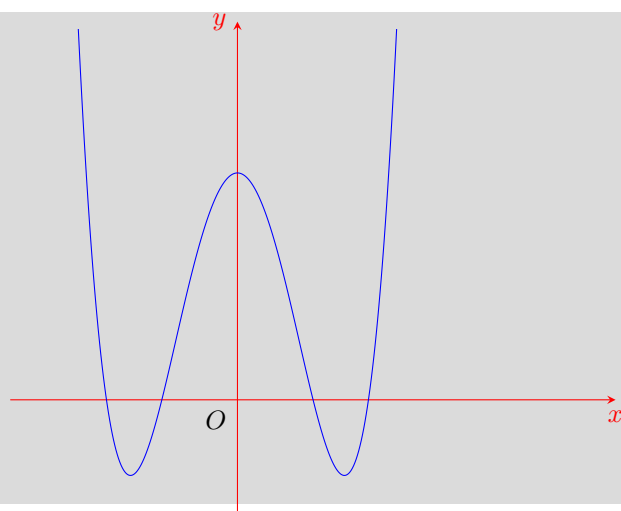


GV: LÊ QUANG XE

TÀI LIỆU HỌC TẬP

TOÁN 12

(Cập nhật đầy đủ các dạng toán của các năm gần đây)



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

PHẦN I ĐẠI SỐ

Chương 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ	1
Bài 1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ	1
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	1
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	2
Dạng 1. Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước	2
Dạng 2. Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị của hàm số	7
Dạng 3. Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$	10
Dạng 4. Tìm m để hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định	12
Dạng 5. Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước	14
Dạng 6. Biện luận đơn điệu của hàm phân thức trên khoảng, đoạn cho trước	17
Dạng 7. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp	18
Dạng 8. Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số	21
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	25
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	34
Bài 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	45
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	45
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	45
Dạng 1. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số	45
Dạng 2. Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị	48
Dạng 3. Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số	51
Dạng 4. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước	51
Dạng 5. Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	52
Dạng 6. Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$	55
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	57
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	67
Bài 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	78
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	78
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	79
Dạng 1. Tìm max – min của hàm số trên đoạn $[a; b]$ cho trước	79
Dạng 2. Tìm max – min trên một khoảng $(a; b)$ cho trước	83
Dạng 3. Một số bài toán ứng dụng trong thực tế	86
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	93
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	105

Bài 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	112
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	112
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	113
Dạng 1. Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$	113
Dạng 2. Xác định TCN và TCD khi biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$	117
Dạng 3. Một số bài toán biện luận theo tham số m	119
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN	123
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	134
Bài 5. ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP	143
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	143
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	144
Dạng 1. Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	144
Dạng 2. Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$	148
Dạng 3. Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$	151
(C) BÀI TẬP RÈN LUYỆN LUYỆN	155
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	167
Bài 6. ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.	176
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	176
(B) CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP	177
Dạng 1. Giải, biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị	177
Dạng 2. Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị	182
Dạng 3. Một số bài toán liên quan đến hàm hợp	184
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	191
(D) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	207
Bài 7. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ	225
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	225
(B) CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ	225
Dạng 1. Biện luận giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba	225
Dạng 2. Biện luận giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số trùng phương	230
Dạng 3. Biện luận giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$	234
(C) BÀI TẬP TỰ LUYỆN	239
Bài 8. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	252
(A) LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	252
(B) CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ	252
Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; y_0)$ cho trước	252
Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k_0	256

▢ Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$	259
▢ Dạng 4. Bài tập tổng hợp.....	262
Ⓒ BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....	265
Ⓓ BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	276



PHẦN

ĐẠI SỐ

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

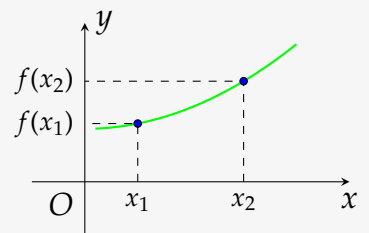
1. Định nghĩa tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 1.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Khi đó

☑ Hàm số đồng biến trên $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

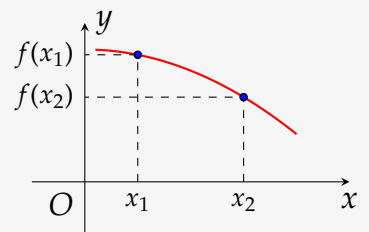
— Trên khoảng $(a; b)$, đồ thị là một "đường đi lên" khi xét từ trái sang phải.



☑ Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

— Trên khoảng $(a; b)$, đồ thị là một "đường đi xuống" khi xét từ trái sang phải.



2. Các tính chất thường dùng cho hàm đơn điệu

Tính chất 1.1.

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. Xét $m, n \in (a; b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m > n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m < n$.

④ Với $k \in \mathbb{R}$, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a; b)$.

☑ Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Xét $m, n \in (a; b)$.

① Nếu $f(m) = f(n)$ thì $m = n$.

② Nếu $f(m) > f(n)$ thì $m < n$.

③ Nếu $f(m) < f(n)$ thì $m > n$.

④ Với $k \in \mathbb{R}$, phương trình $f(x) = k$ có không quá 1 nghiệm thực trên $(a; b)$.

3. Liên hệ giữa đạo hàm và tính đơn điệu

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

- ① Nếu $y' \geq 0, \forall x \in (a; b)$ thì $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- ② Nếu $y' \leq 0, \forall x \in (a; b)$ thì $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

 Dấu bằng xảy ra chỉ tại các điểm "rời nhau".

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm khoảng đơn điệu của một hàm số cho trước

- a) Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số.
- b) Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i (nếu có).
- c) Lập bảng xét dấu y' trên miền $\mathcal{D}$. Từ dấu y' , ta suy ra chiều biến thiên của hàm số.
 - ✔ Khoảng y' mang dấu $-$: Hàm nghịch biến.
 - ✔ Khoảng y' mang dấu $+$: Hàm đồng biến.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☒ A Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 ☐ B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 ☐ C Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 ☐ D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

 Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-		
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		5	$\searrow$	$-\infty$
		1						

Từ bảng biến thiên ta được hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án ☒ A

□

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☒ A Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.

- ☐ B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$.
☐ C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.
☐ D Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			2		-2	$+\infty$
	$-\infty$					

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án ☐ D

Ví dụ 3

Hàm số $y = -x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- ☐ A $(-\infty; -\frac{1}{2})$. ☐ B $(-\frac{1}{2}; +\infty)$. ☐ C $(-\infty; 1)$. ☐ D $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$y' = -4x^3 + 6x^2 - 2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Chọn đáp án ☐ B

Ví dụ 4

Hàm số $y = x^4 + 8x^3 + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(0; +\infty)$. ☐ B $(-\infty; -6)$. ☐ C $(-6; 0)$. ☐ D $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x + 6)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$	$y(-6)$		$+\infty$

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.

Chọn đáp án (B) ☐

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- (B) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) ☐

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
- (B) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.
- (C) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- (D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

 **Lời giải.**

Hàm số đã cho có tập xác định là $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$, và $y' = \frac{-6}{(x-3)^2} > 0 \forall x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Do đó, hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) ☐

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = \frac{3-x}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- B** Hàm số nghịch biến với mọi $x \neq 1$.
- C** Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- D** Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{-4}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

Ví dụ 8

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^3(x-1)^2(x+2)$. Khoảng nghịch biến của hàm số là

- A** $(-\infty; -2); (0; 1)$.
- B** $(-2; 0); (1; +\infty)$.
- C** $(-\infty; -2); (0; +\infty)$.
- D** $(-2; 0)$.

Lời giải.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$f(-2)$		$f(1)$		$+\infty$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Chọn đáp án **D**

Ví dụ 9

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A** $y = \frac{x-1}{x+1}$.
- B** $y = \frac{2x+1}{x-3}$.
- C** $y = \frac{x-2}{2x-1}$.
- D** $y = \frac{x+5}{-x-1}$.

Lời giải.

✓ Với $y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến.

✔ Với $y = \frac{2x+1}{x-3} \Rightarrow y' = \frac{-7}{(x-3)^2} < 0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến.

✔ Với $y = \frac{x-2}{2x-1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(2x-1)^2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến.

✔ Với $y = \frac{x+5}{-x-1} \Rightarrow y' = \frac{4}{(-x-1)^2} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 10

Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào sau?

(A) $(0; 1)$.

(B) $(0; 2)$.

(C) $(1; 2)$.

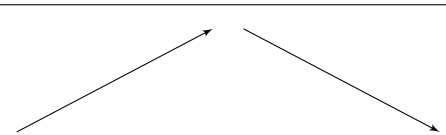
(D) $(1; +\infty)$.

 **Lời giải.**

Ta có $\mathcal{D} = [0; 2]$

$$y' = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2
y'	+	0	-
y			

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 11

Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

(A) $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

(B) $y = x^3 + 4x + 1$.

(C) $y = x^2 + 1$.

(D) $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

 **Lời giải.**

Với $y = x^3 + 4x + 1$ thì $y' = 3x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là tập xác định của hàm số.

Chú ý: Hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ có $y' = \frac{5}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$ nhưng không được kết luận hàm số đồng biến trên tập xác định, mà phải kết luận là hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của hàm số.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 12

Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A $f(x) = x^4 - 2x^2 - 4$.

B $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$.

C $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

D $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) = 0$ tại $x = 1$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **C**

□

Dạng 2 Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị của hàm số

✓ Nếu đề bài cho đồ thị $y = f(x)$, ta chỉ việc nhìn các khoảng mà đồ thị "đi lên" hoặc "đi xuống".

① Khoảng mà đồ thị "đi lên": hàm đồng biến;

② Khoảng mà đồ thị "đi xuống": hàm nghịch biến.

✓ Nếu đề bài cho đồ thị $y = f'(x)$. Ta tiến hành lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ theo các bước:

① Tìm nghiệm của $f'(x) = 0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);

② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);

③ Lập bảng biến thiên của $y = f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	-1	3	2

Hàm số đồng biến trên khoảng

A $(-1; 3)$.

B $(0; +\infty)$.

C $(-\infty; 0)$.

D $(2; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy

✓ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

✓ Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau.
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A** $(-\infty; 5)$. **B** $(0; 2)$.
C $(2; +\infty)$. **D** $(0; +\infty)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	5	3	$+\infty$	

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

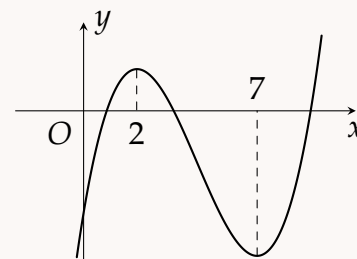
Chọn đáp án **C**



Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$.
C Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; 6)$.



Lời giải.

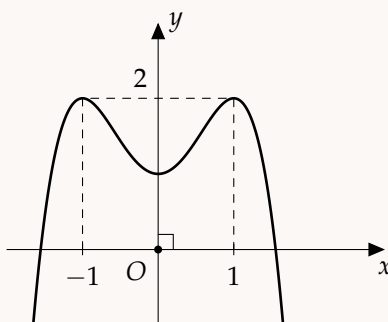
Dựa vào đồ thị thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 7)$, do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; 6)$.

Chọn đáp án **D**



Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A** $(-1; 1)$. **B** $(-1; 0)$. **C** $(-\infty; -1)$. **D** $(0; 1)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi xuống từ trái qua phải trên khoảng $(-1; 0)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án **(B)**

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			$+\infty$
			-2		-2		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)** $(0; 1)$. **(B)** $(-\infty; 0)$. **(C)** $(1; +\infty)$. **(D)** $(-1; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(A)**

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
(B) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	2	$+\infty$	2

Lời giải.

