CHUYÊN ĐỀ

TÍNH GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ
KHI CHO TRƯỚC CÁC TÍCH PHÂN LIÊN QUAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tính chất nguyên hàm, tích phân thường sử dụng

1. $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$ 2. $\int u\mathrm{d}v = uv-\int v\mathrm{d}u$ 3. $\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u$

4. $\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$.

Tổng quát: $f(x)\ge 0 \forall x\in[a;b], \int\limits_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x)=0, \forall x\in[a;b]$

2. Nhị thức Niuton

$(x+y)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}y+...+C_n^kx^{n-k}y^k+...+C_n^ny^n$

Lưu ý:

B. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$

Lời giải

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x = \int\frac{2}{2x-1}\mathrm{d}x = \ln|2x-1|+C$. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=\frac{1}{2}$

Nếu $x>\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\ln(2x-1)+C$ mà $f(1)=2\Rightarrow C=2$. Vậy $f(x)=\ln(2x-1)+2$ khi $x>\frac{1}{2}$

Nếu $x<\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\ln(1-2x)+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$. Vậy $f(x)=\ln(1-2x)+1$ khi $x<\frac{1}{2}$

Do đó $f(-1)+f(3)=\ln 3+1+\ln 5+2=\ln 15+3$.

Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ và thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết rằng $f(-3)+f(3)=0$. Tính $T=f(2)+f(0)+f(-4)$.

Lời giải

Ta có:

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

Do đó: $f(-3)+f(3)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\ln 2+C\right)+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+C\right)=0 \Leftrightarrow C=0$.

Như vậy: $f(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

$f(2)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-1}{2+1}\right|=-\frac{1}{2}\ln 3$; $f(0)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right|=0$; $f(-4)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-4-1}{-4+1}\right|=\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)$.

Từ đó: $T=f(2)+f(0)+f(-4)=-\frac{1}{2}\ln 3+0+\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 5-\ln 3$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 \text{ khi } x<-1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 \text{ khi } -1<x<1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3 \text{ khi } x>1\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}f(-2)+f(2)=0\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ln 3+C_1+\ln\frac{1}{3}+C_3=0\\ \ln 3+C_2+\ln\frac{1}{3}+C_2=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_1+C_3=0\\ C_2=1\end{cases}$

Do đó $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+C_1+C_2+\ln\frac{3}{5}+C_3=\ln\frac{6}{5}+1$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln(|x-1|)+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2017$, $f(2)=2018$ nên $\begin{cases}f(x)=\ln(|x-1|)+2017 & \text{khi } x<1\\ f(x)=\ln(|x-1|)+2018 & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Do đó $S=f(3)-f(-1)=\ln 2+2018-\ln 2-2017=1$.

Bài 5. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$, $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Tính $f(2018)$.

Lời giải

Ta có:

$f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$.

Mặt khác ta lại có $f(1)=1$ nên $1=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}+C} \Rightarrow C=-\frac{4}{3}$.

Vậy $f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-\frac{4}{3}} \Rightarrow f(2018)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{6055}-\frac{4}{3}}$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Tính tổng $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2018)$.

Lời giải

Ta có :

$$f'(x)=(2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+1)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f^2(x)}=x^2+x+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2+x+C}.$$

Mặt khác theo giả thiết ta lại có $f(1)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{C+2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow C=0$.

Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

Khi đó $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2018)$

$$=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2018}=\frac{1}{2019}-1=-\frac{2018}{2019}.$$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2018$. Tính giá trị $f(1)$.

Lời giải

Ta có:

$$f'(x)-2018f(x)=2018.x^{2017}.e^{2018x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}=2018.x^{2017}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 2018.x^{2017}dx \quad (1)$$

Xét tích phân $I=\int_0^1 \frac{f'(x)-2018.f(x)}{e^{2018x}}dx=\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx-\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$

Xét $I_1=\int_0^1 2018.f(x).e^{-2018x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=2018.e^{-2018x}dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=-e^{-2018x}\end{cases}$.

Do đó $I_1=f(x).\left(-e^{-2018x}\right)\Big|_0^1+\int_0^1 f'(x).e^{-2018x}dx \Rightarrow I=f(1).e^{-2018x}-2018$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(1).e^{-2018x}-2018=x^{2018}\Big|_0^1 \Rightarrow f(1)=2019.e^{2018}$.

Bài 8. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục, dương trên $\mathbb{R}$; thỏa mãn $f(0)=1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x}{x^2+1}$.

