

BÀI GIẢNG PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

BÀI 1: PHÉP BIẾN HÌNH – PHÉP TỊNH TIẾN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa phép biến hình, một số thuật ngữ và kí hiệu liên quan.
- + Nắm được định nghĩa phép tịnh tiến.
- + Biết vẽ ảnh và xác định được ảnh của một hình qua phép tịnh tiến.
- + Nắm được tính chất của phép tịnh tiến.

❖ Kỹ năng

- + Biết vận dụng định nghĩa và tính chất của phép biến hình và phép tịnh tiến để xác định ảnh của một điểm, một đường thẳng,... cho trước.
- + Biết vận dụng phép tịnh tiến để giải một số bài toán về quỹ tích.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phép biến hình

Định nghĩa

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

Kí hiệu

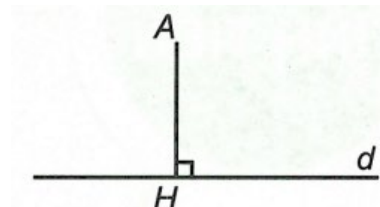
Phép biến hình là F và viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$.

Khi đó M' gọi là ảnh của M qua phép biến hình F .

Nếu φ là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu $\varphi' = F(\varphi)$ là tập hợp các điểm ảnh của M thuộc φ . Khi đó ta nói F biến hình φ thành hình φ' hay φ' là ảnh của hình φ qua phép biến hình F .

Phép biến hình biến mỗi điểm M của mặt phẳng thành chính nó được gọi là phép đồng nhất.

Ví dụ. Hình chiếu của điểm A lên đường thẳng d là điểm H . Khi đó ta có phép biến hình biến điểm A thành H .



$F(A) = H$ được gọi là phép chiếu vuông góc lên đường thẳng d .

2. Phép tịnh tiến

Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vector $\vec{u}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ gọi là phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$, kí hiệu $T_{\vec{u}}$.

Như vậy $T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

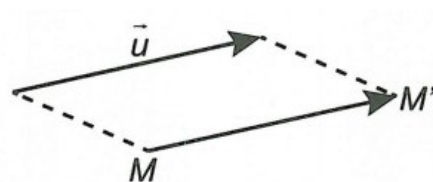
Tính chất

a) Nếu $T_{\vec{u}}(M) = M'; T_{\vec{u}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$

Từ đó suy ra $M'N' = MN$.

b) Phép tịnh tiến biến:

- Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Tam giác thành tam giác bằng nó.
- Góc thành góc bằng nó.
- Đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.



Nhận xét.

- Phép tịnh tiến theo vector-không chính là phép đồng nhất.
- Phép tịnh tiến được xác định khi có vector tịnh tiến, tức là biết điểm đầu, điểm cuối của vector hoặc biết hướng và độ dài của vector.
- Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Biểu thức tọa độ

Chú ý. Nếu quên công thức này ta chỉ cần cho

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x; y)$ và vector $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, từ đó suy ra các tọa độ tương ứng bằng nhau.

Gọi điểm $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm $M(x; y)$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{u}$.

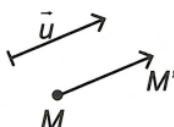
$$\text{Khi đó } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

HỆ THỐNG HÓA KIẾN THỨC:

PHÉP TỊNH TIẾN

1. Định nghĩa

$$T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$



2. Biểu thức tọa độ

$$M(x; y) \xrightarrow{T_{\vec{u}}} M'(x'; y') \\ \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

3. Tính chất

$$\left. \begin{aligned} T_{\vec{u}}(M) = M'; T_{\vec{u}}(N) = N' \\ \Rightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M'N' = MN$$

Phép tịnh tiến biến:

- Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Tam giác thành tam giác bằng nó.
- Góc thành góc bằng nó.
- Đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phép biến hình

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chứng tỏ quy tắc đặt tương ứng điểm $M(x; y)$ với điểm $M'(y; -x)$ là một phép biến hình.

Hướng dẫn giải

Với mỗi điểm $M(x; y)$, theo quy tắc trên thì luôn tồn tại điểm M' sao cho $F(M) = M'(y; -x)$.

Như vậy, với mọi điểm M thì luôn tồn tại ảnh là M' . (1)

Giả sử qua quy tắc trên, điểm $M(x; y)$ có hai ảnh là $M'(x'; y')$ và $M''(x''; y'')$

Ta có $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ và $\begin{cases} x'' = y \\ y'' = -x \end{cases}$

Suy ra $x' = x''; y' = y'' \Rightarrow M' \equiv M''$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: quy tắc trên là một phép biến hình.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét phép biến hình sau: $F(M(x; y)) = M'(x'; y')$ với $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + 1 \end{cases}$

- Xác định ảnh của điểm $M(1; 2)$ qua phép biến hình F .
- Xác định phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ qua phép biến hình F .
- Xác định phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép biến hình F :
 $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

a) $M'(x'; y') = F(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x = -1 \\ y' = y + 1 = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow M'(-1; 3)$

b) $M(x; y) \in \Delta$ thì $F(M) = M'(x'; y') \in \Delta'$

Suy ra $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' - 1 \end{cases}$

Lúc đó $M(-x'; y' - 1) \in \Delta$ nên $(-x') - (y' - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -x' - y' + 2 = 0 \Leftrightarrow x' + y' - 2 = 0$

Vậy $\Delta': x' + y' - 2 = 0$ là ảnh của đường thẳng Δ qua phép biến hình F .

c) Gọi $M(x; y) \in (C) \Rightarrow F(M) = M'(x'; y') \in (C')$

Suy ra $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' - 1 \end{cases}$

Mà $M \in (C)$ nên $(-x')^2 - (y' - 1)^2 + 2(-x') - 4(y' - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 + 2x' - 6y' + 6 = 0$

Vậy $(C'): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ là ảnh của đường tròn (C) .

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Quy tắc nào dưới đây là phép biến hình?

A. Điểm O cho trước đặt tương ứng với O , còn nếu M khác O thì M ứng với M' sao cho $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

B. Điểm O cho trước ứng với điểm O , còn M khác O thì M ứng với M' sao cho tam giác OMM' là tam giác vuông cân đỉnh O .

C. Điểm O cho trước ứng với điểm O , còn M khác O thì M ứng với M' sao cho tam giác MM' là tam giác đều.

D. Điểm O cho trước đặt tương ứng với O , còn M khác O thì M ứng với M' sao cho $OM' = 2OM$.

Câu 2: Cho phép biến hình F đặt tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$, điểm $M'(x'; y')$ theo công thức

$$F: \begin{cases} x' = x_M - 1 \\ y' = y_M + 2 \end{cases}. \text{ Ảnh của điểm } A(1; 2) \text{ qua phép biến hình } F \text{ là:}$$

- A. $A'(1; 4)$ B. $A'(2; 0)$ C. $A'(1; -2)$ D. $A'(0; 4)$

Câu 3: Cho phép biến hình F đặt tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ với điểm $M'(x'; y')$ theo công thức

$$\begin{cases} x' = x_M \\ y' = y_M + 1 \end{cases}. \text{ Tính độ dài đoạn thẳng } PQ \text{ với } P, Q \text{ tương ứng là ảnh của điểm } A(1; -2) \text{ và } B(-1; 2) \text{ qua phép biến hình } F.$$

- A. $PQ = \sqrt{2}$ B. $PQ = 2\sqrt{5}$ C. $PQ = 3\sqrt{2}$ D. $PQ = 4\sqrt{2}$

Câu 4: Cho phép biến hình F đặt tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ với điểm $M'(x'; y')$ theo công thức

$$F: \begin{cases} x' = x_M + 1 \\ y' = y_M - 1 \end{cases}. \text{ Viết phương trình elip } (E') \text{ là ảnh của elip } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ qua phép biến hình } F.$$

- A. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ B. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
C. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Dạng 2: Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Phương pháp giải

Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(x; y)$ và vectơ $\vec{u}(a; b)$. Gọi điểm $M'(x'; y')$ là ảnh của điểm $M(x; y)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$.

Khi đó:
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Ví dụ. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v} = (-2; 3)$.

Hãy tìm ảnh của các điểm $A(1; -1), B(4; 3)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Hướng dẫn giải

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

Ta có điểm $A(1; -1)$.

$$\begin{aligned} A'(x'; y') = T_{\vec{v}}(A) &\Rightarrow \begin{cases} x' = 1 + (-2) \\ y' = -1 + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(-1; 2) \end{aligned}$$

Tương tự ta có ảnh của B là điểm $B'(2; 6)$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v} = (1; -3)$ và đường thẳng d có phương trình $2x - 3y + 5 = 0$.

Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Lấy điểm $M(x; y)$ tùy ý thuộc d , ta có: $2x - 3y + 5 = 0$ (*)

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$$

Thay vào (*) ta được phương trình: $2(x' - 1) - 3(y' + 3) + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' - 6 = 0$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': 2x - 3y - 6 = 0$.

Cách 2: Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến

Do $d' = T_{\vec{v}}(d)$ nên d' song song hoặc trùng với d , vì vậy phương trình đường thẳng d' có dạng

$$2x - 3y + c = 0 \quad (**)$$

Lấy điểm $M(-1; 1) \in d$. Khi đó $M' = T_{\vec{v}}(M) = (-1 + 1; 1 - 3) = (0; -2)$

Do $M' \in d'$ nên $2 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': 2x - 3y - 6 = 0$

Cách 3: Để viết phương trình d' ta lấy hai điểm phân biệt M, N thuộc d , tìm tọa độ các ảnh M', N' tương ứng của chúng qua $T_{\vec{v}}$.

Khi đó d' đi qua hai điểm M' và N' .

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (2; -3)$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Sử dụng biểu thức tọa độ.

Lấy điểm $M(x; y)$ tùy ý thuộc đường tròn (C) , ta có: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ (*)

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$$

Thay vào phương trình (*), ta được: $(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 2) - 4(y' + 3) - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2x' + 2y' - 7 = 0$

Vậy ảnh của (C) là đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

Cách 2: Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến.

Để thấy (C) có tâm $I(-1; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi $C' = T_{\vec{v}}((C))$ và $I'(x'; y'); R'$ là tâm và bán kính của (C') .

Ta có
$$\begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

Suy ra $I'(1; -1)$ và $R' = R = 3$.

Vậy phương trình của đường tròn (C') là $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x + y - 9 = 0$. Tìm phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ có giá song song với Oy biến d thành d' đi qua điểm $A(1; 1)$.

