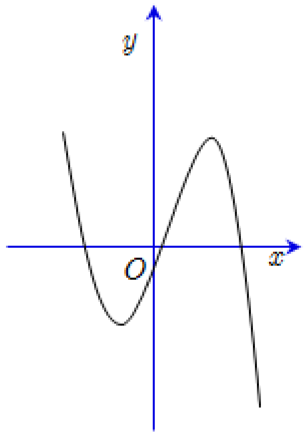


A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn A

Câu 49: **(Mã 102, Năm 2018)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \left(a, b, c, d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



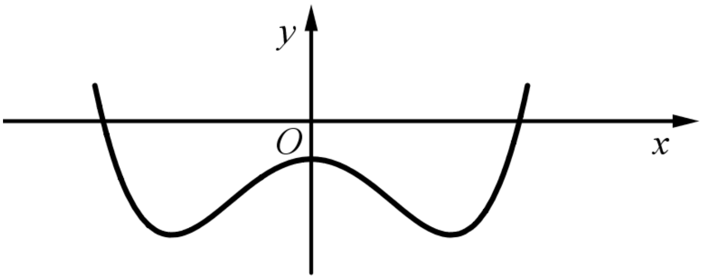
A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 50: **(Mã 103, Năm 2018)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, $c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



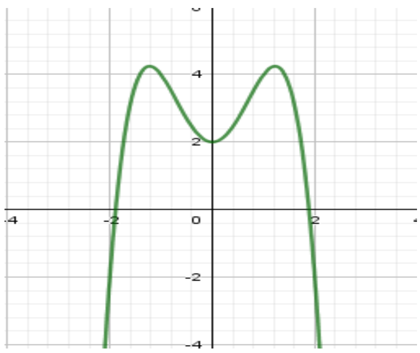
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Câu 51: **(Mã 104, Năm 2018)** Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 52: **(Đề minh họa 1, Năm 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Câu 53: **(Đề minh họa 1, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi đi qua các điểm nên hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 54: **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 55: **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $f'(x)=x(x+2)^2$. Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm suy ra hàm số có một cực trị.

Câu 56: **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn C

Căn cứ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=3$.

Câu 57: **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=x(x-2)^2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			$\nearrow$		$+\infty$

Vậy hàm số có một điểm cực trị.

Câu 58: **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

Câu 59: **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x-1\right)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$			$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

Câu 60: **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta thấy điểm cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Câu 61: **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=x(x+1)^2$ chỉ đổi dấu đúng một lần khi qua nghiệm $x=0$. Suy ra, hàm số có đúng một điểm cực trị là $x=0$.

Câu 62: **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn B

$y=x^4+2mx^2+1$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4x^3+4mx; y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+4mx=0 \Leftrightarrow 4x(x^2+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m \;(*) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt nghĩa là phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1); B(-\sqrt{-m};1-m^2); C(\sqrt{-m};1-m^2)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{-m};-m^2); \overrightarrow{AC}=(\sqrt{-m};-m^2)$

Vì ΔABC vuông cân tại

$A \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2}+m^2.m^2=0 \Leftrightarrow -|m|+m^4=0 \Leftrightarrow m+m^4=0$

$\Leftrightarrow m=-1$

Vậy với $m=-1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 63: **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $y(-2)=2$. **B.** $y(-2)=22$. **C.** $y(-2)=6$. **D.** $y(-2)=-18$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} \ (1) \ \text{và} \ \begin{cases} y(0)=2 \\ y(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a=1;\ b=-3;\ c=0;\ d=2 \Rightarrow y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y(-2)=-18$.

Câu 64: **(Đề minh họa 3, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4-2(m-3)x^2+1$ không có cực đại.

A. $1 \le m \le 3$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m \ge 1$. **D.** $1 < m \le 3$.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Hàm số không có cực đại tức là hàm số chỉ tuyến tính.

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến. Tức $\begin{cases} m-1 \ge 0 \\ m-3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \le m \le 3$.

Trường hợp 2: Hàm số nghịch biến. Tức $\begin{cases} m-1 \le 0 \\ m-3 \ge 0 \end{cases}$. Suy ra không tìm được m thỏa.

Câu 65: **(Đề minh họa 3, Năm 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0. **B.** 6. **C.** −6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: A, B nằm khác phía với đường thẳng khi và chỉ khi $x_1x_2<0$ và chúng cách đều đường thẳng tức trung điểm AB thuộc đường thẳng đã cho.

Cách giải: Ta có: $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x \Rightarrow y'=x^2-2mx+(m^2-1)$.

Phương trình $y'=0$ là phương trình bậc hai ẩn x, có $\Delta'=m^2-(m^2-1)=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1=m-1 \\ x_2=m+1 \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

A, B nằm khác phía $\Leftrightarrow x_1x_2<0 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)<0 \Leftrightarrow -1<m<1$.

A, B cách đều đường thẳng $y=5x-9$ suy ra trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y=5x-9$. Khi đó ta có: $I\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ hay $I\left(m;\frac{1}{3}m^3-m\right)$.

Ta có: $\frac{1}{3}m^3-m=5m-9 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^3-6m+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1=3 \\ \frac{1}{3}m^2+m-3=0 \end{cases}$

Suy ra $m_1 + m_2 + m_3 = 3 + \dfrac{-1}{\frac{1}{3}} = 0.$

Câu 66: **(Mã 101, Năm 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$ **B.** $m = -7$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + \left(m^2 - 4\right)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 1(L) \\ m = 5(TM) \end{array}\right. \\ m > 3 \end{cases}.$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 67: **(Mã 103, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

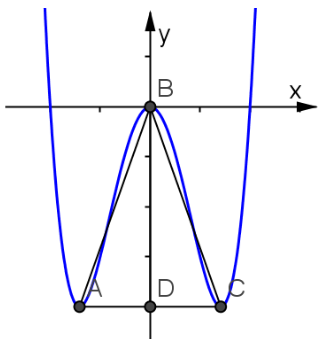
A. $m > 0$. **B.** $m < 1$. **C.** $0 < m < \sqrt[3]{4}$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện để hàm số có 3 cực trị là $m > 0$.

$$y' = 4x^3 - 4mx;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{m} \\ x_3 = \sqrt{m} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -m^2 \\ y_3 = -m^2 \end{array}\right.$$



Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân có đáy bằng $2\sqrt{m}$, đường cao bằng m^2. (như hình minh họa)

Ta được $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BD = \sqrt{m}.m^2$. Để tam giác có diện tích nhỏ hơn 1 thì $\sqrt{m}.m^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 68: **(Mã 104, Năm 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

A. $m = \frac{3}{2}$. **B.** $m = \frac{3}{4}$. **C.** $m = -\frac{1}{2}$. **D.** $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1), B(1;-1)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m-1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Câu 69: **(Mã 104, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. **B.** $m = -1; m = 1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn B

$y' = 3x^2 - 6mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{array}\right. (m \neq 0)$$

Đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị $A(0;4m^3)$ và $B(2m;0)$.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\left|4m^3.2m\right| = 4 \Leftrightarrow 4m^4 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 70: **(Tham khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải.

Chọn D

$y = \left|f(x)\right| = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y = \left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị khi

$\begin{cases} m > 0 \\ m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5$. Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m = 1; m = 2; m = 3; m = 4$.

Câu 71: **(Mã 101, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3 **B.** 5 **C.** 4 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-2)x^4-4(m^2-4)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)=0 \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-2)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+ TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0$ $\Rightarrow m=2$ hoặc $m=-2$

Với $m=2$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=2$ thỏa ycbt.

Với $m=-2$ thì $g(x)=8x^4-20x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-2$ không thỏa ycbt.

+ TH2: $g(0)\neq 0$ $\Leftrightarrow m\neq \pm 2$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ $\Leftrightarrow g(0)>0$ $\Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 72: **(Mã 102, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-1)x^5-(m^2-1)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=8x^7+5(m-1)x^4-4(m^2-1)x^3+1$ $=x^3\left(8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 8x^4+5(m-1)x-4(m^2-1)=0 \qquad (1) \end{array}\right.$$

*Nếu $m=1$ thì $y'=8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

*Nếu $m=-1$ thì $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 8x^4-10x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{5}{4}} \end{array}\right.$, nhưng $x=0$ là nghiệm bội chẵn nên không phải cực trị.

*Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x)=8x^4+5(m-1)x-4\left(m^2-1\right)$. Để $x=0$ là điểm cực tiểu thì $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)=-4(m^2-1)>0 \Leftrightarrow m^2-1<0 \Leftrightarrow -1<m<1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m=0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ là $m=0$ và $m=1$.

Câu 73: **(Mã 103, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-4)x^5-\left(m^2-16\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 8 **B.** Vô số **C.** 7 **D.** 9

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=8x^7+5(m-5)x^4-4\left(m^2-16\right)x^3=x^3\left[8x^4+5(m-4)x-4\left(m^2-16\right)\right]=x^3.g(x)$

Với $g(x)=8x^4+5(m-5)x-4\left(m^2-16\right)$.

● Trường hợp 1: $g(0)=0 \Leftrightarrow m=\pm 4$.

Với $m=4 \Rightarrow y'=8x^7$. Suy ra $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m=-4 \Rightarrow y'=8x^4\left(x^3-5\right)$. Suy ra $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số.

● Trường hợp 2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì qua giá trị $x=0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0)>0 \Leftrightarrow -4<m<4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4<m\leq 4$.

Do $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 74: **(Mã 104, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-3)x^5-\left(m^2-9\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 4 **B.** 7 **C.** 6 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^8+(m-3)x^5-\left(m^2-9\right)x^4+1 \Rightarrow y'=8x^7+5(m-3)x^4-4\left(m^2-9\right)x^3$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-3)x-4\left(m^2-9\right)\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ g(x)=8x^4+5(m-3)x-4\left(m^2-9\right)=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $g\left(x\right)=8x^4+5\left(m-3\right)x-4\left(m^2-9\right)$ có $g'\left(x\right)=32x^3+5\left(m-3\right)$.

Ta thấy $g'\left(x\right)=0$ có một nghiệm nên $g\left(x\right)=0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g\left(x\right)=0$ có nghiệm $x=0$ $\Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g\left(x\right)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

Với $m=-3$ thì $g\left(x\right)=8x^4-30x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g\left(0\right)\neq 0$ $\Leftrightarrow m\neq\pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ $\Leftrightarrow g\left(0\right)>0$ $\Leftrightarrow m^2-9<0\Leftrightarrow -3<m<3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-2;-1;0;1;2\right\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 75: **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f'\left(x\right)$ ta được

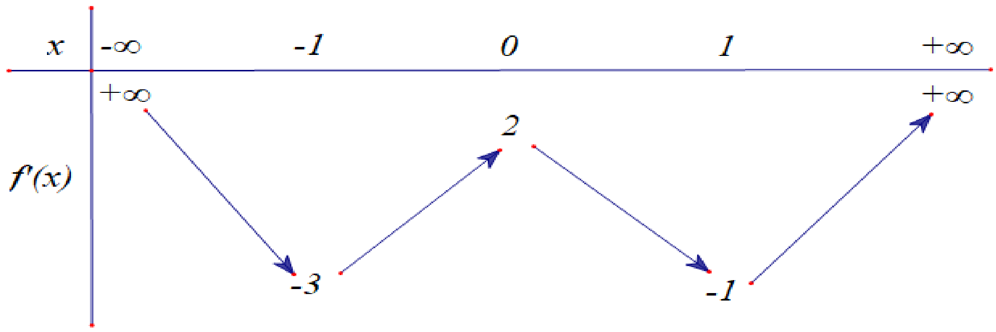
$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x=a \\ x^2+2x=b \\ x^2+2x=c \\ x^2+2x=d \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \\ (x+1)^2=a+1 & (1) \\ (x+1)^2=b+1 & (2) \\ (x+1)^2=c+1 & (3) \\ (x+1)^2=d+1 & (4) \end{array}\right.$$, trong đó $a<-1<b<0<c<1<d$.

Do $a<-1<b<0<c<1<d$ nên $\begin{cases} a+1<0 \\ b+1>0 \\ c+1>0 \\ d+1>0 \end{cases}$.

Khi đó phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình $(2),(3),(4)$ mỗi phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt và khác nhau, cùng khác -1. Suy ra phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 76: **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ là

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \\ x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

Ta có: $y'=(8x-4)f'(4x^2-4x)$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'(4x^2-4x)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1)\\ 4x^2-4x=b\in(-1;0)\\ 4x^2-4x=c\in(0;1)\\ 4x^2-4x=d\in(1;+\infty)\end{array}\right.$.

Ta có khi $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 4x^2-4x=-1$ và $f'(-1)=-3\neq 0$

Mặt khác: $4x^2-4x=(2x-1)^2-1\geq -1$ nên:

- $4x^2-4x=a$ vô nghiệm.
- $4x^2-4x=b$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.
- $4x^2-4x=c$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4.
- $4x^2-4x=d$ có 2 nghiệm phân biệt x_5, x_6.

Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Cách 2:

Gọi m đại diện cho các tham số ta xét phương trình $4x^2-4x-m=0$ có $\Delta'=4(m+1)$, $\Delta'>0\Rightarrow m>-1$.

Vậy với mỗi giá trị b,c,d thuộc khoảng đã cho phương trình $f'(4x^2-4x)=0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 77: **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(4x^2+4x)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=(8x+4)f'(4x^2+4x); y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(4x^2+4x)=0\\ 8x+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f'(4x^2+4x)=0\\ x_1=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$ nhận thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \\ x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

Do đó $f'(4x^2+4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x=a\in(-\infty;-1) \\ 4x^2+4x=b\in(-1;0) \\ 4x^2+4x=c\in(0;1) \\ 4x^2+4x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$ $(*)$. Lại có

$4x^2+4x=a$ vô nghiệm vì $4x^2+4x=(2x+1)^2-1\ge -1, \forall x$;

$4x^2+4x=b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$;

$4x^2+4x=c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_4 \\ x=x_5 \end{array}\right.$;

$4x^2+4x=d \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_6 \\ x=x_7 \end{array}\right.$.

Vì $b\ne c\ne d$ do thuộc các khoảng khác nhau (như $(*)$) nên các nghiệm x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 đều khác nhau và khác $x_1=-\dfrac{1}{2}$. Do đó $y'=0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên y' đổi dấu 7 lần suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 78: **(Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm $f(x)=5x^4-10x^2+3$.

Đạo hàm

$g'(x)=4x^3\left[f(x+1)\right]^2+2x^4f(x+1)f'(x+1)=2x^3f(x+1)\left[2f(x+1)+xf'(x+1)\right]$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \\ 2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \end{array}\right.$.

+) $f(x+1)=0\ (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4-10(x+1)+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1\approx 1,278 \\ x+1\approx 0,606 \\ x+1\approx -0,606 \\ x+1\approx -1,278 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

+) $2f(x+1)+xf'(x+1)=0 \overset{t=x+1}{\Rightarrow} 2(5t^4-10t^2+3)+(t-1)(20t^3-20t)=0$

$\Leftrightarrow 30t^4-20t^3-40t^2+20t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\approx 1,199 \\ t\approx 0,731 \\ t\approx -0,218 \\ t\approx -1,045 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình $(*)$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Câu 79: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$g'(x)=2x.\left[f(x-1)\right]^4+4x^2f'(x-1)\left[f(x-1)\right]^3=2x.\left[f(x-1)\right]^3\left(f(x-1)+2xf'(x-1)\right)$

Vậy $g'(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x-1)=0\ (1) \\ f(x-1)+2xf'(x-1)=0\ (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

Phương trình (2) có $f(x-1)=-2xf'(x-1) \Rightarrow f(x)=-2(x+1)f'(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm $f(x)$ là bậc bốn trùng phương nên ta có

$f(x)=-3x^4+6x^2-1$ thay vào $f(x)=-2(x+1)f'(x)$ vô nghiệm

Vậy hàm $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 80: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biên thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4[f(x-1)]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $f(x)=4x^4-8x^2+3 \Rightarrow f'(x)=16x(x^2-1)$

Ta có $g'(x)=2x^3.f(x-1).[2f(x-1)+x.f'(x-1)]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3=0 & (1) \\ f(x-1)=0 & (2) \\ 2f(x-1)+x.f'(x-1)=0 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có $x=0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x)=0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình :

$2f(x)+(x+1).f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(4x^4-8x^2+3)+16x(x+1)(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow 24x^4+16x^3-32x^2-16x+6=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x)=0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 81: **(Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$g'(x)=2x\left[f(x+1)\right]^4+4x^2\left[f(x+1)\right]^3.f'(x+1)=2x\left[f(x+1)\right]^3.\left[f(x+1)+2x.f'(x+1)\right]$

$g'(x)=0$ ta được

+ **TH1:** $x=0$

+ **TH2:** $f(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a<-2 \\ x=b\in(-2;-1) \\ x=c\in(-1;0) \\ x=d>0 \end{array}\right.$

+ **TH3:** $f(x+1)+2x.f'(x+1)=0$.

Từ bảng biến thiên ta có hàm số thỏa mãn là $f(x)=-5x^4+10x^2-2$

$\Rightarrow f(x+1)+2x.f'(x+1)=0 \Leftrightarrow h(x)=f(x+1)+2(x+1).f'(x+1)-2f'(x+1)=0$

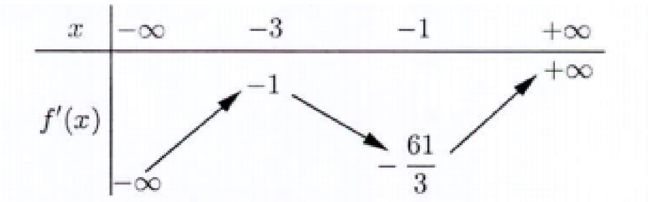
Với $t=x+1$ ta có: $h(t)=-5t^4+10t^2-2+2t(-20t^3+20t)-2(-20t^3+20t)=0$

$\Leftrightarrow -45t^4+40t^3+50t^2-40t-2=0$

Lập bảng biến thiên ta suy ra có 4 nghiệm $t \Rightarrow 4$ nghiệm x

Vậy có 9 cực trị.

Câu 82: **(ĐTK 2020-2021)** Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x)=\left|f(x^3)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $f'(x)$ bậc ba có 2 điểm cực trị là $x=-3, x=-1$ nên $f''(x)=a(x+3)(x+1)$.

Suy ra $f'(x)=a(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x)+b$.

Từ $f(-3)=-1$ và $f(-1)=-\frac{61}{3}$, giải ra $a=\frac{29}{2}, b=-1$ hay $f'(x)=\frac{29}{2}(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x)-1$.

Do đó $f'(0)=-1<0$.

Đặt $h(x)=f(x^3)-3x$ thì $h'(x)=3x^2f'(x^3)-3$ nên $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3)=\frac{1}{x^2}$. (*)

Trên $(-\infty;0)$ thì $f'(x)<0$ nên $f'(x^3)<0, \forall x<0$, kéo theo (*) vô nghiệm trên $(-\infty;0]$.

Xét $x>0$ thì $f'(x)$ đồng biến còn $\frac{1}{x^2}$ nghịch biến nên (*) có không quá 1 nghiệm. Lại có $\lim\limits_{x\to 0^+}(f'(x^3)-\frac{1}{x^2})=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(x^3)-\frac{1}{x^2})=+\infty$ nên (*) có đúng nghiệm $x=c>0$. Xét bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$		0		c		$+\infty$
$h(x)$		$-$			0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$h(c)$	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $h(0)=f(0)=0$ nên $h(c)<0$ và phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt, khác c. Từ đó $|h(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 83: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4-12x^3+30x^2+\left(4-m\right)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 27. **B.** 31. **C.** 28. **D.** 30.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=x^4-12x^3+30x^2+\left(4-m\right)x$.

Ta có $f'\left(x\right)=4x^3-36x^2+60x+4-m$.

$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow m=4x^3-36x^2+60x+4$.

Hàm số $g\left(x\right)=f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $f\left(x\right)$ có đúng 3 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'\left(x\right)=0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m=4x^3-36x^2+60x+4$ có 3 nghiệm dương phân biệt. (*)

Xét hàm số $h\left(x\right)=4x^3-36x^2+60x+4$.

Ta có: $h'\left(x\right)=12x^2-72x+60$; $h'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		5		$+\infty$
$h'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h\left(x\right)$	4	$\nearrow$	32	$\searrow$	-96	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\left(*\right) \Leftrightarrow 4<m<32$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{5;6;7;...;31\right\}$.

Vậy có 27 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 84: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)(x^2-9), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+5x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $f'(x)=(x-7)(x-3)(x+3) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

$g'(x)=\dfrac{x^3+5x}{|x^3+5x|}.(3x^2+5)f'(|x^3+5x|+m)=\dfrac{x(x^2+5)}{|x^3+5x|}.(3x^2+5)f'(|x^3+5x|+m)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(|x^3+5x|+m)=0$.

Đạo hàm không xác định tại $x=0$.

Do đó điều kiện để $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị là phương trình $f'(|x^3+5x|+m)=0$ có ít nhất 2 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

$$f'(|x^3+5x|+m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x|+m=7 \\ |x^3+5x|+m=3 \\ |x^3+5x|+m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x|-7=-m \\ |x^3+5x|-3=-m \\ |x^3+5x|+3=-m \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f'(|x^3+5x|+m)=0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0 $\Leftrightarrow -m>-7 \Leftrightarrow m<7$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 85: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-8)(x^2-9), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+6x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

$g(x)=f(|x^3+6x|+m) \Rightarrow g'(x)=(|x^3+6x|+m)'.f'(|x^3+6x|+m)$

$=\dfrac{(x^3+6x).(3x^2+6)}{|x^3+6x|}.f'(|x^3+6x|+m)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(|x^3+6x|+m)=0 \end{array}\right.$

Ta có: $f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x^3+6x\right|+m=8\\ \left|x^3+6x\right|+m=3\\ \left|x^3+6x\right|+m=-3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|x^3+6x\right|=8-m\\ \left|x^3+6x\right|=3-m\\ \left|x^3+6x\right|=-3-m\end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x)=x^3+6x$, vì $h'(x)=3x^2+6>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x)=\left|h(x)\right|=\left|x^3+6x\right|$ như sau:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi phương trình $f'\left(\left|x^3+6x\right|+m\right)=0$ có ít nhất hai nghiệm khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $8-m>0$ hay $m<8$.

Kết hợp điều kiện m nguyên dương, ta được $m\in\{1;2;3...;7\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thoả mãn.

Câu 86: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-10)\left(x^2-25\right), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+8x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Cách 1:

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $g(-x)=f\left(\left|-x^3-8x\right|+m\right)=f\left(\left|x^3+8x\right|+m\right)=g(x)$, do đó $g(x)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $h(x)=f\left(x^3+8x+m\right)$. Theo bài ra ta có $2a+1\geq 3 \Leftrightarrow a\geq 1$, vì vậy ta cần tìm m để hàm số $h(x)$ có ít nhất một điểm cực trị dương.

Ta có $f'(x)=(x-10)(x-5)(x+5) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=10, x=\pm 5$.

$$h'(x)=\left(3x^2+8\right)f'\left(x^3+8x+m\right),\ h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x^3+8x+m=10 & (1)\\ x^3+8x+m=5 & (2)\\ x^3+8x+m=-5 & (3)\end{array}\right..$$

Đặt $u(x)=x^3+8x+m, u'(x)=3x^2+8>0, \forall x\geq 0$.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1), (2) và (3) nếu có nghiệm $x>0$ thì đó là nghiệm duy nhất.

Phương trình $h'(x)=0$ có nghiệm $x>0$ khi và chỉ khi ít nhất một trong ba phương trình (1), (2) (3) có nghiệm $x>0$, điều này tương đương với $m<\max\{-5;5;10\}=10$.

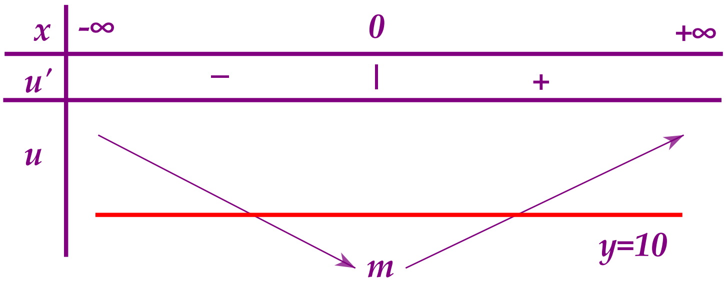
Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2;,,,;9\}$, vậy có 9 giá trị nguyên dương của tham số m cần tìm.

Cách 2:

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow(x-10)(x^2-25)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=5\\x=-5\end{array}\right.$.

Đặt $u=|x^3+8x|+m=|x|(x^2+8)+m\Rightarrow u'=\begin{cases}3x^2+8>0 & khi\ x>0\\-3x^2-8<0 & khi\ x<0\end{cases}$.

Bảng biến thiên của $u=|x^3+8x|+m$:



Ta có $y=f(u)\Rightarrow y'=u'.f'(u)=0\Leftrightarrow f'(u)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=10\\u=5\\u=-5\end{array}\right.$ (1).

Khi đó, để hàm số $g(x)=f(|x^3+8x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì (1) có ít nhất hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

Suy ra $m<10$. Mà m là số nguyên dương nên ta có: $m\in\{1;2;...;9\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên dương của tham số m cần tìm.

Câu 87: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-9)(x^2-16),\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+7x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

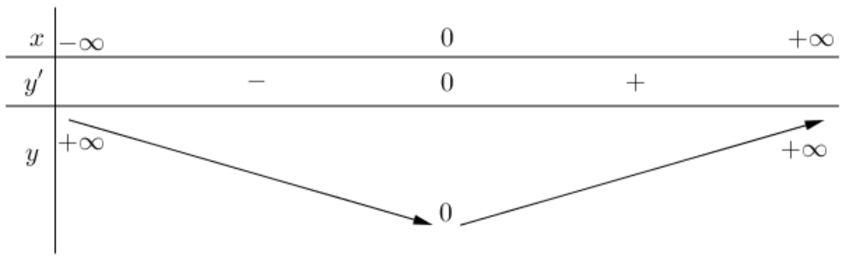
A. 16. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right).\dfrac{x\left(x^2+7\right)}{\left|x^3+7x\right|}.\left(3x^2+7\right)$

Xét hệ pt: $\left[\begin{array}{l} \left|x^3+7x\right| = -4-m \\ \left|x^3+7x\right| = 4-m \\ \left|x^3+7x\right| = 9-m \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ta có BBT hàm số $y = \left|x^3+7x\right|$



Ycbt $\Leftrightarrow 9-m>0 \overset{m\in\mathbb{Z}^+}{\Leftrightarrow} m\in\{1;2;...;8\}$

Câu 88: Cho hàm số $f(x) = x^4-12x^3+30x^2+(3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. **B.** 27. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 4x^3-36x^2+60x+3-m$.

Để hàm số $g(x) = f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị thì hàm số $f(x) = x^4-12x^3+30x^2+(3-m)x$ có đúng 3 cực trị dương.

Hay $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3-36x^2+60x+3-m = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow m = 4x^3-36x^2+60x+3$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Đặt $h(x) = 4x^3-36x^2+60x+3 \Rightarrow h'(x) = 12x^2-72x+60$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		1		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	3	$\nearrow$	31	$\searrow$	-97	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có $3 < m < 31$ và m nguyên nên có 27 giá trị nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 89: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (4-m)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 21.

Lời giải

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương

Đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt là nghiệm đơn.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 - m = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 = m$

Đặt $h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4$

Ta có $h'(x) = 12x^2 - 60x + 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	26	$\searrow$	-28	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra để $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi $4 < m < 26$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị.

Câu 90: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 21. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 22.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 - m$

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ gồm phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ bên phải trục tung và phần đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ bên phải trục tung sang bên trái qua trục tung. Do đó, hàm số

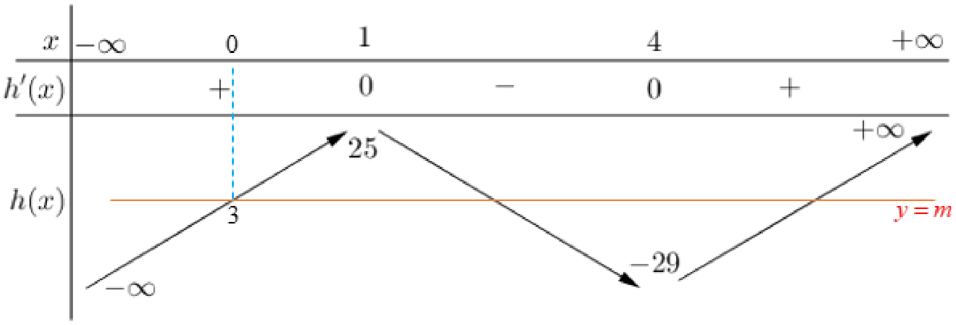
$g(x) = f\left(|x|\right)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương hay phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt

Xét phương trình

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 - m = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 = m$$

Đặt $h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3$ ta có $h'(x) = 12x^2 - 60x + 48$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Từ BBT ta có phương trình $f'(x) = m$ có ba nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 3 < m < 25$

Vậy $m \in \{4; 5; ...; 24\}$, có 21 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $f(x); f'(x)$

1. Định lí cực trị

- ***Điều kiện cần (định lí 1)***: *Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại $x_{\circ}$ thì $f'(x_{\circ})=0$.*

- ***Điều kiện đủ (định lí 2)***:

*Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **âm sang dương** khi x đi qua điểm $x_{\circ}$ (theo chiều tăng) thì hàm số $y=f(x)$ đạt **cực tiểu** tại điểm $x_{\circ}$.*

*Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ **dương sang âm** khi x đi qua điểm $x_{\circ}$ (theo chiều tăng) thì hàm số $y=f(x)$ đạt **cực đại** tại điểm $x_{\circ}$.*

- ***Định lí 3***: *Giả sử $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_{\circ}-h;\ x_{\circ}+h)$, với $h>0$. Khi đó:*

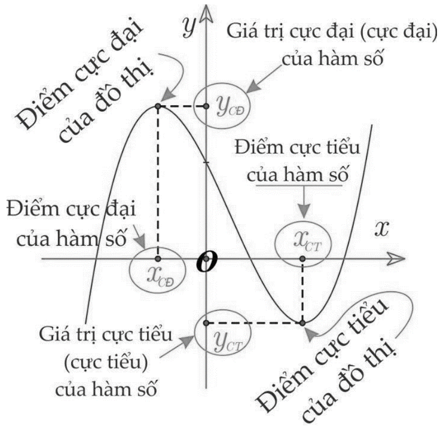
Nếu $y'(x_{\circ})=0,\ y''(x_{\circ})>0$ thì $x_{\circ}$ là điểm cực tiểu.