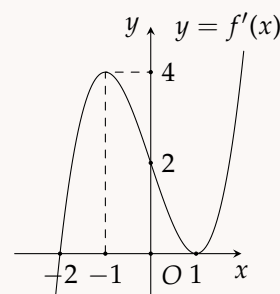
Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

- (A)** $(-\infty; -2); (1; +\infty)$. **(B)** $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$.
(C) $(-2; +\infty)$. **(D)** $(-5; -2)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

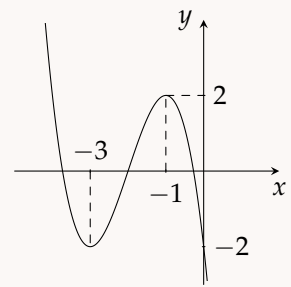
Chọn đáp án **(C)**

□

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

- (A)** $(-\infty; -3)$. **(B)** $(-3; -1)$. **(C)** $(-2; 2)$. **(D)** $(-2; -1)$.



 **Lời giải.**

Từ đồ thị, suy ra $y' > 0$ khi $x \in (-3; -1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Dạng 3 Tìm m để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$

a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

Ví dụ 1

Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + 4x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- (A)** 2. **(B)** vô số. **(C)** 3. **(D)** 4.

 **Lời giải.**

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 4mx + 4$$

Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2 - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}.$

$$\Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}.$$



Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A** $m \leq -3, m \geq 1$. **B** $-3 < m < 1$. **C** $-3 \leq m \leq 1$. **D** $m \leq 1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 - 2mx + (2m - 3)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 3

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m - 1)x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A** $1 < m \leq 2$. **B** $1 < m < 2$. **C** $1 \leq m \leq 2$. **D** $1 \leq m < 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m - 1)x^2 - 6(m - 1)x + 3$

$m = 1, y' = 3 > 0$

$m \neq 1$

$$y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ \Delta' = 9(m - 1)^2 - 3(m - 1) \cdot 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2.$$

Vậy $1 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

- A** $m \leq 0$. **B** $m \geq -2$. **C** $m \leq -3$. **D** $m \leq -1$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x < 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0.$$

Cách 1.



$$3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq m, \forall x < 0.$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 6x$ trên khoảng $(-\infty; 0)$, ta có: $g'(x) = 6x + 6$.

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Ta có $g(-1) = -3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-3	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $m \leq -3$.

Cách 2.

Ta có $\Delta' = 9 + 3m$.

Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x < 0$.

Nếu $\Delta' > 0$ thì y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó để $y' \geq 0, \forall x < 0$ thì ta phải có $0 \leq x_1 < x_2$.

Điều này không thể xảy ra vì $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$.

Vậy $m \leq -3$.

Chọn đáp án **C**

□

Dạng 4

Tìm m để hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định

a) Tính $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

b) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - cb > 0$.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

Ví dụ 1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định.

A $m \leq 1$.

B $m \leq -3$.

C $m < -3$.

D $m < 1$.

Lời giải.

$y' = \frac{m-1}{(x+1)^2}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định khi và chỉ khi $y' < 0 \Leftrightarrow m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x-m^2}{x-3m+2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

A $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B $m \in (-\infty; 1)$.

(C) $m \in (1; 2)$.

(D) $m \in (2; +\infty)$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \neq 3m - 2$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x - 3m + 2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 3

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x + m^2}{x + 1}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

(A) $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

(B) $m \in [-1; 1]$.

(C) $m \in \mathbb{R}$.

(D) $m \in (-1; 1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = \frac{1 - m^2}{(x + 1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow 1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x - m^2}{x - 3m + 2}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

(A) $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

(B) $m \in (-\infty; 1)$.

(C) $m \in (1; 2)$.

(D) $m \in (2; +\infty)$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \neq 3m - 2$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x - 3m + 2)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 5

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 10}{2x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

A 6.

B 5.

C 9.

D 4.

 **Lời giải.**

ĐKXĐ: $x \neq -\frac{m}{2}$.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 20}{(2x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 - 20 < 0 \\ -\frac{m}{2} \notin (0; 2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -2\sqrt{5} < m < 2\sqrt{5} \\ m \geq 0 \\ m \leq -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & m \in (-2\sqrt{5}; -4] \cup [0; 2\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án **A** □

Ví dụ 6

Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{3x + m}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -4)$?

A 9.

B 10.

C 6.

D 11.

 **Lời giải.**

ĐKXĐ: $x \neq -m$.

$y' = \frac{2m}{(x + m)^2}$.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m}{(x + m)^2} > 0 \\ -m \notin (-\infty; -4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ -m \notin (-\infty; -4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 4$.

Do m nguyên nên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vậy tổng các giá trị của m là 10.

Chọn đáp án **B** □

Dạng 5

Biện luận đơn điệu của hàm đa thức trên khoảng, đoạn cho trước

☒ **Loại 1:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên toàn miền xác định $\mathbb{R}$.

① Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c > 0. \end{cases}$

② Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c < 0. \end{cases}$

✓ **Loại 2:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên khoảng con của tập $\mathbb{R}$.

Ta thường gặp hai trường hợp:

① Nếu phương trình $y' = 0$ giải được nghiệm "đẹp": Ta thiết lập bảng xét dấu y' theo các nghiệm vừa tìm (*xét hết các khả năng nghiệm trùng, nghiệm phân biệt*). Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

② Nếu phương trình $y' = 0$ nghiệm "xấu": Ta sử dụng 1 trong 2 cách sau

Cách 1. Dùng định lý về so sánh nghiệm (*sẽ nói rõ hơn qua bài giải cụ thể*).

Cách 2. Cô lập tham số m , dùng đồ thị (*cách này xét sau*).

✓ **Loại 3:** Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ đơn điệu trên khoảng con của tập $\mathbb{R}$.

① Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm.

② Biện luận các trường hợp nghiệm (*nghiệm trùng, nghiệm phân biệt*). Từ đó "ép" khoảng mà dấu y' không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 2m$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tìm tập S .

(A) $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \geq 2\}$.

(B) $S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

(C) $S = \{-1; 0; 1\}$.

(D) $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| > 2\}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $y' = x^2 - 2mx + 4$.

Khi $\Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $\Delta' = m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = 0$ tại 1 điểm. Nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 2

Giá trị m để hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ là

(A) $0 < m < 3$.

(B) $m \geq 3$.

(C) $m \in [1; 3]$.

(D) $m \leq 3$.

Lời giải.

$$y' = -3x^2 + 2mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 2mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2m}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{2m}{3}$	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$				$-\infty$

$$ycbt \Leftrightarrow \frac{2m}{3} \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 3

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2+4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

(A) 1.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 2.

 **Lời giải.**

Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} y' \leq 0, \quad \forall x \in (0; 1) &\Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+2)x + 3(m^2+4m) \leq 0, \quad \forall x \in (0; 1) \\ &\Leftrightarrow (x-m)(3x-3m-12) \leq 0, \quad \forall x \in (0; 1) \\ &\Leftrightarrow m \leq x \leq m+4, \quad \forall x \in (0; 1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m+4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0. \end{aligned}$$

Suy ra có 4 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.

(A) $m \in [-5; 2)$.

(B) $m \in (-\infty; -5)$.

(C) $m \in (2; +\infty)$.

(D) $m \in (-\infty; 2]$.

 **Lời giải.**

Hàm số đồng biến trên $(1; 3)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow y' = 4x^3 - 4(m-1)x \geq 0, \quad \forall x \in (1; 3) \\ &\Leftrightarrow x^2 - m + 1 \geq 0, \quad \forall x \in (1; 3) \text{ (vì trong khoảng } (1; 3) \text{ ta có } x > 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq m, \quad \forall x \in (1; 3) \\ &\Leftrightarrow \min_{(1;3)} (x^2 + 1) \geq m \\ &\Leftrightarrow m \leq 2 \text{ (vì hàm số } y = x^2 + 1 \text{ đồng biến trên } (1; 3) \text{ nên } m \leq f(1)) \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Dạng 6

Biện luận đơn điệu của hàm phân thức trên khoảng, đoạn cho trước

✓ **Loại 1.** Tìm điều kiện của tham số để hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên từng khoảng xác định.

① Tính $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow ad - cb > 0$.

③ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó $\Leftrightarrow y' < 0 \Leftrightarrow ad - cb < 0$.

✓ **Loại 2.** Tìm điều kiện để hàm $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đơn điệu trên khoảng $(m;n) \subset \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

① Tính $y' = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.

② Hàm số đồng biến trên khoảng $(m;n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb > 0 \\ -\frac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\frac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

③ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(m;n)$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (m;n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad - cb < 0 \\ -\frac{d}{c} \leq m \text{ hoặc } -\frac{d}{c} \geq n \end{cases}$$

Ví dụ 1

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

A $m \leq 2$.

B $m > 2$.

C $m \geq 2$.

D $m < 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó khi $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án **D**

□

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

A 3.

B 4.

C 5.

D 1.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$.

Điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

$$\begin{aligned} & y' > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -m^2 + 2m + 3 > 0 \\ m \notin (2; +\infty) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & -1 < m \leq 2. \end{aligned}$$

Do đó $S = \{0; 1; 2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - m}$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

- (A) $\frac{1}{2} < m \leq 1$. (B) $m > \frac{1}{2}$. (C) $m \geq 1$. (D) $m \geq \frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{1 - 2m}{(x - m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m < 0 \\ m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$.

Chọn đáp án (C) □

Dạng 7 Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

☑ **Loại 1:** Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y = f(x)$.

- ① Tìm nghiệm của $f'(x) = 0$ (hoành độ giao điểm với trục hoành);
- ② Xét dấu $f'(x)$ (phần trên Ox mang dấu dương; phần dưới Ox mang dấu âm);
- ③ Lập bảng biến thiên của $y = f(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

☑ **Loại 2:** Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm hợp $y = f(u)$.

- ① Tính $y' = u' \cdot f'(u)$;
- ② Giải phương trình $f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$ (Nhìn đồ thị, suy ra nghiệm.);
- ③ Lập bảng biến thiên của $y = f(u)$, suy ra kết quả tương ứng.

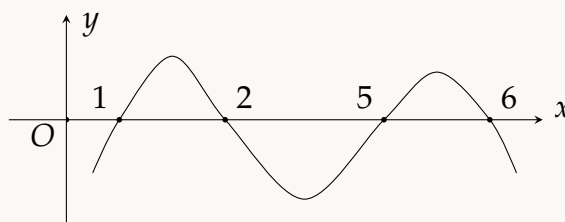
☑ **Loại 3:** Cho đồ thị $y = f'(x)$, hỏi tính đơn điệu của hàm $y = g(x)$, trong đó $g(x)$ có liên hệ với $f(x)$.

- ① Tính $y' = g'(x)$;

- ② Giải phương trình $g'(x) = 0$ (thường dẫn đến việc giải phương trình liên quan đến $f'(x)$).
Loại này ta nhìn hình để suy ra nghiệm).
- ③ Lập bảng biến thiên của $y = g(x)$, suy ra kết quả tương ứng.

Ví dụ 1

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ (đồ thị $f'(x)$ cắt Ox ở các điểm có hoành độ lần lượt là 1, 2, 5, 6). Chọn khẳng định đúng.



- Ⓐ $f(x)$ nghịch biến trên khoảng (1; 2).
Ⓑ $f(x)$ đồng biến trên khoảng (5; 6).
Ⓒ $f(x)$ nghịch biến trên khoảng (1; 5).
Ⓓ $f(x)$ đồng biến trên khoảng (4; 5).