Hướng dẫn giải

$\vec{v}$ có giá song song với Oy nên $\vec{v} = (0; k) (k \neq 0)$

Lấy $M(x; y) \in d \Rightarrow 3x + y - 9 = 0 (*)$

Gọi $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' - k \end{cases}$

Thay vào (*), ta có $3x' + y' - k - 9 = 0$ hay $T_{\vec{v}}(d) = d': 3x + y - k - 9 = 0$

Mà d' đi qua $A(1; 1)$ nên $k = -5$

Vậy $\vec{v} = (0; -5)$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d: 2x - 3y + 3 = 0$ và $d': 2x - 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$ có phương vuông góc với d để $T_{\vec{v}}(d) = d'$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\vec{v} = (a; b)$, lấy điểm $M(0; 1) \in d$.

Giả sử $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$.

Ta có $\begin{cases} x' = a \\ y' = 1 + b \end{cases}$ thay vào d' ta được phương trình $2a - 3b = 8$.

Vector pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n} = (2; -3)$

Suy ra vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (3; 2)$

Do $\vec{v} \perp \vec{u}$ nên $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 3a + 2b = 0$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a - 3b = 8 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{13} \\ b = -\frac{24}{13} \end{cases} \quad \text{Vậy } \vec{v} = \left(\frac{16}{13}; -\frac{24}{13} \right)$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3; -3)$. Ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (-1; 3)$ là:

- A. $A'(2;-6)$ B. $A'(2;0)$ C. $A'(4;0)$ D. $A'(-2;0)$

Câu 2: Cho ba điểm $M(2;3); N(-4;1); P(6;5)$. Ảnh của N qua phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MP}$ là:

- A. $N'(0;3)$ B. $N'(-3;7)$ C. $N'(3;7)$ D. $N'(3;0)$

Câu 3: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $M(-10;1)$ và $M'(3;8)$. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ biến điểm M thành điểm M' , khi đó tọa độ của vector $\vec{v}$ là:

- A. $(-13;7)$ B. $(13;-7)$ C. $(13;7)$ D. $(-13;-7)$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(0;2), N(-2;1)$ và vector $\vec{v}(1;2)$. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ biến M, N thành hai điểm M', N' tương ứng. Tính độ dài $M'N'$.

- A. $M'N' = \sqrt{5}$ B. $M'N' = \sqrt{7}$ C. $M'N' = 1$ D. $M'N' = 3$

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ biết $A(2;4), B(5;1), C(-1;-2)$. Phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{BC}$ biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$ tương ứng các điểm. Trọng tâm G' của $\triangle A'B'C'$ là:

- A. $G'(-4;-2)$ B. $G'(4;2)$ C. $G'(4;-2)$ D. $G'(-4;4)$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta: x+2y-1=0$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}(1;-1)$

- A. $\Delta': x+2y=0$ B. $\Delta': x+2y-3=0$ C. $\Delta': x+2y+1=0$ D. $\Delta': x+2y+2=0$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng song song d và d' lần lượt có phương trình là $3x-2y=0$ và $3x-2y+1=0$. Phép tịnh tiến theo vector nào sau đây biến đường thẳng d thành d' ?

- A. $\vec{v}=(1;-2)$ B. $\vec{v}=(-1;-2)$ C. $\vec{v}=(-1;-1)$ D. $\vec{v}=(1;-1)$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-1=0$ qua $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v}=(1;2)$ là:

- A. $(x+2)^2+y^2=\sqrt{6}$ B. $(x-2)^2+y^2=6$ C. $x^2+y^2-2x-5=0$ D. $2x^2+2y^2-8x+4=0$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v}=(-2;1)$ và đường thẳng $d: 2x-3y+3=0; d_1: 2x-3y-5=0$. Biết vector $\vec{w}=(a;b)$ có phương vuông góc với đường thẳng d để d_1 là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{w}}$. Khi đó $a+b$ bằng:

- A. $\frac{6}{13}$ B. $\frac{16}{13}$ C. $\frac{-8}{13}$ D. $\frac{5}{13}$

Câu 10: Cho hình vuông $ABCD$ trong đó $A(-1;1), C(3;5)$. Phương trình ảnh của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ là:

- A. $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ B. $(x+1)^2+(y-1)^2=16$
C. $(x-2)^2+(y-1)^2=8$ D. $(x-3)^2+(y-5)^2=16$

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

Dạng 1: Phép biến hình

1 – A	2 – D	3 – B	4 – A
-------	-------	-------	-------

Câu 1:

Ta có $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow M' \equiv M$. Quy tắc đặt này là phép đồng nhất. Do đó chọn A.

Các quy tắc còn lại không là phép biến hình.

+ Đáp án B, C do không nói góc vuông là góc lượng giác nên luôn tồn tại hai ảnh của M .

+ Yếu tố thẳng hàng hay không thẳng hàng đủ để thấy rõ ảnh của M không duy nhất.

Câu 2:

Theo công thức, ta có: $\begin{cases} x' = x_M - 1 = 1 - 1 = 0 \\ y' = y_M + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(0; 4)$

Câu 3:

Theo công thức $\begin{cases} x' = x_M \\ y' = y_M + 1 \end{cases}$, ta có: $P(1; -1), Q(-1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-2; 4) \Rightarrow PQ = 2\sqrt{5}$.

Câu 4:

Gọi $M(x_M; y_M) \in (E): \frac{x_M^2}{9} + \frac{y_M^2}{4} = 1$ (1)

Với $F(M) = M'(x'; y') \in (E')$, theo công thức $\begin{cases} x' = x_M + 1 \\ y' = y_M - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x' - 1 \\ y_M = y' + 1 \end{cases}$

Thay vào (1) ta có $\frac{(x' - 1)^2}{9} + \frac{(y' + 1)^2}{4} = 1$

Phương trình của (E') là $\frac{(x' - 1)^2}{9} + \frac{(y' + 1)^2}{4} = 1$

Dạng 2: Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

1 – B	2 – A	3 – C	4 – A	5 – A	6 – A	7 – C	8 – B	9 – C	10 – A
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

Câu 1:

Ta có $T_v(A) = A'(x_{A'}; y_{A'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = x_A + x_v \\ y_{A'} = y_A + y_v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 3 - 1 = 2 \\ y_{A'} = -3 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 0)$.

Câu 2:

Ta có $\overrightarrow{MP} = (4; 2)$

Gọi $N'(x'; y')$ là ảnh của $N(-4; 1)$ qua phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MP}$.

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} x' = -4 + 4 \\ y' = 1 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

Vậy $N'(0; 3)$

Câu 3:

Ta có $\overrightarrow{MM'} = (13; 7)$.

$$T_v(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = (13; 7)$$

Câu 4:

$$\text{Ta có } \begin{cases} T_v(M) = M' \\ T_v(N) = N' \end{cases} \Rightarrow MN = M'N' = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

Câu 5:

Ta có tọa độ trọng tâm ΔABC là $G(2; 1)$; $\overrightarrow{BC} = (-6; -3)$.

$$T_{\overrightarrow{BC}}(G) = G'(x_{G'}, y_{G'}) \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = x_G + x_{\overrightarrow{BC}} \\ y_{G'} = y_G + y_{\overrightarrow{BC}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{G'} = 2 - 6 = -4 \\ y_{G'} = 1 - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow G'(-4; -2)$$

Câu 6:

Cách 1:

$$\text{Chọn } A(1; 0) \in \Delta \Rightarrow T_v(A) = A'(2; -1) \in \Delta'$$

$$\text{Chọn } B(-1; 1) \in \Delta \Rightarrow T_v(B) = B'(0; 0) \in \Delta'$$

Đường thẳng Δ' chính là đường thẳng $A'B'$.

Đường thẳng Δ' qua $A'(2; 1)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$ có phương trình là $\Delta': 1(x - 2) + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0$.

Cách 2:

Vì $T_v(\Delta) = \Delta'$ nên Δ', Δ là hai đường thẳng cùng phương. Do đó Δ' có dạng $x + 2y + m = 0$.

$$\text{Chọn } A(1; 0) \in \Delta \Rightarrow T_v(A) = A'(2; -1) \in \Delta' \Rightarrow m = 0$$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta': x + 2y = 0$

Cách 3:

Sử dụng quỹ tích

$$\text{Lấy } M(x_M; y_M) \in \Delta \Leftrightarrow x_M + 2y_M - 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } T_v(M) = M'(x'; y') \in \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x_M + 1 \\ y' = y_M - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x' - 1 \\ y_M = y' + 1 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } (x' - 1) + 2(y' - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' = 0$$

Vậy $\Delta': x + 2y = 0$

Nhận xét: Sử dụng cách 3 có tính tư duy cao hơn, nhanh hơn và áp dụng cho nhiều loại hình khác nhau.

Câu 7:

Gọi $\vec{v} = (a; b)$ là vectơ tịnh tiến biến d thành d' . Khi đó $M(x; y) \in d$ biến thành điểm $M'(x'; y') \in d'$

$$\text{Áp dụng công thức } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

$$\text{Thay vào phương trình } d \text{ ta có } 3(x' - a) - 2(y' - b) = 0 \Leftrightarrow 3x' - 2y' - 3a + 2b = 0$$

Đề biến d thành d' thì $-3a + 2b = 1$

Chọn $a = -1; b = -1$ hay $\vec{v} = (-1; -1)$ thỏa mãn.

Câu 8:

Cách 1: Theo tính chất của phép tịnh tiến biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Ta có đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{6}$

Với phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (1; 2)$ thì ta có $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

Suy ra $T_{\vec{v}}(I) = I'(2; 0)$

Vậy đường tròn (C') có tâm $I'(2; 0)$, bán kính $R' = R = \sqrt{6}$ có phương trình $(x - 2)^2 + y^2 = 6$.

Cách 2: Sử dụng quỹ tích.

Gọi $M(x; y) \in (C) \Rightarrow T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Thay x, y vào phương trình đường tròn (C) , ta có:

$$(x' - 1)^2 + (y' - 2)^2 - 2(x' - 1) + 4(y' - 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 + (y')^2 - 4x' - 2 = 0$$

Vậy $(C') : (x - 2)^2 + y^2 = 6$

Câu 9:

Đường thẳng d có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -3) \Rightarrow \vec{w} = (2m; -3m)$.

$T_{\vec{w}}(M) = M'(2m; 1 - 3m)$ với $M \in d$.