Nếu $y'(x_{o})=0,\ y''(x_{o})<0$ thì $x_{\circ}$ là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

- *Điểm cực đại (cực tiểu) của **hàm số** là $x_{\circ}$, **giá trị cực đại (cực tiểu)** của hàm số là $f(x_{\circ})$ (hay $y_{CĐ}$ hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của **đồ thị hàm số** là $M(x_{\circ};f(x_{\circ}))$.*

- *Nếu $M(x_{\circ};y_{\circ})$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)\Rightarrow\begin{cases}y'(x_{\circ})=0\\ M(x_{\circ};y_{\circ})\in y=f(x)\end{cases}$.*



Câu 1: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
y			2				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-1		

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1.
B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng -1.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.
D. Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y			$+\infty$ $\Vert$ $+\infty$				10
		↗		↘		↗	
	-1				5		

Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y			0				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				-1		

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số có đúng 2 cực trị.
B. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.
C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

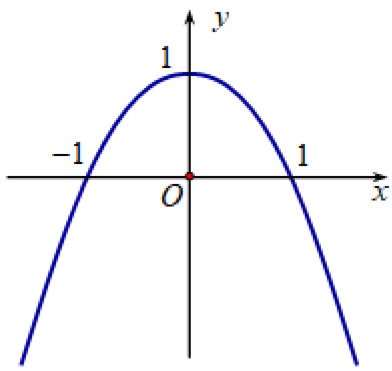
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng

A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

C. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

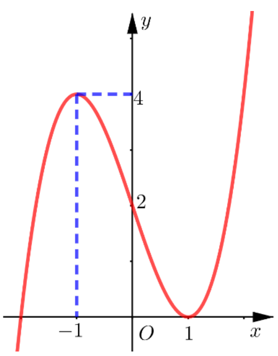
A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

DẠNG 2. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BIỂU THỨC $f(x); f'(x)$

★ **Bài toán**: Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

Phương pháp: Sự dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dụng định lý 1

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i = 1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dụng định lý 2

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i, $(i = 1,2,3,...,n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3**. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4**. Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i :

+ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

+ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 11: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)...(x-2019)$, $\forall x \in R$. Hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Câu 12: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x-2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 17: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2

Câu 20: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 21: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=-x^3+3x-4$.

A. $y_{CT}=-6$ **B.** $y_{CT}=-1$ **C.** $y_{CT}=-2$ **D.** $y_{CT}=1$

Câu 22: Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=x^3-3x^2+4$ là:

A. $y_{CT}=0$. **B.** $y_{CT}=3$. **C.** $y_{CT}=2$. **D.** $y_{CT}=4$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=x^4-x^2+1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 24: Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ **B.** $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y=x^2-2x+1$ **D.** $y=-x^3+x+1$

Câu 25: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x^2-2$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 26: Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-3x+2019m\ (m\in\mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại điểm:

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 27: Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 28: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=x^4-2x^2$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 29: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+5x-5$ là

A. $(-1;-8)$ **B.** $(0;-5)$ **C.** $\left(\frac{5}{3};\frac{40}{27}\right)$ **D.** $(1;0)$

Câu 30: Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

A. $y=\frac{2x-3}{x+2}$. **B.** $y=x^4$. **C.** $y=-x^3+x$. **D.** $y=|x+2|$.

DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x=x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0)=0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\left[\begin{array}{l} y''>0 \to x_0=CT \\ y''<0 \to x_0=CD \end{array}\right.$

DẠNG 3.1 HÀM SỐ BẬC 3

Câu 31: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=-1$ **B.** $m=-7$ **C.** $m=5$ **D.** $m=1$

Câu 32: Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. không tồn tại m. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m>4$. **C.** $0\le m<4$. **D.** $0<m\le 4$.

Câu 34: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1, m=5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Câu 35: Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-m+1)x+1$ đạt cực đại tại $x=1$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đạt cực đại tại $x=-2$?

A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m=-1$.

Câu 37: Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là.

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** R.

DẠNG 3.2 HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC CAO, HÀM CĂN THỨC …

Câu 38: Xác định tham số m sao cho hàm số $y=x+m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x=1$.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=6$.

Câu 39: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 40: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^5}{5}-\frac{mx^4}{4}+2$ đạt cực đại tại $x=0$ là:

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m<0$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m>0$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\frac{m-1}{5}x^5+\frac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 101. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^{12}+(m-5)x^7+(m^2-25)x^6+1$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 8 **B.** 9 **C.** Vô số **D.** 10

Câu 43: Cho hàm số $y=x^6+(4+m)x^5+(16-m^2)x^4+2$. Gọi S là tập hợp các gia trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

DẠNG 4. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ CÓ N CỰC TRỊ

- *Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có n nghiệm phân biệt.*
- *Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$:*

$+$ *Hàm số có hai điểm cực trị khi* $\begin{cases} a\neq 0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$.

$+$ *Hàm số không có cực trị khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.*

- *Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$.*

$+$ *Hàm số có ba cực trị khi $ab<0$.* $+$ *Hàm số có 1 cực trị khi $ab\geq 0$.*

Câu 44: Biết rằng hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3-x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab\leq 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\geq 0$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3-2mx^2+(m-2)x+1$ không có cực trị

A. $m\in(-\infty;6)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-6;0)$. **C.** $m\in[-6;0)$. **D.** $m\in[-6;0]$.

Câu 46: Để đồ thị hàm số $y=-x^4-(m-3)x^2+m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m\geq 3$. **B.** $m>3$. **C.** $m<3$. **D.** $m\leq 3$.

Câu 47: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m>0$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\leq 0$.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-(m^2-2019m)x^2-1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu 49: Cho hàm số $y=x^3-3(m+1)x^2+3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};1\right]\cup\{-1\}$. **C.** $m\in\left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{3};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[\dfrac{1-\sqrt{7}}{3};\dfrac{1+\sqrt{7}}{3}\right]\cup\{-1\}$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $0<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<0\end{array}\right.$.

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m<\dfrac{3}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m\le\dfrac{3}{2}$. **D.** $m>\dfrac{3}{2}$.

Câu 54: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $[-1;2]$

Câu 55: Cho hàm số $y=mx^4-x^2+1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Câu 56: Cho hàm số $y=mx^4+(2m+1)x^2+1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m\ge-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}\le m\le 0$.

Câu 57: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^4+2(m^2-m-6)x^2+m-1$ có ba điểm cực trị.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 58: Cho hàm số $y=mx^4+(m^2-6)x^2+4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

DẠNG 5. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA 2 ĐIỂM CỰC TRỊ

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y'\cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Câu 60: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Câu 61: Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB.

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Câu 62: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $m=\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 63: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Câu 64: Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Câu 65: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=-1$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Câu 66: Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 67: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Câu 68: Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 69: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = -\sqrt{2}$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -\sqrt{2}$; $m = \sqrt{2}$.

DẠNG 6. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

★ **Bài toán tổng quát**: Cho hàm số $y = f(x;m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có *2* điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện *K* cho trước?

Phương pháp:

— **Bước 1**. Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2**. Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$

và giải hệ này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3**. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

— **Bước 4**. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng *S* và tích *P*. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5**. Kết luận các giá trị *m* thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

Lưu ý:

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện *K* liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

- Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x;m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của *A* và ***B.***
- Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số *m* để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(cùng phía, khác phía *d*)**:

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

- *Nếu $(ax_A + by_A + c)\cdot(ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d.*
- *Nếu $(ax_A + by_A + c)\cdot(ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d.*

Trường hợp đặc biệt:

• *Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.*

• *Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).*

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(đối xứng và cách đều)**:

★ ***Bài toán 1. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d:***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3**. Gọi $I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ ***Bài toán 2. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d:***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3**. Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ **Lưu ý**: Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB.

Câu 70: Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \dfrac{3}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = \dfrac{5}{2}$.

Câu 71: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \dfrac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 72: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 73: Cho hàm số $y = x^3 - (m+6)x^2 + (2m+9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m \ge -2 \\ m \le -6 \end{array}\right.$. **B.** $m \ge -2$. **C.** $m \le -6$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \ne \dfrac{-3}{2} \end{array}\right.$.

Câu 74: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

A. $\frac{40}{9}$ **B.** $\frac{22}{9}$ **C.** $\frac{25}{4}$ **D.** $\frac{8}{3}$

Câu 75: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

A. $m \in (-1;1]$. **B.** $m \in (-3;-1]$. **C.** $m \in (3;5]$. **D.** $m \in (1;3]$.

Câu 76: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 77: Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m+1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 78: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 79: Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

A. $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Câu 80: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 81: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;4) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in (3;4)$. **C.** $m \in (1;3)$. **D.** $m \in (-1;4)$.

Câu 82: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4

Câu 83: Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;3)\cup(3;4)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(3;4)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 84: Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ đồng thời $y(x_1).y(x_2)=0$ là:

A. -21 **B.** -39 **C.** -8 **D.** $3\sqrt{11}-13$

Câu 85: Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 5$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T=2b-a$.

A. $T=\sqrt{51}+6$ **B.** $T=\sqrt{61}+3$ **C.** $T=\sqrt{61}-3$ **D.** $T=\sqrt{51}-6$

Câu 86: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+mx+3$ có hai điểm cực trị $x_1,x_2\le 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 87: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1\quad(C)$ một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** không tồn tại

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

Câu 89: Biết đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ có hai điểm cực trị $M(x_1;y_1),N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng

A. $-\dfrac{49}{4}$ **B.** $-\dfrac{25}{4}$ **C.** $-\dfrac{841}{36}$ **D.** $-\dfrac{7}{6}$

Câu 90: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3-m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2;-2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\dfrac{4}{17}$. **B.** $\dfrac{14}{17}$. **C.** $-\dfrac{2}{17}$. **D.** $\dfrac{20}{17}$.

Câu 91: Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Câu 92: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in(-1;7)$. **B.** $m_0\in(7;10)$. **C.** $m_0\in(-15;-7)$. **D.** $m_0\in(-7;-1)$.

Câu 93: Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=-x^3+3x-4$ và $M(x_0;0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T=4x_0+2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T=2017$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2016$. **D.** $T=2018$.

Câu 94: Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 95: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

DẠNG 7. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Một số công thức tính nhanh "thường gặp"

liên quan cực trị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

1 ***cực trị:*** $ab\ge 0$		3 ***cực trị:*** $ab<0$	
: 1 cực tiểu	1 cực đại	: 1 cực đại, tiểu	2 cực đại, tiểu

$$A(0;c),B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right),C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow AB=AC=\sqrt{\frac{b^4}{16a^2}-\frac{b}{2a}},BC=2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta=b^2-4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y=-\frac{\Delta}{4a}$ và $AB,AC: y=\pm\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3x+c$

Gọi $\widehat{BAC}=\alpha$, luôn có: $8a(1+cos\alpha)+b^3(1-cos\alpha)=0\Rightarrow cos\alpha=\frac{b^3+8a}{b^3-8a}$ và $S^2=-\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A,B,C: x^2+y^2-(c+n)x+c.n=0,$ với $n=\frac{2}{b}-\frac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R=\left|\frac{b^3-8a}{8ab}\right|$

Câu 96: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S=3$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 97: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;\,1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 98: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0;-3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **C.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m\in(2;3)$.

Câu 99: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 100: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Câu 101: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-2m^2x^2+m^4+5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 102: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-2m^2+m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m\in\left(\frac{9}{5};2\right)$. **B.** $m\in\left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$.

Câu 103: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 104: Cho hàm số $y=x^4+2(m-4)x^2+m+5$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m=1$ hoặc $m=\frac{17}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\frac{17}{2}$.

Câu 105: Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4+2mx^2-1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $m_0\in(-1;0]$. **B.** $m_0\in(-2;-1]$. **C.** $m_0\in(-\infty;-2]$. **D.** $m_0\in(-1;0)$.

DẠNG 8. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 2 TRÊN BẬC 1 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN YÊU CẦU BÀI TOÁN

Câu 106: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{2x+1}$.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=1-x$.

Câu 107: Điều kiện của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m<1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<2$. **D.** $m>-2$.

Câu 108: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 109: Biết rằng đồ thị $(H): y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 110: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90°$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 16.

Câu 111: Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m>2$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $m<0$.

Câu 112: Giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ là:

A. $m=-1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 113: Để hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nảo?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 114: Cho hàm số $y=x+p+\dfrac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

A. $pq=2$. **B.** $pq=\dfrac{1}{2}$. **C.** $pq=\sqrt{3}$. **D.** $pq=1$.

Câu 115: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m=7$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-9$. **D.** $m=-5$.

CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $f(x); f'(x)$

1. Định lí cực trị

- ***Điều kiện cần (định lí 1)***: *Nếu hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* $(a;b)$ *và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại* $x_\circ$ *thì* $f'(x_\circ) = 0$.
- ***Điều kiện đủ (định lí 2)***:

Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ* ***âm sang dương*** *khi* x *đi qua điểm* $x_\circ$ *(theo chiều tăng) thì hàm số* $y = f(x)$ *đạt* ***cực tiểu*** *tại điểm* $x_\circ$.

Nếu $f'(x)$ *đổi dấu từ* ***dương sang âm*** *khi* x *đi qua điểm* $x_\circ$ *(theo chiều tăng) thì hàm số* $y = f(x)$ *đạt* ***cực đại*** *tại điểm* $x_\circ$.

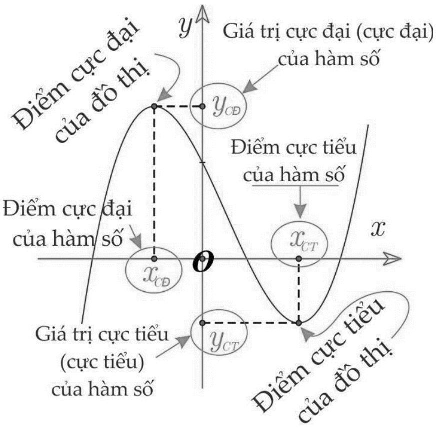
- ***Định lí 3***: *Giả sử* $y = f(x)$ *có đạo hàm cấp* 2 *trong khoảng* $(x_\circ - h;\ x_\circ + h)$, *với* $h > 0$. *Khi đó:*

Nếu $y'(x_\circ) = 0,\ y''(x_\circ) > 0$ *thì* $x_\circ$ *là điểm cực tiểu.*

Nếu $y'(x_o) = 0,\ y''(x_o) < 0$ *thì* $x_\circ$ *là điểm cực đại.*

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

- *Điểm cực đại (cực tiểu) của* ***hàm số*** *là* $x_\circ$, ***giá trị cực đại (cực tiểu)*** *của hàm số là* $f(x_\circ)$ *(hay* $y_{CĐ}$ *hoặc* y_{CT}*). Điểm cực đại của* ***đồ thị hàm số*** *là* $M(x_\circ; f(x_\circ))$.
- *Nếu* $M(x_\circ; y_\circ)$ *là điểm cực trị của đồ thị hàm số* $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_\circ) = 0 \\ M(x_\circ; y_\circ) \in y = f(x) \end{cases}$.



Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 1. **B.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng -1.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$. **D.** Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên

2. Phương pháp:

Áp dụng định nghĩa; định lí về cực trị của hàm số.

Áp dụng định nghĩa; quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

3. Hướng giải:

B1: Xác định cực trị theo tính chất sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D.

Điểm $x_0 \in D$ là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ khi $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định và $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_0.

B2: Xác định giá trị lớn nhất nhỏ nhất bằng định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D.

- $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \Rightarrow \max\limits_{x \in D} f(x) = M$.

- $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \Rightarrow \min\limits_{D} f(x) = m$.

B3: Chọn ra đáp án bài toán.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=3$.

Phương án **A** sai vì giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

Phương án **B** sai vì hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$, $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\right)$.

Học sinh thường nhầm giá trị cực tiểu bằng -1 là giá trị nhỏ nhất.

Phương án **D** sai vì hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	||	−	0	+	
y	-1	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	10

Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số ta thấy hàm số có đúng một cực trị. **Chọn đáp án A**

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	||	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số có đúng 2 cực trị.

B. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và giá trị cực đại bằng 0; hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng -1. Do đó khẳng định sai là hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

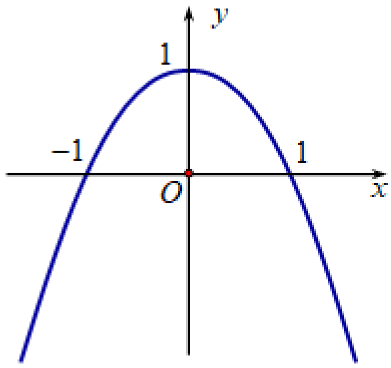
Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ bảng xét dấu ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = -1, x = 0, x = 2, x = 4$ nên hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng

A. $f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

B. $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

C. $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. $f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Lời giải

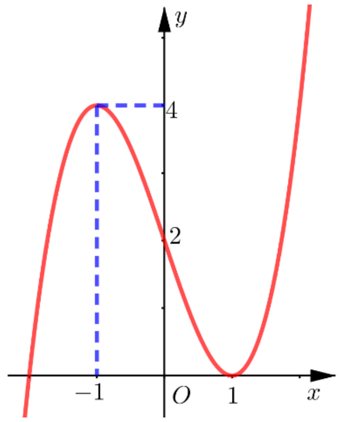
Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CĐ} = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$, giá trị cực đại $y_{CT} = -2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là:

A. 2.

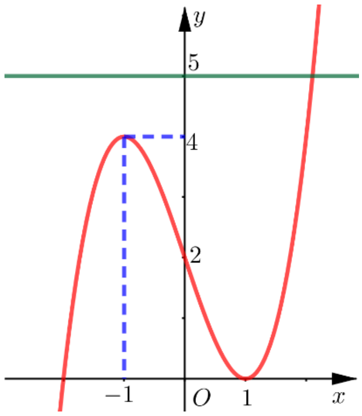
B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $y' = f'(x) - 5$; $y = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5$. Dấu đạo hàm sai y'

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $f'(x) = 5$ có nghiệm duy nhất và đó là nghiệm đơn.

Nghĩa là phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi qua nghiệm này.

Vậy hàm số $y = f\left(x\right) - 5x$ có một điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Nhìn bảng xét dấu đạo hàm ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		-2		0		1		3		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f\left(x\right)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Cách 2.

Từ bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$, ta thấy $f'\left(x\right)$ có 4 nghiệm phân biệt, đổi dấu khi qua các nghiệm $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ và $f'\left(x\right)$ không đổi dấu khi qua $x = 3$. Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

DẠNG 2. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BIỂU THỨC $f\left(x\right); f'\left(x\right)$

★ **Bài toán**: Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

✍ **Phương pháp**: Sự dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dụng định lý 1

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i, $(i = 1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dụng định lý 2

- **Bước 1**. Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i, $(i = 1,2,3,...,n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3**. Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4**. Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i:

$+$ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i.

$+$ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Ta có

$$f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3(x-1)(x-2), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu nhận thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 11: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2019)$, $\forall x\in R$. Hàm số $y=f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2019)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ ...... \\ x=2019 \end{array}\right.$

$f'(x)=0$ có 2019 nghiệm bội lẻ và hệ số a dương nên có 1010 cực tiểu

Câu 12: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x-2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x-1=0 \\ (x-2)^3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 1 điểm cực đại.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)(x+2)^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Do $x=0,\ x=1$ là nghiệm đơn, còn các nghiệm và $x=-2$ là nghiệm bội chẵn nên $f'(x)$ chỉ đổi khi đi qua $x=0,\ x=1$.

$\Rightarrow$ Hàm số $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-4>0 \Leftrightarrow m<-2 \vee m>2$ có 2 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x-2)^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x=0$ và $x=1$, do đó hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$$f'(x)=(x-2)(x^2-3)^2(x^2+3)=(x-2)(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x^2+3)$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2(x^2+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{3} \\ x=\sqrt{3} \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(-\sqrt{3})$	↘	$f(\sqrt{3})$	↘	$f(2)$	↗	

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, ta thấy hàm số $y=f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 17: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Có $f'(x)=x^2(x-2)^2(x+1)^5$. Ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x=-1$ nên hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị là $x=-1$.

Vậy tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng -1.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=(x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↗		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y=\frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

□ ***Cách 1.***

Ta có: $y'=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

□ ***Cách 2.***

Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

$y'' = \dfrac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1) = \dfrac{1}{2} > 0$; $y''(-3) = -\dfrac{1}{2} < 0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 20: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó: $x_{CD} = 1 \Rightarrow y_{CD} = 4 \Rightarrow x_{CD} + y_{CD} = 5$.

Câu 21: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

A. $y_{CT} = -6$ **B.** $y_{CT} = -1$ **C.** $y_{CT} = -2$ **D.** $y_{CT} = 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y_{CD} = y(1) = -2$; $y_{CT} = y(-1) = -6$.

Câu 22: Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:

A. $y_{CT} = 0$. **B.** $y_{CT} = 3$. **C.** $y_{CT} = 2$. **D.** $y_{CT} = 4$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$y''(0) = -6, y''(2) = 6$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x=2 \Rightarrow y_{CT}=y(2)=0$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=x^4-x^2+1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$$y'=4x^3-2x;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{3}{4} \end{array}\right..$$

Suy ra đồ thị có hàm số $y=x^4-x^2+1$ có 3 điểm cực trị có tung độ là số dương.

Câu 24: Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ **B.** $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y=x^2-2x+1$ **D.** $y=-x^3+x+1$

Lời giải

+ Xét hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}>0, \forall x\in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ không có cực trị.

Câu 25: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x^2-2$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

$y''=6x-6 \Rightarrow y''(0)=-6<0 \Rightarrow$ Giá trị cực đại của hàm số là: $y(0)=-2$.

Câu 26: Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-3x+2019m\ (m\in\mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại điểm:

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=x^3-x^2-5x-3;\ y'=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y					$f(3)$		$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 27: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 + 2x - 3;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right..$$

$$y'' = 2x + 2;\ y''(-3) = -4 < 0;\ y''(1) = 4 > 0.$$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 28: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Tự luận

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-1		0		-1		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Trắc nghiệm

Hàm số bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a.b < 0$ thì sẽ có 3 điểm cực trị.

Vậy chọn ngay đáp án **C.**

Câu 29: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

A. $(-1;-8)$ **B.** $(0;-5)$ **C.** $\left(\frac{5}{3};\frac{40}{27}\right)$ **D.** $(1;0)$

Lời giải

Chọn A

$y' = -3x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{array}\right.$.

$y'' = -6x + 2$.

Ta có: $y''(-1) = 8 > 0$ $\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$; $y_{CT} = y(-1) = -8$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1;-8)$.

Câu 30: Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

A. $y = \frac{2x-3}{x+2}$. **B.** $y = x^4$. **C.** $y = -x^3 + x$. **D.** $y = |x+2|$.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$

Tập xác định: $D = (-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$.

Có $y' = \frac{7}{(x+2)^2} > 0\, \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $\Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

Các hàm số khác dễ dàng chứng minh được y' có nghiệm và đổi dấu qua các nghiệm. Riêng hàm số cuối y' không xác định tại -2 nhưng hàm số xác định trên R và y' đổi dấu qua -2 do đó có hàm số có điểm cực trị x = -2.

DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\left[\begin{array}{l} y'' > 0 \to x_0 = CT \\ y'' < 0 \to x_0 = CD \end{array}\right.$

DẠNG 3.1 HÀM SỐ BẬC 3

Câu 31: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2-4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$ **B.** $m = -7$ **C.** $m = 5$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1(L) \\ m=5(TM) \end{array}\right. \\ m>3 \end{cases}.$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 32: Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

A. không tồn tại m. **B.** $m=\pm 1$. **C.** $m=1$. **D.** $m\in\{1;2\}$.

Lời giải

Để $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-4m+m=0 \\ 6-4m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Thử lại với $m=1$, ta có $y=x^3-2x^2+x+1$; $y'=3x^2-4x+1$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m>4$. **C.** $0\le m<4$. **D.** $0<m\le 4$.

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6x+m$; $y''=6x-6$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ 6>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0$.

Câu 34: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-4\right)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$

.

A. $m=1, m=5$. **B.** $m=5$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4,\ \ y'' = 2x - 2m.$

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - 4\right)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = 1 \end{array}\right. \\ 3 < m \end{cases} \Leftrightarrow m = 5..$$

Câu 35: Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m^2 - m + 1\right)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$

$y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Thử lại với $m = 2$ ta có $y'' = 2x - 4 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0$

Do đó Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

Giả sử $x = -2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho, khi đó

$y'(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 2m(-2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Với $m = -1$, ta có $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$.

$y' = x^2 + 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Câu 37: Tập hợp các số thực m để hàm số $y=x^3-3mx^2+(m+2)x-m$ đạt cực tiểu tại $x=1$ là.

A. $\{1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\varnothing$. **D.** R.

Lời giải

Chọn C

$y'=3x^2-6mx+m+2$

$y''=6x-6m$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ khi $\begin{cases} y'(1)=0 \\ y''(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+5=0 \\ 6-6m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m<1 \end{cases}$ không có giá trị của m.

DẠNG 3.2 HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC CAO, HÀM CĂN THỨC …

Câu 38: Xác định tham số m sao cho hàm số $y=x+m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x=1$.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=6$.

Lời giải

Chọn A

$y'=f'(x)=1+\dfrac{m}{2\sqrt{x}},(x>0)$

Để hàm số đạt cực trị tại $x=1$ thì $f'(1)=0 \Leftrightarrow 1+\dfrac{m}{2}=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Thử lại với $m=-2$, hàm số $y=x-2\sqrt{x}$ có cực tiểu tại $x=1$, do đó $m=-2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 39: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

A. $m=0$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=4(m-1)x^3-2(m^2-2)x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1 \Rightarrow y'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(m-1)+2(m^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=0$, hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Với $m=2$, hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy $m=2$ thì hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 40: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^5}{5}-\frac{mx^4}{4}+2$ đạt cực đại tại $x=0$ là:

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m<0$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{mx^4}{4}+2$.

Ta có: $f'(x)=x^4-mx^3$.

Khi $m=0$ thì $f'(x)=x^4\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Khi $m\neq 0$, xét $f'(x)=0\Leftrightarrow x^4-mx^3=0\Leftrightarrow x^3(x-m)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\end{array}\right.$.

+ Trường hợp $m>0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

+ Trường hợp $m<0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(m)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Như vậy, để hàm số đạt cực đại tại $x=0$ thì $m>0$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=\frac{m-1}{5}x^5+\frac{m+2}{4}x^4+m+5$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 101. **B.** 2016. **C.** 100. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta xét: $m=1\Rightarrow y=\frac{3}{4}x^4+6\Rightarrow y'=3x^3\Rightarrow y'=0\Rightarrow x=0$.

Ta có, bảng xét dấu $y'=2x^3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m=1$ (loại).

Ta xét: $m \neq 1 \Rightarrow y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{m+2}{m-1} \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: xét $m>1$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\frac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m>1$ (loại).

Trường hợp 2: $-2<m<1$, suy ra $x_2 > x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		0		$-\frac{m+2}{m-1}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $-2<m<1$ (loại).

Trường hợp 3: $m<-2$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\frac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x=0$ là điểm cực đại. Suy ra $m<-2$ (nhận).

Vậy, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $m<-2$ mà m thuộc khoảng $(-2019;2019)$.

Suy ra, số giá trị nguyên của m là 2016.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12} + (m-5)x^7 + (m^2-25)x^6 + 1$ đạt cực đại tại $x=0$?

A. 8 **B.** 9 **C.** Vô số **D.** 10

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 12x^{11} + 7(m-5)x^6 + 6(m^2-25)x^5$

TH1: $m=5\Rightarrow y'=12x^{11}$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x=0$ là nghiệm bội lẻ, đồng thời dấu của y' đổi từ âm sang dương, nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số,do đó không thỏa mãn, $m=5$ loại.

TH2: $m=-5\Rightarrow y'=x^6(12x^5-70)=0\Rightarrow x=0$ là nghiệm bội chẵn, do đó y' không đổi dấu khi đi qua $x=0$, $m=-5$ loại.

TH3: $m\neq\pm5\Rightarrow y'=x^5\left[12x^6+7(m-5)x+6(m^2-25)\right]=x^5.g(x)$

Với $g(x)=12x^6+7(m-5)x+6(m^2-25)$, ta thấy $x=0$ không là nghiệm của $g\left(x\right)$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x=0$ thì y' phải đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x=0$, xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}g(x)<0\\ \lim\limits_{x\to0^+}g(x)<0\end{cases}\Leftrightarrow 6(m^2-25)<0\Leftrightarrow -5<m<5$

Vì m nguyên nên $m=\left\{-4;-3;...;3;4\right\}$, vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 43: Cho hàm số $y=x^6+\left(4+m\right)x^5+\left(16-m^2\right)x^4+2$. Gọi S là tập hợp các gia trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y'=6x^5+5\left(4+m\right)x^4+4\left(16-m^2\right)x^3=x^3\left(6x^2+5\left(4+m\right)x+16-m^2\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=0\\6x^2+5\left(4+m\right)x+16-m^2=0\left(*\right)\end{cases}.$$

$\left(*\right)$ có $\Delta=\left(4+m\right)\left(49m+4\right)$.

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases}\Delta>0\\ \dfrac{-5\left(4+m\right)}{6}<0\end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $16-m^2>0\Leftrightarrow 0<m<4$: $\left(*\right)$ có hai nghiệm âm phân biệt $x_1,x_2\left(x_1<x_2\right)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Lúc này $x=0$ là điểm cực tiểu.

Trường hợp 2: $16-m^2<0\Leftrightarrow m>4$: $\left(*\right)$ có hai nghiệm trái dấu $x_1,x_2\left(x_1<0<x_2\right)$, ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đây suy ra $x=0$ là điểm cực đại (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $(*)$ có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x=0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3. Tổng các phần tử của S bằng 6.

DẠNG 4. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ CÓ N CỰC TRỊ

- *Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có n nghiệm phân biệt.*
- *Xét hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$:*

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a\neq 0 \\ b^2-3ac>0 \end{cases}$.

+ Hàm số không có cực trị khi $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

- *Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$.*

+ Hàm số có ba cực trị khi $ab<0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab\geq 0$.

Câu 44: Biết rằng hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3-x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab\leq 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^3+3(a+b)x^2+3(a^2+b^2)x+a^3+b^3$.

$y'=3x^2+6(a+b)x+3(a^2+b^2)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=18ab>0$ $\Leftrightarrow ab>0$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3-2mx^2+(m-2)x+1$ không có cực trị

A. $m\in(-\infty;6)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-6;0)$. **C.** $m\in[-6;0)$. **D.** $m\in[-6;0]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3mx^2-4mx+(m-2)$.