Tính $f\left(\sqrt{2018}\right)$.

Lời giải

Ta có $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1} \Leftrightarrow \ln(f(x))=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

Mặt khác $f(0)=1 \Leftrightarrow C=0$. Do đó $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Vậy $f\left(\sqrt{2018}\right)=\sqrt{2019}$.

Bài 9. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^1 \left[2f(x)+3f(1-x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow A+B=C$.

Tính: $C=\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sin t$ suy ra $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

Vậy: $C=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$.

Tính: $B=\int\limits_0^1 3f(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=-1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Vậy: $B=\int\limits_0^1 3f(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 3f(x)\,\mathrm{d}x$.

Do đó: $\int\limits_0^1\left[2f(x)+3f(x)\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow 5\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$.

Tính tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{2}.$$

Do đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2}=0$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

Suy ra $f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, hay $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$.

Bài 11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $f\left(0\right)=\sqrt{3}$ và $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\cos x.\sqrt{1+f^2\left(x\right)}$, $\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Từ giả thiết $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\cos x.\sqrt{1+f^2\left(x\right)}$ $\Rightarrow \frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}=\cos x \Rightarrow \int\frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{1+f^2\left(x\right)}}\mathrm{d}x=\sin x+C$

Đặt $t=\sqrt{1+f^2\left(x\right)}\Rightarrow t^2=1+f^2\left(x\right)$ $\Rightarrow t\mathrm{d}t=f\left(x\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $\int \mathrm{d}t=\sin x+C\Rightarrow t=\sin x+C\Rightarrow\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=\sin x+C$.

Do $f\left(0\right)=\sqrt{3}\Rightarrow C=2$.

Vậy $\sqrt{1+f^2\left(x\right)}=\sin x+2\Rightarrow f^2\left(x\right)=\sin^2x+4\sin x+3$.

$\Rightarrow f\left(x\right)=\sqrt{\sin^2x+4\sin x+3}$, vì hàm số $f\left(x\right)$ liên tục, không âm trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\le\sin x\le 1$, Do hàm số $g\left(t\right)=t^2+4t+3$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Suy ra $\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g\left(t\right)=g\left(1\right)=8$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}g\left(t\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}$.

Vậy $\max\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f\left(x\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}$, $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]}f\left(x\right)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Bài 12. Cho hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ có đạo hàm trên đoạn $\left[1;4\right]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases}f\left(1\right)+g\left(1\right)=4\\ g\left(x\right)=-x.f'\left(x\right);\quad f\left(x\right)=-x.g'\left(x\right)\end{cases}$.Tính $I=\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $f\left(x\right)+g\left(x\right)=-x\left[f'\left(x\right)+g'\left(x\right)\right]$

$$\Leftrightarrow\frac{f\left(x\right)+g\left(x\right)}{f'\left(x\right)+g'\left(x\right)}=-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\int\frac{f\left(x\right)+g\left(x\right)}{f'\left(x\right)+g'\left(x\right)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\ln\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|=-\ln\left|x\right|+C$$

Theo giả thiết ta có $C-\ln\left|1\right|=\ln\left|f\left(1\right)+g\left(1\right)\right|\Rightarrow C=\ln 4$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)+g\left(x\right)=\frac{4}{x}\\ f\left(x\right)+g\left(x\right)=-\frac{4}{x}\end{array}\right.$, vì $f\left(1\right)+g\left(1\right)=4$ nên $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\frac{4}{x}$.

Vậy $I=\int\limits_1^4\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Bài 13. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa $f\left(x\right)$mãn $f\left(1\right)=1$,

$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 9 \ (1)$

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x)dx = \frac{1}{2}$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x)dx = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)dx = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)dx = -18 \ (2)$$

Mặt khác $\int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8 dx = 9 \ (3)$

Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\int_0^1 \left[\left[f'(x)\right]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]dx = 0 \Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]dx = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) + 9x^4 = 0 \Rightarrow f'(x) = -9x^4 \Rightarrow f(x) = \int f'(x).dx = -\frac{9}{5}x^4 + C.$$

Mà $f(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{14}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{9}{5}x^5 + \frac{14}{5}\right)dx = \left(-\frac{3}{10}x^6 + \frac{14}{5}x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

Bài 14. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$ và $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = 7$. Tính $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = (x-1)^2 dx \Rightarrow v = \frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3} = \int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx = \frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3} f'(x)dx$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx = 1 \Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx = -14$$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6 dx = 7 \Rightarrow \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx - \int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx + \int_1^2 49(x-1)^6 dx = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left[7(x-1)^3 - f'(x)\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 7(x-1)^3 \Rightarrow f(x) = \frac{7(x-1)^4}{4} + C.$$

Do $f(2)=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{7(x-1)^4}{4}-\dfrac{7}{4}$. Vậy $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{-105}{64}$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$ Tính $f^2(1)$.