$T_{\vec{w}}(d) = d' \Rightarrow d'$ có dạng $2x - 3y + \beta = 0$

Vì d' qua M' nên $4m - 3 + 9m + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 3 - 13m$

Vậy $d' : 2x - 3y + 3 - 13m = 0$. Đề $d_1 \equiv d'$ thì $3 - 13m = -5 \Leftrightarrow m = \frac{8}{13}$

Suy ra $\vec{w} = \left(\frac{16}{23}; -\frac{24}{13}\right) \Rightarrow a + b = -\frac{8}{13}$

Câu 10:

Bán kính của đường tròn (C) là $R = 2$

Ta có $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2; 2)$

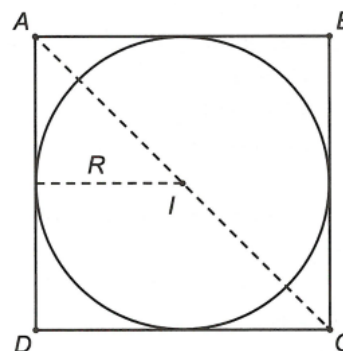
Tâm I của đường tròn là trung điểm của đoạn AC nên $I(1; 3)$

Xét $T_{\vec{v}}(I) = I'(x'; y')$. Ta có $\begin{cases} x' = 1 + 2 = 3 \\ y' = 3 + 2 = 5 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 5)$

Qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ ảnh của (C) là đường tròn (C') có

I' và bán kính $R = 2$.

Vậy ảnh của đường tròn (C) có phương trình là: $(C') : (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$.



tâm

BÀI 2: PHÉP QUAY

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa phép quay, một số thuật ngữ và kí hiệu liên quan.
- + Nắm vững tính chất phép quay.
- + Nắm được biểu thức tọa độ của phép quay với góc quay đặc biệt.

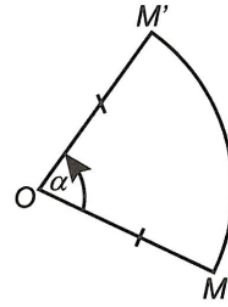
❖ Kỹ năng

- + Biết vận dụng định nghĩa và tính chất của phép quay để xác định ảnh của một điểm, một đường thẳng,... cho trước.
- + Biết vận dụng phép quay để giải một số bài toán về quỹ tích, chứng minh hai hình bằng nhau.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa phép quay

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α .



Điểm O được gọi là **tâm quay**, còn α được gọi là **góc quay** của phép quay đó.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

$$Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\widehat{OM, OM'}) = \alpha' \end{cases}$$

Biểu thức tọa độ của phép quay

Trong mặt phẳng Oxy cho $M(x; y), M'(x'; y')$ và $Q_{(O;\alpha)}(M) = M'$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

Trong mặt phẳng Oxy , cho $M(x; y), M'(x'; y'), I(a; b)$ và $Q_{(I;\alpha)}(M) = M'$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} x' - a = (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' - b = (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$$

Tính chất của phép quay

Tính chất 1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ (hay phép quay là một phép dời hình).

Tính chất 2: Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

Tính chất 3: $Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow Q_{(O;-\alpha)}(M') = M$

(sử dụng cho các bài toán ngược: tìm tạo ảnh).

+ Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.

+ Khi $\alpha = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đối xứng tâm O .

+ Khi $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $Q_{(O;\alpha)}$ là phép đồng nhất.

Đặc biệt:

$$\text{Nếu } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ thì } \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ thì } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

$$\text{Nếu } \alpha = \pm\pi \text{ thì } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Nếu $Q_{(O;\alpha)}(A) = A'$ và $Q_{(O;\alpha)}(B) = B'$ thì $A'B' = AB$

Nhận xét: Cho đường thẳng d và $Q_{(O;\alpha)}(d) = d'$.

Khi đó:

$$\text{Nếu } \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ thì } d' \perp d$$

Nếu $\alpha = k2\pi, O$ tùy ý hoặc $\alpha = k\pi, O \in d$ thì $d' \equiv d$.

Nếu $\alpha = \pi + k2\pi, O \notin d$ thì $d' \parallel d$

$$\text{Nếu } 0 < \alpha < \pi \text{ thì } (\widehat{d, d'}) = \begin{cases} \alpha & \text{khi } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \alpha & \text{khi } \frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi \end{cases}$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

PHÉP QUAY

1. Phép quay tâm O , góc quay α

Kí hiệu $Q_{(O; \alpha)}$.

$$Q_{(O; \alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\widehat{OM, OM'}) = \alpha' \end{cases}$$

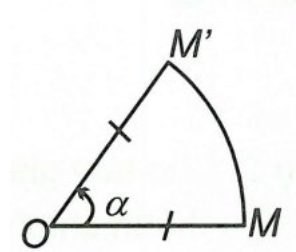
$$Q_{(O; \alpha)}(M(x; y)) = M'(x'; y')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ thì } \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } \alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ thì } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } \alpha = \pm\pi \text{ thì } \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



2. Phép quay tâm $I(a; b)$, góc quay α

$$Q_{(I; \alpha)}(M(x; y)) = M'(x'; y')$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' - a = (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' - b = (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Khai thác định nghĩa, tính chất và ứng dụng phép quay

Phương pháp giải

- + Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của phép quay.
- + Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép quay.
- + Tìm quỹ tích điểm thông qua phép quay.
- + Các yếu tố liên quan đến phép quay là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông. Từ đó ứng dụng phép quay để giải bài toán hình học khác.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có bao nhiêu điểm biên thành chính nó qua phép quay tâm O , góc quay $\alpha = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$?

A. Không có.

B. Một.

C. Hai.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

$Q_{(O;\alpha)}(M) = M$ khi $M \equiv O$ tâm quay.

Chọn B.

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O . Hỏi bao nhiêu phép quay tâm O , góc quay $\alpha, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$, biến hình chữ nhật thành chính nó?

A. Không có.

B. Một.

C. Hai.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Khi góc quay $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 2\pi$ thì phép quay biến hình chữ nhật thành chính nó.

Chọn C.

Ví dụ 3. Cho tam giác đều ABC có tâm O . Phép quay tâm O góc quay φ biến tam giác đều thành chính nó thì góc quay φ là góc nào sau đây?

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

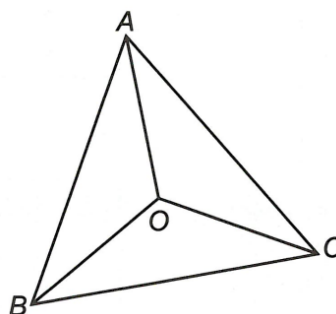
C. $\frac{3\pi}{2}$

D. $\frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn giải

$$Q_{(O;\varphi)}(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (\widehat{OA, OB}) = \varphi' = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Chọn B.



Ví dụ 4. Chọn 12 giờ làm mốc, kim giờ chỉ một giờ đúng thì kim phút đã quay được một góc bao nhiêu độ?

A. 360°

B. -360°

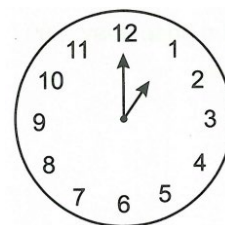
C. -180°

D. 720°

Hướng dẫn giải

Khi kim giờ chỉ đến một giờ đúng thì kim phút quay được đúng một vòng theo chiều âm và được một góc là -360° .

Chọn B.



Chú ý: Chiều “dương” của góc quay là chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ, chiều “âm” của góc quay là chiều cùng chiều quay của kim đồng hồ.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hai điểm phân biệt A, B và $Q_{(A;30^\circ)}(B) = C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\widehat{ABC} = 30^\circ$

B. $\widehat{ABC} = 90^\circ$

C. $\widehat{ABC} = 45^\circ$

D. $\widehat{ABC} = 75^\circ$

Câu 2: Cho hình vuông tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc quay α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) biến hình vuông thành chính nó?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC . Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành C ?

A. $\varphi = 30^\circ$

B. $\varphi = 90^\circ$

C. $\varphi = -120^\circ$

D. $\varphi = 60^\circ$ hoặc $\varphi = -60^\circ$

Câu 4: Cho $\triangle ABC$ đều (thứ tự các đỉnh theo chiều dương lượng giác). Kết luận nào sau đây **sai**?

A. $Q_{\left(A; \frac{\pi}{3}\right)}(B) = C$

B. $Q_{\left(A; -\frac{\pi}{3}\right)}(C) = B$

C. $Q_{\left(A; -\frac{7\pi}{3}\right)}(C) = B$

D. $Q_{\left(A; -\frac{7\pi}{3}\right)}(A) = C$

Câu 5: Cho hai đường tròn cùng bán kính (O) và (O') tiếp xúc ngoài nhau. Có bao nhiêu phép quay góc biến hình tròn (O) thành (O')?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Câu 6: Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Ảnh của $\triangle AOF$ qua phép quay tâm O góc quay 120° là:

A. $\triangle OAB$

B. $\triangle BOC$

C. $\triangle DOC$

D. $\triangle EOD$

Câu 7: Chọn 12 giờ làm mốc, khi kim đồng hồ chỉ 5 giờ đúng thì kim giờ đã quay được một góc bao nhiêu độ?

A. 270°

B. -360°

C. -150°

D. 135°

Câu 8: Cho hai điểm phân biệt I, M và $Q_{(I; -32\pi)}(M) = N$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm của đoạn IN .

B. N là trung điểm của đoạn IM .

C. I là trung điểm của đoạn MN .

D. $M \equiv N$.

Câu 9: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{ABC} = 60^\circ$ (các đỉnh của hình thoi ghi theo chiều kim đồng hồ). Ảnh của cạnh CD qua phép quay $Q_{(O; 60^\circ)}$ là:

A. AB .

B. BC .

C. CD .

D. DA .

Dạng 2: Xác định ảnh của điểm, đường thẳng qua phép quay

Phương pháp giải

1. Xác định ảnh của một điểm qua phép quay: Sử dụng biểu thức tọa độ của phép quay.

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(1;2)$ thành điểm nào?

Hướng dẫn giải

Biểu thức tọa độ của phép quay

$$Q_{(O; 90^\circ)} : M(x; y) \rightarrow M'(x'; y') \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

$$\text{Với } M(1;2), \text{ ta có: } \begin{cases} x' = -y = -2 \\ y' = x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M'(-2;1)$$

2. Xác định ảnh Δ' của đường thẳng Δ qua phép quay.

Cách 1: Chọn hai điểm A, B phân biệt trên Δ . Xác định ảnh A', B' tương ứng. Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai điểm A', B' .

Cách 2: Áp dụng tính chất phép quay $Q_{(O;\alpha)}$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ' có góc $(\Delta, \Delta') = \alpha$ hoặc $\pi - \alpha$ (đơn vị radian).