+ Nếu $m=0$.

$\Rightarrow y'=-2<0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$. Nên hàm số không có cực trị.

Do đó $m=0$ (chọn) (1).

+ Nếu $m\neq 0$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$ không đổi dấu

$\Leftrightarrow \Delta'\leq 0 \Leftrightarrow 4m^2-3m(m-2)\leq 0 \Leftrightarrow m^2+6m\leq 0 \Rightarrow -6\leq m<0$ (do $m\neq 0$) (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được $-6\leq m\leq 0$.

Câu 46: Để đồ thị hàm số $y=-x^4-(m-3)x^2+m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m \geq 3$. **B.** $m > 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

$y' = -4x^3 - 2(m-3)x = -2x(2x^2 + m - 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{3-m}{2} \end{array}\right.$$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a = -1 < 0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \dfrac{3-m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m > 0$. **B.** $m \geq 0$. **C.** $m < 0$. **D.** $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \ (*) \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y = -1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m = 0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0$.

Hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow -m^2.(m^2 - 2019m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2019m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2019$.

Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0$.

Để hàm số không có cực trị thì

$\Delta' \le 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \le 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \le 0$

$\Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1;2;3;4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$.   **B.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$.

C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$.   **D.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x$.

+ TH1: $m = -1$, ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0 \, (*) \end{array}\right.$

+ TH2: $m \ne -1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình $(*)$ không có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (3m)^2 - 2(3m+3) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \le m \le \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Vậy $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2 + 2mx + 5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A. 0.   **B.** 5.   **C.** 6.   **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi tam thức $g(x)=x^2+2mx+5$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x=-1$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép $x=-1$

Tức là $\left[\begin{array}{l}\Delta'_g<0\\ \begin{cases}g(-1)=0\\ \Delta'_g>0\end{cases}\\ \begin{cases}-\dfrac{b'}{a}=-1\\ \Delta'_g=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2-5<0\\ \begin{cases}-2m+6=0\\ m^2-5>0\end{cases}\\ \begin{cases}-m=-1\\ \Delta'_g=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{5}<m<\sqrt{5}\\ m=3\end{array}\right.$. Do đó tập các giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S=\{-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3\}$.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị.

A. $0<m<2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>0$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<0\end{array}\right.$.

Lời giải

Ta có: $y'=-x^2+2mx-2m$

Hàm số $y=-\dfrac{x^3}{3}+mx^2-2mx+1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>2\\ m<0\end{array}\right.$.

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m<\dfrac{3}{2}$. **B.** $m<-\dfrac{3}{2}$. **C.** $m\le\dfrac{3}{2}$. **D.** $m>\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+ $y'=3x^2-6x+2m$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta=36-24m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{3}{2}$.

Câu 54: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $[-1;2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$

Câu 55: Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

TH1: $m = 0$ hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

TH2: $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 - 2x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x\left(2mx^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 - 1 = 0\,(*) \end{array}\right.$.

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt$\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m < 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 56: Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

A. Không tồn tại m. **B.** $m \geq 0$. **C.** $m \geq -\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Lời giải

Với $m = 0$, ta có $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 + 2m + 1)$

Hàm số có một cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m > 0 \\ 2mx^2 + 2m + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m > 0 \\ \dfrac{-2m-1}{2m} < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{-1}{2} \\ m > 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m > 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m \geq 0$.

Câu 57: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2\left(m^2 - m - 6\right)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4\left(m^2 - m - 6\right)x = 4x\left[x^2 + \left(m^2 - m - 6\right)\right]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + (m^2 - m - 6) = 0\,(1) \end{array}\right.$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$.

Ta có: $m \in \mathbb{Z}, -2 < m < 3 \Leftrightarrow m \in \{-1;0;1;2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 58: Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 6)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} 4m > 0 \\ m(m^2 - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}$.

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m.

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \;\; (*) \end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$

$\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1 = -4$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, $x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1.x_2 = -4.x_2 = 6m + 18 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}m - \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

DẠNG 5. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA 2 ĐIỂM CỰC TRỊ

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

∘ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

∘ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Câu 60: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. $m = \dfrac{3}{4}$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m = -\dfrac{3}{4}$. **D.** $m = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có TXĐ: $\mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$, $B(2;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng $d \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = -2 \\ m + 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 61: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB.

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x-9$.

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\Rightarrow y=6\\x=3\Rightarrow y=-26\end{array}\right.$

Ta có $A(-1;6),B(3;-26)$ $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(4;-32)$ nên) Chọn $\vec{n}_{AB}=(8;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$$8(x+1)+1(y-6)=0\Leftrightarrow 8x+y+2=0.$$

Thay tọa độ các điểm P,M,N,Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Câu 62: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $m=\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-1$

Có : $y'=3x^2-6x$, $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y=-2x-1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2)=-1$ $\Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 63: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=1-2m\end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m\neq 1-2m\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m;-7m^3+3m^2)$, $B(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1)$. Do đó $\overrightarrow{AB}=\left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left((3m-1)^2;1\right)$.

Do đó $AB:(3m-1)^2x+y-2m^3+3m^2-m=0 \Leftrightarrow y=-(3m-1)^2x+2m^3-3m^2+m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y=-4x$ thì:

$$\begin{cases}-(3m-1)^2=-4\\2m^3-3m^2+m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\\ \begin{cases}m\neq 0\\m\neq \dfrac{1}{2}\\m\neq 1\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 64: Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y=y'.\left(\frac{1}{3}x\right)+(-2x+1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$.

Ta có: $\begin{cases}y_1=y(x_1)=y'(x_1).\left(\dfrac{1}{3}x_1\right)+(-2x_1+1)=-2x_1+1\\y_2=y(x_2)=y'(x_2).\left(\dfrac{1}{3}x_2\right)+(-2x_2+1)=-2x_2+1\end{cases}$.

Ta thấy, toạ độ hai điểm cực trị A và B thoả mãn phương trình $y=-2x+1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y=-2x+1$.

Câu 65: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+2x^2+(m-3)x+m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m=-1$. **B.** $m=-5$. **C.** $m=3$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2+4x+m-3$, để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m<\frac{13}{3}(*)$

Ta có $y=y'.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}\right)+\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y=\left(\frac{2m}{3}-\frac{26}{9}\right)x+\frac{7m}{9}+\frac{2}{3}$. Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9;-5)$ nên $m=3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Câu 66: Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-2x+m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-2$.

$y=x^3-2x+m=\frac{1}{3}x.y'+\left(-\frac{4}{3}x+m\right)$

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y=-\frac{4}{3}x+m$ đường thẳng này đi qua điểm $M(-3;7)$ khi và chỉ khi $7=-\frac{4}{3}.(-3)+m \Leftrightarrow m=3$.

Câu 67: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(3m+1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-1$.

A. $m=\frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Xét hàm số $y=x^3-3x^2-1$

Có : $y'=3x^2-6x$, $y=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)y'-2x-1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y=-2x-1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1).(-2)=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m=-\frac{1}{6}$.

Câu 68: Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=abc+ab+c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Lời giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3x^2+2ax+b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2-3b>0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x)=f'(x).\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}a\right)+\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}\right)x+c-\frac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y=\left(\frac{2}{3}b-\frac{2}{9}\right)x+c-\frac{1}{9}ab$ (d).

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c-\frac{1}{9}ab=0 \Leftrightarrow ab=9c$.

Khi đó $P=abc+ab+c \Leftrightarrow P=9c^2+10c \Leftrightarrow P=\left(3c+\frac{5}{3}\right)^2-\frac{25}{9}$.

Suy ra $\min P=-\frac{25}{9}$.

Câu 69: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-6mx$; $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow x=0$, $x=2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B\left(2m;2-4m^3\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=\left(2m-1;4-4m^3\right)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1}=\frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1}=\frac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow 2m-1=m^3-1 \Leftrightarrow m^3=2m$

$\Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\neq 0$).

DẠNG 6. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

★ **Bài toán tổng quát**: Cho hàm số $y=f(x;m)=ax^3+bx^2+cx+d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có *2* điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp:

— **Bước 1**. Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y'=3ax^2+2bx+c$.

— **Bước 2**. Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'}=3a\neq 0 \\ \Delta_{y'}=(2b)^2-4.3ac>0 \end{cases}$ và giải hệ này sẽ tìm được $m\in D_1$.

— **Bước 3**. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y'=0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$.

— **Bước 4**. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m\in D_2$.

— **Bước 5**. Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m=D_1\cap D_2$.

Lưu ý:

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'}\leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y'=0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình $y'=0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y=f(x;m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và **B.**

• Nếu tìm không được nghiệm $y'=0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y=y'\cdot q(x)+h(x)\Rightarrow\begin{cases}y_1=h(x_1)\\y_2=h(x_2)\end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y=h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số *m* để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(cùng phía, khác phía *d*)**:

<u>Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng</u>:

Cho 2 điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và đường thẳng $d: ax+by+c=0$. Khi đó:

• *Nếu $(ax_A+by_A+c)\cdot(ax_B+by_B+c)<0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d.*

• *Nếu $(ax_A+by_A+c)\cdot(ax_B+by_B+c)>0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d.*

<u>Trường hợp đặc biệt</u>:

• *Để hàm số bậc ba $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.*

• *Để hàm số bậc ba $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhẩm được nghiệm).*

Dạng toán: Tìm *m* để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước **(đối xứng và cách đều)**:

★ ***<u>Bài toán 1</u>. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d:***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m\in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2, tức có $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)\in\Delta$.

— **Bước 3**. Gọi $I\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ $\begin{cases}\Delta\perp d\\I\in d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\\I\in d\end{cases}\Rightarrow m\in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m=D_1\cap D_2$.

★ ***<u>Bài toán 2</u>. Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d:***

— **Bước 1**. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2**. Tìm tọa độ 2 điểm cực trị $A,\ B$. Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y'=0$ có nghiệm đẹp $x_1,\ x_2$, tức có $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)$.

+ Hai là $y'=0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)\in\Delta$.

— **Bước 3**. Do $A,\ B$ cách đều đường thẳng d nên $d(A;d)=d(B;d)\Rightarrow m\in D_2$.

— **Bước 4**. Kết luận $m=D_1\cap D_2$.

☞ **Lưu ý**: Để 2 điểm $A,\ B$ đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB.

Câu 70: Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA=OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m=\frac{3}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x$, $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$.

Ta có $OA=OB\Leftrightarrow\sqrt{0^2+m^2}=\sqrt{2^2+(4-m)^2}\Leftrightarrow m^2=4+(4-m)^2\Leftrightarrow 20-8m=0\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Câu 71: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2(3m^2-1)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ $x_1,\ x_2$ sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=2x^2-2mx-2(3m^2-1)=2(x^2-mx-3m^2+1)$,

$g(x)=x^2-mx-3m^2+1$; $\Delta=13m^2-4$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\ g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \ \Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$. (*)

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 72: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)\left[mx^2 - (m-1)x + m + 1\right] = 0$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $mx^2 - (m-1)x + m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - (m-1) + m + 1 \neq 0 \\ (m-1)^2 - 4m(m+1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \dfrac{-3 - 2\sqrt{3}}{3} < m < \dfrac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1$.

Câu 73: Cho hàm số $y = x^3 - (m+6)x^2 + (2m+9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{array}\right.$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m \leq -6$. **D.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9.$

$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{2m+9}{3} \end{array}\right.$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{2m+9}{3} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3.$ (1)

$y(1) = m + 2.$

$y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right) = -m\dfrac{(2m+9)^2}{27} - 2.$

Ycbt $\Leftrightarrow y(1).y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right) < 0$

$\Leftrightarrow (m+2).\left[-m\dfrac{(2m+9)^2}{27} - 2\right] < 0 \Leftrightarrow (m+2).(4m^3 + 36m^2 + 81m + 54) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -6 \\ m > -2 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}.$ (2)

Từ (1), (2) ta có ycbt$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > -2 \\ m < -6 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}.$

Câu 74: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

A. $\dfrac{40}{9}$ **B.** $\dfrac{22}{9}$ **C.** $\dfrac{25}{4}$ **D.** $\dfrac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = m\mathrm{x}^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $m\mathrm{x}^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1. + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(m-2)}{m} \end{cases}$

Theo bài ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1.+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m} \\ x_1+2x_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{3m-4}{m} \\ x_2=1-\dfrac{2(m-1)}{m}=\dfrac{2-m}{m} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m}.\frac{2-m}{m}=\frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m+(3m-4)(2-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2(t/m) \\ m=\dfrac{2}{3}(t/m) \end{array}\right.$$

Vậy $m_1^2+m_2^2=\dfrac{40}{9}$.

Câu 75: Cho hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x+8y-74=0$.

A. $m\in(-1;1]$. **B.** $m\in(-3;-1]$. **C.** $m\in(3;5]$. **D.** $m\in(1;3]$.

Lời giải

Chọn D

$y'=-3x^2+6mx$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m\neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0;-3m-1), B(2m;4m^3-3m-1)$

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m;2m^3-3m-1)$

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I\in d \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}=(2m;4m^3), \vec{u}_d=(8;-1)$

$+\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow 16m-4m^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Với $m=0$ loại

Với $m=2$, ta có $I(2;9)\Rightarrow I\in d$

Với $m=-2$, ta có $I(-2;-11)\Rightarrow I\notin d$

Do đó $m=2$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 76: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-8x^2+(m^2+11)x-2m^2+2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox.

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán ⇔ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow x^3-8x^2+\left(m^2+11\right)x-2m^2+2=0$ có ba nghiệm phân biệt

$x^3-8x^2+\left(m^2+11\right)x-2m^2+2=0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2-6x+m^2-1\right)=0$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-6x+m^2-1=0(*)\end{array}\right.$$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=10-m^2>0\\m^2-9\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{10}<m<\sqrt{10}\\m\neq\pm 3\end{cases}$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 77: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

+ Ta có: $y=(x-1)\left(x^2-2mx+1-m\right)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y=(x-1)\left(x^2-2mx+1-m\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-1>0\\2-3m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\\m>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\m\neq\dfrac{2}{3}\end{cases}.$$

+ Do $m\in N, m<20$ nên $1\le m<20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 78: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-(m+1)x^2+\left(m^2-2\right)x-m^2+3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-2(m+1)x+m^2-2=0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow -2m^2+2m+7>0\Leftrightarrow\dfrac{1-\sqrt{15}}{2}<m<\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}(*)$.

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn $(*)$ là $-1;0;1;2$.

Ta được bốn hàm số

$y=x^3-x+2; y=x^3-x^2-2x+3; y=x^3-2x^2-x+2; y=x^3-3x^2+x-1$.

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 79: Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=6$

A. $m=-3$ **B.** $m=3$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6x+m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2.Vậy x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$

Theo viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=4-\dfrac{2m}{3} \Rightarrow 4-\dfrac{2m}{3}=6 \Rightarrow m=-3$

Câu 80: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)=2x^3-6x^2-m+1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x)=6x^2-12x$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$x=0 \Rightarrow f(0)=-m+1$

$x=2 \Rightarrow f(2)=-m-7$

Hàm số có các giá trị cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow (-m+1)(-m-7)<0 \Leftrightarrow (m-1)(m+7)<0 \Leftrightarrow -7<m<1$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 81: Cho hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m\in(-1;4)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in(3;4)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -m+2 \end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2;3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 \neq -1 \\ -2 < -m+2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$.

Câu 82: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó $A(0;4m^2-2)$, $B(2m;-4m^3+4m^2-2)$ $\Rightarrow AB = \sqrt{4m^2+16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4+1}$

Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-0}{2m-0} = \dfrac{y-(4m^2-2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$

$$d(C,AB) = \frac{|2m^2+4-4m^2+2|}{\sqrt{4m^4+1}} = \frac{2|m^2-3|}{\sqrt{4m^4+1}}$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2}.AB.d(C,AB) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.2|m|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{2|m^2-3|}{\sqrt{4m^4+1}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m(m^2-3)| = 2 \Leftrightarrow m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (m^2-1)^2(m^2-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{array}\right.$$

Do m nguyên dương nên ta được $m = 1, m = 2$, tổng thu được là 3.

Câu 83: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;3) \cup (3;4)$. **B.** $m \in (1;3)$. **C.** $m \in (3;4)$. **D.** $m \in (-1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3) \Leftrightarrow$ pt $y'=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

$\Leftrightarrow x^2+(m-1)x+(m-2)=0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+m-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in(-2;3) \\ x=2-m \end{array}\right.$

$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m\neq -1 \\ -2<2-m<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ -1<m<4 \end{cases}$

Câu 84: Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ đồng thời $y(x_1).y(x_2)=0$ là:

A. -21 **B.** -39 **C.** -8 **D.** $3\sqrt{11}-13$

Lời giải

Chọn A

+) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$y'=9x^2+4(m+1)x-3m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=4(m+1)^2+27m>0$

+) Xét $y(x_1).y(x_2)=0$ nên ta có $y=3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5$ phải tiếp xúc với trục hoành $\Rightarrow 3x^3+2(m+1)x^2-3mx+m-5=0$ phải có nghiệm kép

$\Leftrightarrow (x-1)\left[3x^2+(2m+5)x-m+5\right]=0\,(1)$ phải có nghiệm kép

+) TH1: Phương trình $3x^2+(2m+5)x-m+5=0$ có một nghiệm $x=1\Rightarrow m_1=-13$

+) TH2: Phương trình $3x^2+(2m+5)x-m+5=0$ có nghiệm kép khác 1

$\Rightarrow \Delta=(2m+5)^2-12(5-m)=0 \Leftrightarrow 4m^2+32m-35=0 \Rightarrow m_2+m_3=-8$

$\Rightarrow m_1+m_2+m_3=-21$

Câu 85: Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|\le 5$. Biết $S=(a;b]$. Tính $T=2b-a$.

A. $T=\sqrt{51}+6$ **B.** $T=\sqrt{61}+3$ **C.** $T=\sqrt{61}-3$ **D.** $T=\sqrt{51}-6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y'=3x^2-6mx+27$, $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+9=0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$ (*)

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2, theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \le 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \le 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{61}}{2} \le m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ (**)

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Câu 86: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \le 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó giả sử $x_1 < x_2$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - \sqrt{4-m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4-m} \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán trở thành $x_2 \le 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4-m} \le 4 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \le m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0;1;2;3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 87: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** không tồn tại

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \forall m \in R$, hàm số luôn có CĐ, CT

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;2m^3+3m^2+1), B(m+1;2m^3+3m^2)$

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất

Ta có $d(M,AB)=\dfrac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dấu "=" khi $m=0$

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A,B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ **C.** $m=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ **D.** $m=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-3m$ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi $m>0$. Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C\left(-\sqrt{m};2+2m\sqrt{m}\right); D\left(\sqrt{m};2-2m\sqrt{m}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua các điểm CĐ, CT của đồ thị hàm số có phương trình là: $y=-2mx+2$.

Do $d(I,\Delta)=\dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}<R=1$ (vì m > 0) $\Rightarrow \Delta$ luôn cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ tại 2 điểm A,B phân biệt. Dễ thấy $m=\dfrac{1}{2}$ không thõa mãn do A,I,B thẳng hàng.

Với $m\neq\dfrac{1}{2}$: Δ không đi qua I, ta có: $S_{\Delta ABI}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin AIB \leq \dfrac{1}{2}R^2=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất bằng $\dfrac{1}{2}$ khi $\sin\widehat{AIB}=1$ hay ΔAIB vuông cân tại $I \Leftrightarrow IH=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m=\dfrac{2\pm\sqrt{3}}{2}$ (H là trung điểm của AB)

Câu 89: Biết đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ có hai điểm cực trị $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1-y_2)=y_1(x_1-x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng

A. $-\dfrac{49}{4}$ **B.** $-\dfrac{25}{4}$ **C.** $-\dfrac{841}{36}$ **D.** $-\dfrac{7}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2+2ax+b$

Chia y cho y' ta được $y=y'\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{9}a\right)+\left(-\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}\right)x+c-\dfrac{ab}{9}$.

Do $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị nên $y'(x_1)=0, y'(x_2)=0$

Do đó $y_1=\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_1+c-\frac{ab}{9};y_2=\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_2+c-\frac{ab}{9}$

Theo giả thiết $x_1\left(y_1-y_2\right)=y_1\left(x_1-x_2\right)\Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$

$\Leftrightarrow x_1\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_2+c-\frac{ab}{9}\right]=x_2\left[\left(-\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}\right)x_1+c-\frac{ab}{9}\right]$

$\Leftrightarrow x_1\left(c-\frac{ab}{9}\right)=x_2\left(c-\frac{ab}{9}\right)\Leftrightarrow c-\frac{ab}{9}=0(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow ab=9c$

Ta có: $P=abc+2ab+3c=9c^2+21c=\left(3c+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\geq-\frac{49}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=abc+2ab+3c$ bằng $-\frac{49}{4}$

Câu 90: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-m^3-m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I\left(2;-2\right)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\frac{4}{17}$. **B.** $\frac{14}{17}$. **C.** $-\frac{2}{17}$. **D.** $\frac{20}{17}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$.

Vì $\Delta'=1>0\ \forall m$ nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x=m\pm1$.

Gọi $A\left(m+1;-4m-2\right)$, $B\left(m-1;-4m+2\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(-2;4\right)=-2\left(1;-2\right)$, $\overrightarrow{IA}=\left(m-1;-4m\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(m-3;-4m+4\right)$.

Phương trình đường thẳng AB qua $A\left(m+1;-4m-2\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(2;1\right)$ là $AB:2x+y+2m=0$.

Suy ra $d\left(I,\ AB\right)=\frac{\left|2+2m\right|}{\sqrt{5}}$.

Khi đó $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}AB.d\left(I,\ AB\right)=\frac{1}{2}2\sqrt{5}\frac{\left|2+2m\right|}{\sqrt{5}}=\left|2+2m\right|$.

Mặt khác $S_{\Delta IAB}=\frac{AB.IA.IB}{4R}\Leftrightarrow AB.IA.IB=4\sqrt{5}\left|2+2m\right|$.

$\Leftrightarrow\sqrt{20}\sqrt{17m^2-2m+1}\sqrt{17m^2-38m+25}=4\sqrt{5}\left|2+2m\right|$

$\Leftrightarrow\left(17m^2-2m+1\right)\left(17m^2-38m+25\right)=4\left(4m^2+8m+4\right)$

$\Leftrightarrow 289m^4-680m^3+502m^2-120m+9=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{3}{17} \end{array}\right.$.

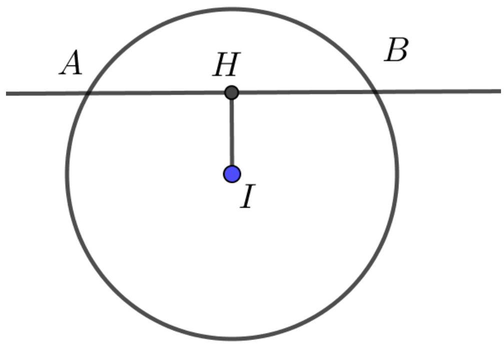
Vậy $m_1+m_2=\dfrac{20}{17}$.

Câu 91: Cho hàm số $y=x^3-6mx+4$ có đồ thị (C_m). Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

A. $m_0\in(3;4)$. **B.** $m_0\in(1;2)$. **C.** $m_0\in(0;1)$. **D.** $m_0\in(2;3)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $y'=3x^2-6m$

$y'=0\Leftrightarrow x^2=2m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m>0$

Gọi $A\left(\sqrt{2m};4-4m\sqrt{2m}\right)$ và $B\left(-\sqrt{2m};4+4m\sqrt{2m}\right)$

Phương trình đường thẳng $AB:4mx+y-4=0$

Đặt $a=d(I,AB)$ $\left(0<a<\sqrt{2}\right)$ $\Rightarrow$ $HB=\sqrt{2-a^2}$

Suy ra $S_{\Delta IAB}=a\sqrt{2-a^2}\le\dfrac{1}{2}\left(a^2+2-a^2\right)=1$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow a=\sqrt{2-a^2}\Leftrightarrow a=1$

Khi đó $d(I;AB)=\dfrac{|4m+0-4|}{\sqrt{16m^2+1}}=1\Leftrightarrow\sqrt{16m^2+1}=4|m-1|$

$\Leftrightarrow 16m^2+1=16m^2-32m+16\Leftrightarrow m=\dfrac{15}{32}$

Câu 92: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1^2+x_2^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in (-1;7)$. **B.** $m_0 \in (7;10)$. **C.** $m_0 \in (-15;-7)$. **D.** $m_0 \in (-7;-1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + m$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$; $\Delta' = 9 - 3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Hai điểm cực trị $x_1; x_2$ là nghiệm của $y' = 0$ nên: $x_1 + x_2 = 2; x_1.x_2 = \dfrac{m}{3}$.

Để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_1 = 13$

$\Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9$. Vậy $m_0 = -9 \in (-15;-7)$.

Câu 93: Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ và $M(x_0;0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T = 4x_0 + 2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T = 2017$. **B.** $T = 2019$. **C.** $T = 2016$. **D.** $T = 2018$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x) = -3x^2 + 3$.

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -6 \end{array}\right.$. Đặt $A(1;-2)$ và $B(-1;-6)$.

Ta thấy hai điểm A và B nằm cùng phía với trục hoành.

Gọi $A'(1;2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục hoành. Chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm B, M và A' thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{A'M} = (x_0 - 1; -2)$ và $\overrightarrow{A'B} = (-2;-8) \Rightarrow \dfrac{x_0 - 1}{-2} = \dfrac{-2}{-8} \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$.

Vậy $T = 4.\dfrac{1}{2} + 2015 = 2017$.

Câu 94: Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m \neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$.

Ta có $I\left(m;2m^3\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x-y=0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$\begin{cases}2m-4m^3=0\\ m-2m^3=0\end{cases} \Leftrightarrow 1-2m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 95: Cho hàm số $y=2x^3-3\left(m+1\right)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Ta có $y'=6x^2-6\left(m+1\right)x+6m$. $y'=0 \Leftrightarrow x^2-\left(m+1\right)x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=m\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq 1$.

Khi đó ta có $A\left(1;m^3+3m-1\right), B\left(m;3m^2\right)$.

Có $AB=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(m-1\right)^2+\left(m^3-3m^2+3m-1\right)^2=2 \Leftrightarrow \left(m-1\right)^2+\left(m-1\right)^6=2$.

$\Leftrightarrow \left(m-1\right)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\ m=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

DẠNG 7. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Một số công thức tính nhanh "thường gặp"

liên quan cực trị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$

1 ***cực trị:*** $ab\geq 0$		3 ***cực trị:*** $ab<0$	
: 1 cực tiểu	1 cực đại	: 1 cực đại, tiểu	2 cực đại, tiểu

$A(0;c), B\left(-\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\dfrac{b}{2a}};-\dfrac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB=AC=\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2}-\dfrac{b}{2a}}, BC=2\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$

với $\Delta=b^2-4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y=-\dfrac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y=\pm\left(\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}\right)^3 x+c$

Gọi $\widehat{BAC}=\alpha$, luôn có: $8a(1+cos\alpha)+b^3(1-cos\alpha)=0 \Rightarrow cos\alpha=\dfrac{b^3+8a}{b^3-8a}$ và $S^2=-\dfrac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A,B,C: x^2+y^2-\left(c+n\right)x+c.n=0,$ với $n=\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R=\left|\dfrac{b^3-8a}{8ab}\right|$

Câu 96: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S = 3$. **B.** $S = \frac{1}{2}$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \to y = 2 \\ x = \pm 1 \to y = 1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$.

Nhận xét ΔABC cân tại A. Vì vậy $S = \frac{1}{2}|y_A - y_B|.|x_C - x_B| = \frac{1}{2}.1.2 = 1$.

Câu 97: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0;\ 1)$, B, C thỏa mãn $BC = 4$?

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = \pm 4$. **D.** $m = \pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m};\ -m^2 + 1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};\ -m^2 + 1\right)$.

$BC = 4 \Leftrightarrow 4m = 16 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 98: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0;-3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m \in \left(\frac{1}{2};\frac{9}{5}\right)$. **B.** $m \in \left(\frac{9}{5};2\right)$. **C.** $m \in \left(-1;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $m \in (2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A\left(0;-2m^2+m^4\right)$; $B\left(\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$; $C\left(-\sqrt{m};m^4-3m^2\right)$.

Gọi I trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;m^4-3m^2\right)$

Vì $A,D\in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của AD

$\Leftrightarrow 2\left(m^4-3m^2\right)=-2m^2+m^4-3 \Leftrightarrow m^4-4m^2+3=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2=1 \\ m^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm 1 \\ m=\pm\sqrt{3} \end{array}\right. \xrightarrow{m>0} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Câu 99: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

• $y=x^4-2(m+1)x^2+m^2 \Rightarrow y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-m-1\right)$.

• Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$\Leftrightarrow m+1>0$.

$\Leftrightarrow m>-1$.

Khi đó: $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{m+1} \\ x=0 \\ x=\sqrt{m+1} \end{array}\right.$.

• Giả sử A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\Rightarrow A\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right), B\left(0;m^2\right), C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m+1};(m+1)^2\right), \overrightarrow{CB}=\left(-\sqrt{m+1};(m+1)^2\right)$

ΔABC vuông tại $B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow -(m+1)+(m+1)^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right. \Rightarrow m=0$.

Câu 100: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R=1$ bằng

A. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $2+\sqrt{5}$. **D.** $-1+\sqrt{5}$.

Lời giải

➢ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

➢ $y'=4x^3-4mx=4x(x^2-m)$.

➢ Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

➢ Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m};-m^2+1), C(-\sqrt{m};-m^2+1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hs (1), $I(0;-m^2+1)$ là trung điểm BC.

Ta có $AI = m^2, AB = AC = \sqrt{m+m^4}$. Suy ra $\frac{1}{2}AI.BC = \frac{AB.AC.BC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{2AI}{AB.AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2}{m+m^4} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 0 & (l) \\ m = 1 & (n) \\ m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & (l) \\ m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & (n) \end{array}\right.$$

Câu 101: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi $A(0; m^4+5)$, $B(m;5)$, $C(-m;5)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ khi đó ta có ba điểm A, I, O thẳng hàng. Mặt khác do hai điểm B và C đối xứng nhau qua AO nên AO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC \Rightarrow AB \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = 0$.

Trong đó $\overrightarrow{AB} = (m; -m^4)$, $\overrightarrow{OB} = (m;5)$. Ta có phương trình $m^2 - 5m^4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 102: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0;-3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. **B.** $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $m \in (2;3)$. **D.** $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$;

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; m^4 - 2m^2)$; $B(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$; $C(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD. Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I(0; m^4 - 3m^2)$, $J\left(0; \frac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

ĐK: $m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Câu 103: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0;4) \\ x = -1 \Rightarrow B(-1;3) \\ x = 1 \Rightarrow C(1;3) \end{array}\right.$.