Lời giải

Ta có:

$(f'(x))^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x \Leftrightarrow [f'(x).f(x)]'=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+C_1$

Do $f(0)=f'(0)=1$ nên ta có $C_1=1$. Do đó:

$$f'(x).f(x)=3x^5+6x^2+1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}f^2(x)\right)'=3x^5+6x^2+1 \Leftrightarrow f^2(x)=x^6+4x^3+2x+C_2.$$

Mà $f(0)=1$ nên ta có $C_2=1$.

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1$ suy ra $f^2(1)=8$.

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$.

Khi đó

$$\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

$$=-(f(1)+f(0))+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x.=\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Ta có $\int_0^1[f(x)-k\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x-2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x+k^2\int_0^1\sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0 \Leftrightarrow k=1.$$

Do đó $\int_0^1[f(x)-\sin(\pi x)]^2\mathrm{d}x=0 \Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\pi$.

Bài 17. Cho $f(0)=\dfrac{1}{2}$ và $\int_0^3[f'(x)+f'(3-x)].dx=5$. Tính $f(3)$.

Lời giải

$$\Leftrightarrow \int_0^3 [f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 f'(3-x)\mathrm{d}(3-x) = 5 \Leftrightarrow f(x)\Big|_0^3 - f(3-x)\Big|_0^3 = 5$$

$$\Leftrightarrow f(3) - f(0) - f(0) + f(3) = 5 \Leftrightarrow 2f(3) = 6 \;\Leftrightarrow f(3) = 3.$$

Vậy $f(3) = 3$.

Bài 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $[1,2]$ thỏa mãn $\int_1^2 f'(x)dx = 10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2$ Biết rằng $f(x) > 0$, $\forall x \in [1,2]$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1)$, $\int_1^2 f'(x)dx = 10 \;\Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10 \quad (1)$.

$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2 \;\Leftrightarrow \ln f(x)\Big|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(2)}{f(1)}\right) = \ln 2$ (Vì $f(x) > 0$, $\forall x \in [1,2]$)

$\Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{2} f(2) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $f(2) = 20$.

Bài 19. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^3}$, $f(-1) = 1$ và $f(1) = -4$. Tính giá trị của biểu thức $f(-2) + f(2)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{(x^2+1)^2}{x^3} = x + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}$ nên

$$f(x) = \int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}\mathrm{d}x = \int\left(x + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln|x| + C$$

$$= \begin{cases} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln x + C \; khi \; x > 0 \\ = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln(-x) + C \; khi \; x < 0 \end{cases}.$$

• Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f(1) = -4 \Rightarrow C = -4$.

Do đó $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln x - 4$. Suy ra $f(2) = 2 - \frac{1}{8} + 2\ln 2 - 4$.

• Trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có $f(-1) = 1 \;\Rightarrow C = 1$

Do đó $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2} + 2\ln(-x) + 1$. Suy ra $f(-2) = 2 - \frac{1}{8} + 2\ln 2 + 1$.

Vậy $f(-2) + f(2) = \frac{3}{4} + 4\ln 2$.

Bài 20. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x(x-1)}$; $f(-1) + f(2) = 0$ và $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính giá trị biểu thức: $f(-2) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f(3)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|-\ln|x|+C$.

Như vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(1-x)-\ln(-x)+C_1,\ \forall x\in(-\infty;0)\\ \ln(1-x)-\ln x+C_2,\ \forall x\in(0;1)\\ \ln(x-1)-\ln x+C_3,\ \forall x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

Trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có $f(-1)=\ln 2+C_1$.

Trên khoảng $(0;1)$, ta có $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow \ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2}+C_2=2\Leftrightarrow C_2=2$.

Do đó: $f(x)=\ln(1-x)-\ln x+2$. Suy ra: $f\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{4}+2$.

Trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có $f(2)=-\ln 2+C_3$.

Lại có: $f(-1)+f(2)=0\Leftrightarrow \ln 2+C_1-\ln 2+C_3=0\Leftrightarrow C_1+C_3=0$.