Cách 3: Sử dụng quỹ tích:

+ Với mọi điểm $M(x; y) \in \Delta: Q_{(O;\alpha)}(M) = M'(x'; y')$ thì $M' \in \Delta'$
+ Từ biểu thức tọa độ rút x, y thế vào phương trình đường thẳng Δ ta được phương trình đường thẳng

3. Xác định ảnh của một hình H (đường tròn, elip, parabol,...)

+ Sử dụng quỹ tích: Với mọi điểm: $M(x; y) \in H: Q_{(O;\alpha)}(M) = M'(x'; y')$ thì $M' \in H'$
+ Với đường tròn áp dụng tính chất của phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính hoặc sử dụng quỹ tích.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d': 5x - 3y + 15 = 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$ với O là gốc tọa độ?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Chọn $A(0;5) \in d, B(-3;0) \in d$

$$Q_{(O;90^\circ)}(A) = A'(-5;0) \in d';$$

$$Q_{(O;90^\circ)}(B) = B'(0;-3) \in d'$$

Đường thẳng d' là đường thẳng có phương trình là: $A'B': 3x + 5y + 15 = 0$

Cách 2: Vì góc quay là 90° nên $d \perp d'$. Khi đó d' có phương trình là $3x + 5y + c = 0$

Chọn $A(0;5) \in d$

$$\text{Khi đó } Q_{(O;90^\circ)}(A) = A'(-5;0) \in d' \Rightarrow c = 15$$

$$\text{Vậy } d': 3x + 5y + 15 = 0$$

Cách 3: Sử dụng quỹ tích:

Với mọi điểm $M(x; y) \in d$ thì

$$Q_{(O;90^\circ)}(M) = M'(x'; y') \in d'.$$

$$\text{Ta có biểu thức tọa độ: } \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$$

Thay x, y vào phương trình đường thẳng d ta được: $d': 3x + 5y + 15 = 0$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Tìm ảnh (C') của đường tròn (C) qua $Q_{(O;90^\circ)}$

Hướng dẫn giải

Với mọi $M(x; y) \in (C)$ thì

$$Q_{(O;90^\circ)}(M) = M'(x'; y') \in (C')$$

$$\text{Biểu thức tọa độ } \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = y' \end{cases}$$

Thay tọa độ vào đường tròn (C) , ta có:

$$(y'-1)^2 + (-x'-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x'+2)^2 + (y'-1)^2 = 4$$

$$\text{Vậy } (C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phép quay tâm O góc quay 90° biến điểm $M(-3;5)$ thành điểm nào?

A. $(3;4)$

B. $(-5;-3)$

C. $(5;-3)$

D. $(-3;-5)$

Hướng dẫn giải

$$\text{Biểu thức tọa độ của phép quay } Q_{(O;90^\circ)}: M(x;y) \rightarrow M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = -y = -5 \\ y' = x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } M': \begin{cases} x' = -5 \\ y' = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } M'(-5;-3).$$

Chọn B.

Cách 2: Biểu diễn tọa độ của điểm M trên hệ trục tọa độ Oxy , ta tìm được ảnh của M qua phép quay là $M'(-5;-3)$.

Cách 3: Gọi $M'(x';y')$.

$$Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{34} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ -3x' + 5y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -5 \\ y' = -3 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1;1)$. Hỏi điểm nào sau đây là ảnh của điểm M qua phép quay tâm $O(0;0)$, góc quay 45° ?

A. $M'(\sqrt{2};0)$

B. $M'(0;\sqrt{2})$

C. $M'(0;1)$

D. $M'(1;-1)$

Hướng dẫn giải

$$\text{Xét } Q_{(O;90^\circ)}: M(x;y) \rightarrow M'(x';y')$$

$$\text{Biểu thức tọa độ: } \begin{cases} x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

$$\text{Với } M(1;1), \text{ ta có: } \begin{cases} x' = 0 \\ y' = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow M'(0;\sqrt{2}).$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(x;y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O;90^\circ)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

B. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

C. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

D. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(x; y)$. Biểu thức tọa độ của điểm $A' = Q_{(O; -90^\circ)}(A)$ là:

A. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

B. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

C. $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$

D. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(4; 1)$. Tọa độ của điểm $A' = Q_{(O; -90^\circ)}(A)$ là:

A. $A'(-1; 4)$

B. $A'(1; -4)$

C. $A'(4; -1)$

D. $A'(-4; -1)$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ tâm $I(1; 2)$, biết điểm $A(4; 5)$. Khi đó với $B(x_B; y_B), C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ thì $x_B \cdot x_C \cdot x_D$ bằng:

A. 12.

B. 8.

C. 16.

D. 32.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + y + 1 = 0$, điểm $I(1; -2)$, phép quay $Q_{(O; 90^\circ)}(d) = d'$. Phương trình đường thẳng d' là:

A. $-x + y - 2 = 0$

B. $x - y - 1 = 0$

C. $x - y + 3 = 0$

D. $x - y - 3 = 0$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(0; 3)$. Ảnh của A qua phép quay $A' = Q_{(O; -45^\circ)}$ là:

A. $A'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

B. $A'\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$

C. $A'\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D. $A'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I(2; 1)$ và đường thẳng $d: 2x + 3y + 4 = 0$. Ảnh của d qua $Q_{(I; 45^\circ)}$ là:

A. $-x + 5y - 2 + 3\sqrt{2} = 0$

B. $-x + 5y - 3 + 10\sqrt{2} = 0$

C. $x - 5y + 3 + \sqrt{2} = 0$

D. $-x + 5y - 3 + 11\sqrt{2} = 0$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$. Ảnh đường tròn (C') của (C) qua $Q_{(O; 90^\circ)}$ là:

A. $x^2 + (y - 3)^2 = 4$

B. $x^2 + y^2 + 6y - 6 = 0$

C. $x^2 + (y + 3)^2 = 4$

D. $x^2 + y^2 + 6y - 5 = 0$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho phép quay tâm O góc quay 45° . Ảnh của đường tròn $(C): (x - 1)^2 + y^2 = 4$ là:

A. $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$

B. $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$

C. $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4$

D. $x^2 + y^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2 = 0$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình các cạnh AC, BC của ΔABC biết $A(1; 2), B(3; 4)$ và $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$

A. $AC : x - y - 1 = 0; BC = x - y + 5 = 0$

B. $AC : 3x - y - 2 = 0; BC = x - 2y + 3 = 0$

C. $AC : 3x - y - 1 = 0; BC = x - 2y + 5 = 0$

D. $AC : 3x - y - 4 = 0; BC = x - 2y + 2 = 0$

ĐÁP ÁN

1 – D	2 – D	3 – D	4 – D	5 – B	6 – D	7 – C	8 – D	9 – B	
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--

Câu 1:

Ta có $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{ABC} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$

Câu 2:

Có 4 phép quay biến hình vuông thành chính nó với các góc quay lần lượt là $0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi$

Câu 3:

Vì $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên có hai phép quay $Q_{(A;\varphi)}(B) = C$ là $\begin{cases} \varphi = 60^\circ \\ \varphi = -60^\circ \end{cases}$

Câu 4:

Ta có $Q_{(A;-\frac{7\pi}{3})}(A) = CA$ do đó D sai.

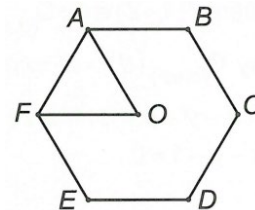
Câu 5:

Xét $\triangle OIO'$ vuông cân tại I. Khi đó $Q_{(I;90^\circ)}((O)) = (O')$.

Vậy có một phép quay thỏa mãn.

Câu 6:

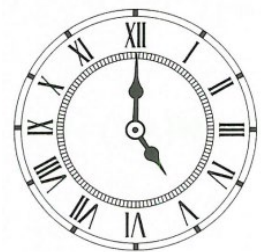
Ta có $\begin{cases} Q_{(O;120^\circ)}(A) = E \\ Q_{(O;120^\circ)}(F) = D \end{cases} \Rightarrow Q_{(O;120^\circ)}(\triangle AOF) = \triangle EOD$.



Câu 7:

Mỗi giờ trên mặt đồng hồ ứng với góc $\varphi = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Khi kim đồng hồ chỉ 5 giờ đúng thì kim giờ đã quay theo chiều dương được một góc: $5 \cdot (-30^\circ) = -150^\circ$



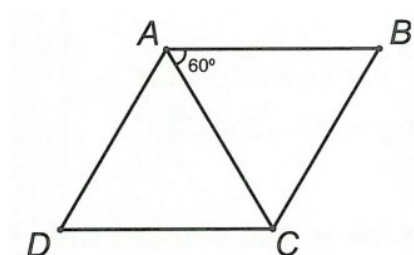
Câu 8:

Vì $Q_{(I;-32\pi)}(M) = Q_{(I;-16.2\pi)}(M) = M$ nên $M \equiv N$.

Câu 9:

Để thấy $\triangle ACD$ và $\triangle ABC$ đều nên

$\begin{cases} Q_{(O;60^\circ)}(C) = B \\ Q_{(O;60^\circ)}(D) = C \end{cases} \Rightarrow Q_{(O;60^\circ)}(DC) = BC$.



Dạng 2. Xác định ảnh của điểm, đường thẳng qua phép quay

1 – B	2 – A	3 – B	4 – C	5 – B	6 – D	7 – D	8 – C	9 – A	10 – C
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

Câu 1:

Ta có $Q_{(O;90^\circ)}(A(x;y)) = A'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$

Câu 2:

Ta có $Q_{(O;-90^\circ)}(M(x;y)) = M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

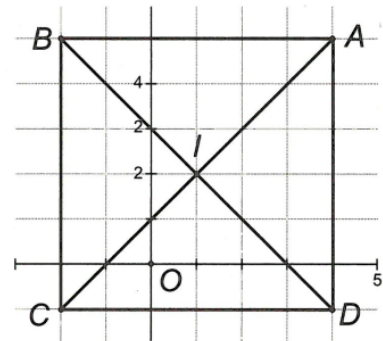
Câu 3:

Ta có $Q_{(O;-90^\circ)}(M(x;y)) = M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = y = 1 \\ y' = -x = -4 \end{cases}$

Câu 4:

Dựa vào hình vẽ, ta có:

$$\begin{cases} Q_{(I;90^\circ)}(A) = B(-2;5) \\ Q_{(I;180^\circ)}(A) = C(-2;-1) \Rightarrow x_B \cdot x_C \cdot x_D = (-2) \cdot (-2) \cdot 4 = 16 \\ Q_{(I;-90^\circ)}(A) = D(4;-1) \end{cases}$$

**Câu 5:**

Với mọi điểm $I(1;-2) \in d: Q_{(O;90^\circ)}(I) = I'(2;1) \in d'$

Phép quay $Q_{(O;90^\circ)}(d) = d' \Rightarrow d \perp d'$.

Do đó $d: x - y + c = 0$. Mà $I'(2;1) \in d'$ nên $c = -1$

Vậy $d': x - y - 1 = 0$

Câu 6:

Ta có $Q_{(O;-45^\circ)}(A(x;y)) = A'(x';y')$.

Suy ra $\begin{cases} x' = 0 \cdot \cos(-45^\circ) - 3 \sin(-45^\circ) \\ y' = 0 \cdot \sin(-45^\circ) + 3 \cos(-45^\circ) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Câu 7:

Với mọi điểm $M(x;y) \in d$ ta có $Q_{(I;45^\circ)}(M) = M'(x';y') \in d'$.