$\overrightarrow{AB} = (-1;-1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC} = (1;-1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$; $\overrightarrow{BC} = (2;0) \Rightarrow BC = 2$.

Ta có ΔABC vuông cân tại A có $S = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1$, $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \sqrt{2} + 1$.

Vậy $r = \frac{S}{p} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$.

Câu 104: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m = 1$ hoặc $m = \frac{17}{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = \frac{17}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m-4)x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 4 - m \end{array}\right.$.

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$A(0;m+5)$, $B\left(\sqrt{4-m};m+5-(m-4)^2\right)$, $C\left(-\sqrt{4-m};m+5-(m-4)^2\right)$.

Do O là trọng tâm tam giác ABC nên $3(m+5) = 2(m-4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{17}{2} \end{array}\right.$.

Do $m < 4$ nên $m = 1$.

Câu 105: Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. $m_0 \in (-1;0]$. **B.** $m_0 \in (-2;-1]$. **C.** $m_0 \in (-\infty;-2]$. **D.** $m_0 \in (-1;0)$.

Lời giải

Ta có: $y = x^4 + 2mx^2 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4mx$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \end{array}\right.$ (1).

Để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m < 0$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{array}\right.$ nên ta gọi $A(0;-1)$, $B\left(-\sqrt{-m};-m^2-1\right)$, $C\left(\sqrt{-m};-m^2-1\right)$

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC$ với H là trung điểm của BC nên $H\left(0;-m^2-1\right)$. Nên: $AH=\sqrt{\left(-m^2\right)^2}=m^2$ và $BC=\sqrt{\left(2\sqrt{-m}\right)^2}=2\sqrt{-m}$.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.m^2.2\sqrt{-m}$ theo giả thiết $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{2}$ nên $m^2\sqrt{-m}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow m=-2$.

DẠNG 8. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 2 TRÊN BẬC 1 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN YÊU CẦU BÀI TOÁN

Câu 106: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+2x+3}{2x+1}$.

A. $y=2x+2$. **B.** $y=x+1$. **C.** $y=2x+1$. **D.** $y=1-x$.

Lời giải

□ Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

□ $y'=\frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$, $y'=0\Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\,(\Rightarrow y=2)\\x=-2\,(\Rightarrow y=-1)\end{array}\right.$.

□ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1;2)$ và $N(-2;-1)$.

□ Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M,N của đồ thị hàm số đã cho là: $y=x+1$.

Cách khác:

□ Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương ứng của hàm số là $y_0=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=\frac{\left(x^2+2x+3\right)'}{(2x+1)'}=x+1$.

Câu 107: Điều kiện của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m<1$. **B.** $m>-1$. **C.** $m<2$. **D.** $m>-2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có $y=\frac{x^2-mx}{1-x}\Rightarrow y'=\frac{-x^2+2x-m}{(1-x)^2}$.

Hàm số $y=\frac{x^2-mx}{1-x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi qua hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2+2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\-1+2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m<1$.

Vậy $m<1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Câu 108: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2m}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}, \forall x\neq -1$. Đặt $f(x)=x^2+2x-m$, $h(x)=x^2+mx+2m$, $g(x)=x+1$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m+1>0\\ f(-1)=-m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow m>-1\ (1)$. Khi đó $\begin{cases} y(x_1)=\dfrac{h'(x_1)}{g'(x_1)}=2x_1+m\\ y(x_2)=\dfrac{h'(x_2)}{g'(x_2)}=2x_2+m\end{cases}$.

Suy ra $A(x_1\,;2x_1+m)$, $B(x_2\,;2x_2+m)$. Suy ra $\overrightarrow{OA}=(x_1\,;2x_1+m)$, $\overrightarrow{OB}(x_2\,;2x_2+m)$.

ΔOAB vuông tại O khi $\begin{cases}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\neq\vec{0}\ \ (2)\\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=x_1.x_2+(2x_1+m)(2x_2+m)=0\ \ (3)\end{cases}$.

$(3)\Leftrightarrow m^2+5x_1.x_2+2m(x_1+x_2)=0$. Kết hợp với định lí Vi-et cho phương trình $f(x)=0$ ta được $m^2-5m-4m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\left(\textit{không thỏa mãn}(2)\right)\\ m=9\left(\textit{thỏa mãn}(1),(2)\right)\end{array}\right. \Rightarrow S=\{9\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Câu 109: Biết rằng đồ thị $(H): y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A,B. Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB.

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình của đường thẳng AB là $y=\dfrac{(x^2+2x+m)'}{(x-2)'} \Leftrightarrow y=2x+2 \Leftrightarrow 2x-y+2=0$.

+ Khoảng cách $d(O;AB)=\dfrac{|2.0-0+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 110: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 16.

Lời giải

$$y' = \frac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-(m+m^2)}{(x-1)^2}$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1+m+m^2 > 0 \\ -1-m-m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A = 2x+m$.

Gọi x_A; x_B là hoành độ của A, B khi đó x_A; x_B là nghiệm của $x^2-2x-(m+m^2)$.

Theo định lí Viet ta có $x_A + x_B = 2$; $x_A.x_B = -m^2-m$.

$y_A = 2x_A + m$; $y_B = 2x_B + m$.

$\angle AOB = 90° \Rightarrow x_A.x_B + y_A.y_B = 0 \Leftrightarrow x_Ax_B + 4x_Ax_B + 2m(x_A+x_B) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5(-m^2-m) + 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\frac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

Câu 111: Với tham số m, đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m > 2$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $1 < m < 2$. **D.** $m < 0$.

Lời giải

Ta có $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có đạo hàm là $y' = \frac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị ta phải có $\begin{cases} 1+m > 0 \\ 1-2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$.

Gọi hai hoành độ cực trị là x_1 và x_2 ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$.

Khi đó điểm $A(x_1, 2x_1 - m)$ và $B(x_2, 2x_2 - m)$.

$AB = \sqrt{4+4m}.\sqrt{5} = 5 \Leftrightarrow 4 + 4m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$.

Câu 112: Giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0 = 2$ là:

A. $m = -1$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

$y'=1-\frac{1}{(x+m)^2}; y''=\frac{2}{(x+m)^3}$.

Hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0=2$ khi $\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{1}{(2+m)^2}=0 \\ \frac{2}{(2+m)^3}<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right. \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 113: Để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=2$ thì m thuộc khoảng nảo?

A. $(0;2)$. **B.** $(-4;-2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}, y''=\frac{2}{(x+m)^3}$

Hàm số đạt cực đại tại $x=2$ nên $\begin{cases} y'(2)=0 \\ y''(2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2+4m+3}{(m+2)^2}=0 \\ \frac{2}{(m+2)^3}<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$ thuộc $(-4;-2)$.

Câu 114: Cho hàm số $y=x+p+\frac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Tính pq.

A. $pq=2$. **B.** $pq=\frac{1}{2}$. **C.** $pq=\sqrt{3}$. **D.** $pq=1$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có $y'=1-\frac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$, suy ra $y'(-2)=0 \Rightarrow 0=1-q \Leftrightarrow q=1$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;-2)$ nên $-2=-2+p-q \Leftrightarrow p-q=0$.

Do đó $p=q=1$.

Thử lại: với $p=q=1$ ta được $y=x+1+\frac{1}{x+1}$.

Ta có $y'=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Từ đó có bảng biến thiên của hàm số:

x		-2		-1		0	
y'	+	0	-	‖	-	0	+
y	-∞ ↗	-2	↘ -∞	‖	+∞ ↘	2	↗ +∞

Rõ ràng đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $A(-2;-2)$. Vậy $p=q=1 \Rightarrow pq=1$.

Câu 115: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+1}{x+m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m=7$. **B.** $m=5$. **C.** $m=-9$. **D.** $m=-5$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y=\frac{x^2+mx+1}{x+m} \Rightarrow y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -m \\ x^2+2mx+m^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -m \\ \left[\begin{array}{l} x=-m+1 \\ x=-m-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m+1 \\ x=-m-1 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	-∞		-m-1		-m		-m+1		+∞
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	-∞	↗	$y_{CĐ}$	↘ -∞	‖	+∞ ↘	y_{CT}	↗	+∞

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-m-1$.

Vậy $y(-m-1)=7 \Leftrightarrow -m-2=7 \Leftrightarrow m=-9$.

CHƯƠNG

I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. MỨC ĐỘ VD - VDC

DẠNG 8. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài toán: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa). $y=f(x)=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{2f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0(1) \\ f'(x)=0(2) \end{array}\right.$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 1

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=|x^4-2mx^2+2m^2+m-12|$ có bảy điểm cực trị

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=|3x^4-4x^3-12x^2+m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 16 **B.** 44 **C.** 26 **D.** 27

Câu 5: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m-1\right|$ có 7 điểm cực trị là:

A. $(0;6)$ **B.** $(6;33)$ **C.** $(1;33)$ **D.** $(1;6)$

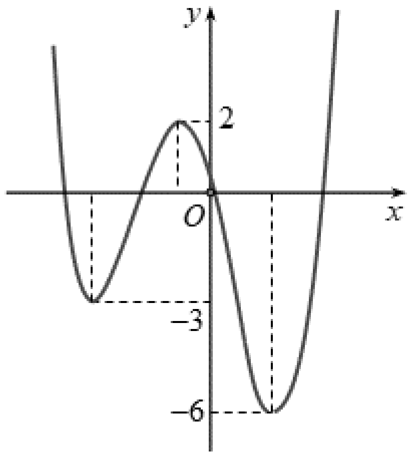
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4}<m\le 2$. **B.** $-2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f\left(1-2021x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Câu 8: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\frac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 42. **B.** 21. **C.** 40. **D.** 20.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	11	↘	4	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \left|f(x) - 2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m \in (4;11)$. **B.** $m \in \left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m = 3$. **D.** $m \in \left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Câu 13: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left|f(x-2) + m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \left|x^3 - 3x^2 + m\right|$ với $m \in [-5;5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 6.

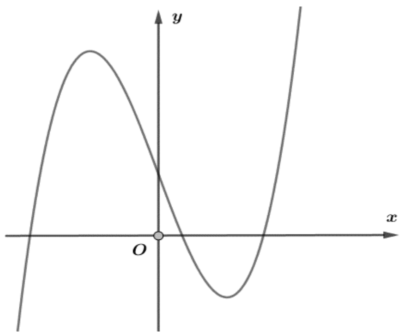
Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \left|f(x - 2017) + 2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 16: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f(x)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

DẠNG 2. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ *(Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của* $f(x), f'(x)$*)*. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

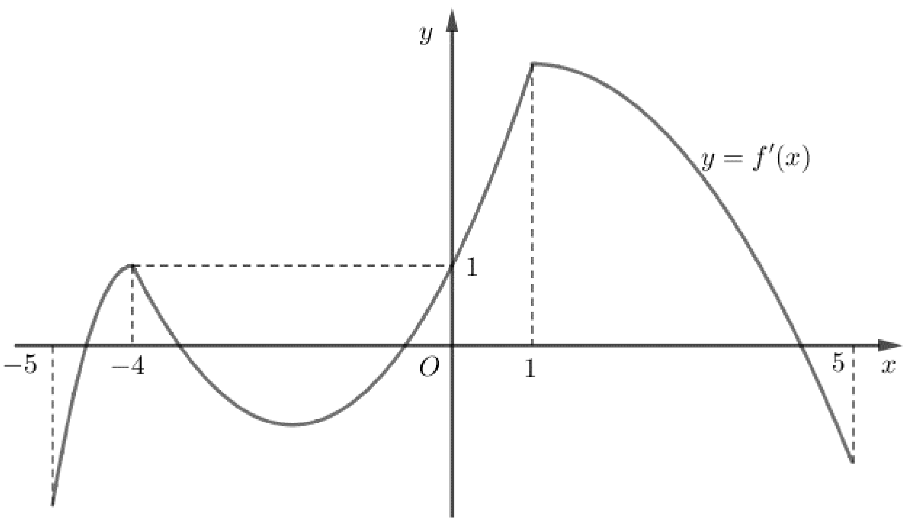
Bước 1. Tính đạo hàm $y'=u'.f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'=0\\ f'(u)=0\end{array}\right.$

Bước 3.Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

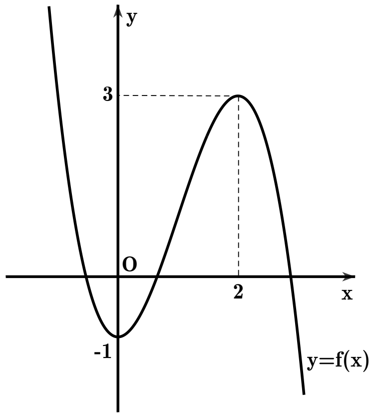
Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=1$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.

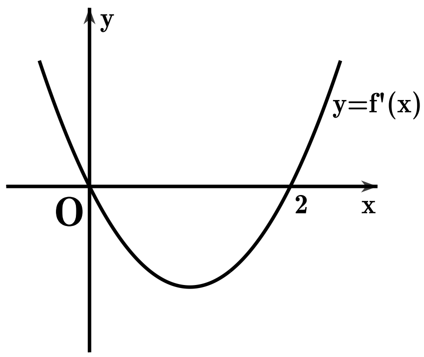


Hàm số $g(x)=f(x^3+x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;1)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(-x^2+x)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

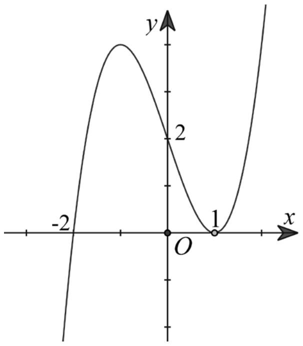
Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+2x)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f(x^2-2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

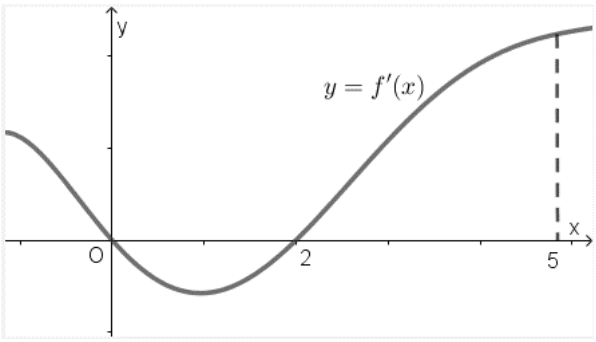
A. 3. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



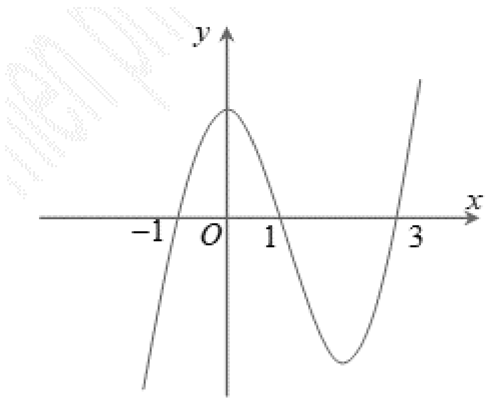
A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5};\sqrt{5})$.



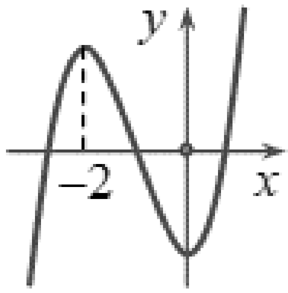
A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 26: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



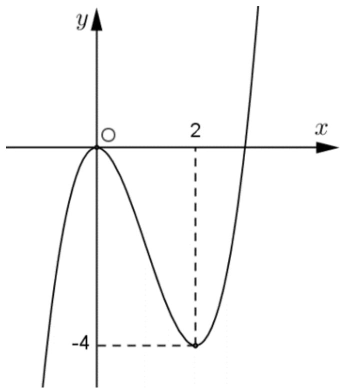
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



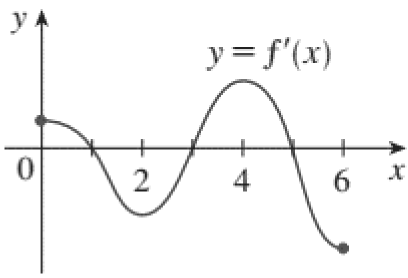
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 28: Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f\left(x\right)\right]$.



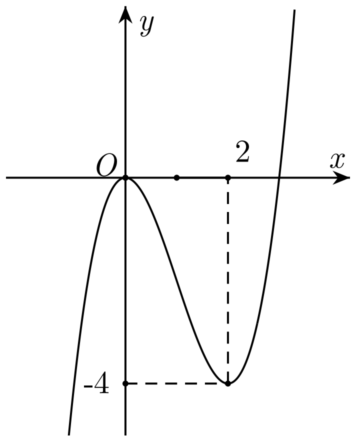
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[0;6\right]$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;6\right]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



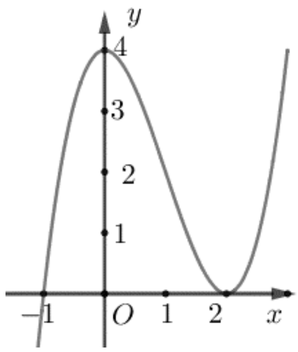
A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 30: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?



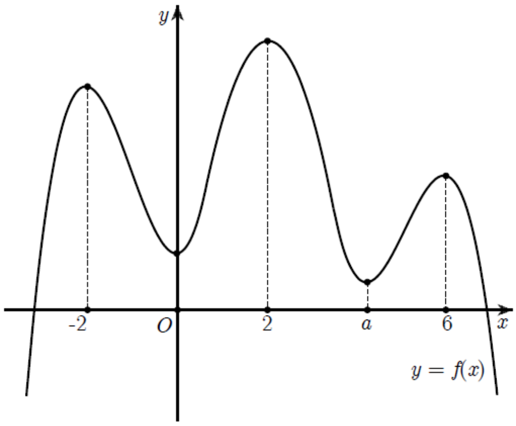
A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là.



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

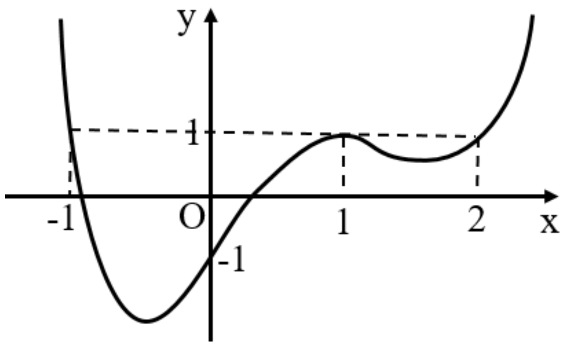
Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là -2; 0; 2; a; 6 với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{3}{2};3\right)$ **B.** $(-2;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$

Câu 34: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x-2017\right)-2018x+2019$ là.

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

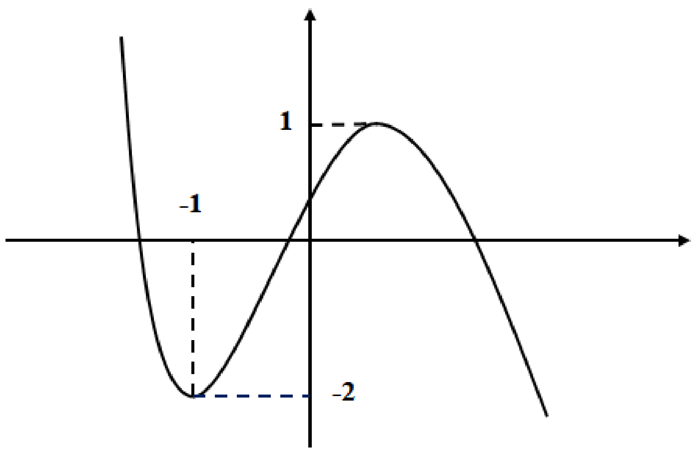
Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=2f\left(x\right)+1$ đạt cực tiểu tại điểm

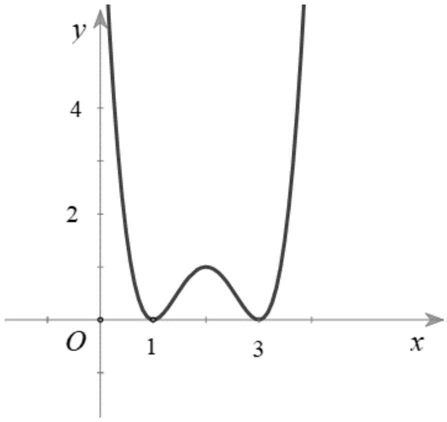
A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=5$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)+2x$ là:



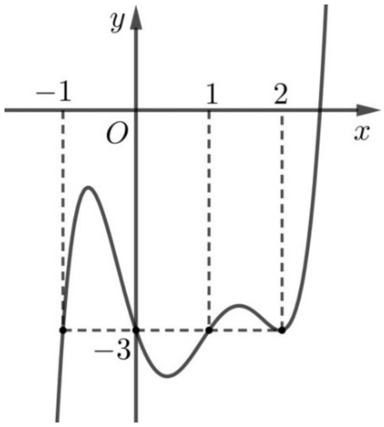
A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+2x^2-5x+2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?



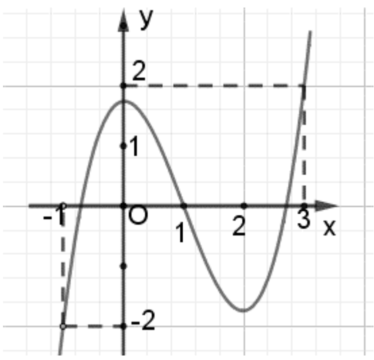
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 38: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ cóbao nhiêu cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 39: Cho hàm số Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2019$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

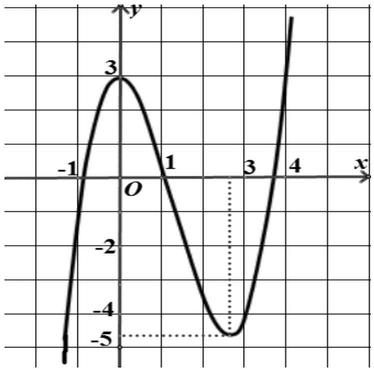


Số điểm cực trị của hàm số $y=g(|x|)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

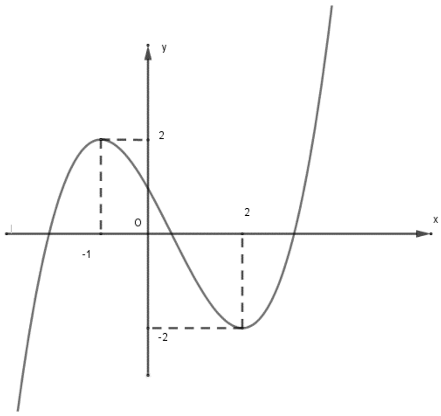
Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x) = 3f\left(f(x)\right) + 4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$



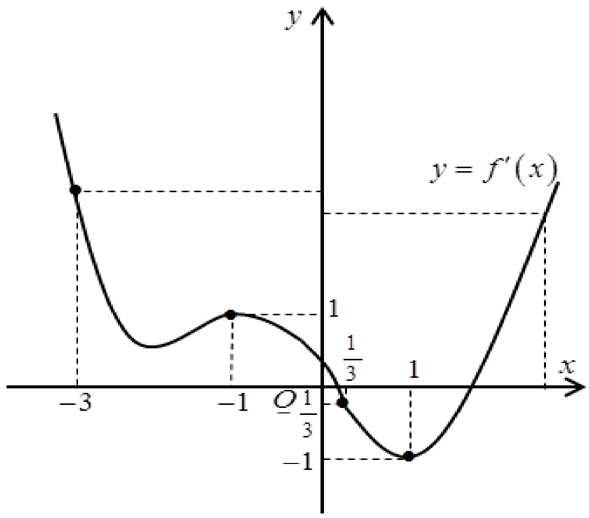
A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = \left|\left[f(x)\right]^2 - 4f(x) + 1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

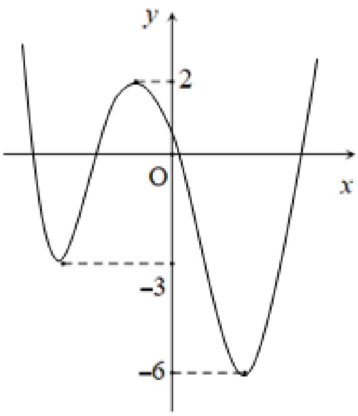
Câu 43: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2\left|x\right|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

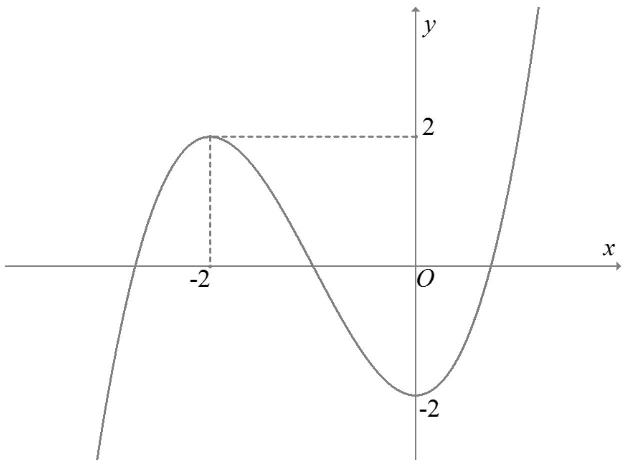
A. 4 **B.** 7 **C.** 9 **D.** 11

Câu 44: Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-12;12\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|2f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?



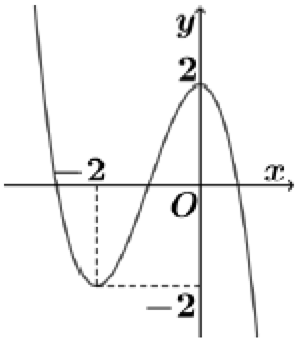
A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 12.

Câu 45: Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $a\neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(-2x^2+4x\right)$



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 46: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



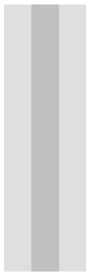
Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+x\right)$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 47: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

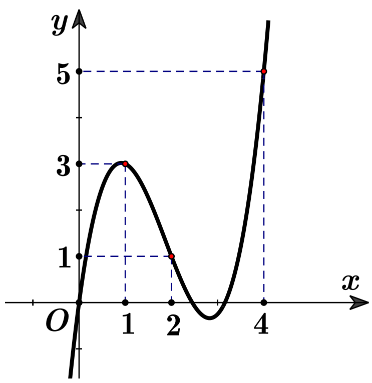
Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y=f(2x)$ đạt cực đại tại

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

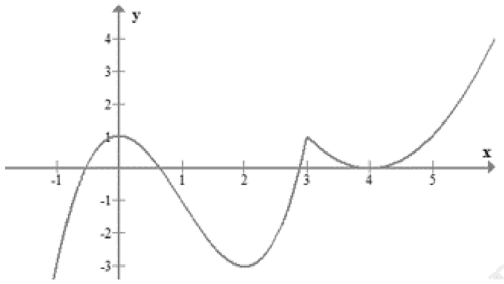
Câu 49: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=0; f\left(4\right)>4$. Biết hàm $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x^2\right)-2x\right|$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $\left(4;+\infty\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(2|x|-2)$ bằng



A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 9.

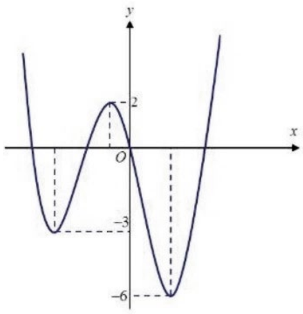
Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f\left(x^2 - |x|\right)$

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 52: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:

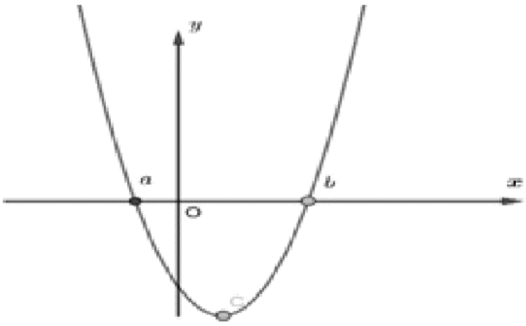


Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

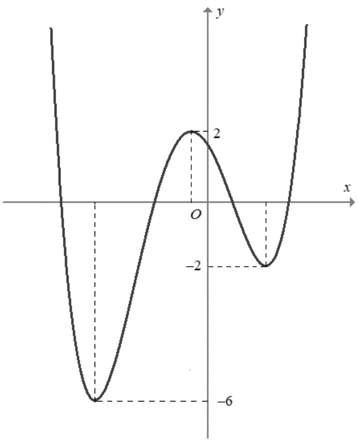
DẠNG 9. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ $f\left(u\left(x\right)\right)$ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 53: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ và $f\left(b\right)=1$. Số giá trị nguyên của $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Câu 54: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2020\right)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị?

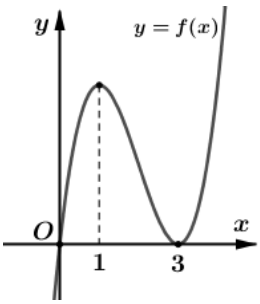


A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 55: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+2\right)^4\left(x+4\right)^3\left[x^2+2\left(m+3\right)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 56: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+2f\left(x\right)+2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m>1$ **B.** $m\geq 1$ **C.** $m\leq 2$ **D.** $m>2$

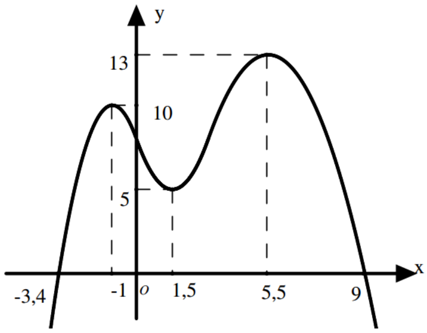
Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

A. $\left[-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right]\backslash\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$. **B.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\backslash\left\{0;\dfrac{15}{13}\right\}$. **C.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\backslash\{0\}$. **D.** $\left(-\dfrac{5}{4};\dfrac{5}{4}\right)\backslash\left\{\dfrac{15}{13}\right\}$.