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	5	6	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-
$f(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trong khoảng (5; 6).

Chọn đáp án Ⓑ

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như hình bên dưới

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng

- Ⓐ $(4; +\infty)$. Ⓑ $(-2; 1)$. Ⓒ $(2; 4)$. Ⓓ $(1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2f'(3 - 2x)$.

$$y' < 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x > 5 \\ -2 < 3 - 2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

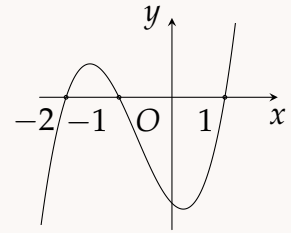
Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.

Chọn đáp án Ⓑ

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $f(x^2 - 2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A** $(0; 1)$. **B** $(1; \sqrt{3})$. **C** $(-1; 0)$. **D** $(-\sqrt{3}; 0)$.



Lời giải.

Ta có, hàm số $f(x^2 - 2)$ đồng biến khi

$$\begin{aligned} f'(x^2 - 2) &= 2xf'(x^2 - 2) > 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ f'(x^2 - 2) > 0 \end{cases} &\text{ hoặc } \begin{cases} 2x < 0 \\ f'(x^2 - 2) < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x^2 - 2 < -1 \\ x^2 - 2 > 1 \end{cases} &\text{ hoặc } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 2 < -2 \\ -1 < x^2 - 2 < 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} &\text{ hoặc } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < 0 \\ 1 < x^2 < 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x < 1 \\ x < -\sqrt{3} \\ x > \sqrt{3} \end{cases} &\text{ hoặc } \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x < 1 \\ -\sqrt{3} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > \sqrt{3} \end{cases} &\text{ hoặc } -\sqrt{3} < x < -1. \end{aligned}$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.

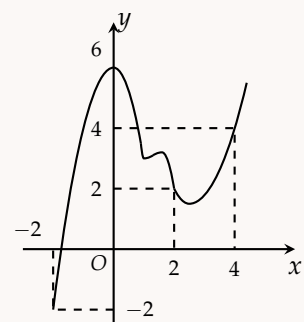
Chọn đáp án **A**

□

Ví dụ 4

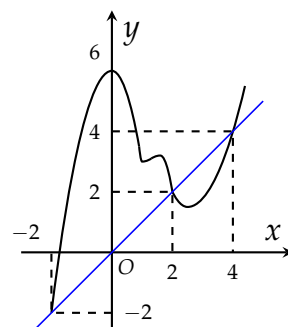
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
B Hàm số $y = h(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$.
C Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
D Hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.



Lời giải.

Ta có $h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ nên $h'(x) = f'(x) - x \Rightarrow h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq x$ và $h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq x$.
 Vẽ đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại ba điểm $(-2; -2)$, $(2; 2)$, $(4; 4)$, từ đó ta dễ dàng nhận thấy trên khoảng $(2; 4)$ thì $h'(x) < 0$.
 Do vậy hàm số $y = h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2; 4)$.



Chọn đáp án **(D)**

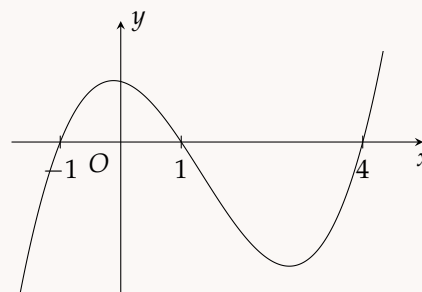


Dạng 8 Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số

...

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử?



(A) 5.

(B) 3.

(C) 4.

(D) 6.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $-1, 1$ và 4 . Suy ra $m \neq 0$.
 Khi đó $f'(x) = 4m(x+1)(x-1)(x-4) = 4m(x^3 - 4x^2 - x + 4)$. Suy ra

$$f(x) = m \left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x \right) + C.$$

$$\text{Đồng nhất với } f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r \text{ ta được } \begin{cases} n = -\frac{16m}{3} \\ p = -2m \\ q = 16m \\ r = C \end{cases}.$$

Từ đó, $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$

$$\Leftrightarrow mx^4 - \frac{16m}{3}x^3 - 2mx^2 + 16mx + r = 16m + 8 \cdot \left(-\frac{16m}{3} \right) + 4 \cdot (-2m) + 2 \cdot 16m + r$$

$$\Leftrightarrow mx^4 - \frac{16m}{3}x^3 - 2mx^2 + 16mx + \frac{8}{3}m = 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \frac{8}{3} = 0 \text{ (vì } m \neq 0 \text{)}.$$

Xét hàm số $g(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x + \frac{8}{3}$. Ta có

$$g'(x) = 4(x+1)(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$+$
g	$+\infty$	-9	$\frac{37}{3}$	$-\frac{152}{3}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra: $g(x) = 0$ có 4 nghiệm.

Chọn đáp án **(C)**

□

Ví dụ 2

Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $(8\sin^3 x - m)^3 = 162 \sin x + 27m$ có nghiệm thỏa mãn $0 < x < \frac{\pi}{3}$?

(A) 1.

(B) 3.

(C) Vô số.

(D) 2.

Lời giải.

Đặt $t = 2 \sin x$, với $0 < x < \frac{\pi}{3}$ thì $t \in (0; \sqrt{3})$.

Phương trình đã cho trở thành $(t^3 - m)^3 = 81t + 27m$.

Đặt $u = t^3 - m \Rightarrow t^3 = u + m$.

Khi đó ta được $\begin{cases} u^3 = 27(3t + m) \\ (3t)^3 = 27(u + m) \end{cases} \Rightarrow u^3 - (3t)^3 = 27(3t - u) \Leftrightarrow u^3 + 27u = (3t)^3 + 27.3t. \quad (*)$

Xét hàm số $f(v) = v^3 + 27v$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(v) = 3v^2 + 27 > 0, \forall v$ nên hàm số $f(v)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow u = 3t \Rightarrow t^3 - 3t = m \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ trên khoảng $(0; \sqrt{3})$. có $f'(t) = 3t^2 - 3; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Bảng biến thiên

t	0	1	$\sqrt{3}$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	0	-2	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (1) có nghiệm khi $-2 \leq m < 0$.

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)**

□

Ví dụ 3

Số giá trị nguyên của x là nghiệm của bất phương trình $\sqrt{4x^2 + x + 6} - \sqrt{x + 1} \geq 4x - 2$ là

(A) 0.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 2.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 6} - \sqrt{x + 1} - 4x + 2$ trên $[-1; +\infty)$, có

$$f'(x) = \frac{8x + 1}{2\sqrt{4x^2 + x + 6}} - \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} - 4, \forall x \in (-1; +\infty).$$

Ta thấy $\frac{8x + 1}{2\sqrt{4x^2 + x + 6}} \leq \frac{2|8x + 1|}{\sqrt{(8x + 1)^2 + 95}} < \frac{2|8x + 1|}{|8x + 1|} < 2 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in (-1; +\infty)$. Suy ra hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $[-1; +\infty)$.

Bất phương trình $\sqrt{4x^2 + x + 6} - \sqrt{x + 1} \geq 4x - 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$. Ta có

$$f(-1) = 9; f(0) = \sqrt{6} + 1; f(1) = \sqrt{11} - \sqrt{2} - 2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0, \forall x \geq -1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Chọn đáp án (D)



Ví dụ 4

Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{7 + 3x} - \sqrt[3]{7 - 3x} + 2019x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) + f(2x - 2x^2 - 5) < 0, \forall x \in (0; 1)$. Số phần tử của S là

(A) 7.

(B) 3.

(C) 9.

(D) 5.

Lời giải.

Vì $f(x) = \sqrt[3]{7 + 3x} - \sqrt[3]{7 - 3x} + 2019x$ là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$$\begin{aligned} f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) &< -f(2x - 2x^2 - 5) \\ \Leftrightarrow |x^3 - 2x^2 + 3x - m| &< 2x^2 - 2x + 5 \\ \Leftrightarrow -2x^2 + 2x - 5 &< x^3 - 2x^2 + 3x - m < 2x^2 - 2x + 5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 5x - 5 < m \\ x^3 + x + 5 > m. \end{cases} \end{aligned}$$

Xét $g(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 5$ và $h(x) = x^3 + x + 5$ trên $(0; 1)$ có bảng biến thiên là

x	0	1
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-5	-3

x	0	1
$h'(x)$	+	
$h(x)$	5	7

Từ bảng biến thiên suy ra $f(|x^3 - 2x^2 + 3x - m|) + f(2x - 2x^2 - 5) < 0, \forall x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \geq -3 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 5.$$

Vậy tập S có 9 phần tử.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 5

Với a là tham số thực để bất phương trình $2^x + 3^x \geq ax + 2$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi đó

A $a \in (-\infty; 0)$.

B $a \in (1; 3)$.

C $a \in (3; +\infty)$.

D $a \in (0; 1)$.

Lời giải.

Xét trường hợp $a \leq 0$, khi đó phương trình không nhận các giá trị âm của x làm nghiệm. Thật vậy, với $x < 0$ thì $2^x + 3^x < 2$ mà $ax + 2 \geq 2$. Suy ra loại $a \leq 0$.

Xét trường hợp $a > 0$ khi đó ta có $2^x + 3^x \geq ax + 2 \Leftrightarrow 2^x + 3^x - ax - 2 \geq 0$.

Đặt $f(x) = 2^x + 3^x - ax - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 = a$.

(1)

Đặt $g(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $g'(x) = 2^x \ln^2 2 + 3^x \ln^2 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, ta lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

Suy ra với mỗi giá trị $a > 0$ thì phương trình (1) luôn có nghiệm duy nhất là x_0 .

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là x_0 .

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -a < 0$ nên $f'(x) > 0$, $\forall x > x_0$ và $f'(x) < 0$, $\forall x < x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	$f(x_0)$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 , ta kết hợp với điều kiện đề bài là $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$ suy ra $x_0 = 0$ và $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f(x) = 0$.

Suy ra $x_0 = 0$ là giá trị duy nhất để $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(0) = \ln 2 + \ln 3 - a = 0$.

Suy ra $a = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$.

Như vậy a là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Suy ra mệnh đề đúng là $a \in (1; 3)$.

Chọn đáp án **C**



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A** $(1; 3)$. **B** $(2; +\infty)$. **C** $(-\infty; 0)$. **D** $(0; 3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$.

$y' \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2

Cho hàm số $y = x^2(3 - x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
B Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(+\infty; 3)$.
C Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
D Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 6x - 3x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	

Quan sát bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 3

Hàm số $y = 2x^4 + 3$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A** $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; 3)$. **C** $(-\infty; 0)$. **D** $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 4

Hàm số $y = x^4 + 8x^3 + 5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A** $(0; +\infty)$. **B** $(-\infty; -6)$. **C** $(-6; 0)$. **D** $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x + 6)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$y(-6)$	$+\infty$	$+\infty$	

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 5

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

(A) $(-1; 0)$.

(B) $(-1; +\infty)$.

(C) $(-3; 8)$.

(D) $(-\infty; -1)$.

 Lời giải.

$$y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 6

Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -x^4 + 8x^2 - 7$.

(A) $(-2; 0), (2; +\infty)$.

(B) $(-2; 0)$.

(C) $(-\infty; -2), (2; +\infty)$.

(D) $(2; +\infty)$.

 Lời giải.

$$y' = -4x^3 + 16x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0), (2; +\infty)$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 7

Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

(A) $y = -x^3 - x + 3$.

(B) $y = -x^4 + 4x^2 - 2$.