Với $I(2;1)$, ta có biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' - 2 = (x - 2) \cdot \cos 45^\circ - (y - 1) \sin 45^\circ = (x - 2) \frac{\sqrt{2}}{2} - (y - 1) \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' - 1 = (x - 2) \cdot \sin 45^\circ + (y - 1) \cos 45^\circ = (x - 2) \frac{\sqrt{2}}{2} + (y - 1) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=1-2\sqrt{2}+\sqrt{2}x' \\ x+y=3-\sqrt{2}+\sqrt{2}y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases}$$

Thay x và y vào phương trình đường thẳng d ta được $d': -x+5y-3+11\sqrt{2}=0$.

Câu 8:

Đường tròn (C) có tâm $I(-3;0)$ và bán kính $R=2$.

$$Q_{(O;90^\circ)}(I(x;y))=I'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x'=0 \\ y'=3 \end{cases} \Rightarrow I'(0;-3).$$

Đường tròn (C') có tâm $I'(0;-3)$ và bán kính $R'=R=2$ nên có phương trình $x^2+(y+3)^2=4$

Câu 9:

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R=2$

$$\text{Ta có: } Q_{(O;45^\circ)}(I(x;y))=I'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x'=1.\cos 45^\circ-0.\sin 45^\circ \\ y'=1.\sin 45^\circ+0.\cos 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow I'\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Đường tròn (C') có tâm $I'\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và bán kính $R'=R=2$ nên có phương trình là:

$$\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4.$$

Câu 10:

Đặt $\widehat{BAC}=\alpha$. Khi đó $\sin \alpha=\sqrt{1-\cos^2 \alpha}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Xét phép quay $Q_{(A;\alpha)}(B)=B'(x';y') \in AC$.

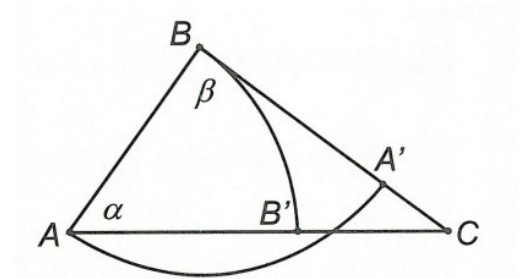
$$\text{Ta có biểu thức tọa độ } \begin{cases} x'-1=2.\cos \alpha-2.\sin \alpha=2.\frac{2}{\sqrt{5}}-2.\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y'-2=2.\sin \alpha+2.\cos \alpha=2.\frac{2}{\sqrt{5}}+2.\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x'=1+\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y'=2+\frac{6}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow B'\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}};2+\frac{6}{\sqrt{5}}\right)$$

Đường thẳng AC qua A và B' có phương trình là $3x-y-1=0$

Tương tự. Đặt $\widehat{ABC}=\beta$. Khi đó $\sin \beta=\sqrt{1-\cos^2 \beta}=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Xét phép quay $Q_{(B;\beta)}(A)=A'(x';y') \in BC$



Ta có biểu thức tọa độ
$$\begin{cases} x' - 3 = -2 \cos \beta + 2 \sin \beta = -2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \\ y' - 4 = -2 \sin \beta - 2 \cos \beta = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} x' = 3 - \frac{4}{\sqrt{10}} \\ y' = 4 - \frac{8}{\sqrt{10}} \end{cases} \Rightarrow B' \left(3 - \frac{4}{\sqrt{10}}; 4 - \frac{8}{\sqrt{10}} \right).$$

Đường thẳng BC qua B và A' có phương trình là $x - 2y + 5 = 0$.

BÀI 3: KHÁI NIỆM PHÉP DỜI HÌNH – HAI HÌNH BẰNG NHAU

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa phép dời hình.
- + Nắm được định nghĩa hai hình bằng nhau.
- + Nắm được tính chất của phép dời hình.

❖ Kỹ năng

- + Phân biệt phép biến hình, phép dời hình.
- + Biết vận dụng định nghĩa và tính chất của phép dời hình để vẽ và xác định ảnh của một điểm, một đường thẳng, một hình cho trước.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nhận xét.

Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.

Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

Tính chất

Phép dời hình

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Chú ý.

a) Nếu một phép dời hình biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\triangle ABC$ tương ứng thành trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\triangle A'B'C'$.

b) Phép biến hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, cạnh thành cạnh.

Khái niệm hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phân biệt phép biến hình, phép dời hình

Phương pháp giải

Để chứng minh một phép biến hình là phép dời hình thì cần nắm chắc tính chất “bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ”, tức là phải chỉ rõ $\forall M, N : \begin{cases} F(M) = M' \\ F(N) = N' \end{cases} \Rightarrow M'N' = MN$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phép biến hình nào sau đây là phép dời hình?

- Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(y; -x)$.
- Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(2x; y)$.
- Phép biến hình F_3 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(3x + 1; y - 1)$.

Hướng dẫn giải

Lấy hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$, ta có $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

a) Ảnh của M, N qua phép biến hình F_1 lần lượt được $M'(y_1; -x_1), N'(y_2; -x_2)$.

Ta có $M'N' = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_1 - x_2)^2} = MN$.

Vậy phép biến hình F_1 là phép dời hình.

b) Xét ảnh của M, N qua phép biến hình F_2 lần lượt là $M'(2x_1; y_1), N'(2x_2; y_2)$.

Ta có $M'N' = \sqrt{4(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Đề ý rằng, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$.

Vậy phép biến hình F_2 không là phép dời hình (vì có một số điểm không bảo toàn khoảng cách).

c) Xét ảnh của M, N qua phép biến hình F_3 lần lượt được $M'(3x_1 + 1; y_1 - 1), N'(3x_2 + 1; y_2 - 1)$

Ta có $M'N' = \sqrt{9(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Nếu $x_1 \neq x_2$ thì $M'N' \neq MN$.

Vậy phép biến hình F_3 không là phép dời hình (vì có một số điểm không bảo toàn khoảng cách).

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét phép biến hình F biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm

$M'(x'; y')$, trong đó $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases}$, với α, a, b là những số cho trước. Chứng minh F là phép dời hình.

Hướng dẫn giải

Phép biến hình F biến $M(x_1; y_1)$ tương ứng thành $M'(x'_1; y'_1)$, với $\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha + a \\ y'_1 = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha + b \end{cases}$

Phép biến hình F biến $N(x_2; y_2)$ tương ứng thành $N'(x'_2; y'_2)$, với $\begin{cases} x'_2 = x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha + a \\ y'_2 = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha + b \end{cases}$

Ta có: $MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$$\begin{aligned} M'N' &= \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \\ &= \sqrt{[(x_2 - x_1) \cos \alpha - (y_2 - y_1) \sin \alpha]^2 + [(x_2 - x_1) \sin \alpha + (y_2 - y_1) \cos \alpha]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 \cos^2 \alpha + (y_2 - y_1)^2 \sin^2 \alpha + (x_2 - x_1)^2 \sin^2 \alpha + (y_2 - y_1)^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (y_2 - y_1)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN \end{aligned}$$

Vậy phép biến hình F là phép dời hình.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Phép biến hình F là phép dời hình thì:

A. F biến đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.

B. F biến đường thẳng thành chính nó.

C. F biến đường thẳng thành đường thẳng cắt nó.

D. F biến tam giác thành tam giác bằng nó.

Câu 2: Giả sử phép biến hình F biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$. Xét các mệnh đề sau:

(1) Trọng tâm ΔABC biến thành trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

(2) Trực tâm ΔABC biến thành trực tâm $\Delta A'B'C'$.

(3) Tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC lần lượt biến thành tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp $\Delta A'B'C'$.

Số mệnh đề đúng trong 3 mệnh đề trên là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 3: Hãy tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Phép tịnh tiến là phép dời hình.

B. Phép đồng nhất là phép dời hình.

C. Phép quay là phép dời hình.

D. Phép vị tự là phép dời hình.

Câu 4: Xét hai phép biến hình sau:

(1) Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(-y; x)$.

(2) Phép biến hình F_2 biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(2x; 2y)$

Phép biến hình nào trong hai phép biến hình trên là phép dời hình?

A. Chỉ phép biến hình (1).

B. Chỉ phép biến hình (2).

C. Cả hai phép biến hình (1) và (2).

D. Cả hai phép biến hình (1) và (2) đều không là phép dời hình.

Dạng 2: Xác định ảnh qua một phép dời hình

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét phép dời hình F biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ có

biểu thức tọa độ
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

a) Xác định ảnh của điểm $M(1; 2)$ qua phép biến hình F .

b) Xác định phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$ qua phép biến hình F .

c) Xác định phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ qua phép biến hình F .

d) Xác định phương trình elip (E') là ảnh của elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $F(M(1; 2)) = M'(x'; y')$ với $\begin{cases} x' = -x = -1 \\ y' = y + 1 = 2 + 1 = 3 \end{cases}$ hay $M'(-1; 3)$.

b) *Cách 1:* Chọn 2 điểm M, N bất kỳ trên Δ , xác định ảnh tương ứng là M', N' . Đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng qua hai điểm M', N' .

$$\text{Chọn } \begin{cases} M(1;2) \in \Delta \\ N(0;1) \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(M) = M'(-1;3) \\ F(N) = N'(0;2) \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng Δ' cần tìm là đường thẳng $M'N'$.