Câu 58: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

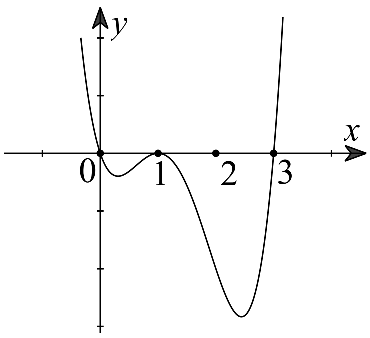
A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x)<0$ với mọi $x\in(-\infty;-3,4)\cup(9;+\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-mx+5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 60: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y=f(x^2+m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m\in(3;+\infty)$. **B.** $m\in[0;3]$. **C.** $m\in[0;3)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

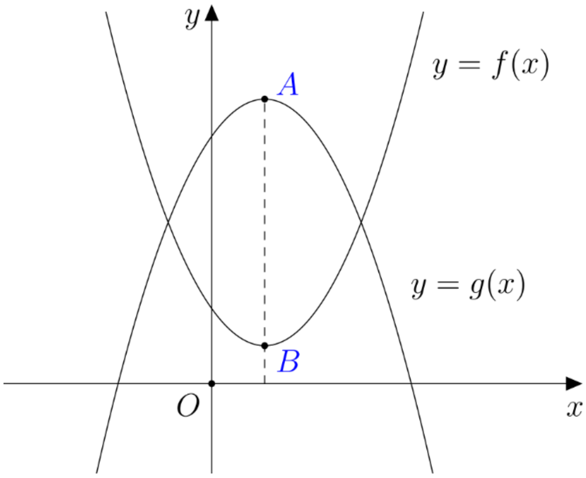
Câu 61: Cho hàm số $f'(x)=(x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)(x^2-2(m+1)x+m^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 63: Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left||f(x)-g(x)|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b};c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$ là

A. $M=40$. **B.** $M=11$. **C.** $M=31$. **D.** $M=45$.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. MỨC ĐỘ VD - VDC

DẠNG 8. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài toán: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa). $y=f(x)=\sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y'=\dfrac{2f(x).f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y'=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0\,(1) \\ f'(x)=0\,(2) \end{array}\right.$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và trục hoành $y=0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y=f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			6				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	2	↗	

Hàm số $y=f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

$y=f(|x-3|)$ (1), Đặt $t=|x-3|, t\geq 0$ Thì (1) trở thành: $y=f(t)(t\geq 0)$

Có $t=\sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t'=\dfrac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x=t'_x f'(t)$

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t'_x = 0 \\ f'(t) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ t = -2(L) \\ t = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 7 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Lấy x=8 có $t'(8)f'(5) > 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT thì hàm số $y = f\left(|x-3|\right)$ có 3 cực trị.

Câu 2: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12\right|$ có bảy điểm cực trị

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12\right|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - \left(2m^2 + m - 12\right) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \dfrac{-1-\sqrt{97}}{4} \vee m > \dfrac{-1+\sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{97}}{4} < m < 3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12\right|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	5	↘	0	↗	32	↘	$-\infty$

Phương trình (1) cớ 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 < 0 \\ 5 < m^2 < 32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{5} < |m| < \sqrt{32}$.

Vậy $m \in \{3;4;5;-3;-4;-5\}$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 5 điểm cực trị.

A. 16 **B.** 44 **C.** 26 **D.** 27

Lời giải

Chọn C

Đặt: $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

Ta có: $g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = m - 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$m-5$	↗	m	↘	$m-32$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ \begin{cases} m - 5 > 0 \\ m - 32 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ 5 < m < 32 \end{array}\right.$

. Vì m là số nguyên dương cho nên có 26 số m thỏa đề bài

Câu 5: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1\right|$ có 7 điểm cực trị là:

A. $(0;6)$ **B.** $(6;33)$ **C.** $(1;33)$ **D.** $(1;6)$

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x\left(x^2 - x - 2\right)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-6$	$\nearrow$	$m-1$	$\searrow$	$m-33$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6<0<m-1 \Leftrightarrow 1<m<6$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $\frac{5}{4}<m\le 2$. **B.** $-2<m<\frac{5}{4}$. **C.** $-\frac{5}{4}<m<2$. **D.** $\frac{5}{4}<m<2$.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-2\left(2m-1\right)x+2-m$

Hàm số $y=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị khi chi khi hàm số $f\left(x\right)$ có hai cực trị dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2m-1\right)^2-3\left(2-m\right)>0 \\ \dfrac{2\left(2m-1\right)}{3}>0 \\ \dfrac{2-m}{3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2-m-5>0 \\ m>\dfrac{1}{2} \\ m<2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4}<m<2$$

Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x^3-2x^2\right)\left(x^3-2x\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số $\left|f\left(1-2021x\right)\right|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

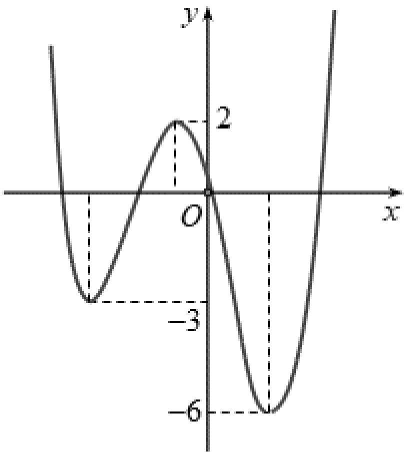
A. 9. **B.** 2018. **C.** 2022. **D.** 11.

Lời giải

Ta có $f'\left(x\right)=x^3\left(x-2\right)\left(x^2-2\right)=0$ có 4 nghiệm và đổi dấu 4 lần nên hàm số $y=f\left(x\right)$ có 4 cực trị. Suy ra $f\left(x\right)=0$ có tối đa 5 nghiệm phân biệt.

Do đó $y=\left|f\left(1-2021x\right)\right|$ có tối đa 9 cực trị.

Câu 8: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$.



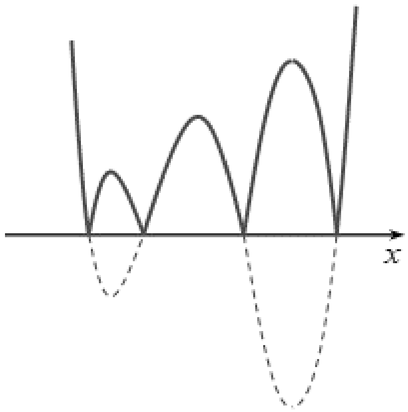
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x-1\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 15.

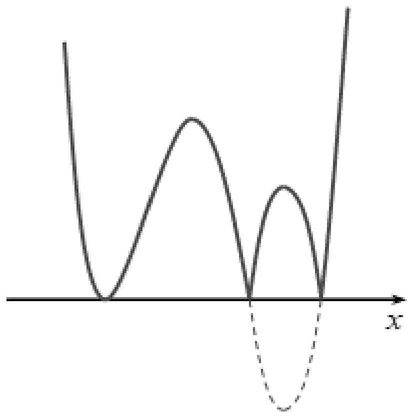
Lời giải

Nhận xét: Số giao điểm của $\left(C\right): y=f\left(x\right)$ với Ox bằng số giao điểm của $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ với Ox.

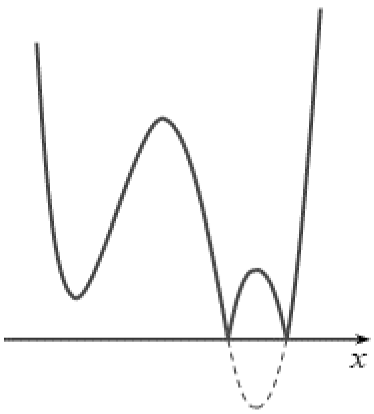
Vì $m>0$ nên $\left(C''\right): y=f\left(x-1\right)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $\left(C'\right): y=f\left(x-1\right)$ lên trên m đơn vị.



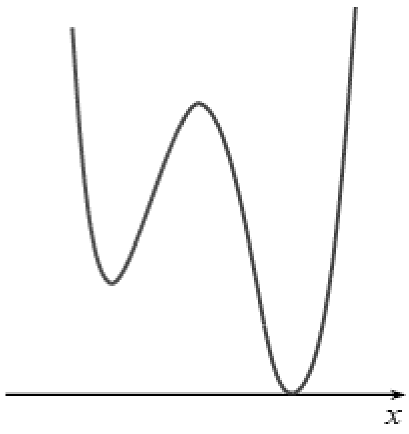
TH1: $0<m<3$



TH2 : $m=3$



TH3: $3<m<6$



TH4 : $m\geq 6$

TH1: $0<m<3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m=3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \dfrac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y = \left|3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \dfrac{m}{2}\right| = \sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \dfrac{m}{2}\right)^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\left(12x^3 + 12x^2 - 24x\right)\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \dfrac{m}{2}\right)}{\sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \dfrac{m}{2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 \quad (1) \\ 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \dfrac{m}{2} = 0 \quad (2) \end{array}\right..$$

Từ $(1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy để hàm số có 7 điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0;1;-2\}$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \dfrac{m}{2} \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-32 + \dfrac{m}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{m}{2}$	$\searrow$	$-5 + \dfrac{m}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 + \dfrac{m}{2} < 0 \\ \dfrac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 10.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4+4x^3-12x^2+\dfrac{m}{2}\right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

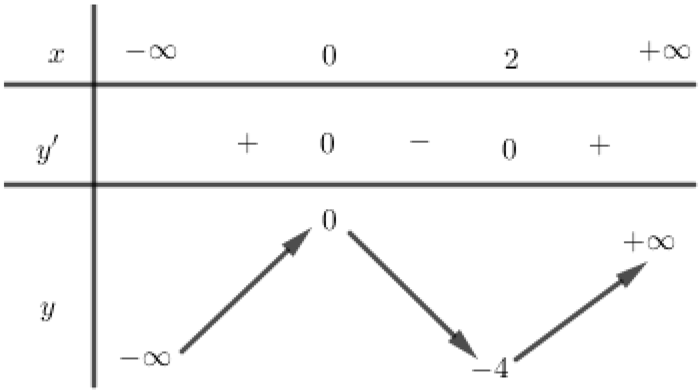
A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3-3x^2+m=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y=x^3-3x^2$

$y'=3x^2-6x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$



Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4<-m<0\Leftrightarrow 0<m<4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

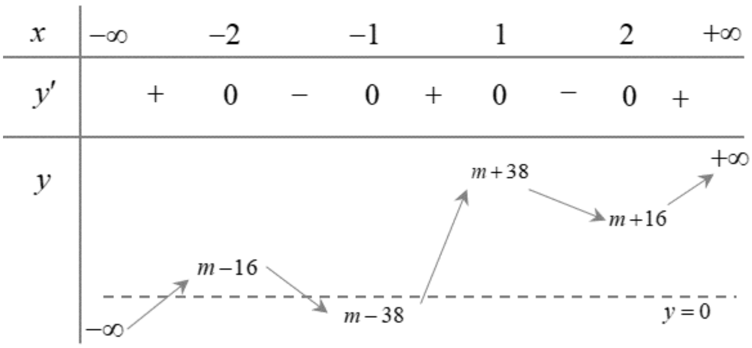
A. 42. **B.** 21. **C.** 40. **D.** 20.

Lời giải

$y=3x^5-25x^3+60x+m$

$\Rightarrow y'=15x^4-75x^2+60$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\Rightarrow y=m-16\\x=-1\Rightarrow y=m-38\\x=1\ \ \Rightarrow y=m+38\\x=2\ \ \Rightarrow y=m+16\end{array}\right.$



Suy ra $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-38<0<m-16 \\ m+16<0<m+38 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16<m<38 \\ -38<m<-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\overline{17,37} \\ m=\overline{-37,-17} \end{array}\right.$$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của m.

Câu 12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in\left(4;11\right)$. **B.** $m\in\left(2;\frac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\frac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)-2m$ như sau

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$\left[f(x)-2m\right]'$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-2m$	$-\infty$	$\nearrow$	$11-2m$	$\searrow$	$4-2m$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)-2m$ nằm phía trên trục hoành.

+ Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)-2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox.

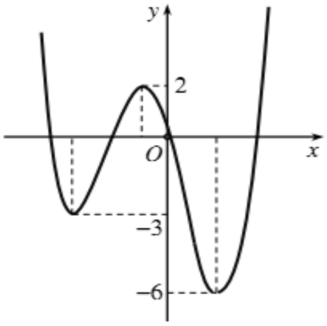
Do đó, đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)-2m\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\left(4-2m\right)\left(11-2m\right)<0\Leftrightarrow m\in\left(2;\frac{11}{2}\right).$$

Câu 13: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 15. **B.** 18. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải



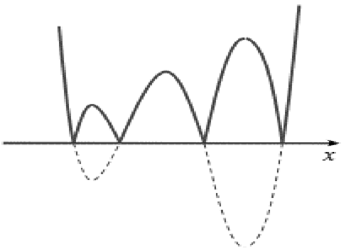
Cách 1: *dùng đồ thị.*

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với Ox.

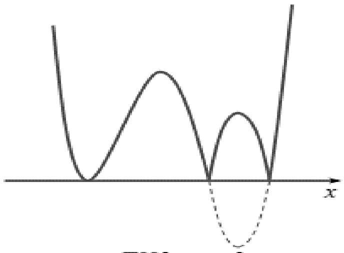
Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2)+m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên m đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = |f(x-2)+m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox.

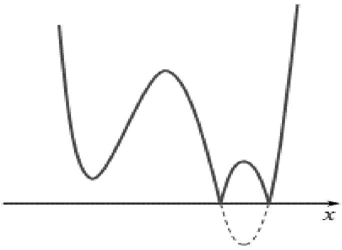
- Ta xét các trường hợp sau:



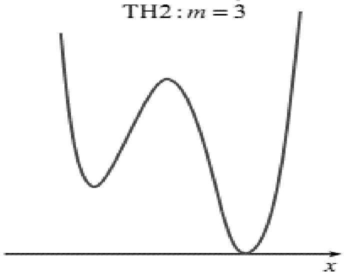
TH1 : $0 < m < 3$



TH2 : $m = 3$



TH3 : $3 < m < 6$



TH4 : $m \geq 6$

+ Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).

+ Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).

+ Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3;4;5\}$ hay $S = \{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

**** Cách 2:*** *đạo hàm hàm số hợp.*

- Ta có: $y = |f(x-2)+m| = \sqrt{[f(x-2)+m]^2} \Rightarrow y' = \dfrac{(f(x-2)+m).f'(x-2)}{\sqrt{[f(x-2)+m]^2}}$

- Xét $f'(x-2)=0\ \ (1)$

+ Do phương trình $f'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2)=0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

- Xét $f(x-2)+m=0 \Leftrightarrow f(x-2)=-m\ \ (2)$

+ Nếu $-6<-m<-3 \Leftrightarrow 3<m<6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1).

+ Nếu $-m=-3 \Leftrightarrow m=3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại : với $3\le m<6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y=|f(x-2)+m|$ có 5 điểm cực trị.

- Lại do $m\in\mathbb{Z}_+^*$ nên $m\in\{3;4;5\}$ hay $S=\{3;4;5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=|x^3-3x^2+m|$ với $m\in[-5;5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

A. 3. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $g(x)=x^3-3x^2+m$ có $g'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	m	↘	$-4+m$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có đúng một giao điểm hoặc tiếp xúc với Ox.

Điều kiện này tương đương với $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ -4+m\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $m\in[-5;5]$ ta có $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;4;5\}$. Vậy có 8 giá trị thoả mãn.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x-2017\right)+2018\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **<u>B.</u>** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Có $y=f\left(x-2017\right)$ bằng cách tịnh tiến sang bên phải 2017 đơn vị ta có

bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x-2017\right)$

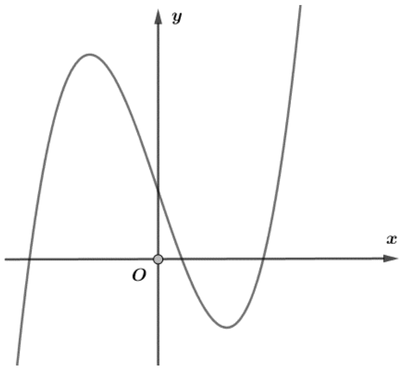
x	$-\infty$		2016		2020		$+\infty$
$f(x-2017)$	$-\infty$	↗	2018	↘	-2018	↗	$+\infty$

Tịnh tiến đồ thị hàm số $f\left(x-2017\right)$ lên trên 2018 đơn vị và lấy trị tuyệt đối ta có bảng biến thiên của hàm số $y=\left|f\left(x-2017\right)+2018\right|$

x	$-\infty$				2016		2020		$+\infty$
y		↘	0	↗	4036	↘	0	↗	

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 cực trị.

Câu 16: Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)+2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

<u>A.</u> 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Cách 1: Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y=f(|x|)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(|x|)+2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

Cách 2: Ta có: $y=f(|x|)+2018=f\left(\sqrt{x^2}\right)+2018$.

Đạo hàm: $y'=f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}.f'(|x|)$.

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ cùng dấu với $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ với $x_1<0$, $0<x_2<x_3$.

Suy ra: $f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x|-x_1)(|x|-x_2)(|x|-x_3)$.

Do $|x|-x_1>0$ nên $y'=f'\left(\sqrt{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x|-x_2)(|x|-x_3).\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Vậy hàm số $y=f(|x|)+2018$ có 5 cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	11	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

A. $m\in(4;11)$. **B.** $m\in\left(2;\dfrac{11}{2}\right)$. **C.** $m=3$. **D.** $m\in\left[2;\dfrac{11}{2}\right]$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Để đồ thị hàm số $y=|f(x)-2m|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m$ tại $5-2=3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow 4<2m<11 \Leftrightarrow 2<m<\dfrac{11}{2}$.

DẠNG 2. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

Bài toán: Cho hàm số $y=f(x)$ *(Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$).* Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$

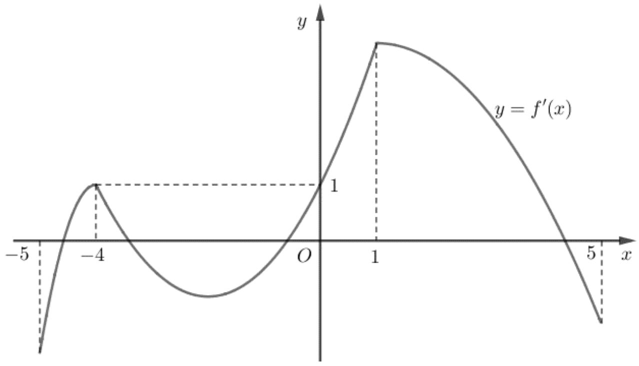
Bước 1. Tính đạo hàm $y'=u'.f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u'=0 \\ f'(u)=0 \end{array}\right.$

Bước 3.Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5;1)$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x)=f\left(x^2+4x\right)-x^2-4x$

$\Rightarrow g'(x)=(2x+4)f'\left(x^2+4x\right)-(2x+4)=(2x+4)\left[f'\left(x^2+4x\right)-1\right]$.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x+4=0 & \\ x^2+4x=-4 & (1) \\ x^2+4x=0 & (2) \\ x^2+4x=a\in(1;5) & (3) \end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^2+4x=a\in(1;5)$, ta có BBT của hàm số $y=x^2+4x$ trên $(-5;1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		$-$	0	$+$	
y	5 ↘	0 ↘	-4 ↗	0 ↗	5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x=-2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x=-4; x=0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x=x_1; x=x_2$ khác $-2;\ 0;\ -4$. Do đó phương trình $g'(x)=0$ có 5 nghiệm trong đó có $x=-2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x=-4; x=0; x=x_1; x=x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$ như hình sau:

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)+\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x$ đạt cực tiểu tại điểm nào trong các điểm sau?

A. $x=3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

$g'(x)=-f'(1-x)+x^2-4x+3$.

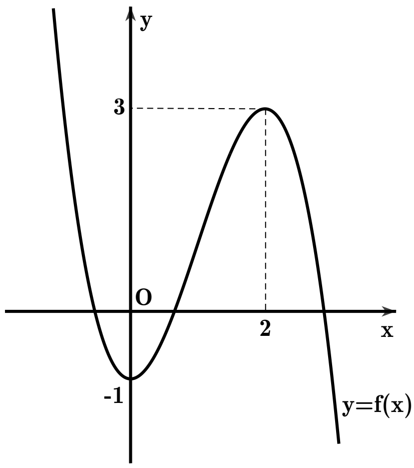
$$-f'(1-x)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-x<-2\\0<1-x<4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\-3<x<1\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$-f'(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		không xác định		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ ta suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x^3+x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0. Giá trị x_0 thuộc khoảng nào sau đây

A. $(1;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=f(x^3+x)\Rightarrow g'(x)=(3x^2+1)f'(x^3+x)$.

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow(3x^2+1)f'(x^3+x)=0\Leftrightarrow f'(x^3+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3+x=0\\x^3+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

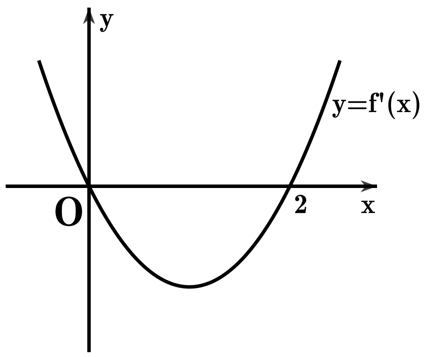
Do đó $g'(x)>0\Leftrightarrow(3x^2+1)f'(x^3+x)>0\Leftrightarrow f'(x^3+x)>0\Leftrightarrow 0<x^3+x<2\Leftrightarrow 0<x<1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0=0$. Suy ra $x_0\in(-1;1)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(-x^2+x)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g(x)=f(-x^2+x)\Rightarrow g'(x)=(-2x+1)f'(-x^2+x)$.

$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow(-2x+1)f'(-x^2+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+1=0\\f'(-x^2+x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\-x^2+x=0\\-x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=1\\x=0\end{array}\right.$.

Do đó $g'(x)>0\Leftrightarrow(-2x+1)f'(-x^2+x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x+1>0\\f'(-x^2+x)>0\end{cases}\\\begin{cases}-2x+1<0\\f'(-x^2+x)<0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} -x^2+x>2 \\ -x^2+x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<-x^2+x<2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x>\dfrac{1}{2} \\ 0<x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \dfrac{1}{2}<x<1 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 7.

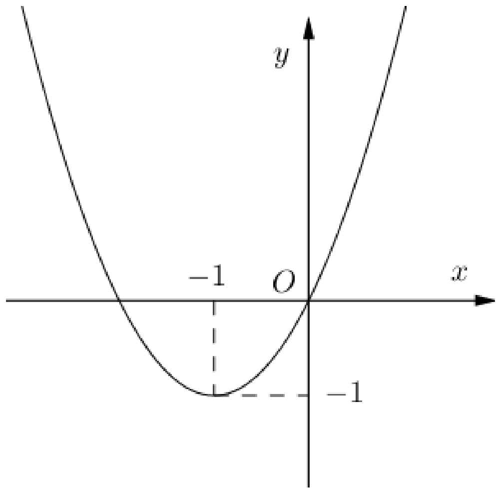
Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=(2x+2)f'\left(x^2+2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ f'\left(x^2+2x\right)=0 \quad (1) \end{array}\right..$

Từ BBT ta thấy phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+2x=a<-1 & (2) \\ x^2+2x=b\in(-1;1) & (3) \\ x^2+2x=c>1 & (4) \end{array}\right..$

Đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3) ; phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f\left(x^2 + 2x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

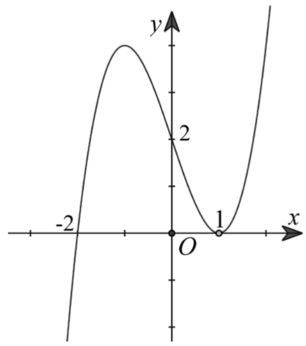
Vì hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $-2; -1; 0$ (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ có $y' = (2x-2).f'\left(x^2 - 2x\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow (2x-2).f'\left(x^2 - 2x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Do $y' = 0$ có một nghiệm bội lẻ ($x = 1$) và hai nghiệm đơn ($x = 0$; $x = 2$) nên hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 3\right)$.



A. 4 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 3

Lời giải

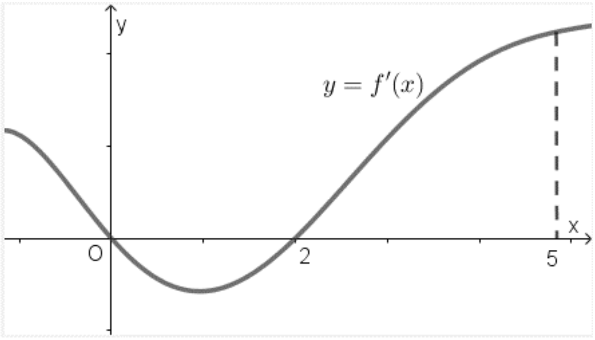
Chọn D

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

Ta có $y' = \left[f\left(x^2-3\right)\right]' = 2x.f'\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Mà $x = \pm 2$ là nghiệp kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$ có ba cực trị.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2\right)$ trên khoảng $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.



A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f\left(x^2\right) \Rightarrow g'(x) = 2xf'\left(x^2\right)$.

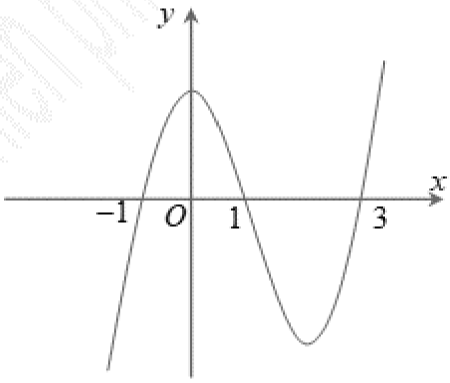
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=0 \\ x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó suy ra hàm số $y = f\left(x^2\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y = \left[f(u)\right]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2+2x+2}$

Ta có

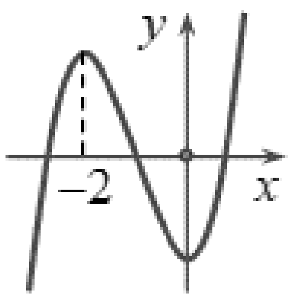
$$y' = \left[f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right]' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-3\right)$$

$$= \frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)(x+1)^2\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+3\right)} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f\left(x^2-2x-4\right)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x)=2(x-1)f'(x^2-2x-4)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)f'(x^2-2x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'(x^2-2x-4)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-4=-2 \\ x^2-2x-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{5} \\ x=1-\sqrt{5} \end{array}\right.$$ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).

Ta chọn $x=-2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2)=2.(-3).f'(4)$.

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó: $f'(4)>0$.

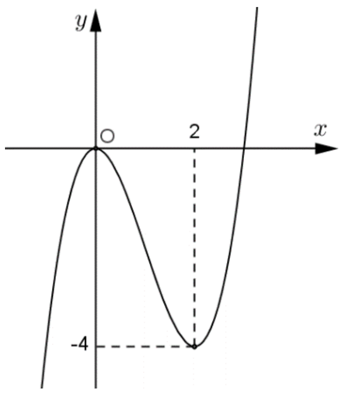
Suy ra: $g'(-2)<0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng xét dấy $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{5}$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 28: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f[f(x)]$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Xét hàm số $y=f[f(x)]$, $y'=f'(x).f'[f(x)]$;

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'[f(x)]=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=a\in(2;+\infty) \\ x=b\in(a;+\infty) \end{array}\right..$$

Với $x>b$, ta có $f(x)>2 \Rightarrow f'[f(x)]>0$

Với $a<x<b$, ta có $0<f(x)<2 \Rightarrow f'[f(x)]<0$

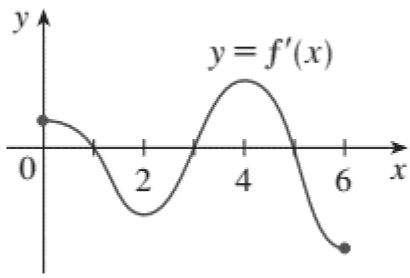
Với $0<x<a$ hoặc $x<0$, ta có $f(x)<0 \Rightarrow f'[f(x)]>0$

BBT:

x	$-\infty$		0		2		a		b		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y=f[f(x)]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0;6]$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y=[f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

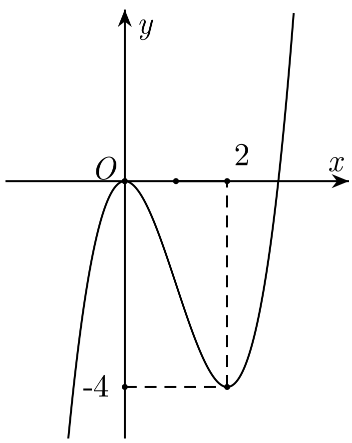
Lời giải

Ta có $y'=2f(x)f'(x)$ nên $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f'(x)=0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị ta suy ra $f(x)=0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y=[f(x)]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 30: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f[f(x)]$?



A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

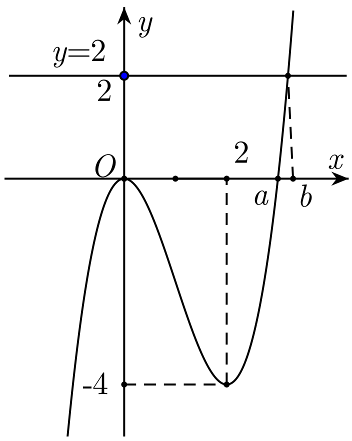
Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=\left[f\left(f\left(x\right)\right)\right]'=f'\left(x\right).f'\left(f\left(x\right)\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\f'\left(f\left(x\right)\right)=0\end{array}\right.$

+ $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ vì hàm số $f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị $x=0;x=2$

+ $f'\left(f\left(x\right)\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=0\\f\left(x\right)=2\end{array}\right.$



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f\left(x\right)=0$ có một nghiệm bội chẵn $x=0$

và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x=a>2$.

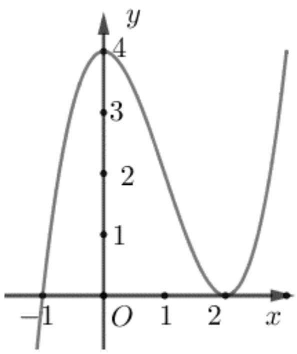
Kẻ đường thẳng $y=2$ nhận thấy phương trình $f\left(x\right)=2$ có một nghiệm đơn hoặc

bội lẻ $x=b>a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x=0;x=2,x=a,x=b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$ là.