(C) $y = x^3 + 4x^2 - 1$.

(D) $y = x^4 - 5x + 7$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -x^3 - x + 3$. Ta có: $y' = -(3x^2 + 1) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 8

Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ với $a < b; a, b \in \mathbb{R}$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; a), (b; +\infty)$. Tính $S = 3a + 3b$.

(A) $S = 6$.

(B) $S = 9$.

(C) $S = 10$.

(D) $S = 12$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$ có $y' = 3x^2 - 10x + 3$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên (hình bên):

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ và $(3; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(\frac{1}{3}; 3)$.

Suy ra $a = \frac{1}{3}, b = 3 \Rightarrow S = 10$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 9

Tìm tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 2017$.

(A) $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

(B) $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

(C) $(-\infty; +\infty)$.

(D) $(-\infty; -\frac{1}{2})$.

Lời giải.

Vì $y' = -(2x + 1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và dấu bằng chỉ xảy ra khi $x = -\frac{1}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 10

Cho hàm số $y = -x^3 + 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

(B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

(D) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 \leq 0 \forall x$, do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 11

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tìm khẳng định đúng?

- ☐ A) Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- ☐ B) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- ☐ C) Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
- ☐ D) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

 **Lời giải.**

$y' = \frac{5}{(x+3)^2} > 0 \forall x \neq -3$ suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; +\infty)$.

Chọn đáp án ☒ D



Câu 12

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- ☐ A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- ☐ B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- ☐ C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
- ☐ D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

 **Lời giải.**

Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Có $y' = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án ☒ C



Câu 13

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- ☐ A) $y = \frac{x-2}{x-1}$.
- ☐ B) $y = \frac{x-2}{x+1}$.
- ☐ C) $y = -x^4 + x^2$.
- ☐ D) $y = -x^3 + 1$.

 **Lời giải.**

Xét phương án D

$y' = -3x^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án ☒ D



Câu 14

Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A) $(2; +\infty)$.
- ☐ B) $(0; +\infty)$.
- ☐ C) $(-2; 0)$.
- ☐ D) $(-2; 2)$.

 **Lời giải.**

Chọn đáp án ☒ A



Câu 15

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^4 - 4x^2 + 3$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

- ☐ A $(-\infty; -\sqrt{3}), (-1; 1)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.
 ☐ B $(-\sqrt{3}; -1)$ và $(1; \sqrt{3})$.
 ☐ C $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.
 ☐ D $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải.

Chọn đáp án ☒ A

Câu 16

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(2; +\infty)$.
 ☐ B $(-1; 1)$.
 ☐ C $(1; 2)$.
 ☐ D $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \pm 1$ nên ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Ta thấy $f'(x) > 0, \forall x \in (1; 2)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án ☒ C

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 ☐ B Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 ☐ C Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 ☐ D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$

Lời giải.

Chọn đáp án ☒ C

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- ☐ A Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
 ☐ B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 ☐ C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
 ☐ D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$		

Lời giải.

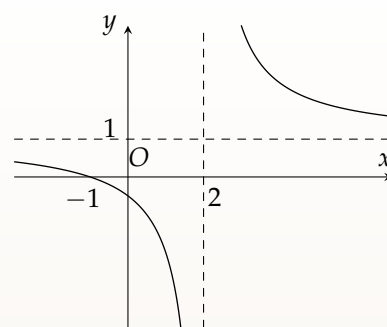
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-2; 2)$.

Chọn đáp án ☒ D

Câu 19

Đường cong của hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $y' < 0, \forall x \neq 1$.
- ☐ B $y' > 0, \forall x \neq 1$.
- ☐ C $y' > 0, \forall x \neq 2$.
- ☐ D $y' < 0, \forall x \neq 2$.



Lời giải.

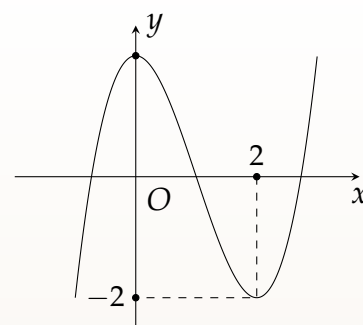
Chiều của đồ thị từ trái sang phải giảm xuống nên hàm số luôn nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng. Do đó $y' < 0, \forall x \neq 2$.

Chọn đáp án **D**

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- ☐ B Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
- ☐ C Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.
- ☐ D Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.



Lời giải.

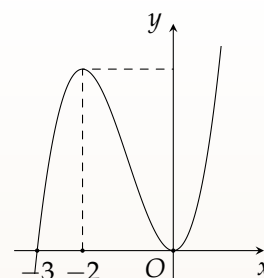
Dựa vào đồ thị ta thấy: Trên khoảng $(-\infty; -1)$, đồ thị là đường liên đi lên kể từ trái qua phải, nên hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

Chọn đáp án **C**

Câu 21

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

- ☐ A $(-\infty; 0)$.
- ☐ B $(-3; +\infty)$.
- ☐ C $(-\infty; 4)$.
- ☐ D $(-4; 0)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) \geq 0, \forall x \in (-3; +\infty)$, suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**



Câu 22

Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
 Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

💬 Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
y'		-		+
y	$+\infty$	0	0	$+\infty$

Ta thấy hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ



Câu 23

Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào?

- Ⓐ $(1; +\infty)$. Ⓑ $(-1; 1)$. Ⓒ $(-\infty; -1)$. Ⓓ $(\frac{1}{3}; 3)$.

💬 Lời giải.

Chọn đáp án Ⓑ



Câu 24

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- Ⓐ $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$ Ⓑ $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$
 Ⓒ $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$ Ⓓ $a > 0; b^2 - 3ac \leq 0$.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Khi $a = 0, b = 0, c > 0$ thì $y' = c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi $a \neq 0$, yêu cầu bài toán tương đương với $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án Ⓒ



Câu 25

Cho hàm số $f(x)$ có tính chất $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 3)$ và $f'(x) = 0 \forall x \in (1; 2)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- ☐ A) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.
- ☐ B) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
- ☐ C) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
- ☐ D) Hàm số $f(x)$ là hàm hằng (tức không đổi) trên khoảng $(1; 2)$.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta thấy } \begin{cases} f'(x) \geq 0 \forall x \in (0; 3) \\ f'(x) = 0 \forall x \in (1; 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \forall x \in (0; 1) \\ f'(x) > 0 \forall x \in (2; 3) \\ f'(x) = 0 \forall x \in (1; 2) \end{cases}.$$

Vậy khẳng định “Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 3)$ ” là một khẳng định sai.

Chọn đáp án ☐ A

□

Câu 26

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đồng biến trên $(0; 2)$ thì hàm số $y = f(2x)$ luôn đồng biến trên khoảng nào?

- ☐ A) $(0; 4)$.
- ☐ B) $(0; 2)$.
- ☐ C) $(-2; 0)$.
- ☐ D) $(0; 1)$.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = f(2x)$ đồng biến thì $0 < 2x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Chọn đáp án ☐ D

□

Câu 27

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (2m + 1)x - 3m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- ☐ A) $m \in (-\infty; +\infty)$.
- ☐ B) $m \leq 0$.
- ☐ C) $m \geq -\frac{1}{2}$.
- ☐ D) $m < -\frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

$y' = x^2 + 2m + 1$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2m + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4(2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án ☐ C

□

Câu 28

Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- ☐ A) 5.
- ☐ B) 6.
- ☐ C) 7.
- ☐ D) 4.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ là hàm bậc 3 có hệ số $a = -1 < 0$ nên điều kiện cần và đủ để $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$ là $y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$

Chọn đáp án ☐ C

□



Câu 29

Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

☐ A $m \leq 2$.

☐ B $m > 2$.

☐ C $m \geq 2$.

☐ D $m < 2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó khi $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án ☒ D



Câu 30

Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$. Các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định của nó là

☐ A $1 < m < 2$.

☐ B $\begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$.

☐ C $1 < m \leq 2$.

☐ D $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{m^2 - 3m + 2}{(x+m-3)^2}$, $x \neq -m+3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Chọn đáp án ☒ A



—HẾT—



D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.
- (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{1}{2})$ và $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$, với mọi $x \neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 2

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
- (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 4)$.
- (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; 1)$.
- (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 3

Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ đồng biến trên khoảng nào?

- (A) $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- (B) $(-1; 1)$.
- (C) $(-\infty; 1)$.
- (D) $\mathbb{R}$.

 **Lời giải.**

Tập xác định : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có : $y' = 3x^2 - 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 4

Hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(1; 2)$. (B) $(-\infty; +\infty)$. (C) $(-\infty; 2)$. (D) $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án (A) ☐

Bài 5

Hàm số $y = -\frac{x^4}{2} + 1$ đồng biến trên khoảng

- (A) $(-\infty; 1)$. (B) $(1; +\infty)$. (C) $(-3; 4)$. (D) $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y' = -2x^3$. Suy ra $y' = 0 \Rightarrow x = 0$. Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$-\infty$	1	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án (D) ☐

Bài 6

Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- (A) $y = x^4 + 2x^2 + 2$. (B) $y = \frac{x-1}{2x+1}$. (C) $y = x^3 + x - 5$. (D) $y = x + \tan x$.

Lời giải.

✔ Hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ và $y = x + \tan x$ không xác định trên $\mathbb{R}$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

✔ Hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2$ có $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ nên chỉ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

✔ Hàm số $y = x^3 + x - 5$ có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) ☐

Bài 7

Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- (A) $y = x^4 + 2x^2$. (B) $y = x^3 + 3x$. (C) $y = \frac{x-3}{2x+1}$. (D) $y = x^3 - 3x$.

 Lời giải.

✓ $y = x^4 + 2x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4x.$

$y' > 0 \Leftrightarrow x > 0; y' < 0 \Leftrightarrow x < 0.$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty).$

✓ $y = x^3 + 3x \Rightarrow y' = 3x^2 + 3.$

$y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty).$

✓ $y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow y' = \frac{7}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

✓ $y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3.$

$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty); y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1).$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1); (1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 1).$

Chọn đáp án (B) □

Bài 8

Hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

(A) $(-1; +\infty).$

(B) $(3; +\infty).$

(C) $(-\infty; 3).$

(D) $(-\infty; +\infty).$

 Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq 1.$

Ta có $y' = -\frac{4}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq 1.$

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty).$

Chọn đáp án (B) □

Bài 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3-x)(x^2-1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}.$ hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

(A) $(3; +\infty).$

(B) $(-\infty; 1).$

(C) $(1; 2).$

(D) $(-1; 0).$

 Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x.$

Hàm số $g'(x)$ đồng biến khi $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) - 2x \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Đối chiếu các đáp án, hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(1; 2).$

Chọn đáp án (C) □

Bài 10

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}.$ Biết hàm số đó có đạo hàm là $f'(x) = (x+1)(x^2-3x+2)^3(x-1)^{2019}.$ Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(3; 10).$

(B) $(-1; 1).$

(C) $(-2; 2).$

(D) $(1; 2).$

 Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$	$+$
$(x^2 - 3x + 2)^3$	$+$		$+$	0	$+$
$(x - 1)^{2019}$	$-$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

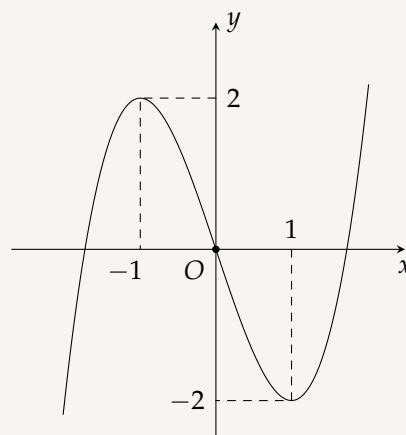
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(3; 10)$.