Đường thẳng $M'N'$ đi qua $M'(-1;3)$ và nhận vector chỉ phương $\overrightarrow{M'N'} = (1;-1)$ có phương trình là:

$$\Delta': \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Cách 2: Sử dụng quỹ tích:

$$\text{Gọi } M(x;y) \in d \text{ thì } F(M) = M'(x';y') \text{ với } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y'-1 \end{cases}$$

$$\text{Lúc đó: } M'(-x';y'-1) \in \Delta \Leftrightarrow (-x') - (y'-1) + 1 = 0 \Leftrightarrow -x' - y' + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0.$$

$$\text{Vậy } \Delta': x + y - 2 = 0.$$

c) *Cách 1:* Theo tính chất của phép dời hình: Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Ta có đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = 2$.

$$F(I) = I'(-1;3) \text{ là tâm của đường tròn ảnh } (C').$$

Vì phép biến hình F là phép dời hình nên bán kính của (C') là 2.

$$\text{Vậy đường tròn } (C'): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4.$$

Cách 2: Sử dụng quỹ tích:

$$\text{Gọi } M(x;y) \in (C) \text{ ta có } F(M) = M'(x';y') \text{ với } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y'-1 \end{cases}.$$

Thay tọa độ x, y vào phương trình đường tròn (C) , ta tìm được phương trình đường tròn (C') .

$$\text{d) Sử dụng quỹ tích: } \forall M \in (E) \text{ thì } F(M) = M' \in (E')$$

$$\text{Gọi } M(x;y) \in (E) \text{ ta có } F(M) = M'(x';y'): \begin{cases} x' = -x \\ y' = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y'-1 \end{cases}.$$

$$\text{Lúc đó } M(-x';y'-1) \in (E) \Leftrightarrow \frac{(-x')^2}{9} + \frac{(y'-1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{9} + \frac{(y'-1)^2}{4} = 1$$

$$\text{Vậy } (E'): \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1.$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho biến hình F đặt tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ với điểm $M'(x'; y')$ theo công thức

$$F: \begin{cases} x' = x_M - 1 \\ y' = y_M + 2 \end{cases}. \text{ Ảnh của điểm } A(1; 2) \text{ qua phép biến hình } F \text{ là:}$$

- A. $A'(1; 4)$ B. $A'(2; 0)$ C. $A'(1; -2)$ D. $A'(0; 4)$

Câu 2: Cho biến hình F đặt tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ với điểm $M'(x'; y')$ theo công thức

$$F: \begin{cases} x' = x_M \\ y' = y_M + 1 \end{cases}. \text{ Tính độ dài đoạn thẳng } PQ \text{ với } P, Q \text{ tương ứng là ảnh của hai điểm } A(1; 0) \text{ và } B(-1; 2)$$

qua phép biến hình F .

- A. $PQ = \sqrt{2}$ B. $PQ = 2\sqrt{2}$ C. $PQ = 3\sqrt{2}$ D. $PQ = 4\sqrt{2}$

Câu 3: Cho biến hình F đặt tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ với điểm $M'(x'; y')$ theo công thức

$$F: \begin{cases} x' = 2x_M \\ y' = 2y_M \end{cases}. \text{ Phương trình đường thẳng } d' \text{ là ảnh của đường thẳng } d: x + 2y + 1 = 0 \text{ qua phép biến hình}$$

F là:

- A. $d': 2x + y + 2 = 0$ B. $d': x + 2y + 3 = 0$ C. $d': x + 2y + 2 = 0$ D. $d': x + 2y = 0$

Câu 4: Cho biến hình F có quy tắc đặt ảnh tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ có ảnh là điểm $M'(x'; y')$ theo

$$\text{công thức } F: \begin{cases} x' = x_M \\ y' = -y_M \end{cases}. \text{ Phương trình đường tròn } (C') \text{ là ảnh của đường tròn}$$

$(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ qua phép biến hình F là:

- A. $(C'): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$ B. $(C'): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
C. $(C'): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ D. $(C'): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

Câu 5: Cho biến hình F có quy tắc đặt ảnh tương ứng điểm $M(x_M; y_M)$ có ảnh là điểm $M'(x'; y')$ theo

$$\text{công thức } F: \begin{cases} x' = x_M + 1 \\ y' = y_M - 1 \end{cases}. \text{ Phương trình elip } (E') \text{ là ảnh của elip } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ qua phép biến hình } F$$

là:

- A. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ B. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$
C. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ D. $(E'): \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

ĐÁP ÁN

Dạng 1: Phân biệt phép biến hình, phép dời hình

1 – D	2 – D	3 – D	4 – A						
-------	-------	-------	-------	--	--	--	--	--	--

Câu 4:

Lấy hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ bất kì trong mặt phẳng.

$$\text{Xét } \begin{cases} F_1(A) = A_1(-y_1; x_1) \\ F_1(B) = B_1(-y_2; x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \\ \overrightarrow{A_1B_1} = (y_1 - y_2; x_2 - x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ A_1B_1 = \sqrt{(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2} \end{cases}$$

Suy ra $A_1B_1 = AB \Rightarrow F_1$ là phép dời hình.

$$\text{Xét } \begin{cases} F_2(A) = A_2(2x_1; 2y_1) \\ F_2(B) = B_2(2x_2; 2y_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) \\ \overrightarrow{A_2B_2} = (2x_2 - 2x_1; 2y_2 - 2y_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ A_2B_2 = \sqrt{4(x_2 - x_1)^2 + 4(y_2 - y_1)^2} \end{cases}$$

Khi $x_1 \neq x_2$ hoặc $y_1 \neq y_2$ thì F_2 không là phép dời hình.

Dạng 2: Xác định ảnh qua một phép dời hình

1 – D	2 – B	3 – C	4 – B	5 – A					
-------	-------	-------	-------	-------	--	--	--	--	--

Câu 1:

Theo công thức, ta có: $\begin{cases} x' = x_M - 1 = 0 \\ y' = y_M + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(0; 4)$

Câu 2:

Theo công thức, ta có: $P(1; 1); Q(-1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-2; 2) \Rightarrow PQ = 2\sqrt{2}$.

Câu 3:

Cách 1: Gọi $M(x_M; y_M) \in d \Leftrightarrow x_M + 2y_M + 1 = 0$ (1)

Với $F(M) = M'(x'; y')$, theo công thức, ta có: $\begin{cases} x' = 2x_M \\ y' = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x'}{2} \\ y_M = \frac{y'}{2} \end{cases}$

Thay vào (1) ta có: $\left(\frac{x'}{2}\right) + 2\left(\frac{y'}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 2 = 0$.

Vậy $d': x + 2y + 2 = 0$.

Cách 2: Chọn $A(-1; 0) \in d, B(1; -1) \in d$.

Ta có $F(A) = A'(-2; 0) \in d', F(B) = B'(2; -2) \in d' \Rightarrow d' \equiv A'B'$

Đường thẳng d' qua $A'(-2; 0)$ và nhận vector chỉ phương là $\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} = (2; -1)$

Chọn $\vec{n'} = (1; 2)$ làm một vector pháp tuyến, suy ra $d': 1(x + 2) + 2(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$.

Câu 4:

Cách 1: Gọi $M(x_M; y_M) \in (C) \Leftrightarrow (x_M - 1)^2 + (y_M - 2)^2 = 4$ (1)

Với $F(M) = M'(x'; y')$, theo công thức: $\begin{cases} x' = x_M \\ y' = -y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x' \\ y_M = y' \end{cases}$.

Thay vào (1) ta có: $(x-1)^2 + (-y-2)^2 = 4 \Rightarrow M' \in (C'): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.

Cách 2: Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và $A(1;4) \in (C)$

Suy ra $F(I) = I'(1;-2)$ là tâm (C') và $F(A) = A'(1;-4) \in (C')$.

Vậy đường tròn (C') có tâm $I'(1;-2)$ và bán kính $R = |\overrightarrow{I'A'}| = 2$ có phương trình là:

$$(C'): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4.$$

Câu 5:

Gọi $M(x_M; y_M) \in (E): \frac{x_M^2}{9} + \frac{y_M^2}{4} = 1$ (1).

Với $F(M) = M'(x'; y')$, theo công thức, ta có: $\begin{cases} x' = x_M + 1 \\ y' = y_M - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x' - 1 \\ y_M = y' + 1 \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được: $\frac{(x_M-1)^2}{9} + \frac{(y_M+1)^2}{4} = 1$.

Ta có $M' \in (E')$ nên phương trình của (E') là $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$.

BÀI 4: PHÉP VỊ TỰ

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Hiểu được định nghĩa phép vị tự, phép vị tự được xác định khi biết được tâm và tỉ số vị tự.
- + Nắm vững các tính chất của phép vị tự.
- + Nắm vững cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

❖ Kỹ năng

- + Tìm ảnh của một điểm, ảnh của một hình qua phép vị tự, biết được mối liên hệ của phép vị tự với phép biến hình khác.
- + Xác định được tâm vị tự của hai đường tròn.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Cho điểm I và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$ được gọi là phép vị tự tâm I , tỉ số k . Kí hiệu: $V_{(I;k)}$.

$$\text{Vậy } V_{(I;k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}.$$

Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ, cho $I(x_0; y_0)$ và $M(x; y)$.

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = V_{(I;k)}(M) \text{ thì } \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}.$$

Tính chất

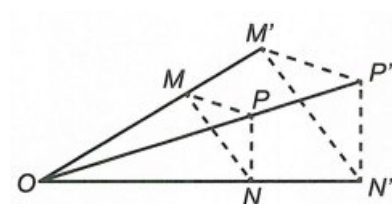
$$\text{Nếu } V_{(I;k)}(M) = M'; V_{(I;k)}(N) = N' \text{ thì } \overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN} \text{ và}$$

$$M'N' = |k|MN.$$

Phép vị tự tỉ số k :

- + Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó.
- + Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- + Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.
- + Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính

Ví dụ.



Phép vị tự tâm O , tỉ số $\frac{3}{2}$ biến ba điểm M, N, P lần lượt thành 3 điểm M', N', P' .

Nhận xét.

- + Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- + Khi $k = 1$ thì phép vị tự là phép đồng nhất.
- + Khi $k = -1$, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.
- + Nếu $M' = V_{(O;k)}(M)$ thì $M = V_{\left(O; \frac{1}{k}\right)}(M')$.

$|k|R$.

Tâm vị tự của hai đường tròn

Định lí: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

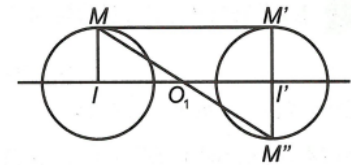
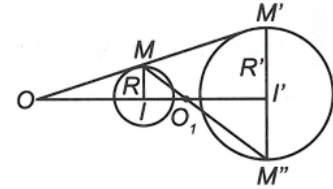
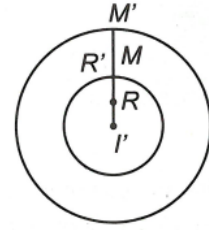
Cho hai đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R')$.

+ Nếu $I \equiv I'$ thì các phép vị tự $V_{\left(I; \pm \frac{R'}{R}\right)}$ biến $(I; R)$ thành $(I'; R')$.

+ Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì các phép vị tự $V_{\left(O; \frac{R'}{R}\right)}$ và $V_{\left(O; -\frac{R'}{R}\right)}$ biến

$(I; R)$ thành $(I'; R')$. Ta gọi O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn.

+ Nếu $I \neq I'$ và $R = R'$ thì có $V_{(O_1; -1)}$ biến $(I; R)$ thành $(I'; R')$.



HỆ THỐNG HÓA KIẾN THỨC

PHÉP VỊ TỰ

1. Phép vị tự tâm I , tỉ số k

Kí hiệu: $V_{(I; k)}$.

$$V_{(I; k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$$

$$M'(x'; y') = V_{(I; k)}(M), I(x_0; y_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

Với $k = 1, V_{(I; 1)}$, là phép đồng nhất.