A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x).f'(f(x))$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{array}\right..$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

$$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0\,(*) \\ f(x) = 2\,(**) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (*) có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Phương trình (**) có ba nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = m\,(-1 < n < 0) \\ x = n\,(0 < n < 1) \\ x = p\,(p > 2) \end{array}\right.$

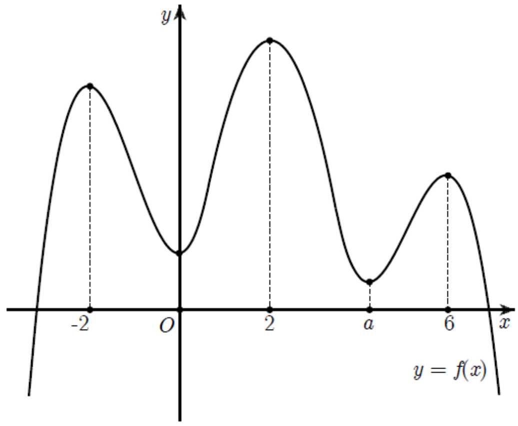
$g'(x) = 0$ có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = m \\ x = 0 \\ x = n \\ x = 2 \\ x = p \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		m		0		n		2		p		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	|	+	0	-	|	-	0	+	|	+	
$f'(f(x))$		+	0	-	0	+	|	+	0	-	0	-	0	+	
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 6 cực trị.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là -2; 0; 2; a; 6 với $4<a<6$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^6-3x^2\right)$ là

A. 8. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có -2; 0; 2; a; 6 là tất cả các nghiệm của $f'\left(x\right)$.

Ta có: $y'=\left(f\left(x^6-3x^2\right)\right)'=\left(6x^5-6x\right)f'\left(x^6-3x^2\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6x^5-6x=0\\ f'\left(x^6-3x^2\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,x=\pm1\\ x^6-3x^2=-2\\ x^6-3x^2=0\\ x^6-3x^2=2\\ x^6-3x^2=a\\ x^6-3x^2=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,x=\pm1\\ x=\pm1\\ x=0,x=\pm\sqrt[4]{3}\\ x=\pm\sqrt{2}\\ x=\pm m,m>\sqrt{2}\\ x=\pm n,\ n>m\end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=x^6-3x^2$

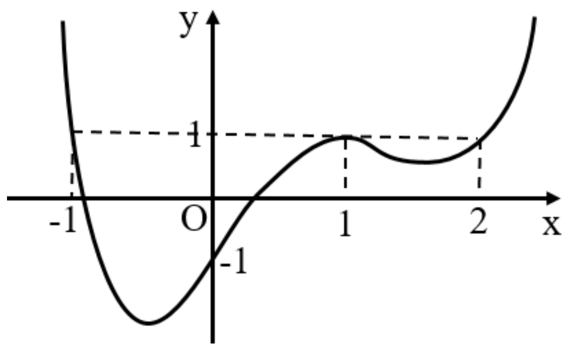
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)=x^6-3x^2$, ta suy ra ±1 là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=-2$ và 0 là nghiệm kép của phương trình $x^6-3x^2=0$. Do đó ±1 và 0 là nghiệm kép của $f'\left(x^6-3x^2\right)$. Do vậy ±1 và 0 là nghiệm bội ba của y'.

Các nghiệm khác ±1 và 0 của y' đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Câu 33: Cho hàm số $f(\mathrm{x})$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Hàm số đạt cực đại tại điểm thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{3}{2};3\right)$ **B.** $(-2;0)$ **C.** $(0;1)$ **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$

Lời giải

Ta có $g'(x)=f'(x)-1; g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	0	−	0	+	

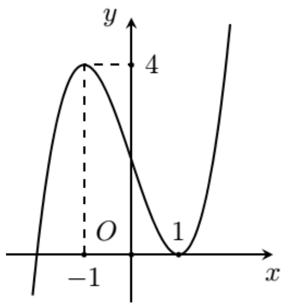
Từ bảng xét dấu nhận thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x=-1 \in (-2;0)$.

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ là.

A. 3 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\left[f(x-2017)-2018x+2019\right]'=0 \Leftrightarrow f'(x-2017)-2018=0 \Leftrightarrow f'(x-2017)=2018$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x-2017)=2018$ có 1 nghiệm đơn duy nhất. Suy ra hàm số $y=f(x-2017)-2018x+2019$ có 1 điểm cực trị.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=2f\left(x\right)+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=5$.

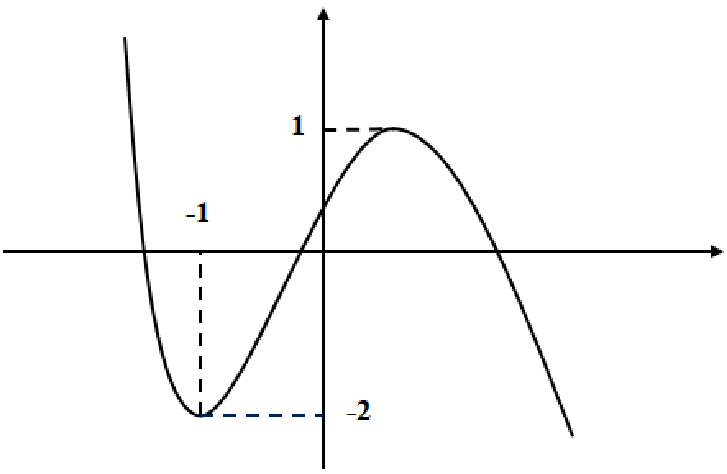
Lời giải

Ta có: $y=2f\left(x\right)+1\Rightarrow\ y'=2f'\left(x\right)$.

Suy ra: Điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(x\right)$ cũng chính là điểm cực tiểu của hàm số $y=2f\left(x\right)+1$.

Vậy: Hàm số $y=2f\left(x\right)+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

Câu 36: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)+2x$ là:



A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2x$ suy ra $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)+2=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=x_0>-1\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có: Trên $\left(-\infty;-1\right)$ thì $f'\left(x\right)>-2\Leftrightarrow f'\left(x\right)+2>0$.

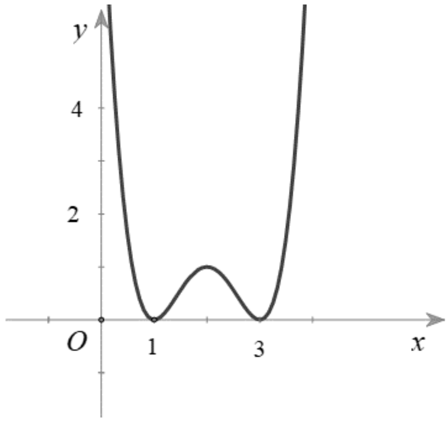
Trên $\left(-1;x_0\right)$ thì $f'\left(x\right)>-2\Leftrightarrow f'\left(x\right)+2>0$.

Trên $\left(x_0;+\infty\right)$ thì $f'\left(x\right)<-2\Leftrightarrow f'\left(x\right)+2<0$.

x	$-\infty$		-1		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↗		↘	

Vậy hàm số $g(x)=f(x)+2x$ có 1 cực trị.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x)=f(x)-\frac{x^3}{3}+2x^2-5x+2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?



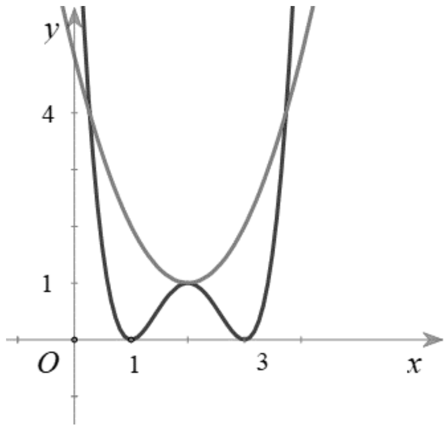
A. 3. **B.** 1. **<u>C</u>.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Có $g'(x)=f'(x)-x^2+4x-5 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2-4x+5$

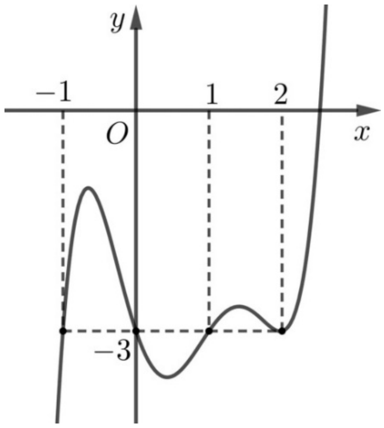
Ta có đồ thị hàm số $y=x^2-4x+5$ và đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới



Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 38: Cho hàm số đa thức $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0)<0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|f(x)+3x\right|$ cóbao nhiêu cực trị?



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x) = f(x) + 3x$

$h'(x) = f'(x) + 3$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$

Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x) = -3$ có 4 nghiệm $\{-1; 0; 1; 2\}$

Ta có bảng biết thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

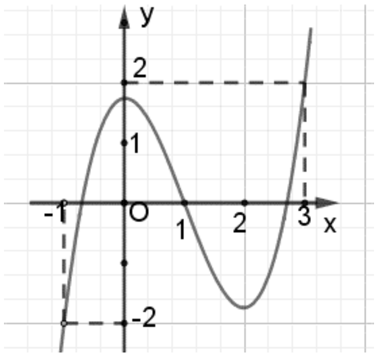
Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < -1;$ và $x_2 > 1$ (do có $f(0) < 0$)

Khi đó ta có

x	$-\infty$		x_1		-1		0		1		x_2		$+\infty$
$g(x) = \lvert h(x) \rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\lvert f(0) \rvert$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có 5 cực trị.

Câu 39: Cho hàm số Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x)=2f(x)-x^2+2x+2019$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y=g(|x|)$ là

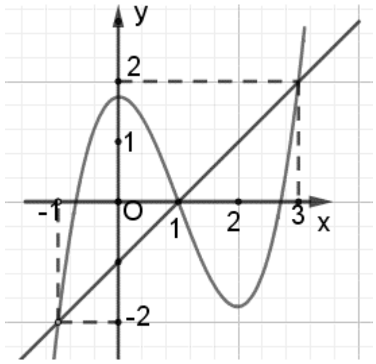
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

* $g'(x)=2f'(x)-2x+2$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$

Đường thẳng $y=x-1$ đi qua các điểm $(-1\,;\,-2)$, $(1\,;0)$, $(3\,;2)$



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y=g'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

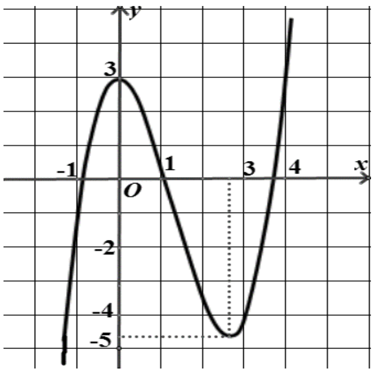
*Đồ thị hàm số $y=g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y=g(|x|)$ như sau

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	

Vậy hàm số $y=g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x) = 3f\left(f(x)\right) + 4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$



A. 2. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $g'(x) = 3f'(x).f'\left(f(x)\right)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x).f'\left(f(x)\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'\left(f(x)\right) = 0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số trên ta thấy:

+ Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x = 0; x = \alpha$ với $\alpha \in (1;3)$.

+ Phương trình $f'\left(f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ f(x) = \alpha \end{array}\right.$.

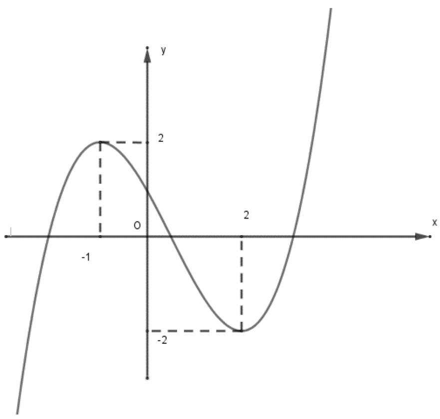
+ Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2 nghiệm trên.

+ Phương trình $f(x) = \alpha$ với $\alpha \in (1;3)$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm.

Do đó hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = \left|\left[f(x)\right]^2 - 4f(x) + 1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=[f(x)]^2-4f(x)+1$.

Khi đó, $g'(x)=2f(x).f'(x)-4f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\,(a>2) \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

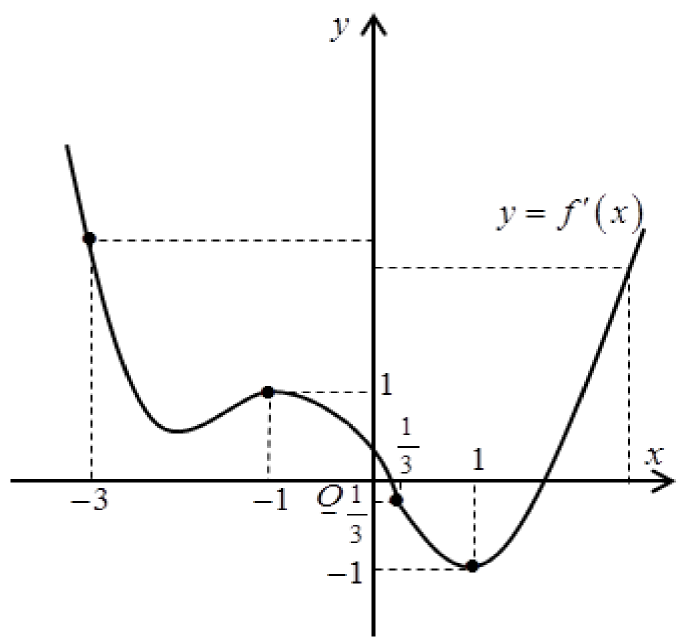
Do đó, ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		a		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-3		13		g(2)<0		$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox.

Vậy đồ thị hàm số $y=h(x)=|g(x)|$ có số cực trị là $3+4=7$.

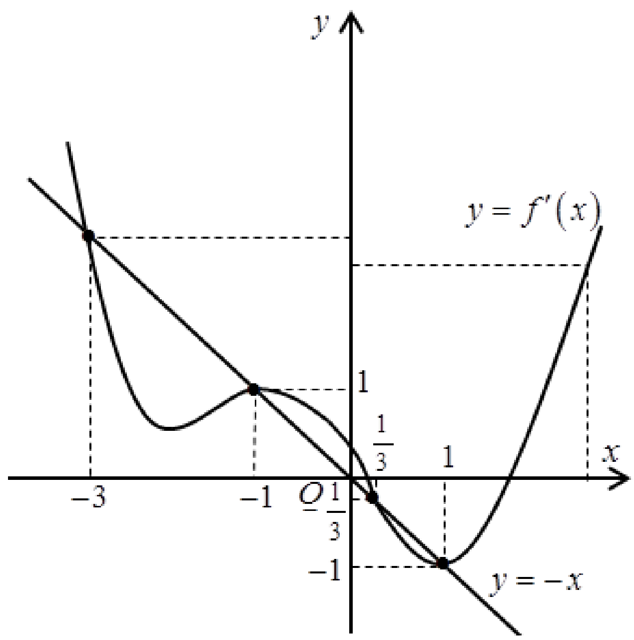
Câu 42: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=2f\left(\dfrac{5\sin x-1}{2}\right)+\dfrac{(5\sin x-1)^2}{4}+3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2\pi)$.



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $g'(x) = 5\cos x f'\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{5}{2}\cos x\left(5\sin x - 1\right)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\cos x f'\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{5}{2}\cos x\left(5\sin x - 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ f'\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) = -\dfrac{5\sin x - 1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = -3 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = -1 \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5\sin x - 1}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ 5\sin x - 1 = -6 \\ 5\sin x - 1 = -2 \\ 5\sin x - 1 = \dfrac{2}{3} \\ 5\sin x - 1 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{5} \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \\ \sin x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\dfrac{1}{5} \\ \sin x = \dfrac{1}{3} \\ \sin x = \dfrac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \pi - arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right) \vee x = 2\pi + arc\sin\left(-\dfrac{1}{5}\right) \\ x = arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right) \vee x = \pi - arc\sin\left(\dfrac{1}{3}\right) \\ x = arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right) \vee x = \pi - arc\sin\left(\dfrac{3}{5}\right) \end{array}\right., \text{(Vì } 0 < x < 2\pi \text{).}$$

Suy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x=\frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hỏi hàm số $y=f\left(x^2-2|x|\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 7 **<u>C</u>.** 9 **D.** 11

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}$.

* $y=h(x)=f\left(|x|^2-2|x|\right)$

$y'=h'(x)=f'\left(|x|^2-2|x|\right).\frac{x}{|x|}.(2|x|-2)$.

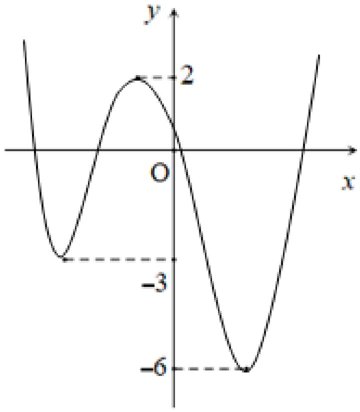
$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\|x|^2-2|x|=0\\|x|^2-2|x|=1\\|x|^2-2|x|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=2\\x=-2\\x=1+\sqrt{2}\\x=-1-\sqrt{2}\\x=1+\sqrt{3}\\x=-1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Ta thấy phương trình $h'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x=0$ mà $x=0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 44: Cho $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12;12]$ để hàm số $g(x)=|2f(x-1)+m|$ có 5 điểm cực trị?



A. 13. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Đặt $h(x)=2f(x-1)+m \Rightarrow g(x)=|h(x)|$.

□ Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y=h(x)$ + số giao điểm của $y=h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y=h(x)$.

□ Hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y=h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

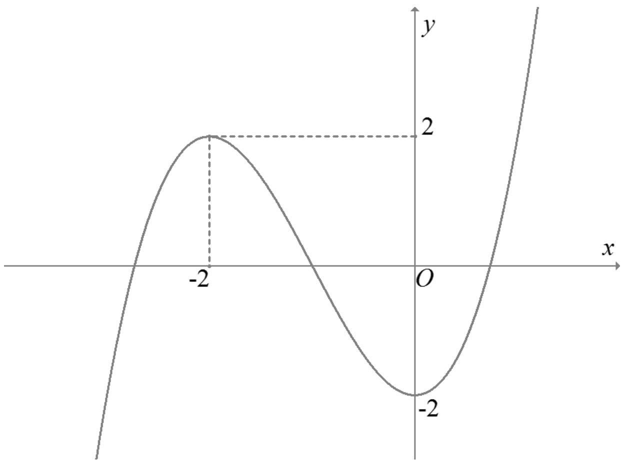
□ Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x-1)=-\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

□ Đồ thị hàm số $y=f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y=f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\frac{m}{2}\ge 2$ hoặc $-6<-\frac{m}{2}\le -3$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le -4 \\ 6\le m<12 \end{array}\right. \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}\,;\,m\in[-12;12]}$ có 15 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ và $a\ne 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(-2x^2+4x)$



A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải.

Chọn D

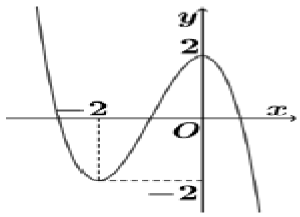
Dựa vào đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị là $x=-2; x=0$.

$g\left(x\right)=f\left(-2x^2+4x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $g'\left(x\right)=\left(-4x+4\right)f'\left(-2x^2+4x\right)$.

$$g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4x+4=0\\-2x^2+4x=0\\-2x^2+4x=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\\\left(x-1\right)^2=0\end{array}\right.$$

Như vậy $g'\left(x\right)$ có 3 nghiệm, trong đó 1 là nghiệm bội 3, 0 và 2 là nghiệm đơn nên $g\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 46: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+x\right)$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$. Khi đó $f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c$.

Theo đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có

$$\begin{cases}f'\left(-2\right)=0\\f'\left(0\right)=0\\f\left(-2\right)=-2\\f\left(0\right)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12a-4b+c=0\\c=0\\-8a+4b-2c+d=-2\\d=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12a-4b=0\\-8a+4b=-4\\c=0\\d=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=-3\\c=0\\d=2\end{cases}.$$

Vậy $f\left(x\right)=-x^3-3x^2+2$.

Khi đó, ta có $g\left(x\right)=f\left(-x^2+x\right)=x^6-3x^5+5x^3-3x^2+2$.

$$g'\left(x\right)=3x\left(2x^4-5x^3+5x-2\right) \Rightarrow g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=\dfrac{1}{2}\\x=1\\x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		0.5		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Suy ra, hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+x\right)$ có ba điểm cực tiểu.

Câu 47: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f\left(x\right)=3x^4-4x^3-12x^2+m$. Ta có $f'\left(x\right)=12x^3-12x^2-24x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

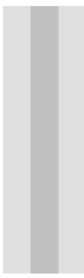
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy với mọi m hàm số $f\left(x\right)$ luôn có ba điểm cực trị.

Do đó để hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $f\left(x\right)=0$ có đúng hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ \begin{cases} m-5\ge 0 \\ m-32<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 5\le m<32 \end{array}\right.$.

Vì m là số nguyên dương cho nên có 27 số m thỏa đề bài.

Câu 48: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại

A. $x = \frac{1}{2}$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

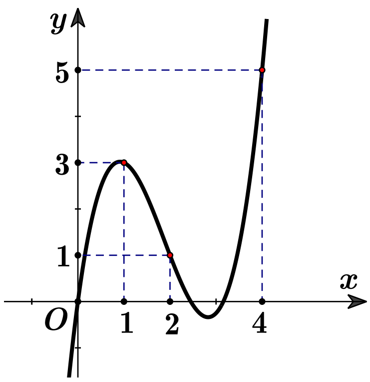
Chọn C

Đặt $t = 2x \Rightarrow y = f(t)$.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(t)$ đạt cực đại tại $\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -1 \\ 2x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = f(2x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f(x^2) - 2x\right|$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) - 2x$.

Ta có: $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x}$(vô nghiệm $\forall x \le 0$).

Đặt $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}, \forall t > 0$.

Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1) = -2(2f'(1) - 2) = -8 < 0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists x_0 \in (0;1) : h'(x_0) = 0$.

Vậy $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x)=0 \Leftrightarrow f(x^2)-2x=0$ (**).

Ta có: $h(0)=f(0)=0 \Rightarrow x=0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h(\sqrt{x_0}).h(2)=(f(x_0)-2\sqrt{x_0})(f(4)-4)<0 \Rightarrow \exists x_1 \in (\sqrt{x_0};2): h(x_1)=0$.

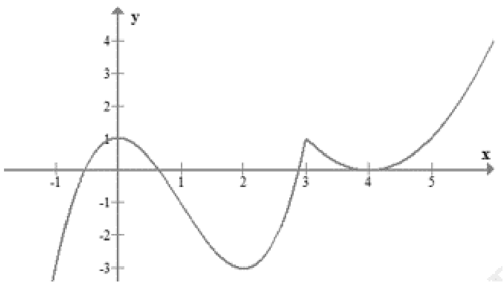
Nên (**) có nghiệm $x_1 \in (\sqrt{x_0};2)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x)=f(x^2)-2x=0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-2x\right|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 50: Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(4;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(2|x|-2)$ bằng



A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

$g(x)=f(2|x|-2) \Rightarrow g'(x)=(2|x|-2)' f'(2|x|-2)=\left(2\sqrt{x^2}-2\right)' f'(2|x|-2)=\dfrac{x}{|x|}f'(2|x|-2)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{|x|}f'(2|x|-2)=0 \Leftrightarrow f'(2|x|-2)=0\,(x\neq 0)$

Dựa vào đồ thị ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

$\rightarrow f'(2|x|-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2|x|-2=0 \\ 2|x|-2=2 \\ 2|x|-2=3 \\ 2|x|-2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x|=1 \\ |x|=2 \\ |x|=\dfrac{5}{2} \\ |x|=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm\dfrac{5}{2} \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		-2		-1		0		1		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0		$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y=f(2|x|-2)$ có 9 điểm cực trị

Câu 51: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-|x|\right)$

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(|x|\right)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f\left(x\right)$ cộng thêm 1.

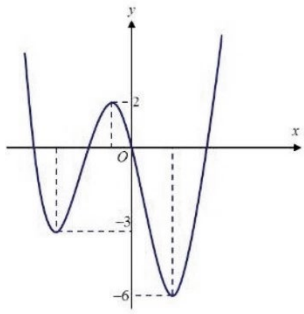
Xét hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)\Rightarrow h'\left(x\right)=\left(2x-1\right)f'\left(x^2-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x^2-x=-1\\x^2-x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $h\left(x\right)=f\left(x^2-x\right)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-|x|\right)=f\left(|x|^2-|x|\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 52: Cho đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g\left(x\right)=\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right| \Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{f'\left(x+2018\right)\left[f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right]}{\left|f\left(x+2018\right)+\frac{1}{3}m^2\right|}$

Phương trình $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x+2018\right)=0\ \ (1) \\ f\left(x+2018\right)=-\dfrac{m^2}{3}\ \ (2) \end{array}\right.$

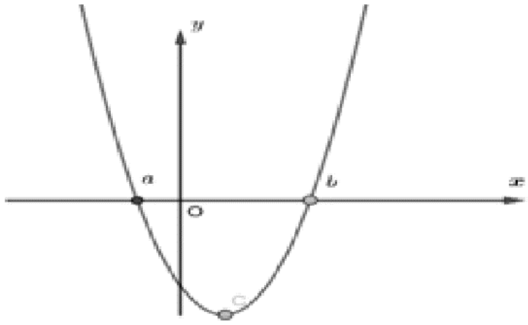
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m^2}{3}>2 \\ -6<-\dfrac{m^2}{3}\le -3 \end{array}\right. \left(m\in\mathbb{N}^*\right) \Leftrightarrow m\in\left\{3;4\right\}$.

Vậy tổng các phần tử là 7.

DẠNG 9. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ $f\left(u\left(x\right)\right)$ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 53: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'\left(x\right)$ như hình vẽ và $f\left(b\right)=1$.Số giá trị nguyên của $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị là



A. 8. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $h(x)=f^2(x)+4f(x)+m$

$\Rightarrow h'(x)=2f'(x)f(x)+4f'(x)$

$\Rightarrow h'(x)=2f'(x)\left[f(x)+2\right]$

$h'(x)=0\Rightarrow 2f'(x)\left[f(x)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a;x=b \\ x=c\,(c\langle a) \end{array}\right.$

Pt có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$có 3 điểm cực trị

Xét $h(x)=0$

$\Leftrightarrow f^2(x)+4f(x)=-m\,(2)$

Để $g(x)=\left|h(x)\right|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT (2) có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

Xét hàm số $t(x)=f^2(x)+4f(x)$

Ta có Bảng biến thiên của $t(x)$:

x	$-\infty$		c		a		b		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$t(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$t(a)$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$
					$y=-m$				

Từ YCBT $\Leftrightarrow t\left(x\right)=-m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ pb

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -m \ge t\left(a\right) > 5 \\ -4 < -m \le 5 \end{array}\right. \\ -5 \le m \le 5; m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le -t\left(a\right) < -5 \\ -4 < -m \le 5 \end{array}\right. \\ -5 \le m \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \le m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \in \left\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\right\}$.

Cách 2:

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $h\left(x\right)=f^2\left(x\right)+4f\left(x\right)+m$

$$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)f\left(x\right)+4f'\left(x\right)$$
$$\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]$$
$$h'\left(x\right)=0 \Rightarrow 2f'\left(x\right)\left[f\left(x\right)+2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a; x=b \\ x=c\left(c\langle a\right) \end{array}\right.$$

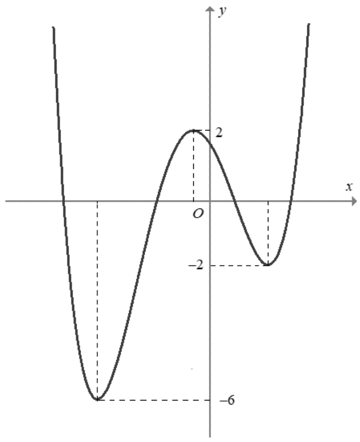
x	$-\infty$		c		a		b		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-4+m$	$\nearrow$	$h(a)$	$\searrow$	$5+m$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ YCBT $g(x)=|h(x)|=|f^2(x)+4f(x)+m|$ có 5 điểm cực trị khi:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}h(a)\le 0\\ -4+m<0\le 5+m\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{Z};m\in[-5;5]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\le f^2(a)+4f(\mathrm{a})<-5\\ -5\le m<4\end{array}\right.\\ m\in\mathbb{Z};m\in[-5;5]\end{cases}$$

$\Leftrightarrow m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3\}$

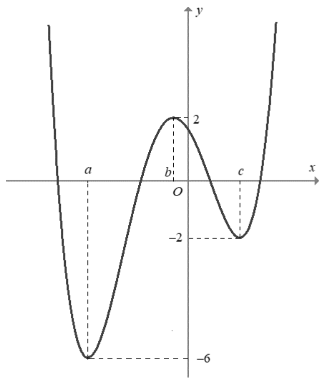
Câu 54: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g(x)=|f(x+2020)+m^2|$ có 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B



Gọi a,b,c $(a<b<c)$ là ba điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.

Khi đó: $f(a)=-6;f(b)=-2;f(c)=2$.

Xét hàm $h(x)=f(x+2020)$ với $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x)=f'(x+2020).(x+2020)'=f'(x+2020)$.

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a-2020\\ x=b-2020\\ x=c-2020\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$		$a-2020$		$b-2020$		$c-2020$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x+2020)+m^2=0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc

$\{a-2020; b-2020; c-2020\}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2=2 \\ m^2=-2 \\ 2<m^2<6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6}<m<-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}<m<\sqrt{6} \end{array}\right. .$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m=2$ và $m=-2$ thì hàm số $g(x)=\left|f(x+2020)+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+2)^4(x+4)^3\left[x^2+2(m+3)x+6m+18\right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ (x+2)^4=0 \\ (x+4)^3=0 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=-4 \\ x^2+2(m+3)x+6m+18=0 \ (*) \end{array}\right.$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4.

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=4m^2+24m+36-24m-72=4m^2-36<0$

$\Leftrightarrow -3<m<3 \Rightarrow m\in\{-2\,;\ -1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\}$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=4m^2-36=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Trong đó $x_1=-4$.

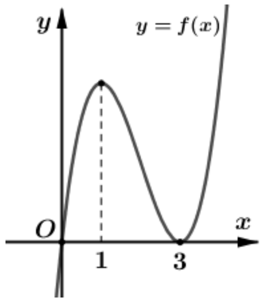
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,\, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right.$.

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1.x_2 = -4.x_2 = 6m + 18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}m - \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\dfrac{3}{2}m - \dfrac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5$.