Khi đó: $f(-2)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(3)=(\ln 3-\ln 2+C_1)+\left(\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{4}+C_2\right)+(\ln 2-\ln 3+C_3)$

$=\ln 3+C_1+C_2+C_3=\ln 3+2$. Vậy $f(-2)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(3)=\ln 3+2$.

Bài 21. Cho $f^6(x).f'(x)=12x+13$, $f(0)=2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;1]$.

Lời giải

Ta có $f^6(x).f'(x)=12x+13\Rightarrow \int_0^t f^6(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^t(12x+3)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{7}f^7(t)=6t^2+3t+C$ hay $f^7(x)=42x^2+21x+7C$. Do $f(0)=2$ nên

$7C=2\Leftrightarrow C=\frac{2}{7}$. Do đó $f(x)=\sqrt[7]{42x^2+21x+2}$.

$\underset{[0;1]}{\mathrm{Max}}\,f(x)=f(1)$, $\underset{[0;1]}{\mathrm{Min}}\,f(x)=f(0)$ hay $\underset{[0;1]}{\mathrm{Max}}\,f(x)=\sqrt[7]{65}$ và $\underset{[0;1]}{\mathrm{Min}}\,f(x)=\sqrt[7]{2}$.

Bài 22. Cho $f(x)\geq$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$, $f(0)=0$. Tính giá trị lớn nhất M, giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên [1;3].

Lời giải

Đặt $I=\int_0^t f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^t 2x\sqrt{f^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$.

* Ta tính $I=\int_0^t f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^t f(x).\mathrm{d}(f(x))=\frac{1}{2}f^2(x)\Big|_0^t=\frac{1}{2}f^2(t)$ (1).

* Ta tính $I=\int_0^t 2x\sqrt{f^2(x)+1}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{f^2(x)+1}\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}}\mathrm{d}x=2x\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=2x\mathrm{d}x$ chọn $v=x^2$.

$$I=\int_0^t 2x\sqrt{f^2(x)+1}\mathrm{d}x=\left[x^2\sqrt{f^2(x)+1}\right]_0^t-\int_0^t 2x^3\mathrm{d}x=t^2\sqrt{f^2(t)+1}-\frac{t^4}{2}\quad(2).$$

* Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{2}f^2(t)=t^2\sqrt{f^2(t)+1}-\frac{t^4}{2}\Leftrightarrow f^2(t)-2t^2\sqrt{f^2(t)+1}+t^4=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{f^2(t)+1}=t^2+1\\ \sqrt{f^2(t)+1}=t^2-1\end{array}\right..$$

Do $f(t)\geq 0$ với $\forall t\in\mathbb{R}$ nên $\sqrt{f^2(t)+1}\geq 1$ với $\forall t\in\mathbb{R}$.Vậy $\sqrt{f^2(t)+1}=t^2+1$ hay

$f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}\ \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)2x}{2\sqrt{x^4+2x^2}}>0$ với $[1;3]$

Vậy $\underset{[1;3]}{Max}\, f(x)=f(3)$ hay $\underset{[1;3]}{Max}\, f(x)=3\sqrt{11}$, $\underset{[1;3]}{Min}\, f(x)=\sqrt{3}$.

Bài 23. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)+f^2(x)(2x+1)=0$. Tính tổng $S=\sum_{k=1}^{2018}f(k)$.

Lời giải

Ta có $-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int_1^t\dfrac{-f'(x)}{f^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_1^t(2x+1)\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left.\dfrac{1}{f(t)}\right|_1^t=\left.(x^2+x)\right|_1^t$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{f(t)}-\frac{1}{f(1)}=t^2+t-2\Leftrightarrow f(t)=\frac{1}{t^2+t}\text{ hay }f(x)=\frac{1}{x^2+x}.$$

Khi đó $f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

$$S=\sum_{k=1}^{2018}f(k)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)...+\left(\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}\right)=1-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}.$$

Bài 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}[f'(x)]^2dx=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+x\cos x)f(x)dx=-\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+x\cos x)f(x)dx=\left[(x\sin x)f(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)f'(x)dx.$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)f'(x)dx=\dfrac{\pi^3}{48}+\dfrac{\pi}{8}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{x^2(1-\cos 2x)}{2}dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2(1-\cos 2x)}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}.$$

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2dx-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)f'(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x)^2dx=0\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)-x\sin x\right]^2dx=0$

Suy ra $f'(x)=x\sin x$, do đó $f(x)=\sin x-x\cos x+C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ nên $C=-1$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.