Chọn đáp án **(A)**

Bài 11

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên, hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- (A)** $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. **(B)** $(-1; 1)$.
(C) $(-\infty; 2)$. **(D)** $(-2; 2)$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

Bài 12

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
(D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Chọn đáp án **(A)**

Bài 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				0			$+\infty$
			-1			-1		

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(-\infty; -1)$.
 ☐ B $(-1; +\infty)$.
 ☐ C $(0; 1)$.
 ☐ D $(-1; 0)$.

 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án ☒ D



Bài 14

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(-1; 1)$.
 ☐ B $(-2; 2)$.
 ☐ C $(1; +\infty)$.
 ☐ D $(-\infty; 1)$.

 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

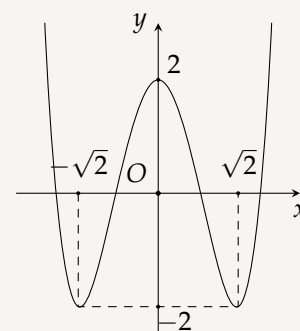
Chọn đáp án ☒ A



Bài 15

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- ☐ A $(0; \sqrt{2})$.
 ☐ B $(-2; 2)$.
 ☐ C $(-\infty; 0)$.
 ☐ D $(\sqrt{2}; +\infty)$.



 **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên khoảng $(0; \sqrt{2})$ đồ thị đi xuống nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó.

Chọn đáp án **A**



Bài 16

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-5	0	-32	$+\infty$

Hỏi hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A** $(-1; 2)$. **B** $(-\infty; 0)$. **C** $(0; +\infty)$. **D** $(-1; 0)$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, nhận thấy đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có mũi tên đi lên khi $x \in (-1; 0)$ và $x \in (2; +\infty)$. Suy ra, hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**



Bài 17

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$	0
y	$-\infty$	2	-1	3	2

Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
B Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.
C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.
D Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$ nên nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

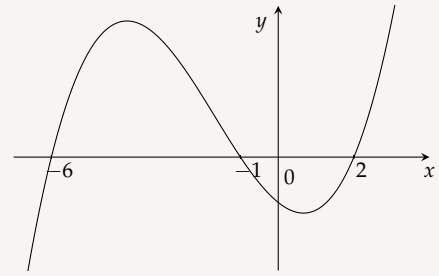
Chọn đáp án **D**



Bài 18

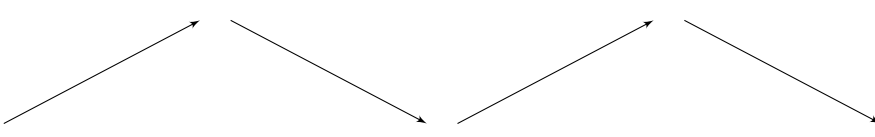
Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

- A** (2; 3). **B** (-1; 0). **C** (-2; -1). **D** (0; 1).



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-6	-1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y					

Đặt $g(x) = f(3 - x^2)$ ta có

$$g'(x) = -2xf'(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -6 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

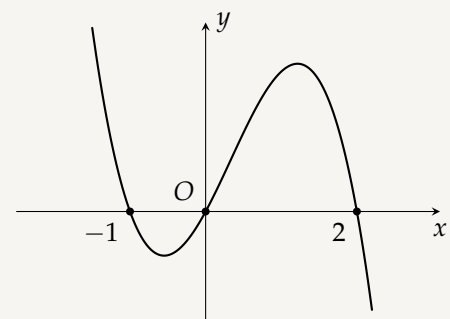
Chọn đáp án **B**

□

Bài 19

Cho hàm số bậc bốn $f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(3 - 2x)$ được cho như hình bên. Hàm số $y = f(x^2 + 1)$ nghịch biến trên khoảng nào

- A** $(-\infty; 0)$. **B** (0; 1). **C** (2; $+\infty$). **D** $(-1; 0)$.



Lời giải.

Đặt $t = 3 - 2x \Rightarrow f'(t) = f'(3 - 2x)$.

$$\text{Cho } f'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 5 \\ x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 2 \Rightarrow t = -1. \end{cases}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-1)$	$f(3)$	$f(5)$	$+\infty$

Xét $g(x) = f(x^2 + 1)$, ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 + 1)$.

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = -1 \\ x^2 + 1 = 3 \\ x^2 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$g(-2)$	$g(-\sqrt{2})$	$g(0)$	$g(\sqrt{2})$	$g(2)$	$+\infty$

Do đó hàm số $f(x^2 + 1)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án **D**

Bài 20

Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+2}$. Tập hợp tất cả các giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A** $(2; +\infty)$. **B** $(-\infty; 2)$. **C** $(-\infty; 2]$. **D** $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{2-m}{(x+2)^2}$. Với $m = 2$ thì hàm số đã cho trở thành hàm hằng. Vậy

$$\begin{aligned} &\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (0; +\infty) \\ &\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ &\Leftrightarrow \frac{2-m}{(x+2)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty) \\ &\Leftrightarrow m < 2. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các giá trị của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ là $(-\infty; 2)$.

Chọn đáp án **B**

Bài 21

Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 + mx$ luôn đồng biến trên tập số thực.

- A** $m \leq -3$. **B** $m < -3$. **C** $m \geq 0$. **D** $m < 0$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + m$. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 0$.

Chọn đáp án **(C)**



Bài 22

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$?

(A) $m \geq -\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{1}{2} < m < 0$ hoặc $m > 1$.

(C) $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

(D) $m > -\frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

Đặt $t = \sin x$.

Hàm số $y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ khi $f(t) = \frac{-2t - 1}{t - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Ta có $f'(t) = \frac{2m + 1}{(t - m)^2}$.

Hàm số $f(t) = \frac{-2t - 1}{t - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ khi $\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m \leq 0 \\ 1 \leq m \end{cases}$.

Chọn đáp án **(C)**



Bài 23

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 3mx + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

(A) $m \leq -1$.

(B) $m \geq -1$.

(C) $m \geq -3$.

(D) $m \leq -3$.

 **Lời giải.**

• $y' = -3x^2 - 6x + 3m$.

• Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 3m \leq 0$ với mọi $x \in (-\infty; 0)$

$\Leftrightarrow m \leq x^2 + 2x$ với mọi $x \in (-\infty; 0)$ mọi $x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Chọn đáp án **(A)**



Bài 24

Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{mx^2}{2} + 2x + 2017$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(A) $-2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

(B) $-2\sqrt{2} \leq m$.

(C) $m \leq 2\sqrt{2}$.

(D) $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$.

 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ta có

$$x^2 + mx + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**



Bài 25

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (4m - 3)x + 2017$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- (A) $1 \leq m \leq 3$. (B) $1 < m < 3$. (C) $-3 \leq m \leq -1$. (D) $-3 < m < -1$.

Lời giải.

Tính đạo hàm : $y' = x^2 - 2mx + 4m - 3$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3.$$

Chọn đáp án (A) □

Bài 26

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$. Tập các giá trị của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ là

- (A) $[-2; -1)$. (B) $(-1; 2]$. (C) $(-1; +\infty)$. (D) $(-1; 2)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{m+1}{(x+m)^2} > 0$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 2$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 27

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x$ nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$. Tính tổng các phần tử của S .

- (A) $S = -2$. (B) $S = -1$. (C) $S = 0$. (D) $S = 1$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Khi đó $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2) = 3(x-m)(x-m-2)$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow 3(x-m)(x-m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(m)$	$f(m+2)$	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(m; m+2)$.

Để hàm số nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$ thì $\begin{cases} m \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.

Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0\}$. Vậy $S = -1$.

Chọn đáp án (B)



Bài 28

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

(A) 6.

(B) Vô số.

(C) 3.

(D) 0.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } y = \frac{x+1}{x+3m} = 1 + \frac{1-3m}{x+3m} \Rightarrow y' = -\frac{1-3m}{(x+3m)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 1-3m > 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}.$

Do m nguyên nên $m \in \{0, -1, -2\}.$

Chọn đáp án (C)



Bài 29

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2).$

(A) $m \in (1; +\infty).$

(B) $m \in (2; +\infty).$

(C) $m \in [2; +\infty).$

(D) $m \in [1; +\infty).$

 **Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định } x \neq m. \text{ Ta có } y' = \frac{-m+1}{(x-m)^2}.$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } (-\infty; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ m \notin (-\infty; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 < 0 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

2.

Chọn đáp án (C)



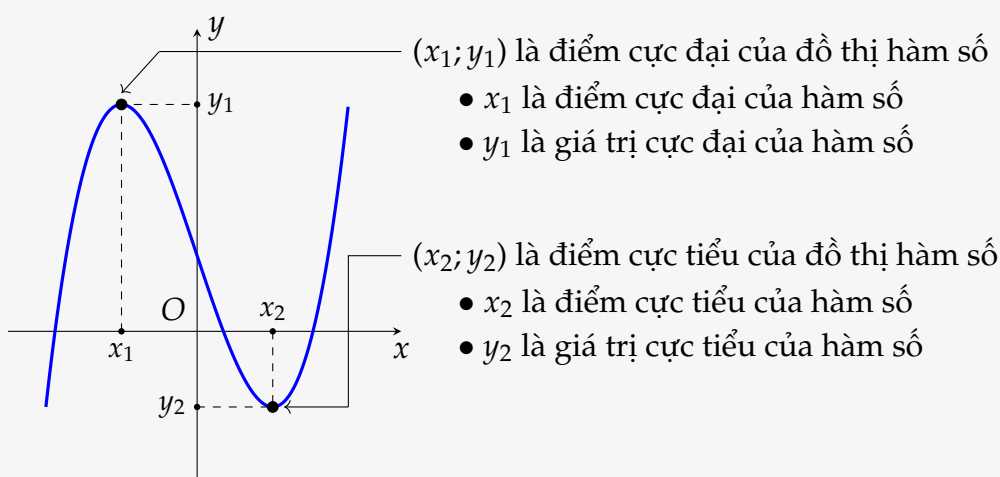
—HẾT—

§2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Định nghĩa 2.1.

- ☑ Hàm số đạt cực trị tại x_0 thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$ hoặc x_0 là điểm mà tại đó đạo hàm không xác định (chiều ngược lại nói chung không đúng).
- ☑ Bảng tổng kết tên gọi:



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 1) để tìm cực trị cực hàm số

- a) Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm x_i và những điểm x_j mà đạo hàm không xác định;
- b) Đưa các nghiệm x_i và x_j lên bảng xét dấu và xét dấu y' ;
- c) Lập bảng biến thiên và nhìn "điểm dừng":
 - ✔ "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1; y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1; y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**.
 - ✔ "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2; y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2; y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**.

Ví dụ 1

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$ là

- A $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$.
 B $(0; 2)$.
 C $\left(\frac{50}{27}; \frac{2}{3}\right)$.
 D $(2; 0)$.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{50}{27} \end{cases}$.

Có $y'' = 6x - 2 \Rightarrow y''(0) = -2, y''\left(\frac{2}{3}\right) = 2$. Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $\left(\frac{2}{3}; \frac{50}{27}\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 2

Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại

- (A) $x = 0$. (B) $x = -\sqrt{3}$. (C) $x = \sqrt{3}$. (D) $x = \pm\sqrt{3}$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = 2x^3 - 6x$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$-\frac{15}{2}$	-3		$-\frac{15}{2}$		$+\infty$

Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 3

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 1$ là

- (A) $(-1; -1)$. (B) $(0; -1)$. (C) $(-1; 0)$. (D) $(1; -1)$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = 4x^3, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(0; -1)$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C). Gọi A, B là các điểm cực trị của (C). Tính độ dài đoạn thẳng AB.