Vậy $m \in \{-3\,;\, -2\,;\, -1\,;\, 0\,;\, 1\,;\, 2\,;\, 3\,;\, 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = \left|f^2(x) + 2f(x) + 2m\right|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > 1$ **B.** $m \geq 1$ **C.** $m \leq 2$ **D.** $m > 2$

Lời giải

Chọn B

Số cực trị của hàm số $h(x) = \left|f^2(x) + 2f(x) + 2m\right|$ bằng số cực trị của hàm số $y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ cộng với số giao điểm (khác điểm cực trị) của đồ thị hàm số $y(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$ và $y = 0$.

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) + 2f(x) + 2m$

$g'(x) = 2f(x).f'(x) + 2f'(x) = 2f'(x)\left[f(x) + 1\right]$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f'(x) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \\ x = \alpha\,(\alpha < 0) \end{array}\right.$

BBT

x	$-\infty$		α		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+2m$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	$2m$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$. Đáp án B là gần kết quả nhất

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-a)(13x-15)^3$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số $y = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ có 6 điểm cực trị là

A. $\left[-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right] \setminus \left\{0;\frac{15}{13}\right\}$. **B.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right) \setminus \left\{0;\frac{15}{13}\right\}$. **C.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right) \setminus \{0\}$. **D.** $\left(-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right) \setminus \left\{\frac{15}{13}\right\}$.

Lời giải

$$y' = f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right) = \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)' \cdot \left(\frac{5x}{x^2+4}\right)^2 \left(\frac{5x}{x^2+4} - a\right)\left(13\frac{5x}{x^2+4} - 15\right)^3$$

$$= \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} \cdot \frac{25x^2}{(x^2+4)^2}\left(\frac{-ax^2+5x-4a}{x^2+4}\right)\left(\frac{-15x^2+65x-60}{x^2+4}\right)^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 3 \\ x = \frac{4}{3} \\ -ax^2+5x-4a = 0 \quad (1) \end{array}\right. \qquad (x = 0 \text{ là nghiệm kép}).$$

đặt $g(x) = -ax^2+5x-4a$

Ycbt thỏa mãn khi phương trình $y' = 0$ có 6 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 2;0;1;4$. (Nếu $g(0) = 0$ thì $y' = 0$ chỉ có 5 nghiệm bội lẻ).

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 5^2 - 4a.4a > 0 \\ g(2) \neq 0 \\ g(-2) \neq 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(3) \neq 0 \\ g\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq \pm\frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < a < \frac{5}{4} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{15}{13} \end{cases}.$$

Câu 58: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15. **B.** 17. **C.** 16 **D.** 18

Lời giải

Đặt $g\left(x\right)=f\left(x^2-8x+m\right)$

$f'\left(x\right)=\left(x-1\right)^2\left(x^2-2x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(2x-8\right)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right)$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=4 & \\ x^2-8x+m-1=0 & (1)\\ x^2-8x+m=0 & (2)\\ x^2-8x+m-2=0 & (3)\end{array}\right.$$

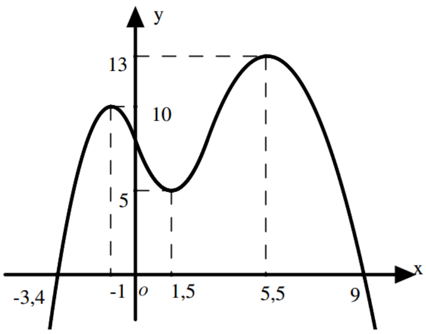
Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $\left(x^2-8x+m-1\right)^2\geq 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $g\left(x\right)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16-m>0\\ 16-m+2>0\\ 16-32+m\neq 0\\ 16-32+m-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<16\\ m<18\\ m\neq 16\\ m\neq 18\end{cases}\Leftrightarrow m<16.$$

m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 59: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x)<0$ với mọi $x\in\left(-\infty;-3,4\right)\cup\left(9;+\infty\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(x)-mx+5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



A. 7. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

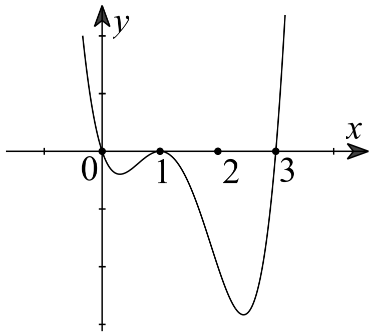
$g'(x)=f'(x)-m$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x)=m.$

Dựa và đồ thị ta có điều kiện $\left[\begin{array}{l}0<m\leq 5\\ 10\leq m<13\end{array}\right.$.

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 60: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

A. $m \in (3;+\infty)$. **B.** $m \in [0;3]$. **C.** $m \in [0;3)$. **D.** $m \in (-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x^2 + m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$y = f(x^2 + m) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + m)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ nên các nghiệm của pt $x^2 = 1 - m$ (nếu có) không làm $f'(x^2 + m)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + m)$ là các điểm nghiệm của hệ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{array}\right.$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \le 0 \\ 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 3$.

Câu 61: Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

A. 18. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$, $x=2$ là nghiệm kép nên khi qua giá trị $x=2$ thì $f'(x)$ không bị đổi dấu.

Đặt $g(x)=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ khi đó $g'(x)=f'(u).(2x-10)$ với $u=x^2-10x+m+9$.

Nên $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-10=0 \\ \left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0 \\ x^2-10x+m+9=1 \\ x^2-10x+m+9=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \left(x^2-10x+m+9-2\right)^2=0 \\ x^2-10x+m+8=0\ (1) \\ x^2-10x+m+6=0\ (2) \end{array}\right.$

Hàm số $y=f\left(x^2-10x+m+9\right)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ h(5) \neq 0 \\ p(5) \neq 0 \end{cases}$, (Với $h(x)=x^2-10x+m+8$ và $p(x)=x^2-10x+m+6$).

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17-m>0 \\ 19-m>0 \\ -17+m \neq 0 \\ -19+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<17$.

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 62: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(x-1)\left(x^2-2(m+1)x+m^2-1\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)=f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y=f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 2 cực trị dương.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=1 \\ x=2. \\ x^2-2(m+1)x+m^2-1=0\quad (*) \end{array}\right.$

Có $x=2$ là nghiệm bội 2, $x=1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x=0$ khi đó $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$

Với $m=1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$ (TM)

Với $m=-1$, có $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ (Loại)

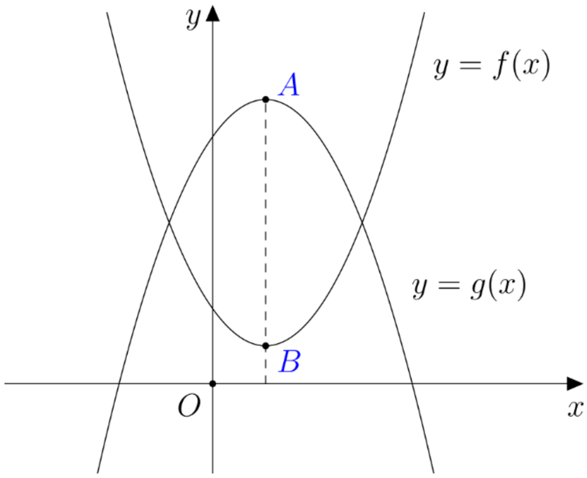
Trường hợp 2: $x^2-2(m+1)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases} m^2-1<0 \\ 1^2-2(m+1).1+m^2-1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m \in (-1;1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m=0$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

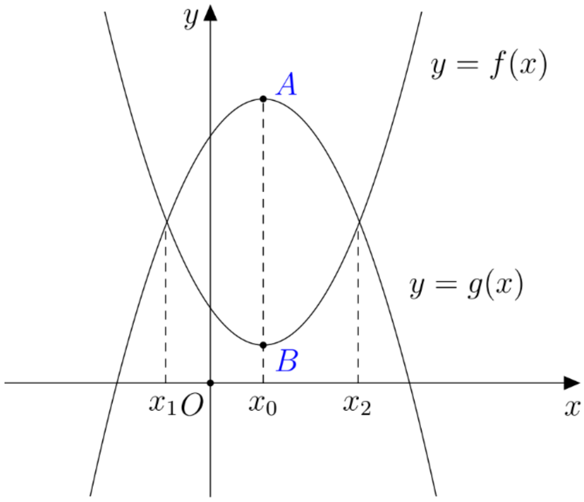
Câu 63: Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5;5)$ để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?



A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B



Đặt $h(x)=f(x)-g(x)$, ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$;

$h(x)=0 \Leftrightarrow x=x_1$ hoặc $x=x_2$ ($x_1<x_0<x_2$);

$h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=-\frac{7}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=h(x)$ là:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)=\left|f(x)-g(x)\right|$ là:

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y=\left|k(x)+m\right|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=k(x)+m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x)+m=0$, mà hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)$, phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m\ge\frac{7}{4}\Leftrightarrow m\le-\frac{7}{4}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, $m\le-\frac{7}{4}$ và $m\in(-5;5)$ nên $m\in\{-4;-3;-2\}$.

Câu 64: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-(2m-1)x^2+(2-m)x+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số

m để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\dfrac{a}{b};c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M=a^2+b^2+c^2$ là

A. $M=40$. **B.** $M=11$. **C.** $M=31$. **D.** $M=45$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-\left(2m-1\right)x^2+\left(2-m\right)x+2$ có đạo hàm là

$y'=f'\left(x\right)=3x^2-2\left(2m-1\right)x+\left(2-m\right)$

- Để hàm số $y=f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 dương.

Tương đương với phương trình $f'\left(x\right)=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=\left(2m-1\right)^2-3\left(2-m\right)>0\\ S=\dfrac{2\left(2m-1\right)}{3}>0\\ P=\dfrac{2-m}{3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-m-5>0\\ m>\dfrac{1}{2}\\ m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\vee m>\dfrac{5}{4}\\ m>\dfrac{1}{2}\\ m<2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{5}{4}<m<2.$$

Suy ra $\begin{cases}a=5\\ b=4\\ c=2\end{cases}\Rightarrow M=a^2+b^2+c^2=45$.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. MỨC ĐỘ VD – VDC -2

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP $f\left[u(x)\right]$ HOẶC $f\left[u(x)\right]+g(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f(x)$ HOẶC $f'(x)$

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- Đạo hàm của hàm số hợp:

$g(x)=f\left[u(x)\right]\Rightarrow g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\ f'\left[u(x)\right]=0\end{array}\right.$$

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$

B1. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với trục hoành

B2: Xét dấu của hàm số $y=f'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên trục hoành trong khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)>0$, $x\in(a;b)$

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành trong khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)<0$, $x\in(a;b)$

- Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(x)+u(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$

B1: Đạo hàm $g'(x)=f'(x)+u'(x)$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-u'(x)$

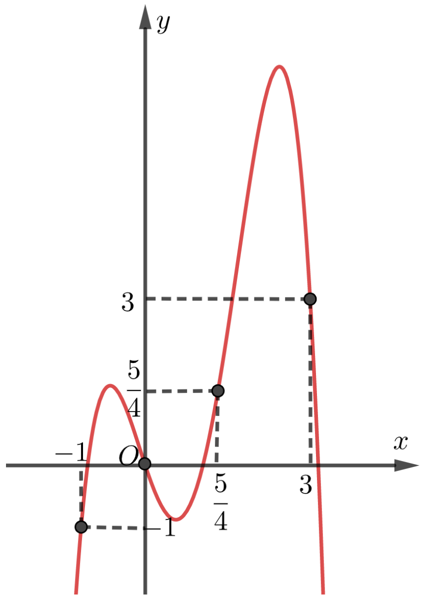
B2. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=-u'(x)$

B3: Xét dấu của hàm số $y=g'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x)>0$, $x\in(a;b)$

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x)<0$, $x\in(a;b)$

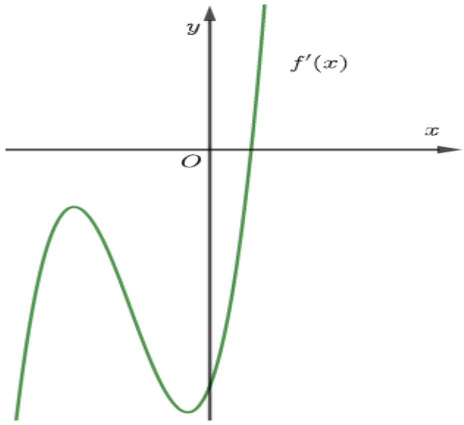
Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $g(x)=2f(x-1)-x^2+2x+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

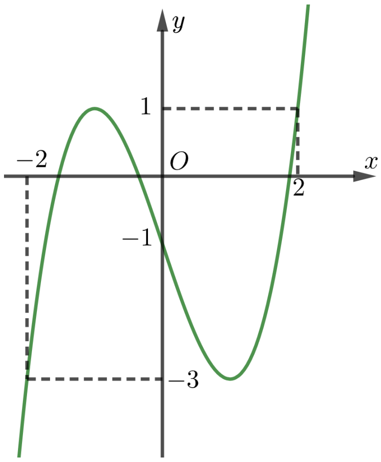
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $h(x)=f(x^3)-6x+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 3: Cho $f(x)$ là liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $h(x)=2f(x^2+x)-(x^2+x)^2+2(x^2+x)+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

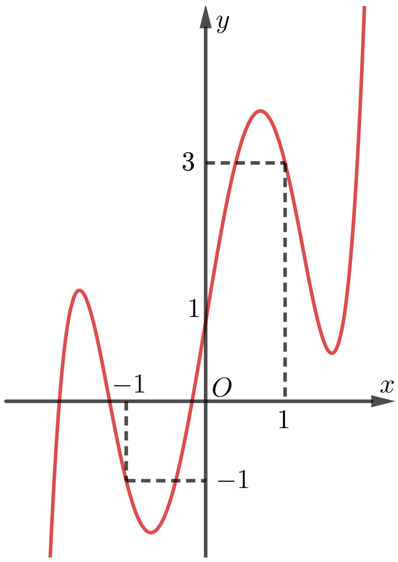
Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(a)$	↘	$f(b)=1$	↗	$+\infty$

Hàm số $h(x)=f^2(x)+4f(x)+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

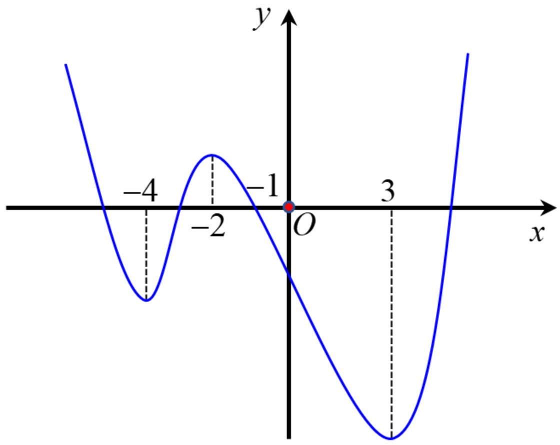
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $g(x)=f(\cos x)-\cos x+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right)$?

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 10.

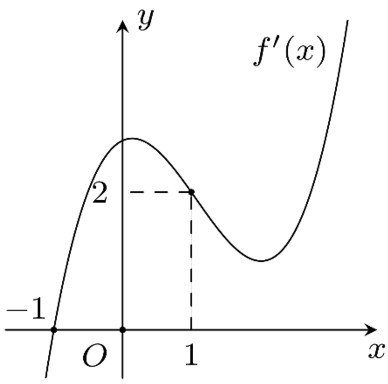
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 7: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Hỏi hàm số $g(x) = f(\sin x - 1) + \dfrac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

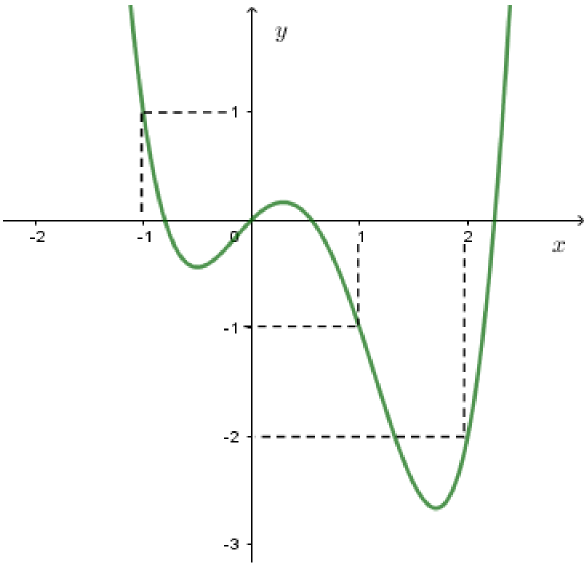
Câu 8: Cho $y = f(x)$ là hàm bậc ba có $f'(0) = -3$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

Hàm số $y = g(x) = f(x^3 - 3x + m) - \dfrac{x^6}{2} + 3x^4 - x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 + 3x - 1$ có bao nhiêu cực trị biết m là giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x + 2}$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

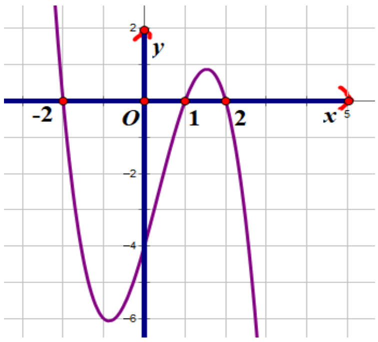
Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x^2-2x)+\dfrac{x^4}{2}-2x^3+2x^2+2021$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

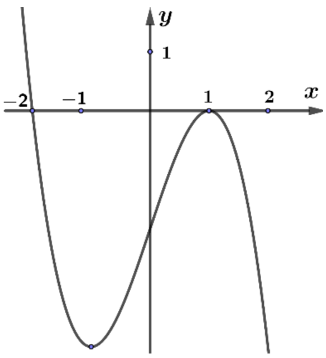
Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ bậc bốn có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(3x-1)$ có đồ thị như hình dưới.



Hàm số $y=f(1-2x)$ có mấy điểm cực đại?

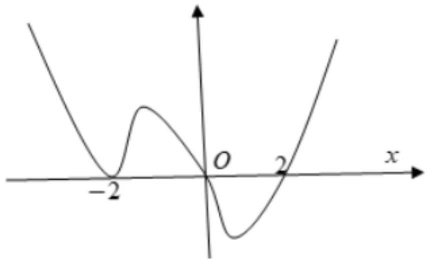
A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ bậc bốn có đồ thị hàm số $y=f'(x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x^2-3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y=f\left(1-x^2\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

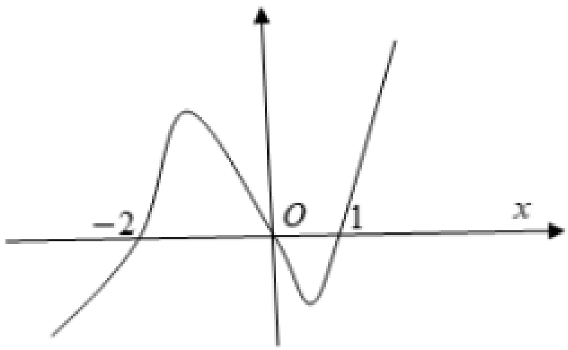
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$. Bảng xét dấu bên dưới là của đạo hàm $f'\left(x-2\right)$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

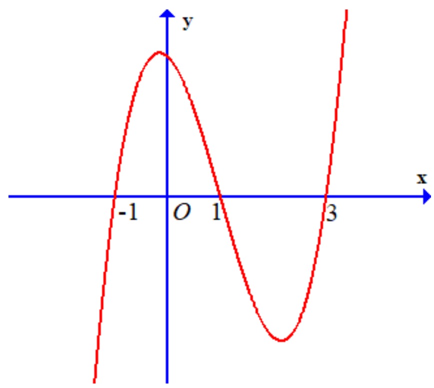
Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(1-x\right)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x-2\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

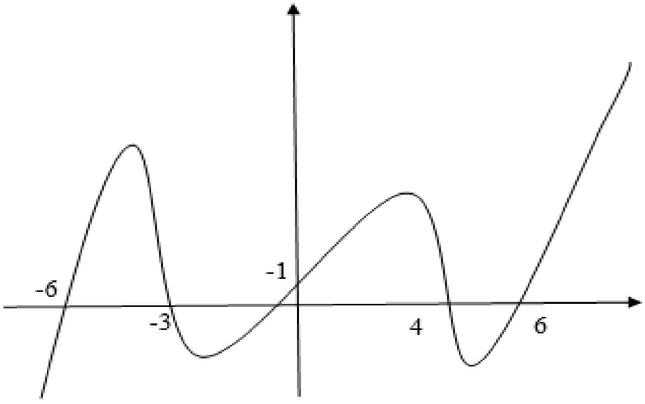
Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x^3+3x-1\right)$.



Hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 4. **B.** 3.
C. 2. **D.** 5.

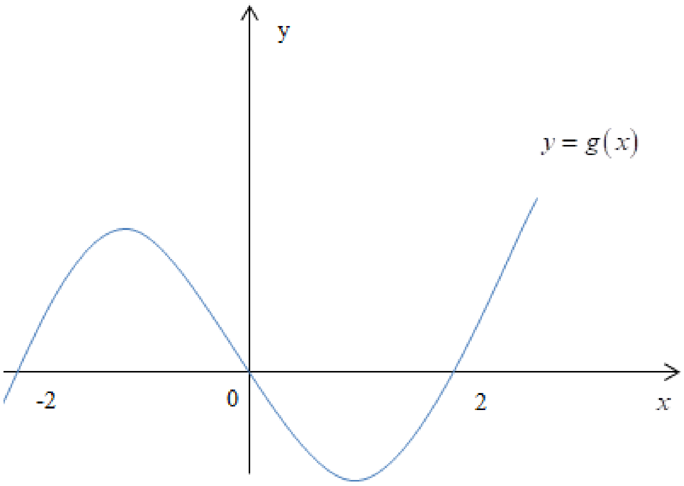
Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(3-x\right)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2|x|+3\right)$ là

A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g\left(x\right)=f'\left(1-x\right)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=\left|f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)\right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

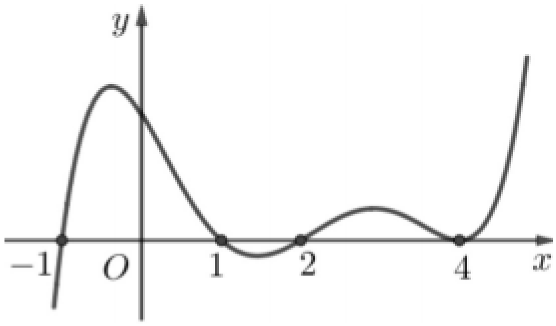
Câu 18: Cho hàm đa thức $y=f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $y=f'\left(x+1\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'\left(x+1\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x^2+|x|+1\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 19: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f\left(2x+5\right)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^3-2\right)$.



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

CHƯƠNG I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. MỨC ĐỘ VD – VDC -2

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP $f\left[u(x)\right]$ HOẶC $f\left[u(x)\right]+g(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f(x)$ HOẶC $f'(x)$

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆ Đạo hàm của hàm số hợp:

$g(x)=f\left[u(x)\right]\Rightarrow g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u'(x)=0\\ f'\left[u(x)\right]=0\end{array}\right.$$

◆ Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$

B1. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với trục hoành

B2: Xét dấu của hàm số $y=f'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên trục hoành trong khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)>0$, $x\in(a;b)$

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành trong khoảng $(a;b)$ thì $f'(x)<0$, $x\in(a;b)$

◆ Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)=f(x)+u(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$

B1: Đạo hàm $g'(x)=f'(x)+u'(x)$. Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-u'(x)$

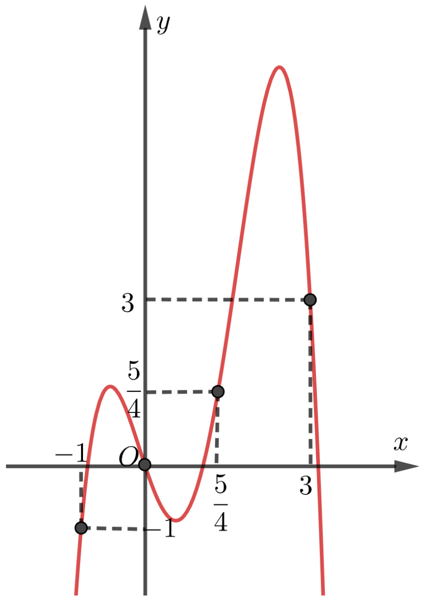
B2. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=-u'(x)$

B3: Xét dấu của hàm số $y=g'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x)>0$, $x\in(a;b)$

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x)<0$, $x\in(a;b)$

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $g(x)=2f(x-1)-x^2+2x+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

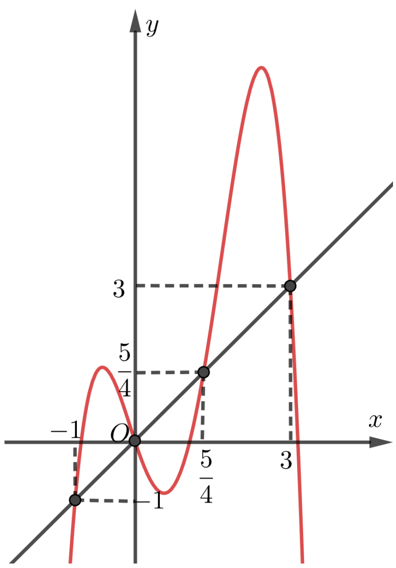
Chọn B

Ta có: $g'(x)=2f'(x-1)-2x+2$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-1)=x-1$.

Đặt $t=x-1$. Khi đó phương trình trở thành $f'(t)=t$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y=f'(t)$ và $y=t$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



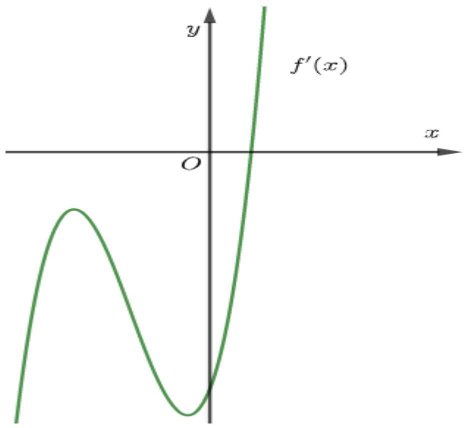
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)=t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=0 \\ t=\frac{5}{4} \\ t=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=-1 \\ x-1=0 \\ x-1=\frac{5}{4} \\ x-1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=\frac{9}{4} \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$\frac{9}{4}$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 4 cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $h(x)=f(x^3)-6x+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$h(x)=f(x^3)-6x+2022 \Rightarrow h'(x)=3x^2 f'(x^3)-6$

Ta có $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3)=\frac{2}{x^2}, (x\neq 0)$ (1)

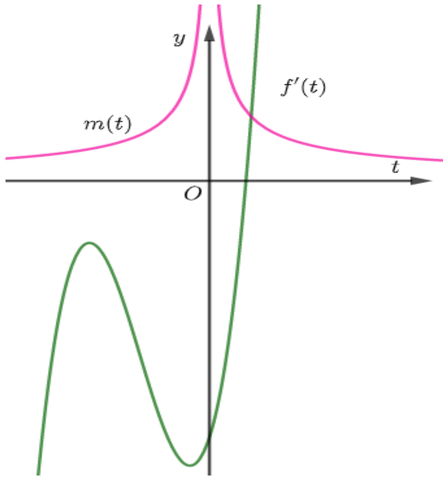
Đặt $t=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$

Từ (1) ta có: $f'(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}$, (2)

Xét $m(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow m'(t)=-\frac{4}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}$

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y=f'(t)$ và $y=m(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}$ trên cùng một hệ trục tọa độ

Lúc này ta có hình vẽ 2 đồ thị như sau



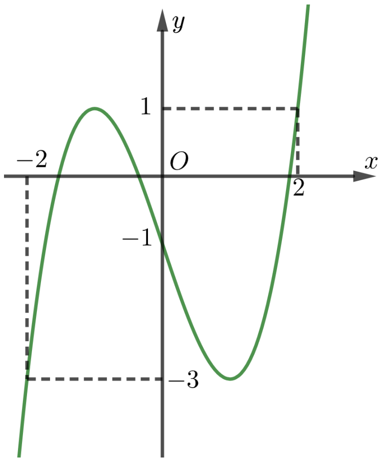
Suy ra pt (2) có 1 nghiệm $t = t_0 > 0 \Rightarrow$ pt (1) có nghiệm $x = \sqrt[3]{t_0} = x_0 > 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $h(x)$ có 1 cực trị.

Câu 3: Cho $f(x)$ là liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $h(x) = 2f(x^2+x) - (x^2+x)^2 + 2(x^2+x) + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

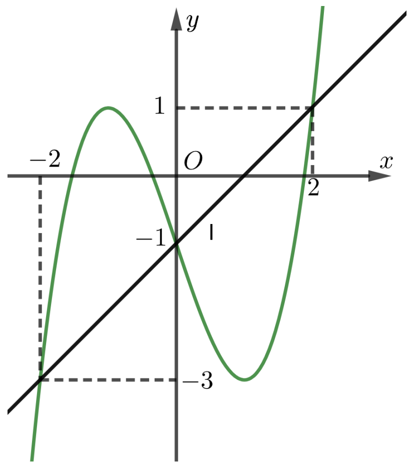
Chọn B

$h'(x) = 2(2x+1)f'(x^2+x) - 2(2x+1)(x^2+x) + 2(2x+1)$.

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ f'(x^2+x) - (x^2+x) + 1 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Đặt $t = x^2 + x$. Khi đó phương trình trở thành $f'(t) - t + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t - 1$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)=t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=0 \\ t=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=2 \\ x^2+x=0 \\ x^2+x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $h(x)$ có 5 cực trị.

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f(b)=1$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $h(x)=f^2(x)+4f(x)+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $h'(x)=2f'(x)f(x)+4f'(x)=2f'(x)\left[f(x)+2\right]$.

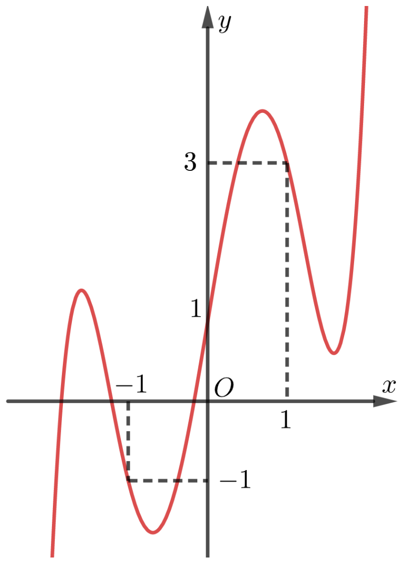
$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2f'(x)\left[f(x)+2\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a;\ x=b \\ x=c\ \ (c<a) \end{array}\right.$.