Bài 25. Cho hàm số $f(x)$ xác định trong khoảng $(0;+\infty)$ đồng thời $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{(x+1).f(x)}}$.

Biết $f(x)>0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(0)=1$. Tính giá trị $f(3)$.

Lời giải

Ta có $f'(x).\sqrt{f(x)}=\frac{x}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow\int_0^t f'(x).\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(x)\Big|_0^t=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\Big|_0^t\Leftrightarrow\frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(x)\Big|_0^t=\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}\Big|_0^t$

$\Leftrightarrow\frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(t)-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t+1}+\frac{4}{3}\Leftrightarrow\frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}(t)-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(t-1)\sqrt{t+1}+\frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow f^{\frac{3}{2}}(t)=(t-1)\sqrt{t+1}+3\Leftrightarrow f(t)=\sqrt[3]{\left[(t-1)\sqrt{t+1}+6\right]^2}$.

Vậy $f(3)=\sqrt[3]{100}$.

Bài 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ thỏa mãn $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}$. Tính giá trị biểu thức $A=\mathrm{e}^3f(1)-f(0)$.

Lời giải

Ta có $3f(x)+f'(x)=\sqrt{1+3.\mathrm{e}^{-2x}}=\frac{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}}{\mathrm{e}^x}\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}$.

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế ta được

$\int_0^1\left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}\,\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^{3x}f(x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+3}\right)^3\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow\mathrm{e}^3f(1)-f(0)=\frac{\left(\mathrm{e}^2+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8}{3}$.

Vậy $A=\frac{\left(\mathrm{e}^2+3\right)\sqrt{\mathrm{e}^2+3}-8}{3}$

Bài 27. Cho hàm số $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)\mathrm{d}t$. Gọi m,M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;6]$. Tính $M-m$.

Lời giải

$f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}\left(4t^3-8t\right)dt=\left(t^4-4t^2\right)\Big|_1^{\sqrt{x}}=x^2-4x+3$ với $x\geq 0$.

$f'(x)=2x-4,f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\in[1;6]$.

$f(0)=3;f(2)=-1;f(6)=15$. Suy ra $M=15,m=-1\Rightarrow M-m=16$.

Bài 28. Tìm hàm số $f(x)=a\sin\pi x+b$ thỏa mãn: $f(1)=2$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$

Lời giải

Ta có: $f(1)=2\Leftrightarrow a\sin\pi x+b=2\Leftrightarrow b=2$

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4\Leftrightarrow\int_0^1(a\sin\pi x+2)\mathrm{d}x=4\Leftrightarrow\left(\frac{-a\cos\pi x}{\pi}+2x\right)=4\Leftrightarrow a=\pi$.

Vậy $f(x)=\pi\sin\pi x+2$.

Bài 29. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f'(x)+2f(x)=0$. Tính $f(-1)$, biết rằng $f(1)=1$.

Lời giải

Ta có $f'(x)+2f(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-2f(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-2$ (do $f(x)>0$).

Lấy tích phân hai vế, ta được $\int_{-1}^1\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-2\int_{-1}^1 dx\Leftrightarrow\ln\left[f(x)\right]\Big|_{-1}^1=2x\Big|_{-1}^1$

$\Leftrightarrow\ln\left[f(1)\right]-\ln\left[f(-1)\right]=-4\Leftrightarrow\ln 1-\ln\left[f(-1)\right]=-4$

$\Leftrightarrow\ln\left[f(-1)\right]=4\Leftrightarrow f(-1)=\mathrm{e}^4$.

Bài 30. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;4]$, $f(1)=1$ và $\int_1^4 f'(x)\mathrm{d}x=2$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 f'(x)dx=2\Leftrightarrow f(x)\Big|_1^4=2\Leftrightarrow f(4)-f(1)=2$ mà $f(1)=1\Rightarrow f(4)=3$.

Bài 31. Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và có $f(3)=\frac{4}{9}, f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}$. Tính $f(8)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{x+1}\Rightarrow\int_3^8\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int_3^8\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}\Big|_3^8=\frac{1}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3\Big|_3^8\Leftrightarrow\sqrt{f(8)}-\sqrt{f(3)}=\frac{19}{3}\Leftrightarrow f(8)=7^2=49$.

Bài 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $\int_0^{x^2}f'(t)\mathrm{d}t=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{x^2}f'(t)\mathrm{d}t=F(x^2)-F(0)=x.\cos\pi x$.

Lấy đạo hàm hai vế ta có: $2x.f(x^2)=\cos\pi x-\pi x.\sin\pi x$.

