

Sở giáo dục và đào tạo Hà Nội

Trường Phùng Khắc Khoan

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG

Môn : Toán- Khối: 11 Năm học 2018-2019

Thời gian: 150 phút (Đề có 01 trang)

=====

Câu 1 (4 điểm)

1 - Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + |\cos x + \sin x| = 1$ trên $(0; 2\pi)$.

2 - Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.

Câu 2 (6 điểm)

1 - Cho n là số dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$.

Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton $P = \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x} \right)^n$.

2 - Một tổ gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác suất để mỗi nhóm có một nữ.

3 - An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn có tối đa 5 séc , người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An thắng mỗi séc là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất để An thắng chung cuộc .

Câu 3 (4 điểm)

1- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-2;3)$, $A'(1;5)$ và $B(5;-3)$, $B'(7;-2)$. Phép quay tâm $I(x;y)$ biến A thành A' và B thành B' , tính $x+y$.

2- Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Một đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đoạn AB lần lượt tại C và D . Đường thẳng CD cắt $(O;R)$ tại I . Tính độ dài đoạn AI .

Câu 4 (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC . Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng $(SBC), (SAC), (SAB)$ lần lượt tại A', B', C' .

a) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} = \frac{dt(MBC)}{dt(ABC)}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$ khi M di động trong tam giác ABC

c) Tìm vị trí của M trong tam giác ABC để $\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (2 điểm) Cho a, b, c là ba hằng số và (u_n) là dãy số được xác định bởi công thức:

$u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $a+b+c=0$.

-----HẾT-----

LỚP 11 (2018- 2019)

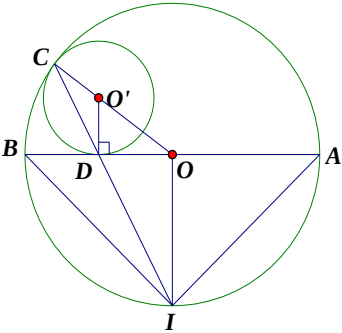
Câu 1	Nội dung	Thang điểm
Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sin x \cos x + \cos x + \sin x = 1$ trên $(0; 2\pi)$		
Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right \Rightarrow t \in [0; \sqrt{2}]$.		
$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow (3) \Rightarrow \frac{t^2 - 1}{2} + t = 1 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3(l) \end{cases}$		
Với $t = 1: \sqrt{2} \left \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$		
$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$		
Suy ra phương trình có 3 nghiệm trên $(0; 2\pi)$ là $x = \frac{\pi}{2}; x = \pi; x = \frac{3\pi}{2}$		
Vậy tổng 3 nghiệm là $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3\pi}{2} = 3\pi$.		
2 - Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số nhân: $x^3 - 7x^2 + 2(m^2 + 6m)x - 8 = 0$.		
+ Điều kiện cần: Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số nhân. Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 x_2 x_3 = 8$. Theo tính chất của cấp số nhân, ta có $x_1 x_3 = x_2^2$. Suy ra ta có $x_2^3 = 8 \Leftrightarrow x_2 = 2$. + Điều kiện đủ: Với $m=1$ và $m=7$ thì $m^2 + 6m = 7$ nên ta có phương trình $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$. Giải phương trình này, ta được các nghiệm là 1, 2, 4. Hiển nhiên ba nghiệm này lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Vậy, $m=1$ và $m=-7$ là các giá trị cần tìm.		

Câu 2	1 - Cho n là số dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton $P = \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$	
2 điểm	Điều kiện $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Ta có $5C_n^{n-1} = C_n^3 \Leftrightarrow \frac{5.n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \Leftrightarrow \frac{5}{(n-3)!(n-2)(n-1)} = \frac{1}{6.(n-3)!}$ $\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7(TM) \\ n = -4(L) \end{cases}$ Với $n = 7$ ta có $P = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)^7$ Số hạng thứ $k+1$ trong khai triển là $T_{k+1} = \frac{(-1)^k}{2^{7-k}} \cdot C_7^k \cdot x^{14-3k}$ Suy ra $14 - 3k = 5 \Leftrightarrow k = 3$ Vậy số hạng chứa x^5 trong khai triển là $T_4 = -\frac{35}{16}x^5$.	1,0 1,0

	2 - Một tổ gồm 9 em, trong đó có 3 nữ được chia thành 3 nhóm đều nhau. Tính xác suất để mỗi nhóm có một nữ.	
2 điểm	Bước 1: Tìm số phần tử không gian mẫu. Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 9 em đưa vào nhóm thứ nhất có số khả năng xảy ra là C_9^3 Chọn ngẫu nhiên 3 em trong 6 em đưa vào nhóm thứ hai có số khả năng xảy ra là C_6^3. Còn 3 em đưa vào nhóm còn lại thì số khả năng xảy ra là 1 cách. Vậy $\Omega = C_9^3 C_6^3 \cdot 1 = 1680$ Bước 2: Tìm số kết quả thuận lợi cho A. Phân 3 nữ vào 3 nhóm trên có $3!$ cách. Phân 6 nam vào 3 nhóm theo cách như trên có $C_6^2 C_4^2 \cdot 1$ cách khác nhau. $\Rightarrow \Omega_A = 3! \cdot C_6^2 C_4^2 \cdot 1 = 540$. Bước 3: Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{540}{1680} = \frac{27}{84}$.	1,0 1,0