Với $k = -1, V_{(I; -1)}$, là phép đối xứng tâm.

2. Tính chất

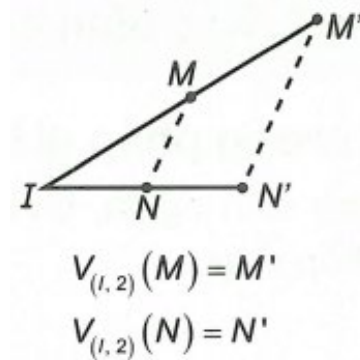
$$V_{(I; k)}(M) = M'; V_{(I; k)}(N) = N' \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN} \\ |M'N'| = |k|MN \end{cases}$$

Phép vị tự $V_{(I; k)}$.

+ Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó.

+ Biến một đường thẳng thành một đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

+ Biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với tam giác đã cho, biến góc thành góc bằng nó.



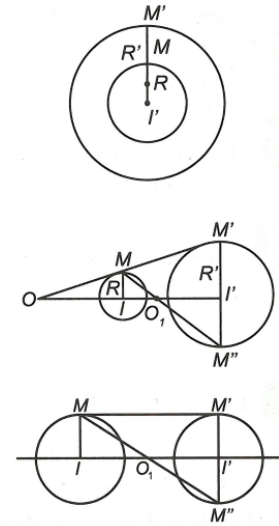
+ Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

3. Tâm vị tự của hai đường tròn $(I; R)$, $(I'; R')$

+ Nếu $I \equiv I'$ thì các phép vị tự $V_{\left(I; \pm \frac{R'}{R}\right)}$ biến $(I; R)$ thành $(I'; R')$.

+ Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì các phép vị tự $V_{\left(O; \frac{R'}{R}\right)}$ và $V_{\left(O; -\frac{R'}{R}\right)}$ biến $(I; R)$ thành $(I'; R')$.

+ Nếu $I \neq I'$ và $R = R'$ thì có $V_{(O_1; -1)}$ biến $(I; R)$ thành $(I'; R')$.



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định ảnh một hình qua phép vị tự

Phương pháp giải

Dùng định nghĩa, tính chất và biểu thức tọa độ của phép vị tự.

Ví dụ. Tìm ảnh A' của điểm $A(3;4)$ qua phép vị tự tâm $I(2;5), k = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $V_{(I;2)}(A) = A'$. Áp dụng biểu thức tọa độ của

phép vị tự, ta có:
$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases}$$

Suy ra:
$$\begin{cases} x' = 2.3 + (1-2).2 = 4 \\ y' = 2.4 + (1-2).5 = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(4;3).$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho $M(-3;5), M'(4;6)$. Tìm tâm I của phép vị tự biến M thành M' có tỉ số $k = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $V_{(I;2)}: M \rightarrow M' \Rightarrow \begin{cases} 4 = (-3).2 + (1-2).a \\ 6 = 5.2 + (1-2).b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow I(-10;4).$

Ví dụ 2. Cho $d: x - 2y + 1 = 0$. Tìm ảnh d' của d qua phép vị tự tâm $I(2;1)$ có tỉ số $k = 2$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $V_{(I;2)}(d) = d' \Rightarrow d \parallel d' \Rightarrow \vec{n}_d = \vec{n}_{d'} = (1; -2).$

$M(1;1) \in d \Rightarrow V_{(I;2)}(M) = M' \in d'.$

Do đó $\begin{cases} x' = 1.2 + (1-2).2 \\ y' = 1.2 + (1-2).1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 1 \end{cases} \Rightarrow M'(0;1).$

Vậy phương trình tổng quát của d' là $x - 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2 = 0$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$. Tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

(C) có tâm $A(3; -2)$, bán kính $R = 5$

(C') có tâm $A'(x'; y')$, bán kính $R' = \frac{5}{2}$

Vì A' là ảnh của A qua phép vị tự tâm I , tỉ số $k = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IA'} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{IA}$.

Mà $\overrightarrow{IA} = (x' - 2; y' - 1); \overrightarrow{IA} = (1; -3)$

Suy ra $A'\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow (C'): x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{9}{4} = 0$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d' . Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 2: Cho hai đường tròn bằng nhau $(O; R)$ và $(O'; R')$ với tâm O và O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O; R)$ thành $(O'; R')$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 3: Cho $4\overrightarrow{IA} = 5\overrightarrow{IB}$. Tỉ số vị tự k của phép vị tự tâm I , biến A thành B là:

- A. $k = \frac{4}{5}$ B. $k = \frac{3}{5}$ C. $k = \frac{5}{4}$ D. $k = \frac{1}{5}$

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3; 2)$. Ảnh của A qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -1$ là:

- A. $(3; 2)$ B. $(2; 3)$ C. $(-2; -3)$ D. $(-3; -2)$

Câu 5: Tìm A để điểm $A'(1; 2)$ là ảnh của A qua phép vị tự tâm $I(1; 3), k = -2$ là:

- A. $A(1; 13)$ B. $A\left(1; \frac{7}{2}\right)$ C. $A\left(-1; -\frac{7}{2}\right)$ D. $A(-1; -13)$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(1; 2), M'(-2; -4)$ và số $k = 2$. Phép vị tự tỉ số $k = 2$ biến điểm M thành điểm M' có tâm vị tự là:

- A. $I(-4; 8)$ B. $I(4; -8)$ C. $I(-4; -8)$ D. $I(4; 8)$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0, I(-1; 2)$. Ảnh của d qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$ là:

- A. $2x - y + 4 = 0$ B. $-2x + y + 8 = 0$ C. $2x + y + 8 = 0$ D. $x + \frac{1}{2}y + 2 = 0$

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d: \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ và $d': 2x - y - 6 = 0$. Phép vị tự $V_{(O;k)}(d) = d'$. Tìm k .

A. $k = \frac{3}{2}$

B. $k = -\frac{2}{3}$

C. $k = \frac{1}{3}$

D. $k = -\frac{1}{3}$

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $I(1;2)$ và tỉ số $k = -2$ là:

A. $x^2 + y^2 + 6x - 16y + 4 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4 = 0$

C. $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 20$

D. $(x-3)^2 + (y+8)^2 = 20$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C'): (x-3)^2 + y^2 = 16$ và điểm $I(1;2)$. Biết đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm I , tỉ số $k = -2$. Điểm nào sau đây thuộc đường tròn (C) ?

A. $M(3;4)$

B. $N(-2;3)$

C. $P(2;0)$

D. $Q(3;2)$

Dạng 2: Xác định tâm vị tự của hai đường tròn

Phương pháp giải

Sử dụng cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong bài học.

Ví dụ mẫu

Ví dụ. Cho hai đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ và $(C'): (x-8)^2 + (y-4)^2 = 16$. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = 2$; đường tròn (C') có tâm $I'(8;4)$, bán kính $R' = 4$. Do $I \neq I'$ và $R \neq R'$ nên có hai phép vị tự $V_{(J;2)}$ và $V_{(J';-2)}$ biến (C) thành (C') . Gọi $J(x;y)$ là tâm vị tự cần tìm.

$$+ \text{ Với } k = 2 \text{ khi đó } \overrightarrow{JI'} = 2 \cdot \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x = 2(2-x) \\ 4-y = 2(1-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow J(-4;-2).$$

+ Tương tự với $k = -2$, tính được $J'(4;2)$.

Vậy tâm vị tự của đường tròn là $J'(4;2)$ và tâm vị tự ngoài của đường tròn là $J(-4;-2)$.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C_1): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$; $(C_2): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$. Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn đó là:

A. $(-2;3)$

B. $(2;3)$

C. $(3;-2)$

D. $(1;-3)$

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$ và đường tròn $(C'): (x-10)^2 + (y-7)^2 = 9$. Tâm vị tự trong biến (C) thành (C') là:

- A. $\left(\frac{36}{5}; \frac{27}{5}\right)$ B. $\left(\frac{13}{2}; 5\right)$ C. $\left(\frac{32}{5}; \frac{24}{5}\right)$ D. $\left(5; \frac{13}{2}\right)$

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Xác định ảnh của một hình qua phép vị tự

1 - A	2 - B	3 - A	4 - D	5 - B	6 - D	7 - C	8 - A	9 - C	10 - B
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

Câu 1:

Không có phép vị tự nào biến d thành d' vì qua phép vị tự, đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Câu 2:

Phép vị tự có tâm là trung điểm OO' , tỉ số vị tự bằng -1 .

$$V_{(I;k)}(C) = C' \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IO'} = k \cdot \overrightarrow{IO} \\ R' = |k| \cdot R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IO'} = k \cdot \overrightarrow{IO} \\ k = \pm \frac{R}{R'} = \pm 1 \text{ (do } R = R') \end{cases}.$$

Ta có O khác O' nên $k = -1$ và I là trung điểm của OO' .

Câu 3:

Ta có: $4\overrightarrow{IA} = 5\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{IA}$. Vậy tỉ số $k = \frac{4}{5}$.

Câu 4:

Áp dụng biểu thức tọa độ của phép vị tự.

$$V_{(O;-1)}(A) = A' \Rightarrow A': \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ y' = -2 \end{cases}$$

Vậy $A'(-3; -2)$

Câu 5:

Ta có: $V_{(I;-2)}(A) = A'$

$$\text{Áp dụng biểu thức tọa độ của phép vị tự, ta có: } \begin{cases} 1 = x \cdot (-2) + (1+2) \cdot 1 \\ 2 = y \cdot (-2) + (1+2) \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(1; \frac{7}{2}\right).$$

Câu 6:

Gọi $I(x; y)$ là tâm vị tự. Theo định nghĩa, ta có: $\overrightarrow{IM'} = 2 \cdot \overrightarrow{IM}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} -2 - x = 2(1 - x) \\ -4 - y = 2(2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Vậy tâm vị tự là $I(4; 8)$.

Câu 7:

$$V_{(I;-2)}(d) = d' \text{ nên } d' \text{ có dạng } 2x + y + c = 0$$

Chọn điểm $M(2;0) \in d$.

$$\text{Ta có: } V_{(I;-2)}(M) = M'(x';y') \in d' \Rightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ y' = -2 \end{cases}.$$

Thế vào d' , ta có $10 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 8$.

Vậy $d': 2x + y + 8 = 0$.

Câu 8:

Ta có $d: 2x - y - 4 = 0 \Rightarrow d // d'$

$$\text{Chọn } M(2;0) \in d \Rightarrow V_{(O;k)}(M) = M'(x';y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 2k \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\text{Do } M' \in d' \text{ nên } 2.2k - 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}.$$

Câu 9:

Đường tròn (C) có tâm $I(8;1)$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I , tỉ số $k = -2$.

$$\text{Ta có } V_{(I;-2)}(J) = J'(x';y') \Leftrightarrow \overline{IJ'} = -2\overline{IJ} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 8 \end{cases} \Rightarrow J'(-3;8) \text{ là tâm của đường tròn } (C').$$

$$\text{Bán kính } R' = |k|.R = 2\sqrt{5}$$

Vậy phương trình đường tròn (C') là $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 20$.