- (A) $AB = 2\sqrt{5}$. (B) $AB = 5$. (C) $AB = 4$. (D) $AB = 5\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Khi đó $y' = 3x^2 - 6x$ và $y'' = 6x - 6$.

Xét $y' = 0$ suy ra $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Mà $y''(0) = -6 < 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x_{CD} = 0$ suy ra $y_{CD} = 2$.

Tương tự $y''(2) = 6 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT} = 2$ suy ra $y_{CT} = -2$.

Giả sử A(0; 2) và điểm B(2; -2) ta có $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 5

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

- (A) $y = -2x - 1$. (B) $y = -2x + 1$. (C) $y = 2x - 1$. (D) $y = 2x + 1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$, do đó hàm số đã cho có hai điểm cực trị là A(0; 1) và B(2; -3).

Đường thẳng đi qua hai điểm A, B có phương trình $y = -2x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}$ có đồ thị (C). Tính diện tích của tam giác tạo thành từ 3 điểm cực trị của đồ thị (C).

- (A) $S = \frac{5\sqrt{3}}{4}$. (B) $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$. (C) $S = \sqrt{3}$. (D) $S = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = -x^3 + 3x$, cho $y' = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$.

Đồ thị có 3 điểm cực trị là A $\left(0; -\frac{5}{4}\right)$, B $(\sqrt{3}; 1)$ và C $(-\sqrt{3}; 1)$.

Mà tam giác ABC cân tại A có $BC = 2\sqrt{3}$ và $h = \frac{9}{4}$ nên $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + 1$. Gọi $M(x_1; y_1)$ là điểm cực tiểu của đồ thị của hàm số đã cho. Tính tổng $x_1 + y_1$.

(A) 5.

(B) -11.

(C) 7.

(D) 6.

Lời giải.

Ta có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
			$\frac{0}{6}$	
y	$+\infty$		-10	$+\infty$

Suy ra tọa độ điểm cực tiểu là $M(-1; -10)$.

Vậy $x_1 + y_1 = -11$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Dạng 2 Xác định cực trị khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

☑ **Loại 1:** Cho bảng biến thiên hoặc đồ thị hàm $y = f(x)$. Ta nhìn "điểm dừng":

- ① "Dừng" trên cao tại điểm $(x_1; y_1)$ thì x_1 là điểm cực đại của hàm số; y_1 là giá trị cực đại (cực đại) của hàm số; $(x_1; y_1)$ là tọa độ điểm **cực đại của đồ thị**
- ② "Dừng" dưới thấp tại điểm $(x_2; y_2)$ thì x_2 là điểm cực tiểu của hàm số; y_2 là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số; $(x_2; y_2)$ là tọa độ điểm **cực tiểu của đồ thị**

☑ **Loại 2:** Cho đồ thị hàm $f'(x)$. Ta thực hiện tương tự như ở phần đồng biến, nghịch biến.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số là

(A) 4.

(B) 2.

(C) -1.

(D) 3.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$
			0	$+$
y	$-\infty$	4	3	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. Giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A** Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $x = 1$.
- B** Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .
- C** Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 .
- D** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	2	$-\infty$	$-\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có $x = -2$ và $x = 1$ lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

Chọn đáp án **A**

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^{2017}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(1; 2)$ và $(3; +\infty)$.
- B** Hàm số có 3 điểm cực trị.
- C** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
- D** Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $x = 3$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

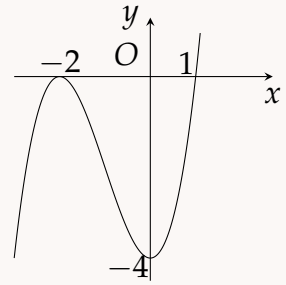
x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2		-2	$+\infty$

ta thấy hàm số nghịch biến trên $(1; 3)$.

Chọn đáp án **C**

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $f'(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng về cực trị của hàm số $f(x)$?



- ☐ A) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- ☐ B) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- ☐ C) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
- ☐ D) Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.

 **Lời giải.**

Từ đồ thị của đạo hàm $f'(x)$, ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

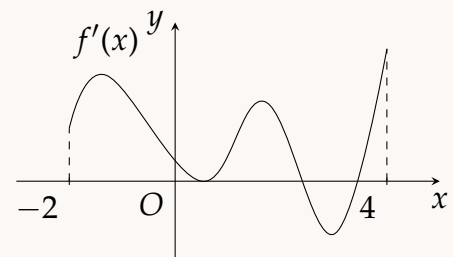
Vậy hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Chọn đáp án ☒ B

□

Ví dụ 5

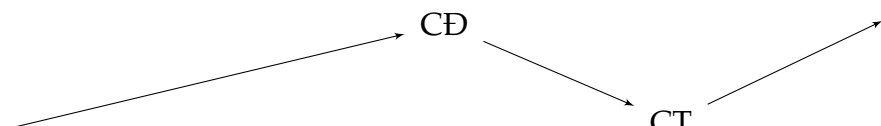
Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn $[-2; 4]$ của hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



- ☐ A) 1.
- ☐ B) 0.
- ☐ C) 2.
- ☐ D) 3.

 **Lời giải.**

Đồ thị ta thấy $f'(x) = 0$ tại ba điểm theo thứ tự x_1, x_2, x_3 . Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		x_1		x_2		x_3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$									

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ có một cực tiểu.

Chọn đáp án ☒ A

□

Dạng 3 Ứng dụng đạo hàm (quy tắc 2) để tìm cực trị cực hàm số

Chỉ dùng khi hàm số có đạo hàm cấp 2 tại x_0 . Ta thực hiện các bước:

a) Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$, tìm nghiệm x_0 .

b) Tính y'' .

✔ Nếu $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

✔ Nếu $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

⚠ Ghi nhớ: "âm" lồi, "dương" lõm

Ví dụ 1

Hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ

Ⓐ $x = \pm\sqrt{2}$.

Ⓑ $x = \pm 1$.

Ⓒ $x = 1$.

Ⓓ $x = \pm 2$.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = x^4 - 4x^2 + 1 = 4x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$
		-3		-3	

Vậy hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ $x = \pm\sqrt{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ

Ví dụ 2

Tìm các điểm cực tiểu của hàm số $y = \sin 2x - x$.

Ⓐ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Ⓑ $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Ⓒ $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Ⓓ $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

💬 Lời giải.

Chọn đáp án Ⓑ

Dạng 4 Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước

a) Giải điều kiện $y'(x_0) = 0$, tìm m .

b) Thử lại với m vừa tìm được bằng một trong hai cách sau:

✔ Cách 1: Lập bảng biến thiên với m vừa tìm được. Xem giá trị m nào thỏa yêu cầu.

✔ Cách 2. Tính y'' . Thử $y''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CĐ; $y''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ là điểm CT.

Ví dụ 1

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- ☒ A $m = 1$. ☐ B $m = 3$.
☐ C $m = 1$ hoặc $m = 3$. ☐ D $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4mx + m^2$, $y'' = 6x - 4m$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m^2 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án ☒ A □

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ với m là tham số. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$?

- ☒ A $m = -3$. ☐ B $m = 3$. ☐ C $m = -1$. ☐ D $m = 0$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{4 + 4m + m^2 - 1}{(2 + m)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Ta có $y'' = \frac{2}{(x + m)^3}$.

✔ Với $m = -1$, ta có $y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

✔ Với $m = -3$, ta có $y''(2) = -2 < 0 \Rightarrow x = 2$ là điểm cực đại của hàm số.

Vậy với $m = -3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Chọn đáp án ☒ A □

Dạng 5

Biện luận cực trị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) Biện luận nghiệm phương trình $y' = 0$ (phương trình bậc hai).

✔ $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$: Hàm số có hai điểm cực trị

☑ $\Delta \leq 0$ hoặc suy biến $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$: Hàm số không có cực trị.

b) Định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a}$ (nhìn trực tiếp từ hàm số).

• $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; • $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$
 • $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$.

c) Các công thức tính toán thường gặp • Độ dài $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$
 • Khoảng cách từ M đến Δ : $d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, với $\Delta: Ax + By + C = 0$.
 • Tam giác ABC vuông tại $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
 • Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$, với $\overrightarrow{AB} = (a_1; b_1)$, $\overrightarrow{AC} = (a_2; b_2)$.

d) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là $y = -\frac{2}{9a}(b^2 - 3ac)x + d - \frac{bc}{9a}$.

Ví dụ 1

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 5mx - 1$ không có cực trị?

(A) 6.

(B) 3.

(C) 5.

(D) 4.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 5m$, hàm số không có cực trị khi $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 5$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 2

Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m + 1)x + 2$ có hai điểm cực trị.

(A) $m < 2$.

(B) $m \leq 2$.

(C) $m > 2$.

(D) $m < -4$.

💬 Lời giải.

$y' = 3x^2 - 6x + m + 1$, $\Delta' = 6 - 3m$. Để hàm số có hai điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt tức là $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 3

Cho $y = (m - 3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m + 4)x - 1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Tìm số phần tử của S .

(A) 4.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 7.

💬 Lời giải.

$y' = 3(m-3)x^2 + 4(m^2 - m - 1)x + m + 4$. Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Leftrightarrow (m-3)(m+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 4

Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = b - a$.

- (A) $T = 2 + \sqrt{3}$. (B) $T = 1 + \sqrt{3}$. (C) $T = 2 - \sqrt{3}$. (D) $T = 3 - \sqrt{3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$ xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có $y' = 3(x^2 - 2mx + 3)$.

Điều kiện hàm số có cực trị: $m^2 - 3 > 0$. Lúc này theo Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 3 \end{cases}$.

Theo giả thiết $|x_1 - x_2| \leq 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \leq 4$.

Mà m dương nên $3 < m^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < m \leq 2$.

Vậy $a = \sqrt{3}, b = 2 \Rightarrow b - a = 2 - \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + m - 2$ với m là tham số. Tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = 2$ bằng

- (A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2m. \end{cases}$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A, B .

Ta có $A(0; m-2), B(-2m; -4m^3 + m - 2)$.

Do đó

$$\begin{aligned} AB^2 &= 4m^2 + 16m^6 = 4 \Leftrightarrow 4m^6 + m^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra tổng bằng 0.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 6

Tìm m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O .

- (A) $m = \frac{1}{2}$. (B) $m = -1$. (C) $m = 1$. (D) $m = 0$.

**Dạng 6****Biện luận cực trị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$**

a) Tính $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $2ax^2 + b = 0$ (1).

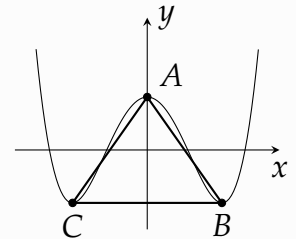
b) Nhận xét:

- ✔ Hàm số có ba điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm khác 0. Suy ra $ab < 0$
- ✔ Hàm số có đúng một điểm cực trị $ab \geq 0$ và a, b không đồng thời bằng 0.

c) Các công thức tính nhanh:

✔ $\cos A = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$

✔ $S_{ABC}^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$.

**Ví dụ 1**

Cho hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

A $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$.

B $m \in (-1; 0)$.

C $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

D $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải.

$$y' = 4(m+1)x^3 - 2mx = 2x[2(m+1)x^2 - m]$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2(m+1)x^2 - m = 0 (*) \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \frac{m}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Ví dụ 2

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-2)x^4 + (m^2-4)x^2 + 2m-3$ có đúng 1 điểm cực trị.