$\Rightarrow 4.f(4)=\cos 2\pi-2\pi.\sin 2\pi=1\ \Rightarrow f(4)=\frac{1}{4}$.

Bài 33. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)}t^2\mathrm{d}t=x.\cos\pi x$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^{f(x)} t^2\mathrm{d}t = x.\cos\pi x \Leftrightarrow \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{f(x)} = x.\cos\pi x \Leftrightarrow f^3(x) = 3x.\cos\pi x$

$\Leftrightarrow f^3(4) = 12.\cos 4\pi = 12 \Leftrightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$.

Bài 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(x) > 0$ khi $x \in [1;2]$. Biết $\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = 10$ và $\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln 2$. Tính $f(2)$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_1^2 f'(x)\mathrm{d}x = \left. f(x)\right|_1^2 = 10 \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 10$ (1).

Ta có: $\int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \left.\ln\left(f(x)\right)\right|_1^2 = \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(f(2)\right) - \ln\left(f(1)\right) = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(2) = 20$.

Bài 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm, liên tục trên đoạn $[1;\ln 3]$ và thỏa mãn $f(1) = \mathrm{e}^2$ và $\int\limits_1^{\ln 3} f'(x)\mathrm{d}x = 9 - \mathrm{e}^2$. Tính $I = f(\ln 3)$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_1^{\ln 3} f'(x)\mathrm{d}x = 9 - \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow f(\ln 3) - f(1) = 9 - \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow f(\ln 3) = 9$.

Bài 36. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f'(x) = \left(x^3 + 3x^2 + 6x\right)^{2017}.f(x), f(-2) = \mathrm{e}^2$. Tính $f(0)$?

Lời giải

$f'(x) = \left(x^3 + 3x^2 + 6x\right)^{2017}.f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \left(x^3 + 3x^2 + 6x\right)^{2017}$

$\Rightarrow \int\limits_{-2}^0 \frac{f'(x)}{f(x)} = \int\limits_{-2}^0 \left(x^3 + 3x^2 + 6x + 4\right)^{2017}\mathrm{d}x$

Ta có: $I = \int\limits_{-2}^0 \left(x^3 + 3x^2 + 6x + 4\right)^{2017}\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^0 \left((x+1)^3 + 3(x+1)\right)^{2017}\mathrm{d}x$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, đổi cận $x = -2 \Rightarrow t = -1, x = 0 \Rightarrow t = 1$.

$\Rightarrow I = \int\limits_{-1}^1 \left(t^3 + 3t\right)^{2017}$. Xét hàm số $f(t) = \left(t^3 + 3t\right)^{2017}$ là hàm số lẻ nên $I = 0$.

$\Rightarrow \int\limits_{-2}^0 \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \ \left.\ln\left|f(x)\right|\right|_{-2}^0 = 0 \Leftrightarrow \ln\left|f(0)\right| = \ln\left|f(-2)\right| \Rightarrow f(0) = e^2$.

Bài 37. Cho hàm số $f(x) = \int\limits_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{2x}} t\ln t\,\mathrm{d}t$. Xác định hoành độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $g(t) = t\ln t$ với $t > 0$. Khi đó

$f(x) = \int\limits_{\mathrm{e}^x}^{\mathrm{e}^{2x}} t\ln t\,\mathrm{d}t = \left. F(t)\right|_{e^x}^{e^{2x}} = F\left(\mathrm{e}^{2x}\right) - F\left(\mathrm{e}^x\right)$

$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{2x}\right)' F'\left(\mathrm{e}^{2x}\right) + \mathrm{e}^x F'\left(\mathrm{e}^x\right) = 2\mathrm{e}^{2x} f\left(\mathrm{e}^{2x}\right) - \mathrm{e}^x f\left(\mathrm{e}^x\right) = 4x\mathrm{e}^{4x} - x\mathrm{e}^{2x} = x\mathrm{e}^{2x}\left(4\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 4e^{2x}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\ln 2 \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy hoành độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $x=-\ln 2$.

Bài 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và $\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x\sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.

Lời giải

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$.

$$g(x)=\int\limits_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = F(t)\Big|_0^{x^2} = F(x^2)-F(0)=x\sin(\pi x).$$

$$g'(x)=2xF'(x^2)=\sin(\pi x)+\pi x\cos\pi x \Leftrightarrow 2xf(x^2)=\sin(\pi x)+\pi x\cos\pi x$$

Chọn $x=2$ ta được $4f(4)=\sin 2\pi+2\pi\cos 2\pi = 2\pi \Rightarrow f(4)=\frac{\pi}{2}$.