Câu 10:

Ta có đường tròn (C') có tâm $K'(3;0)$ và bán kính $R' = 4$.

Gọi $K(x;y)$ và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C) .

$$V_{(I;-2)}(C) = (C') \Leftrightarrow V_{(I;-2)}(K) = (K') \Leftrightarrow \overline{IK'} = -2\overline{IK}$$

$$\text{Khi đó } \Leftrightarrow \begin{cases} x'-1 = -2(x-1) \\ y'-2 = -2(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-1 = -2x+2 \\ 0-2 = -2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}. \text{ Vậy } K(0;3).$$

$$\text{Lại có } R' = |k|.R \Leftrightarrow R = \frac{R'}{|k|} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$\text{Vậy đường tròn } (C): x^2 + (y-3)^2 = 4$$

Ta thấy, thay tọa độ của điểm $N(-2;3)$ vào đường tròn (C) thấy thỏa mãn.

Vậy N thuộc đường tròn (C) .

Dạng 2: Xác định tâm vị tự của đường tròn

1 – A

2 – A

Câu 1:

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;3)$ và bán kính $R_1 = 1$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_1(1;3)$ và bán kính $R_2 = 2$

Ta có $I_1 \neq I_2, R_1 \neq R_2$. Gọi I là tâm vị tự ngoài của phép vị tự.

Ta có: $V_{(I;k)}((C_1)) = (C_2) \Rightarrow V_{(I;k)}(I_1) = I_2, k = \frac{R_2}{R_1} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{II_2} = 2\overrightarrow{II_1} \Rightarrow I(-2;3)$.

Câu 2:

Đường tròn (C) có tâm $I(3;3)$ và bán kính $R = 3$

Đường tròn (C') có tâm $I'(10;7)$ và bán kính $R' = 2$

Suy ra $I \neq I', R \neq R'$. Tỉ số vị tự là $k = -\frac{2}{3}$

Ta có $V_{(O;k)}(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ với $O_1(x;y)$ là tâm vị tự trong.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-10 = -\frac{2}{3}(x-3) \\ x-7 = -\frac{2}{3}(y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{36}{5} \\ y = \frac{27}{5} \end{cases}$$

Vậy $O_1\left(\frac{36}{5}; \frac{27}{5}\right)$.

BÀI 5: PHÉP ĐỒNG DẠNG

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Hiểu được định nghĩa phép đồng dạng và tỉ số đồng dạng, khái niệm hai hình đồng dạng.
- + Hiểu được tính chất cơ bản của phép đồng dạng và các ứng dụng trong thực tế.
- + Nắm được mối liên hệ giữa phép đồng dạng với các phép biến hình đã học.

❖ Kỹ năng

- + Tìm ảnh của một điểm, một hình qua phép đồng dạng.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta có $M'N' = kMN$.

Định lý

Mọi phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) đều là hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình.

Tính chất

- + Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của ba điểm đó.
- + Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với k (k là tỉ số đồng dạng).
- + Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số k .
- + Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = kR$.
- + Biến góc thành góc bằng nó.

Hai hình đồng dạng

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

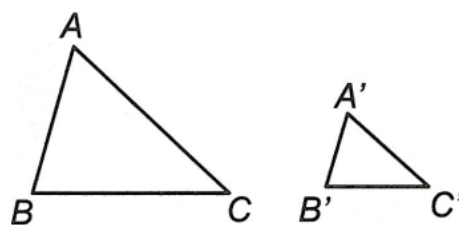
Nhận xét.

- + Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.
- + Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- + Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p , ta được phép đồng dạng tỉ số kp .

Chú ý.

- + Nếu một phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$ thành trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle A'B'C'$.
- + Phép đồng dạng biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.

Hai tam giác đồng dạng với nhau khi và chỉ khi có một phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia.



HỆ THỐNG HÓA KIẾN THỨC

Phép đồng dạng gồm:

+ Phép vị tự.

+ Phép dời hình:

- Phép tịnh tiến.
- Phép đối xứng tâm.
- Phép đối xứng trục.

- Phép quay.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm ảnh của một điểm, một hình qua phép đồng dạng.

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép đồng dạng.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1; -1)$, tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc.

Hướng dẫn giải

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1; -1)$, tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình của d_1 có dạng: $x + y + c = 0$

Lấy $M(1; 1)$ thuộc d thì ảnh của nó qua phép vị tự nói trên là $M'(x'; y') \in d_1$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x' = kx + (1-k)x_0 \\ y' = ky + (1-k)y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \\ y' = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow M' \equiv O.$$

Vậy phương trình của d_1 : $x + y = 0$.

Ảnh của d_1 qua phép quay tâm O góc -45° là đường thẳng Oy .

Vậy phương trình của d' là $x = 0$.

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp các phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn sau?

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 2)$, bán kính $R = 2$

Suy ra phép vị $V_{\left(O; \frac{1}{2}\right)}$ tự biến (C) thành (C') tâm $I'(1; 1)$, bán kính $R' = 1$

Phép quay $Q_{(O; 90^\circ)}$ biến (C') thành (C'') có tâm $I''(-1; 1)$, bán kính $R'' = R' = 1$

Vậy phương trình đường tròn (C'') là $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Chọn D.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Phép dời hình là một phép đồng dạng. B. Phép vị tự là một phép đồng dạng.
C. Phép quay là một phép đồng dạng. D. Phép đồng dạng là phép dời hình.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Phép vị tự là phép đồng dạng. B. Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.
C. Phép dời hình là phép vị tự. D. Phép quay là phép dời hình.

Câu 3: Phép vị tự tỉ số $k = -2$ là phép đồng dạng tỉ số bằng bao nhiêu?

- A. 1. B. -1 C. 2. D. -2

Câu 4: Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $A(4;3)$. Ảnh của A có được bằng cách thực hiện liên tiếp qua phép vị tự tâm O tỉ số 2 và phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}(-3;2)$ là:

- A. $(1;5)$ B. $(8;5)$ C. $(5;8)$ D. $(8;6)$

Câu 5: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y = 0$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

- A. $2x - y = 0$ B. $2x + y = 0$ C. $4x - y = 0$ D. $2x + y - 2 = 0$

Câu 6: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C) và (C') có phương trình lần lượt là $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$. Biết (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k , khi đó giá trị k bằng:

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{9}{16}$ D. $\frac{16}{9}$

Câu 7: Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$. Phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}(3;5)$ và phép vị tự $V_{\left(O; \frac{1}{3}\right)}$ là:

- A. $(C'): (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$ B. $(C'): (x+2)^2 + (y+1)^2 = 36$
C. $(C'): (x+2)^2 + (y+1)^2 = 6$ D. $(C'): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $M(0;3)$. Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của M qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay -90° và phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 5$.

- A. $M'(15;0)$ B. $M'(0;15)$ C. $M'(0;-15)$ D. $M'(-15;0)$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $N(-6;0)$. Ảnh của N qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay 90° và phép vị tự tâm O , tỉ số $k = -3$ là:

- A. $N'(-18;0)$ B. $N'(0;18)$ C. $N'(0;-18)$ D. $N'(0;-6)$

Câu 10: Cho ΔABC đều cạnh 2. Qua ba phép đồng dạng liên tiếp: Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$, phép quay $Q(B; 60^\circ)$, phép vị tự $V_{(A;3)}$ thì ΔABC biến thành $\Delta A_1B_1C_1$. Diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ là:

- A. $5\sqrt{2}$ B. $9\sqrt{3}$ C. $9\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{3}$

ĐÁP ÁN

Dạng 1: Tìm ảnh của một điểm, một hình qua phép đồng dạng

1 – D	2 – C	3 – C	4 – C	5 – B	6 – A	7 – A	8 – A	9 – B	10 – B
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

Câu 5:

Tâm vị tự O thuộc đường thẳng d nên $d = V_{(O;-2)}(d)$.

$$d' = \mathfrak{D}_{O_y}(d) \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}.$$

$$\text{Mà } 2x - y = 0 \text{ nên } 2(-x') - y' = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' = 0$$

Vậy qua phép đồng dạng đường thẳng d biến thành đường thẳng (d') có phương trình $2x + y = 0$.

Câu 6:

(C) có tâm $I(0;2)$, bán kính $R = 3$.

(C') có tâm $I(-1;-1)$, bán kính $R = 4$.

Ta có (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k thì $4 = k.3 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}$.

Câu 7:

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-2)$ và bán kính $R = \sqrt{9 + 4 + 23} = 6$.

$$T_{\vec{v}}(I(3;-2)) = I'(x';y') \text{ với } \vec{v} = (3;5)$$

$$\text{Dựa vào biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến ta có } \begin{cases} x' = 3 + 3 = 6 \\ y' = -2 + 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow I'(6;3).$$

$$\text{Ta có: } R' = \frac{1}{3}R = 2$$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn } (C'): (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Câu 8:

$$Q_{(O;-90^\circ)}(M(x;y)) = M_1(x_1;y_1); V_{(O;5)}(M_1) = M'(x';y')$$

$$\text{Ta có } Q_{(O;-90^\circ)}(M) = M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM_1 \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = -90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(3;0).$$

$$\text{Lại có } V_{(O;5)}(M_1) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 5\overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 15 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(15;0)$$

Vậy ảnh của M qua phép đồng dạng là $M'(15;0)$.

Câu 9:

$$Q_{(O;90^\circ)}(N(x;y)) = N_1(x_1;y_1); V_{(O;-3)}(N_1) = N'(x';y') .$$

$$\text{Ta có } Q_{(O;90^\circ)}(N) = N_1 \Leftrightarrow \begin{cases} ON = ON_1 \\ (ON, ON_1) = 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -6 \end{cases} \Rightarrow N_1(0;-6) .$$

$$\text{Lại có } V_{(O;-3)}(N_1) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{ON'} = 5\overrightarrow{ON_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 18 \end{cases} \Rightarrow N'(0;18) .$$

Vậy ảnh của N qua phép đồng dạng là $N'(0;18)$.

Câu 10:

Do phép tịnh tiến và phép quay bảo toàn khoảng cách giữa các điểm nên qua liên tiếp các phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$, phép quay $Q(B;60^\circ)$, phép vị tự $V_{(A;3)}$, ΔABC biến thành $\Delta A_1B_1C_1$ thì $A_1B_1 = 3AB = 6$

$$\text{Vì } \Delta A_1B_1C_1 \text{ có cạnh bằng 6 nên } S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (đơn vị diện tích).}$$