Suy phương trình $h'(x)=0$ có 3 nghiệm.

x	$-\infty$		c		a		b		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=h(x)$ có 3 cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau:

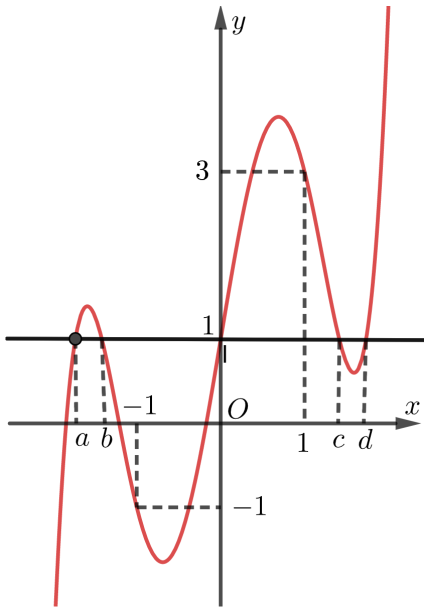


Hàm số $g(x)=f(\cos x)-\cos x+2022$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right)$?

A. 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $g'(x)=-\sin x.f'(\cos x)+\sin x=-\sin x.\left[f'(\cos x)-1\right]$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ f'(\cos x)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=0 & \\ \cos x=0 & \\ \cos x=a\ (a<b<-1) & (\text{pt vô nghiệm})\\ \cos x=b\ \ (b<-1) & (\text{pt vô nghiệm})\\ \cos x=c\ (c>1) & (\text{pt vô nghiệm})\\ \cos x=d\ (d>c>1) & (\text{pt vô nghiệm})\end{array}\right..$$

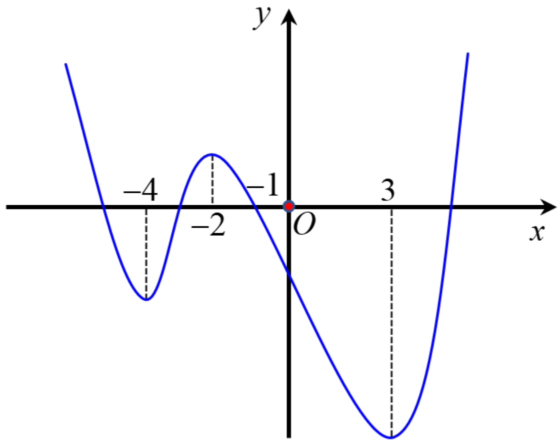
Suy ra phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right)$ là $x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi.$

Bảng xét dấu

x	$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{7\pi}{6}$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ có 3 cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x^2+2x)-x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $g'(x)=(2x+2).f'(x^2+2x)-2x$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^2+2x)=\frac{x}{x+1}$, do $x=-1$ không phải là nghiệm phương trình.

Xét hàm số : $y=f'(x^2+2x)$.

$y'=(2x+2)f''(x^2+2x)$.

Khi đó, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x=-4 \\ x^2+2x=-2 \\ x^2+2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$f'(3)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f'(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

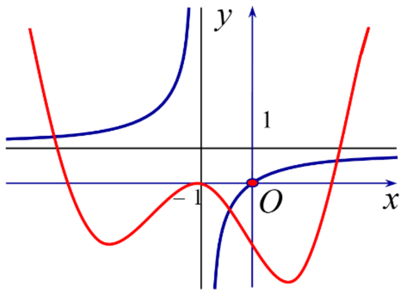
Xét hàm số: $y=\dfrac{x}{x+1}$.

$y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0, \forall x \neq -1$.

Bảng biến thiên :

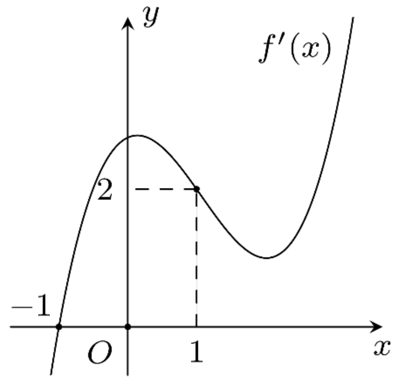
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Số nghiệm của phương trình: $f'\left(x^2+2x\right)=\dfrac{x}{x+1}$ chính bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f'\left(x^2+2x\right)$ và $y=\dfrac{x}{x+1}$.



Từ đồ thị suy ra phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn, nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 7: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Hỏi hàm số $g(x)=f(\sin x-1)+\dfrac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0;2\pi)$?

A. 2. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

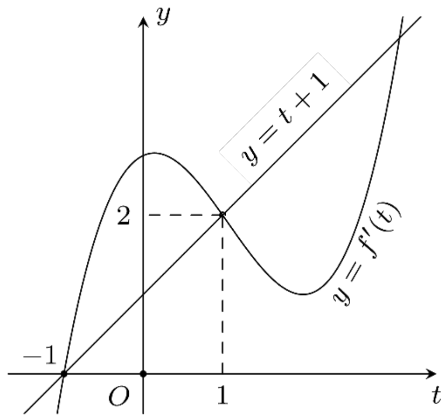
Ta có $g'(x)=\cos x f'(\sin x-1)-\dfrac{\sin 2x}{2}=\cos x\left[f'(\sin x-1)-\sin x\right]$.

Khi đó, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ f'(\sin x-1)-\sin x=0\ \ (*)\end{array}\right.$.

Trên khoảng $(0;2\pi)$ thì $\cos x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{3\pi}{2}\end{array}\right.$.

Đặt $t=\sin x-1$ thì phương trình $(*)$ trở thành $f'(t)=t+1$.

Vẽ đồ thị $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=t+1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oty như hình vẽ sau.



Từ đồ thị ta có $f'(t)=t+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=1\\ t=a,\ (a>1)\end{array}\right.$.

Với $t=1$ thì $\sin x-1=1 \Leftrightarrow \sin x=2$. Phương trình vô nghiệm.

Với $t=a$ thì $\sin x-1=a \Leftrightarrow \sin x=a+1$. Phương trình này vô nghiệm vì $a+1>2$.

Với $t=-1$ thì $\sin x-1=-1 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=\pi$.

Như thế phương trình $g'(x)=0$ có đúng 3 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0;2\pi)$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(0;2\pi)$.

Câu 8: Cho $y=f(x)$ là hàm bậc ba có $f'(0)=-3$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

Hàm số $y=g(x)=f\left(x^3-3x+m\right)-\dfrac{x^6}{2}+3x^4-x^3-\dfrac{9}{2}x^2+3x-1$ có bao nhiêu cực trị biết m là giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x+2}$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x)=k(x+1)(x-1)$.

Mà $f'(0)=-3 \Rightarrow k=3 \Rightarrow f'(x)=3(x-1)(x+1)=3x^2-3$.

Theo bài ra $P=\dfrac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x+2} \Rightarrow \sqrt{3}\sin x-P\cos x=2P$.

Điều kiện P có nghiệm là $(2P)^2 \le P^2+3 \Leftrightarrow -1 \le P \le 1$. Nên $m=1$.

Khi đó $y=g(x)=f\left(x^3-3x+1\right)-\dfrac{x^6}{2}+3x^4-x^3-\dfrac{9}{2}x^2+3x-1$.

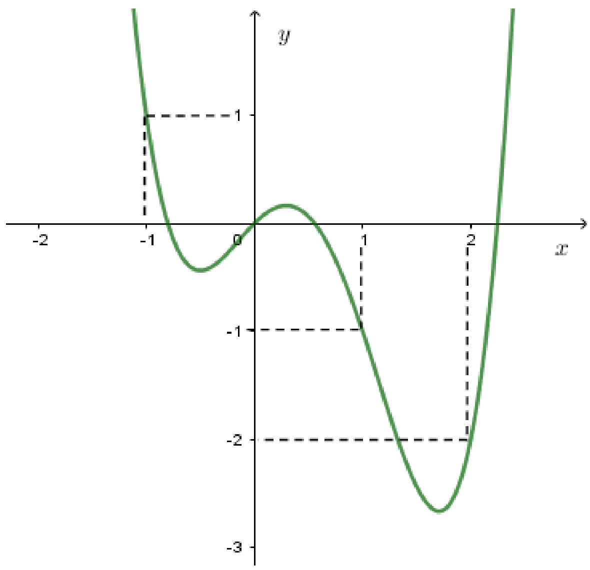
Ta có:

$$\begin{array}{l} g'(x)=\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+1\right)-3x^5+12x^3-3x^2-9x+3 \\ \Leftrightarrow g'(x)=\left(3x^2-3\right)\left[f'\left(x^3-3x+1\right)-\left(x^3-3x+1\right)\right] \\ \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ f'\left(x^3-3x+1\right)=x^3-3x+1 \ (1) \end{array}\right. \end{array}.$$

Đặt $x^3-3x+1=t$ suy ra $(1) \Leftrightarrow f'(t)=t \Leftrightarrow 3t^2-3=t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1+\sqrt{37}}{6} \\ t=\dfrac{1-\sqrt{37}}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 1,76137 \\ x \approx -0,0602 \\ x \approx -1,7011 \\ x \approx 1,21796 \\ x \approx 0,76486 \\ x \approx -1,9828 \end{array}\right.$.

Do đó $g'(x)=0$ có 8 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y=g(x)$ có 8 cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-2x\right)+\dfrac{x^4}{2}-2x^3+2x^2+2021$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

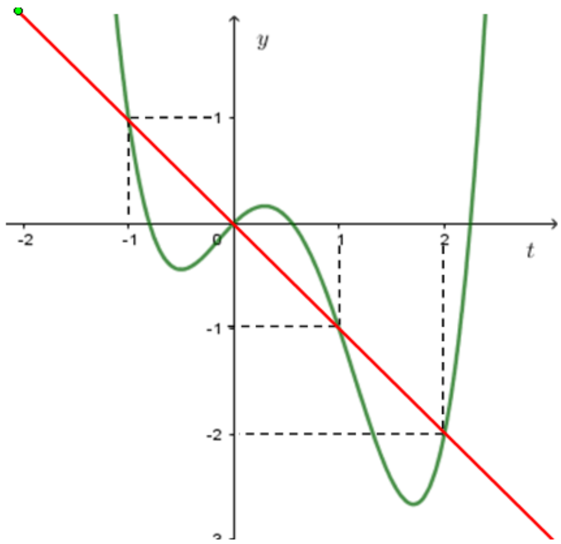
Ta có: $g'\left(x\right)=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x\right)+2x^3-6x^2+4x$.

$=2\left(x-1\right)f'\left(x^2-2x\right)+2\left(x-1\right)\left(x^2-2x\right)$.

$=2\left(x-1\right)\left[f'\left(x^2-2x\right)+\left(x^2-2x\right)\right]$.

Đặt $t=x^2-2x$. Khi đó đồ thị hàm số $f'\left(t\right)$ cắt đường thẳng $y=-t$ tại bốn điểm phân biệt:

$t=-1$, $t=0$, $t=1$, $t=2$.



Suy ra: $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=0 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1 \\ x=0 \vee x=2 \\ x=1\pm\sqrt{2} \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Ta có: $f'\left(x^2-2x\right) > -\left(x^2-2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x>2 \\ 0<x^2-2x<1 \\ x^2-2x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1-\sqrt{3} \vee x>1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{2}<x<0 \vee 2<x<1+\sqrt{2} \\ VN \end{array}\right.$.

Khi đó BBT như sau:

x	$-\infty$		$1-\sqrt{3}$		$1-\sqrt{2}$		0		1		2		$1+\sqrt{2}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f'\left(x^2-2x\right)+\left(x^2-2x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $g(x)$ có bốn điểm cực tiểu.

Cho đồ thị hàm số $f(u(x))$, $f'(u(x))$ hoặc bảng xét dấu của hàm, $f(u(x))$, $f'(u(x))$. Xét cực trị của hàm $f(v(x))$

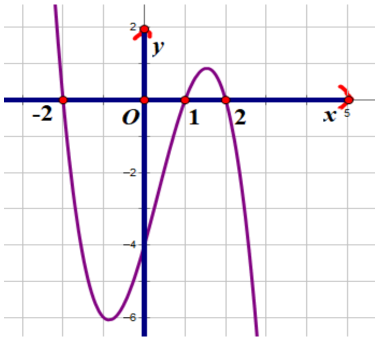
PHƯƠNG PHÁP

- **Đạo hàm xét dấu thông thường.**
- **Chọn hàm đại diện.**
- **Đặt ẩn phụ.**
- **Ghép trục.**

☞ ***Nhắc lại quy tắc về dấu của tích, thương, tổng các biểu thức:***

$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$g(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x).g(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x):g(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f(x)+g(x)$	$+$	$-$	*Chưa biết*	*Chưa biết*

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)$ bậc bốn có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(3x-1)$ có đồ thị như hình dưới.



Hàm số $y = f\left(1-2x\right)$ có mấy điểm cực đại?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Chọn hàm đại diện

Quan sát đồ thị ta thấy $y = f'\left(3x-1\right)$ là hàm số bậc ba có 3 nghiệm $x=-2, x=1, x=2$.

Ta chọn: $f'\left(3x-1\right) = -\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x-2\right)$ [*chưa chính xác 100% nhưng phù hợp trắc nghiệm*]

Đặt $t = 3x-1 \Rightarrow x = \dfrac{t+1}{3}$.

$$\Rightarrow f'\left(t\right) = -\left(\frac{t+1}{3}+2\right)\left(\frac{t+1}{3}-1\right)\left(\frac{t+1}{3}-2\right) = -\frac{1}{27}\left(t+7\right)\left(t-2\right)\left(t-5\right)$$

$$\Rightarrow f'\left(x\right) = -\frac{1}{27}\left(x+7\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$$

Suy ra $f'\left(1-2x\right) = -\dfrac{1}{27}\left(1-2x+7\right)\left(1-2x-2\right)\left(1-2x-5\right) = \dfrac{1}{27}\left(2x-8\right)\left(2x+1\right)\left(2x+4\right)$.

Xét hàm số $y = f\left(1-2x\right)$

$$\Rightarrow y' = \left(1-2x\right)'.f'\left(1-2x\right) = -2.f'\left(1-2x\right) = \frac{-2}{27}\left(2x-8\right)\left(2x+1\right)\left(2x+4\right)$$

Dấu của y'

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta suy ra hàm số $y = f\left(1-2x\right)$ có 2 điểm cực đại.

Cách 2. *Xét dấu đạo hàm* y'.

Xét $y = f\left(1-2x\right)$

$$\Rightarrow y' = \left(1-2x\right)'.f'\left(1-2x\right) = -2.f'\left(1-2x\right) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'\left(1-2x\right) = 0 \quad (1)$$

Theo đồ thị $f'(3x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1=-7 \\ 3x-1=2 \\ 3x-1=5 \end{array}\right. \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-7 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$

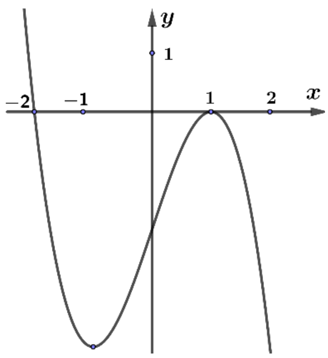
Khi đó: $(1)\left[\begin{array}{l} 1-2x=-7 \\ 1-2x=2 \\ 1-2x=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \end{array}\right.$, các nghiệm trên đều là nghiệm bội lẻ.

Dấu y'

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta suy ra hàm số $y=f(1-2x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ bậc bốn có đồ thị hàm số $y=f'(x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f(x^2-3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4. **B.** 2. **<u>C</u>.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Chọn hàm đại diện .

Hàm số $y=f(x)$ bậc bốn, và quan sát đồ thị ta thấy $y=f'(x+1)$ là hàm số bậc ba có hai nghiệm $x=-2$, $x=1$, trong đó $x=1$ là nghiệm bội chẵn.

Ta chọn: $f'(x+1)=-(x+2)(x-1)^2 \Rightarrow f'(x)=-(x+1)(x-2)^2$ [*nếu tự luận thêm* $k>0$].

Xét $y=f(x^2-3)$.

$\Rightarrow y'=2xf'(x^2-3)=-2x.(x^2-2)(x^2-5)^2=-2x.(x^2-2)(x-\sqrt{5})^2(x+\sqrt{5})^2$.

Ta có bảng xét dấu của hàm số $y=f(x^2-3)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 2. Xét dấu đạo hàm y'

Xét hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$.

◆ Ta có $y = f\left(x^2-3\right) \Rightarrow y' = 2xf'\left(x^2-3\right)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2xf'\left(x^2-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-3\right) = 0 \end{array}\right..$$

◆ Từ đồ thị của $f'\left(x+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = -1 \\ x+1 = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$, trong đó $t = 2$ là nghiệm bội chẵn.

◆ Khi đó $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'\left(x^2-3\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2-3 = -1 \\ x^2-3 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{5} \end{array}\right.$, trong đó $x = \pm\sqrt{5}$ là nghiệm bội chẵn.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 3. Xét dấu đạo hàm y'**.**

Đồ thị $y = f'\left(t+1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1\left(kep\right) \end{array}\right..$

Đặt $t+1 = x^2-3 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t'_x = 2x \\ t = x^2-4 \end{array}\right..$

Khi đó $y' = \left[f\left(x^2-3\right)\right]' = 2x.f'\left(x^2-3\right) = f'\left(t+1\right).t'_x = 2x.f'\left(t+1\right)$.

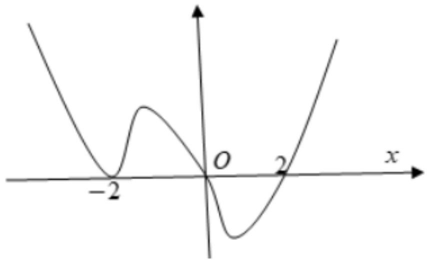
$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4 = -2 \\ x^2-4 = 1 \\ 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{5} \\ x = 0 \end{array}\right..$$

BBT của hàm số $y = f\left(x^2-3\right)$, nhờ $y' = 2x.f'\left(x^2-3\right) = f'\left(t+1\right).t'_x = 2x.f'\left(t+1\right)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y=f(1-x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Chọn hàm đại diện

Quan sát đồ thị ta thấy $y=f'(x-1)$ là hàm số dạng bậc bốn có 3 nghiệm $x=-2, x=0, x=2$, trong đó $x=-2$ là nghiệm bội chẵn.

Ta chọn: $y=f'(x-1)=(x+2)^2x(x-2) \Rightarrow f'(x)=(x+3)^2(x+1)(x-1)$.

Xét $y=f(1-x^2)$.

$\Rightarrow y'=-2x.f'(1-x^2)=-2x(1-x^2+3)^2(1-x^2+1)(1-x^2-1)=-2x^3(4-x^2)^2(x^2-2)$.

Ta có bảng xét dấu của hàm số $y=f(1-x^2)$.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 2. Xét dấu đạo hàm y'.

- Xét $y=f(1-x^2)$ ta có $y'=-2x.f'(1-x^2)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow -2x.f'(1-x^2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(1-x^2)=0 \end{array}\right.$$

- Từ đồ thị hàm số $f'(x-1)$ ta có $f'(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=-3 \\ x-1=-1 \\ x-1=1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$, trong đó $x=-3$ là nghiệm bội chẵn.

◆ Khi đó $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(1-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1-x^2=-3 \\ 1-x^2=-1 \\ 1-x^2=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=0 \end{array}\right.$, trong đó $x=0, x=\pm\sqrt{2}$ nghiệm bội lẻ.

Ta có bảng xét dấu y'.

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
y'		+	0	+	0	−	0	+	0	−	0	−	

Vậy hàm số $y=f(1-x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 13: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Bảng xét dấu bên dưới là của đạo hàm $f'(x-2)$. Hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng xét dấu của $y=f'(x-2)$ ta suy ra bảng xét dấu của hàm số $y=f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

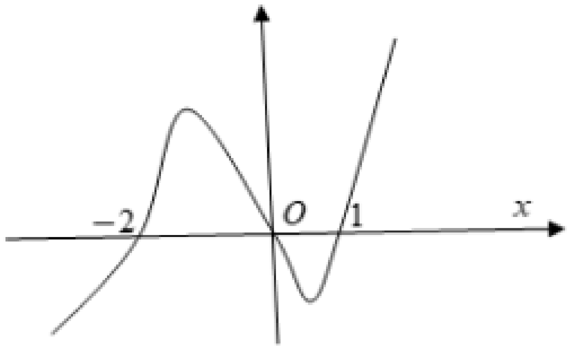
$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
$x+1$		−		−	0	+		+	
$f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$		+	0	−	0	−	0	+	
$g'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Từ bảng xét dấu ta suy ra hàm số $g(x)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(1-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2x-2\right)$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Chọn hàm đại diện

Quan sát đồ thị ta thấy $y=f'(1-x)$ là hàm số bậc ba có 3 nghiệm $x=-2, x=0, x=1$.

Ta chọn: $y=f'(1-x)=(x+2)x(x-1)=-(-x+1-3)(-x+1-1)(-x+1)$

$\Rightarrow f'(x)=-(x-3)(x-1)x$

Xét $y=f\left(x^2-2x-2\right)$

$\Rightarrow y'=(2x-2).f'\left(x^2-2x-2\right)=-(2x-2)\left(x^2-2x-2-3\right)\left(x^2-2x-2-1\right)\left(x^2-2x-2\right)$

$=-(2x-2)\left(x^2-2x-5\right)\left(x^2-2x-3\right)\left(x^2-2x-2\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x-5=0\\x^2-2x-3=0\\x^2-2x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=1\pm\sqrt{6}\\x=-1\\x=3\\x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$, đều là nghiệm bội lẻ.

Vậy hàm số có 7 điểm cực trị.

Cách 2. Xét dấu đạo hàm y'.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(1-x)$ suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\\x=0\end{array}\right.$.

Xét $y=f\left(x^2-2x-2\right)\Rightarrow y'=(2x-2).f'\left(x^2-2x-2\right)$.

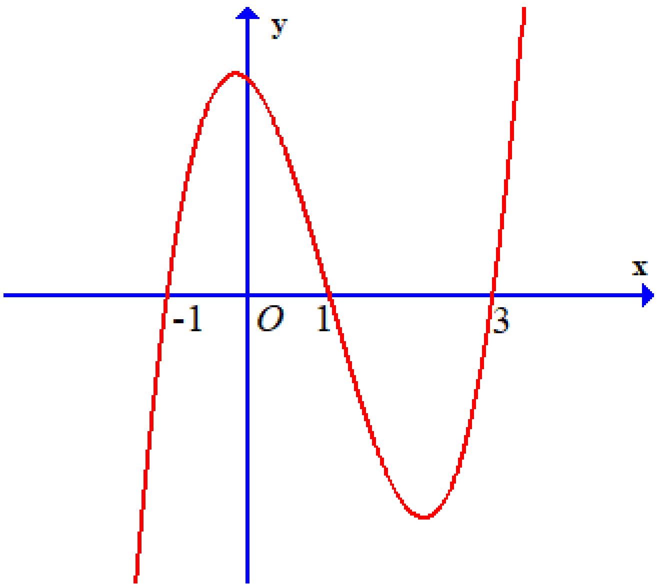
+) $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-2=3 \\ x^2-2x-2=1 \\ x^2-2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-5=0 \\ x^2-2x-3=0 \\ x^2-2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1\pm\sqrt{6} \\ x=-1 \\ x=3 \\ x=1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$, trong đó các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ.

+) Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		-1		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		3		$1+\sqrt{6}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x-2\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x^3+3x-1\right)$.



Hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Xét $y=f\left(x^2-2x\right)$, ta có $y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x\right)$.

Từ đồ thị ta suy ra $f'\left(x^3+3x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Leftrightarrow t=x^3+3x-1=-5 \\ x=1 \Leftrightarrow t=x^3+3x-1=3 \\ x=3 \Leftrightarrow t=x^3+3x-1=35 \end{array}\right.$.

Đặt $t=x^3+3x-1$. Suy ra $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-5 \\ t=3 \\ t=35 \end{array}\right.$.

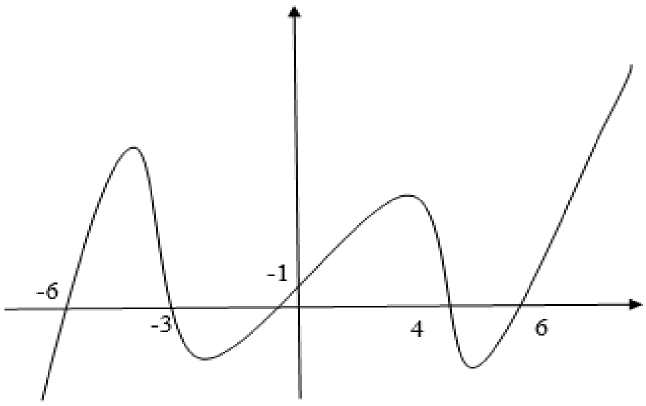
Do đó $f'\left(x^2-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x=-5 \\ x^2-2x=3 \\ x^2-2x=35 \end{array}\right.$. Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x=-5 \\ x^2-2x=3 \\ x^2-2x=35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \\ x=7 \\ x=-5 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-5		-1		1		3		7		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(3-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2-2|x|+3\right)$ là

A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=g(x)=f\left(x^2-2x+3\right)$

Ta có: $y'=(2x-2)f'\left(x^2-2x+3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(x^2-2x+3\right)=0 \end{array}\right.$.

Từ đồ thị ta có $y=f'(3-x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=-3 \\ x=-1 \\ x=4 \\ x=6 \end{array}\right.$

Đặt $t = 3 - x \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = 6 \\ t = 4 \\ t = -1 \\ t = -3 \end{array}\right.$

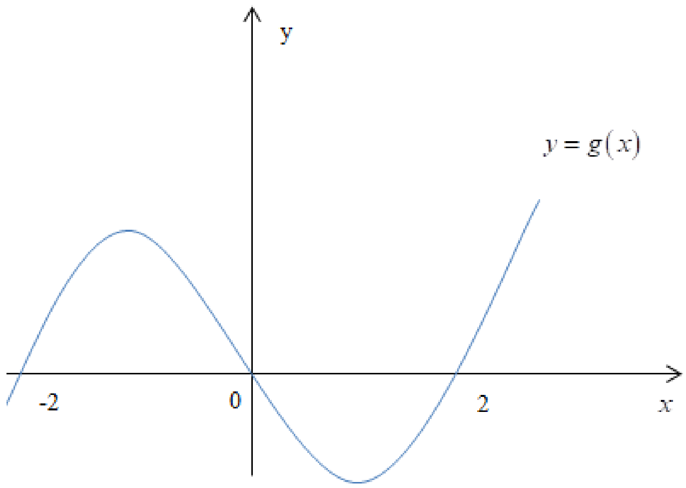
Do đó

$$f'\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 = 9 \\ x^2 - 2x + 3 = 6 \\ x^2 - 2x + 3 = 4 \\ x^2 - 2x + 3 = -1 \\ x^2 - 2x + 3 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 6 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{array}\right..$$

Phương trình $f'\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0$ có 7 nghiệm bội đơn phân biệt suy ra hàm số $y = g(x) = f\left(x^2 - 2x + 3\right)$ có đúng 7 điểm cực trị trong đó có 4 điểm cực trị dương.

Do đó hàm số $y = f\left(x^2 - 2|x| + 3\right)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = f'(1-x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = \left| f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) \right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

• Từ đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ ta có:

$f'(1-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Đặt $t = 1 - x$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

• Xét $h(x)=f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$ với mọi $x\neq 2$

$\Rightarrow h'(x)=\dfrac{-1}{(x-2)^2}f'\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x-2}=-1\\ \dfrac{x-1}{x-2}=1\\ \dfrac{x-1}{x-2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right..$$

• Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		+		-	||	+		-	
$h(x)$		↗		↘	||	↗		↘	

Suy ra đồ thị hàm số $y=h(x)$ có 2 điểm cực trị.

• Ta thấy đường thẳng $y=0$ cắt đồ thị $y=h(x)$ tại nhiều nhất 4 điểm. Vậy hàm số $y=|h(x)|=\left|f\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)\right|$ có tối đa 6 điểm cực trị.

Câu 18: Cho hàm đa thức $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $y=f'(x+1)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x+1)$		$-$	0	+	0	$-$	0	+	

Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(x^2+|x|+1\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng xét dấu của $f'(x+1)$ ta có:

$$f'(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.. \text{ Đặt } t=x+1 \text{ ta có } f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\\ t=2\end{array}\right..$$

Mặt khác ta có: $g(x)=f\left(x^2+x+1\right)\Rightarrow g'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x+1\right)=0$

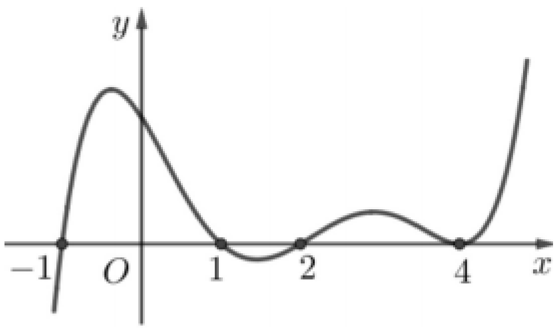
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ x^2+x+1=0 \\ x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biên thiên sau:

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	|	$-$		$+$	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	|	↘		↗	
$g(\|x\|)$		↘				↗			|	↘		↗	

Vì $y=g(|x|)=f\left(x^2+|x|+1\right)$ và $g(x)=f\left(x^2+x+1\right)$ đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số $y=f\left(x^2+|x|+1\right)$ có một điểm cực đại.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f(2x+5)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^3-2\right)$.



A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$$y'=3x^2f'\left(x^3-2\right)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0\,(\text{loại}) \\ f'\left(x^3-2\right)=0\,(1) \end{array}\right.$$

Ta có $f'\left(2x+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=4\left(\text{loại}\right) \end{array}\right.$. Đặt $t=2x+5$. Suy ra $f'\left(t\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=7 \\ t=9 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left(1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-2=3 \\ x^3-2=7 \\ x^3-2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3=5 \\ x^3=9 \\ x^3=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{5} \\ x=\sqrt[3]{9} \\ x=\sqrt[3]{11} \end{array}\right.$$

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.