Vậy $f(4)=\frac{\pi}{2}$.

Bài 39. Lấy tích phân hai vế, ta được Cho hàm số $f(x)=\ln\frac{1}{(3-x)^3}$. Giải bất phương trình sau:

$$f'(x)>\frac{6\pi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt}{x+2}.$$

Lời giải

Ta có $f(x)=-3\ln(3-x); f'(x)=-3.\frac{1}{3-x}.(3-x)' = \frac{3}{3-x}$.

$$\frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt = \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{1-\cos t}{2}dt = \frac{3}{\pi}(t-\sin t)\Big|_0^{\pi} = 3$$

Khi đó $f'(x)>\frac{6\pi\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt}{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{3-x}>\frac{3}{x+2} \\ x<3; x\neq 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)}<0 \\ x<3; x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ \frac{1}{2}<x<3 \end{array}\right. .$$

Vậy nghiệm bất phương trình: $\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ \frac{1}{2}<x<3 \end{array}\right.$.

Bài 40. Chứng minh rằng $\frac{1}{2}C_{2n}^1+\frac{1}{4}C_{2n}^3+\frac{1}{6}C_{2n}^5+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Lời giải

* Nhận xét : Số hạng tổng quát của tổng vế trái là $\frac{1}{k+1}C_{2n}^{k}$ với k nguyên dương lẻ và không xuất hiện $\frac{1}{k+1}C_{2n}^{k}$ với k chẵn. Do đó ta phải sử dụng $(1+x)^{2x}$ và $(1-x)^{2n}$ sử dụng phương pháp tích phân hai vế.

Ta có $(1+x)^{2n}=C_{2n}^{0}+C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^2+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$.

$(1-x)^{2n}=C_{2n}^{0}-C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{2}x^2-...-C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Suy ra $(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}=2\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^3+C_{2n}^{5}x^5+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)$

Do đó $\int_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\int_0^1\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^3+C_{2n}^{5}x^5+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx\quad(*)$

Mà $\int_0^1\frac{(1+x)^{2n}-(1-x)^{2n}}{2}dx=\left.\frac{(1+x)^{2n+1}+(1-x)^{2n+1}}{2(2n+1)}\right|_0^1=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}\quad(1)$

và $\int_0^1\left(C_{2n}^{1}x+C_{2n}^{3}x^3+C_{2n}^{5}x^5+...+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}\right)dx=\left.C_{2n}^{1}\frac{x^2}{2}+C_{2n}^{3}\frac{x^4}{4}+C_{2n}^{5}\frac{x^6}{6}+...+C_{2n}^{2n-1}\frac{x^{2n}}{2n}\right|_0^1$

$=\frac{1}{2}C_{2n}^{1}+\frac{1}{4}C_{2n}^{3}+\frac{1}{6}C_{2n}^{5}+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}\quad(2)$.

Thay (1) và (2) vào (*) ta có $\frac{1}{2}C_{2n}^{1}+\frac{1}{4}C_{2n}^{3}+\frac{1}{6}C_{2n}^{5}+...+\frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1}=\frac{2^{2n}-1}{2n+1}$ (đpcm)

Bài 41. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^3+\frac{1}{4}C_n^4-\frac{1}{5}C_n^5...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{2018}{2019}$.

Lời giải

Nhận xét:

* Số hạn tổng quát của tổng vế trái là $\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}C_k^n$ ($k\ge 0$ và $k\in\mathbb{N}$). Số đi chung với C_n^k là phân số nên có thể sử dụng tích phân là phù hợp.

* Số hạng tổng quát của tổng vế trái là $\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}C_k^n$ có mẫu là phân số $\frac{1}{k+1}$. Do $k+1$ lớn hơn k một đơn vị nên có khả năng ban đầu C_n^k đi chung với x^k tức là $x^kC_n^k$.

* Dấu của các số hạng thay đổi từ dấu $+$ sang dấu $-$ do đó ta khai triển nhị thức $(1-x)^n$. Vì chưa khớp dấu của đề nên nhân hai vế cho -1.