	3-An và Bình thi đấu với nhau một trận bóng bàn có 5 séc , người nào thắng trước 3 séc sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất An thắng mỗi séc là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất An thắng chung cuộc	
--	---	--

2 điểm	Giả sử số séc trong trận đấu giữa An và Bình là x. Dễ dàng nhận thấy $3 \leq x \leq 5$. Ta xét các trường hợp: TH1: Trận đấu có 3 séc $\Rightarrow$ An thắng cả 3 séc. Xác suất thắng trong trường hợp này là: $P_1 = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064$ TH2: Trận đấu có 4 séc $\Rightarrow$ An thua 1 trong 3 séc: 1, 2 hoặc 3 và thắng séc thứ 4. Số cách chọn 1 séc để An thua là: C_3^1 (Chú ý xác suất để An thua trong 1 séc là 0,6.) $\Rightarrow P_2 = C_3^1 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6 = 0,1152$ TH3: Trận đấu có 5 séc $\Rightarrow$ An thua 2 séc và thắng ở séc thứ 5. Số cách chọn 2 trong 4 séc đầu để An thua là C_4^2 cách. $\Rightarrow P_3 = C_4^2 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,13824$ Như vậy xác suất để An thắng chung cuộc là: $P = P_1 + P_2 + P_3 = 0,31744$	1,0 1,0
	1-Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-2;3), A'(1;5)$ và $B(5;-3), B'(7;-2)$. Phép quay tâm $I(x;y)$ biến A thành A' và B thành B', tính $x+y$	
2 điểm	$Q_{(O,\alpha)}(A) = A' \Rightarrow IA = IA' \quad (1) \quad Q_{(O,\alpha)}(B) = B' \Rightarrow IB = IB' \quad (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(-2-x)^2 + (3-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (5-y)^2} \\ \sqrt{(5-x)^2 + (-3-y)^2} = \sqrt{(7-x)^2 + (-2-y)^2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=13 \\ 4x+12y=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{25}{2} \\ y=-\frac{31}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y=-3$	1,0 1,0

	Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) và đoạn AB lần lượt tại C và D. Đường thẳng CD cắt $(O; R)$ tại I. Tính độ dài đoạn AI.	
2 điểm	 Ta có: $V_{\left(C, \frac{R'}{R}\right)}(O) = O' \Leftrightarrow CO' = \frac{R'}{R}CO$ (1) $V_{\left(C, \frac{R'}{R}\right)}(I) = D \Leftrightarrow CD = \frac{R'}{R}CI$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{CD'}{CD} = \frac{CO}{CI} \Rightarrow OI \in O'D \Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow I$ là điểm chính giữa của cung AB.	1,0 1,0

Câu 4	Cho hình chóp $S.ABC$, M là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với SA, SB, SC cắt các mặt phẳng $(SBC), (SAC), (SAB)$ lần lượt tại A', B', C'. a) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} = \frac{dt(MBC)}{dt(ABC)}$ b) Chứng minh rằng $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$ khi M di động trong tam giác ABC? c) $\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất. Khi đó vị trí của M trong tam giác ABC là:	
2 điểm	a) Do $MA' \parallel SA$ nên bốn điểm này nằm trong cùng mặt phẳng. Giả sử E là giao điểm của mặt phẳng này với BC. Khi đó A, M, E thẳng hàng và ta có: $\frac{MA'}{SA} = \frac{ME}{EA} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$. b) Tương tự ta có: $\frac{MB'}{SB} = \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \frac{MC'}{SC} = \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$. Vậy $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} = 1$. Vậy đáp án đúng là . c) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $\frac{MA'}{SA} + \frac{MB'}{SB} + \frac{MC'}{SC} \geq 3\sqrt{\frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC}} \Rightarrow \frac{MA'}{SA} \cdot \frac{MB'}{SB} \cdot \frac{MC'}{SC} \leq \frac{1}{27}$ Đều bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{MA'}{SA} = \frac{MB'}{SB} = \frac{MC'}{SC} \Rightarrow S_{MAC} = S_{MAB} = S_{MBC}$. Điều này chỉ xảy ra khi M là trọng tâm tam giác ABC. Vậy đáp án đúng là B.	0,5 0,5 1,0

Câu 5 (2 điểm)

Cho a, b, c là ba hằng số và (u_n) là dãy số được xác định bởi công thức: $u_n = a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} + c\sqrt{n+3} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*).$ Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $a+b+c=0$.	2,0 đ
Đặt $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n+1}} = a + b\sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + c\sqrt{\frac{n+3}{n+1}} \Rightarrow v_n \rightarrow a+b+c$ khi $n \rightarrow +\infty$ Ta có: $u_n = v_n \sqrt{n+1}$	0,5 0,5
cho nên: nếu $a+b+c \neq 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n (= \infty) \neq 0$.	0,5
Ngược lại nếu $a+b+c=0 \Rightarrow a = -b-c$ thì khi $n \rightarrow +\infty$ ta có $u_n = b(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) + c(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) = \frac{b}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} + \frac{2c}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} \rightarrow 0$	0,5