A $m \in [-2; 2)$.

B $m \in [-2; +\infty) \setminus \{2\}$.

C $m \in [-2; 2]$.

D $m \in [-2; +\infty)$.

Ví dụ 3

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1-m$ là ba đỉnh của một tam giác vuông.

A $m = \frac{2}{3}$.

B $m = \frac{1}{3}$.

C $m = -1$.

D $m = \sqrt[3]{3}$.

 Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4(3m - 2)x$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - 3m \end{cases}$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{2}{3}$.

Khi đó, tọa độ ba điểm cực trị là $A(0; 10m)$, $B(\sqrt{2 - 3m}; -(2 - 3m)^2 + 1 - m)$

và $C(-\sqrt{2 - 3m}; -(2 - 3m)^2 + 1 - m)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2 - 3m}; -(2 - 3m)^2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2 - 3m}; -(2 - 3m)^2)$

Nhận xét: $\triangle ABC$ luôn cân tại A .

Do đó, ABC tạo thành tam giác vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(2 - 3m) + (2 - 3m)^4 = 0$

$\Leftrightarrow (2 - 3m)^3 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4

Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $m_0 \in (-1; 1]$. (B) $m_0 \in (-2; -1]$. (C) $m_0 \in (-\infty; -2]$. (D) $m_0 \in (-1; 0)$.

 Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m)$.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; -1)$, $B(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$, $C(\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$.

Gọi H là trung điểm của BC , ta có $H(0; -m^2 - 1)$.

Ta có $BC = \sqrt{(2\sqrt{-m})^2} = 2\sqrt{-m}$, $AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2$.

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{-m} \cdot m^2 = \sqrt{-m} \cdot m^2$.

Theo giả thiết, ta có $S_{ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{-m} \cdot m^2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow m = -2$.

Chọn đáp án (C) □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1

Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là

- (A) (0; 1). (B) (2; -3). (C) (1; -1). (D) (3; 1).

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$	

Vậy tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ là (0; 1).

Chọn đáp án (A)

□

Câu 2

Gọi x_1 là điểm cực đại x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- (A) 2. (B) 1. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Vì y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = -1$ và đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x = 1$ nên $x_2 = -1$ là điểm cực tiểu và $x_1 = 1$ là điểm cực đại của hàm số. Do đó $x_1 + 2x_2 = 1 - 2 = -1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 3

Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là

- (A) 4. (B) -4. (C) -2. (D) 2.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên suy ra

$y_{CD} = 4, y_{CT} = 0$ nên $y_{CD} - y_{CT} = 4$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$+\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 4

Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^4 + 5x^2 - 2$ là

- (A)** $y = 0$. **(B)** $x = -2$. **(C)** $x = 0$. **(D)** $y = -2$.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 + 10x = -2x(2x^2 - 5)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số như sau :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$
y		$\frac{17}{4}$		$\frac{17}{4}$		
	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nwarrow$	$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 5

Cho hàm số $y = x^4 - 8x^3 + 1$. Chọn mệnh đề đúng.

- (A)** Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực đại. **(B)** Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực tiểu.
(C) Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực đại. **(D)** Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực tiểu.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4x^3 - 24x^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	6	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$
y	$+\infty$		-431	$+\infty$

Vậy hàm số nhận $x = 6$ làm điểm cực tiểu.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 6

Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ là

- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** 0. **(D)** 1.

Lời giải.

Cần nhớ: Hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có $ab < 0$ thì có ba cực trị và $ab > 0$ thì có một cực trị.

Do đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 7

Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

- (A) Có hệ số góc dương. (B) Song song với trục hoành.
(C) Có hệ số góc bằng -1 . (D) Song song với đường thẳng $x = 1$.

Lời giải.

Giả sử x_0 là hoành độ điểm cực tiểu của đồ thị khi đó $y'(x_0) = 0 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm cực tiểu là $k = y'(x_0) = 0$ do đó tiếp tuyến tại điểm cực tiểu song song với trục hoành.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- (A) $S = 8$. (B) $S = \sqrt{3}$. (C) $S = 2$. (D) $S = 4$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Do đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 4), B(2; 0)$.

Diện tích tam giác vuông OAB là $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đến trục tung bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 0.

Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Điểm cực tiểu của đồ thị là $(2; -2)$. Do đó khoảng cách cần tìm bằng 2.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10

Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 10$ có đồ thị (C). Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị (C). Tính diện tích S của tam giác ABC .

- (A) $S = 64$. (B) $S = 32$. (C) $S = 24$. (D) $S = 12$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 16x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

Tọa độ 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 10), B(-2; -6), C(2; -6)$.

Gọi H là trung điểm $BC \Rightarrow H(0; -6)$.

Theo tính chất của hàm trùng phương nên tam giác ABC cân tại A .

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2}16 \cdot 4 = 32$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 11

Tìm hàm số có đồ thị (C) nhận điểm $N(1; -2)$ là cực tiểu

(A) $y = x^4 - x^2 - 2$.

(B) $y = x^4 + 2x^2 - 4$.

(C) $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

(D) $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$. Ta được bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	-1	-2	$-\infty$		

Dựa vào bảng biến thiên ta có $N(1; -2)$ là cực tiểu.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 12

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 4$. Diện tích tam giác tạo bởi ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

(A) 4.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) 1.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 + 4x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; -4), B(1; -3), C(-1; -3)$.

Ta có $H(0; -3)$ là trung điểm BC . Suy ra AH là đường cao.

Suy ra $S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 13

Hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 3.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$ nên hàm số không có cực trị.

Chọn đáp án **C****Câu 14**Số điểm cực trị của hàm số $y = x^{2017}(x + 1)$ là

- A** 2017. **B** 2. **C** 1. **D** 0.

Lời giải.

$$y' = (2018x + 2017)x^{2016} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2017}{2018} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{2017}{2018}$	$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$		0	$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

Chọn đáp án **C****Câu 15**Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A** Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến.
B Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
C Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.
D Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$		CT	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.Chọn đáp án **C**

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

 **Lời giải.**

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+

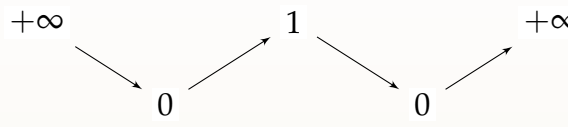
Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$		1		$+\infty$



Giá trị cực đại của hàm số là

- (A) $y = 1$. (B) $y = 0$. (C) $x = 1$. (D) $x = 0$.

 **Lời giải.**

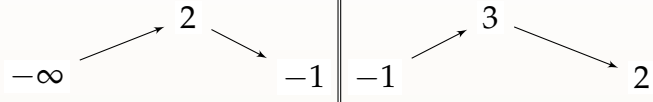
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y_{\text{CD}} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	+	0
y		2		3	



Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

 **Lời giải.**

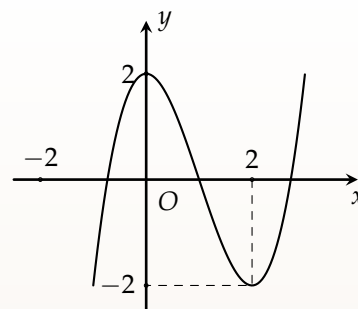
Từ bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu khi qua $x = -1$ và $x = 1$ nên hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (B) □

Câu 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
☐ B Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.
☐ C Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.
☐ D Hàm số có ba điểm cực trị.



 **Lời giải.**

Từ đồ thị hàm số ta thấy, hàm số đạt giá trị cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án (C)

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- (A)** $x = 0$. **(B)** $x = 2$. **(C)** $y = 0$. **(D)** $y = 2$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0

 **Lời giải.**

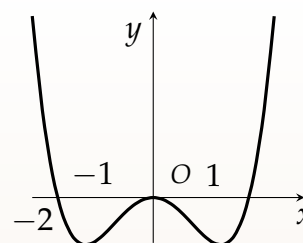
Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Chọn đáp án (A)

Câu 21

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K , biết đồ thị của hàm số $y' = f'(x)$ trên K như hình vẽ bên. Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên K .

- ☐ A 1.
 ☐ B 2.
- ☐ C 3.
 ☐ D 4.



 **Lời giải.**

Gọi x_0 và x_1 là hai hoành độ giao điểm khác 0 của đồ thị hàm số $f'(x)$ với trục hoành.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_0	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$

Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu trên K .

Chọn đáp án (B)

Câu 22

Hàm số $y = x - 3\sqrt[3]{x^2}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 8.



 Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$, xác định với mọi $x \neq 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 8.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
y'	+		- 0 +	
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$

Vậy hàm số có 2 điểm cực trị.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23

Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

- (A) $m = 3$. (B) $m = 1$. (C) $m = -1$. (D) $m = -3$.

 Lời giải.

Ta có: $y' = 3x^2 - 4mx + m^2$, $y'' = 6x - 4m$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24

Với giá trị nào của m thì hàm số $y = mx^3 - 3mx + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$?

- (A) $m = 3$. (B) $m < 0$. (C) $m = 1$. (D) $m \neq 0$.

 Lời giải.

Xét hàm số $y = mx^3 - 3mx + 2$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $y' = 3mx^2 - 3m$ và $y'' = 6mx$.

Hàm số $y = mx^3 - 3mx + 2$ đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 3m = 0 \\ 6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 25

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m + 1$ có hai điểm cực trị.

- (A) $m \geq 0$. (B) $\forall m \in \mathbb{R}$. (C) $m \leq 0$. (D) $m \neq 0$.

 Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 - mx^2 + \left(m + \frac{4}{3}\right)x + 10$ có hai điểm cực trị. Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m \in S$ và thỏa $|m| \leq 2018$?

- (A) 4031. (B) 4036. (C) 4029. (D) 4033.

Lời giải.

Ta có:

$$y' = 3x^2 - 2mx + m + \frac{4}{3}$$

$$\text{Để hàm số có hai cực trị thì } m^2 - 3m - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 4. \end{cases}$$

Vậy có 4031 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27

Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m - 1)x^2 + 6(m - 2)x - 18$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 5)$ là

- (A) $(-\infty; -3) \cup (7; +\infty)$. (B) $(-3; +\infty) \setminus \{3\}$.
(C) $(-\infty; 7) \setminus \{3\}$. (D) $(-3; 7) \setminus \{3\}$.

Lời giải.

$$y' = 6x^2 + 6(m - 1)x + 6(m - 2).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m - 1)x + (m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \in (-5; 5) \\ x_2 = -m + 2. \end{cases}$$

$$\text{Hàm số có hai điểm cực trị thuộc khoảng } (-5; 5) \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 \neq -1 \\ -5 < -m + 2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -3 < m < 7. \end{cases}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28

Biết đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0; -1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

- (A) $b < 0$ và $c = -1$. (B) $b \geq 0$ và $c > 0$. (C) $b < 0$ và $c < 0$. (D) $b \geq 0$ và $c = -1$.

Lời giải.

✓ Đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị $\Rightarrow b \geq 0$.

✓ Điểm cực trị $(0; -1)$ thuộc đồ thị hàm số suy ra $c = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29

Cho hàm số $y = (m + 1)x^4 - mx^2 + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

- (A) $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. (B) $m \in (-1; 0)$.
(C) $m \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. (D) $m \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (m+1) \cdot (-m) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30

Cho hàm số $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại. Tính tổng các phần tử của tập S .

(A) 1.

(B) 2.

(C) 6.

(D) 0.

Lời giải.