Ta có: $-\int_0^1(1-x)^n=\int_0^1\left(-C_n^0+C_n^1x-C_n^3x^2+C_n^3x^3-...+(-1)^{n-1}C_n^nx^n\right)\mathrm{dx}$

$\Leftrightarrow-\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_1^0=\left.\left(-C_n^0x+\frac{1}{2}C_n^1x^2-\frac{1}{3}C_n^2x^3+\frac{1}{4}C_n^3x^4+...+\frac{(-1)^{n-1}n}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^1$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{n+1}=-1+\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n$

$\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}C_n^1-\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}C_n^n\Leftrightarrow\frac{2018}{2019}=\frac{n}{n+1}\Leftrightarrow n=2018$.

Bài 42. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có:

$$\frac{1}{2}C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3...+\frac{(-1)^n}{n+2}C_n^n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Lời giải

Nhận xét:

* Số hạng tổng quát của vế trái là $\frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k$ ($k\ge 0$, $k\in\mathbb{N}$). Số đi chung với C_n^k là phân số nên có thể sử dụng phương pháp tích phân.

* Số hạng tổng quát của vế trái là $\frac{(-1)^k}{k+2}C_n^k$ có mẫu số là phân số $\frac{(-1)^k}{k+2}$ là $k+2$ lớn hơn chỉ số chập k đúng 2 đơn vị $\Rightarrow$ có khả năng ban đầu C_n^k đi chung với x^{k+1}, tức là $x^{k+1}C_n^k$ $(*)$.

* Dấu của các số đổi dấu từ $+$ sang $-$.

Ta xét $(1-x)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-C_n^3x^3+...+(-1)^nC_n^nx^n$.

Tới đây ta nhận thấy số hạng vế phải chưa giống như ta đoán ở $(*)$, do đó ta nhân hai vế cho x ta được $x(1-x)^n=C_n^0x-C_n^1x^2+C_n^2x^3-C_n^3x^4+...+(-1)^nC_n^nx^{n+1}$.

Khi đó $\int_0^1 x(1-x)^n\,dx=\int_0^1\left(C_n^0x-C_n^1x^2+C_n^2x^3-C_n^3x^4+...+(-1)^nC_n^nx^{n+1}\right)dx$.

Xét $\int_0^1 x(1-x)^n\,dx$. Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx=\int_0^1(1-t)t^ndt=\left.\left(\frac{1}{n+1}t^{n+1}-\frac{1}{n+2}t^{n+2}\right)\right|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

Mặt khác $\int_0^1\left(C_n^0x-C_n^1x^2+C_n^2x^3-C_n^3x^4+...+(-1)^nC_n^nx^{n+1}\right)dx$

$$=\left.\left(\frac{1}{2}C_n^0x^2-\frac{1}{3}C_n^1x^3+\frac{1}{4}C_n^2x^4-\frac{1}{5}C_n^3x^5+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^nx^{n+1}\right)\right|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n.$$

Vậy $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2-\frac{1}{5}C_n^3+...+\frac{(-1)^n}{n+1}C_n^n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Bài 43. Tính tổng $S=1-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3...+\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$ với n nguyên dương.

Lời giải

Ta có $(1-x^2)^n=C_n^0-C_n^1x^2+C_n^3-...(-1)^nC_n^nx^{2n}\Rightarrow$

$$\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=\int_0^1\left(C_n^0-C_n^1x^2+C_n^3-...(-1)^nC_n^nx^{2n}\right)dx$$

* Ta có $\int_0^1\left(C_n^0-C_n^1x^2+C_n^3-...(-1)^nC_n^nx^{2n}\right)dx$

$$=\left.\left(C_n^0x-\frac{1}{3}C_n^1x^3+\frac{1}{5}C_n^2x^5-\frac{1}{7}C_n^3x^6+...\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^nx^{2n+1}\right)\right|_0^1=C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2-\frac{1}{7}C_n^3+...\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$$

Ta tính $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = (1-x^2)^n \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = -2nx(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$.

$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = x(1-x^2)^n\Big|_0^1 + \int_0^1 2nx^2(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x = -2n\int_0^1 (1-x^2-1)(1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x =$

$-2n\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}\,\mathrm{d}x = 2n.I_n + 2n.I_{n-1}$. Do đó $I_n = -2n.I_n + 2n.I_{n-1}$

$\Leftrightarrow I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1} \Leftrightarrow I_n = \dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{7}.\dfrac{8}{9}....\dfrac{2n}{2n+1} I_o = \dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{7}.\dfrac{8}{9}....\dfrac{2n}{2n+1}$.

Vậy $S = \dfrac{2}{3}.\dfrac{4}{7}.\dfrac{8}{9}....\dfrac{2n}{2n+1}$.