Ta có : $f'(x) = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x = 2x[2x^2 + 6mx + 3(m+1)]$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 2x^2 + 6mx + 3(m+1) = 0 \quad (1) \end{cases}$$

✔ Trường hợp 1: (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép khi và chỉ khi $\frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

✔ Trường hợp 2: (1) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0, suy ra $m = -1$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$ hay $S = \{-1; 0; 1\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là : $-1 + 0 + 1 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

—HẾT—

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Hàm số $y = x^3 - 3x + 2018$ đạt cực tiểu tại điểm

- (A) $x = -1$. (B) $x = 3$. (C) $x = 0$. (D) $x = 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x + 2018$. Ta có $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án (D)



Bài 2

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x + 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$ và $f'(x)$ đổi dấu qua các điểm $x = -1, x = 0$. Vậy hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Chọn đáp án (D)



Bài 3

Trong các hàm số sau, hàm số nào có 2 cực tiểu

- (A) $y = x^2 - 2x + 3$. (B) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 1$.
(C) $y = -x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1$. (D) $y = x^4 - x^2$.

Lời giải.

Loại đáp án A (vì là hàm bậc hai) và loại đáp án B (vì đây là hàm bậc ba).

Vì hàm số có 2 cực tiểu nên hệ số $a > 0$. Vậy đáp số là hàm $y = x^4 - x^2$. (vì $a = 1 > 0$).

Chọn đáp án (D)



Bài 4

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có điểm cực tiểu là

- (A) $x = -1$. (B) $x = 1$. (C) $(1; -1)$. (D) $(-1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ và $y''(1) > 0$. Vậy đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(1; -1)$.

Chọn đáp án (C)



Bài 5

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ có hai điểm cực trị thuộc đường thẳng (d) có phương trình là

- (A)** $y = 2x$. **(B)** $y = -2x - \sqrt{3}$. **(C)** $y = x - \sqrt{3}$. **(D)** $y = 2x + \sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ là

$$(d): y = \frac{(x^2 + 2)'}{(x - 1)'} = 2x.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 6

Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- (A)** 2. **(B)** 3. **(C)** -1. **(D)** 1.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x(x^2 - 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	2	3	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $y_{CT} = 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Bài 7

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ đạt cực đại tại x_1 và cực tiểu tại x_2 . Tính tích $T = y(x_1) \times y(x_2)$.

- (A)** $T = -207$. **(B)** $T = 0$. **(C)** $T = 161$. **(D)** $T = -302$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	9	-23	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra $y(x_1) = 9, y(x_2) = -23$, nên suy ra $T = 9 \times (-23) = -207$.

Chọn đáp án (A)



Bài 8

Hàm số $y = |x^2 - 2x - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

(A) 2.

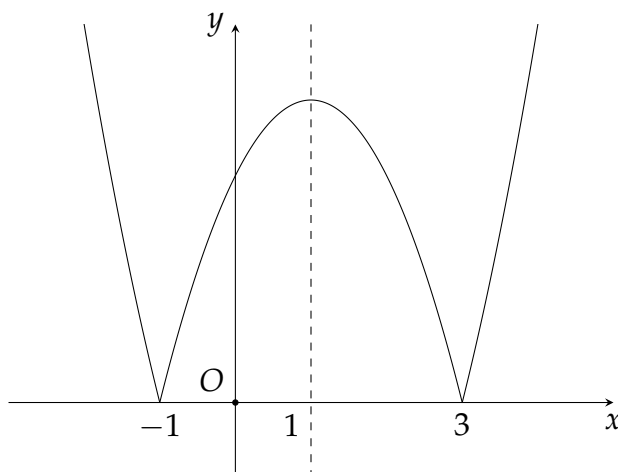
(B) 3.

(C) 5.

(D) 1.

🗨️ Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |x^2 - 2x - 3|$



Dựa vào đồ thị, hàm số có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)



Bài 9

Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

(A) 0.

(B) 1.

(C) 3.

(D) -1.

🗨️ Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$y' = 3x^2 - 3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			3		$+\infty$	
	$-\infty$			-1		

Chọn đáp án (D)



Bài 10

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	$ $	$+$
y			2			$+\infty$
	$-\infty$			-1		

Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.
- (B) Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng -1 .
- (C) Hàm số có giá trị cực đại bằng 1 .
- (D) Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Chọn đáp án (A)

Bài 11

Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- (A) 2.
- (B) 1.
- (C) 3.
- (D) 0.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy có điểm $x = a$, với $a \in (-\infty; -3)$ mà $f'(a) = 0$. Và $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm $x = a$. Nên $x = a$ là một điểm cực trị.

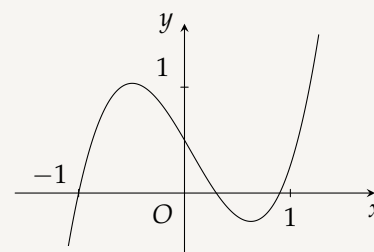
Mặt khác trên khoảng $(-3; +\infty)$ thì $f'(x) \leq 0$, do đó hàm số đã cho có duy nhất một điểm cực trị.

Chọn đáp án (B)

Bài 12

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 0.
- (D) 3.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị trên, suy ra số điểm cực trị của hàm số là 2.

Chọn đáp án (B)

Bài 13

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$				3		$+\infty$
			-4			-4	

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

(A) $x = -4$.

(B) $x = 0$.

(C) $x = 3$.

(D) $x = -1, x = 1$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$.

Chọn đáp án (D)



Bài 14

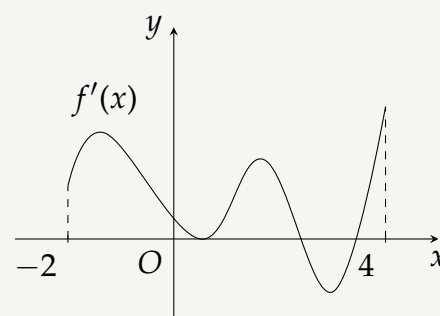
Tìm số điểm cực tiểu trên đoạn $[-2; 4]$ của hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 3.



Lời giải.

Đồ thị ta thấy $f'(x) = 0$ tại ba điểm theo thứ tự x_1, x_2, x_3 . Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-2		x_1		x_2		x_3		4
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$					CD			CT	

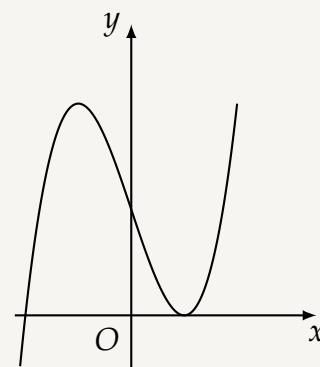
Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ có một cực tiểu.

Chọn đáp án (A)



Bài 15

Đường cong hình bên là đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- (A)** Phương trình $y' = 0$ chỉ có 1 nghiệm thực và $a < 0$.
- (B)** Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt và $a > 0$.
- (C)** Phương trình $y' = 0$ chỉ có 2 nghiệm thực phân biệt và $a < 0$.
- (D)** Phương trình $y' = 0$ chỉ có 1 nghiệm thực và $a > 0$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$ và đồ thị có hai cực trị nên $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

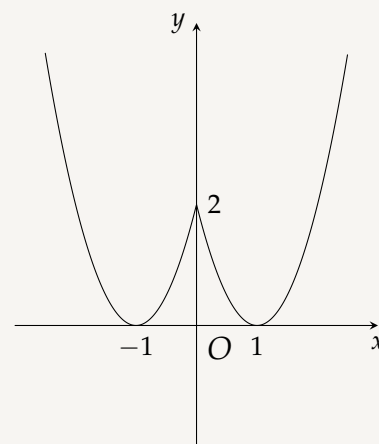
Chọn đáp án **(B)**

□

Bài 16

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên

- (I). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- (II). Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.
- (III). Hàm số có ba điểm cực trị.
- (IV). Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2.



Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên là

- (A)** 4.
- (B)** 2.
- (C)** 3.
- (D)** 1.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy

- ✔ Đồ thị đi xuống trên khoảng $(0; 1)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$. Do đó (I) đúng.
- ✔ Đồ thị đi lên trên khoảng $(-1; 0)$, đi xuống trên khoảng $(0; 1)$ và đi lên trên khoảng $(1; 2)$ nên trên khoảng $(-1; 2)$ hàm số không hoàn toàn đồng biến. Do đó (II) sai.
- ✔ Đồ thị hàm số có ba điểm hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên (III) đúng.
- ✔ Giá trị lớn nhất của hàm số là tung độ của điểm cao nhất của đồ thị hàm số nên (IV) sai.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2018 = -1 \\ x - 2018 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2017 \\ x = 2021. \end{cases}$$

Ta có $g(2017) = f(2017 - 2018) + 2019 = 4038$; $g(2021) = f(2021 - 2018) + 2019 = 0$.

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$

x	$-\infty$	2017		2021		$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		$-\infty$ 4038 0 $-\infty$ 4038 0 0 $+\infty$					$+\infty$

Khi đó bảng biến thiên $|g(x)|$ là

x	$-\infty$	x_0	2017	2021	$+\infty$
$ g(x) $	$+\infty$		4038		$+\infty$
		0		0	

Vậy hàm số $y = |f(x - 2018) + 2019|$ có 3 điểm cực trị.

Chọn đáp án (D)

□

Bài 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

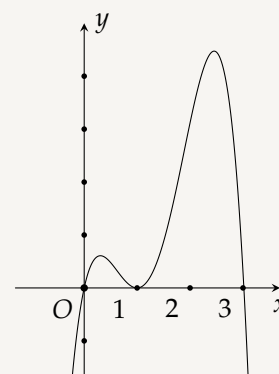
Hàm số $y = (f(x))^2$ có bao nhiêu cực trị?

(A) 3.

(B) 5.

(C) 6.

(D) 4.



 Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị, ta có } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (kép) và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \text{ (với } 0 < a < 1) \\ x = 1 \\ x = b \text{ (với } 2 < b < 3). \end{cases} \end{cases}$$

Bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$	0	a	1	b	3	$+\infty$		
$f(x)$	−	0	+	+	0	+	+	0	−
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	0	−	−
y'	−	0	+	0	−	0	+	0	+

Hàm số $y = (f(x))^2$ có cực trị khi và chỉ khi y' đổi dấu khi x đi qua x_0 . Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu 5 lần. Vậy hàm số đã cho có 5 cực trị.

Chọn đáp án (B)

□

Bài 20

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	+
$f(x)$							

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- ☐ A Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.
 ☐ B Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
 ☐ C Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.
 ☐ D Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Lời giải.

Dựa vào Bảng biến thiên, ta có hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Chọn đáp án ☒ C

□

Bài 21

Cho hàm số $y = (1 - m)x^4 - mx^2 + 2m - 1$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có đúng một cực trị

- ☐ A $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.
 ☐ B $(-\infty; 1]$.
 ☐ C $[0; +\infty)$.
 ☐ D $[0; 1]$.

Lời giải.

TH1: $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Hàm số trở thành hàm bậc 2 $y = -x^2 + 1$ rõ ràng có 1 cực trị nên $m = 1$ thỏa yêu cầu đề bài.

TH2: $1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Ta có $y' = 4(1 - m)x^3 - 2mx = 2x[2(1 - m)x^2 - m]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x[2(1 - m)x^2 - m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{m}{2(1 - m)} \end{cases}$$

Để hàm số có đúng 1 cực trị thì phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm (điều kiện này chỉ đúng với hàm trùng phương, chưa chắc đúng với các hàm số khác) nghĩa là phương trình $x^2 = \frac{m}{2(1 - m)}$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} m = 0 \\ \frac{m}{2(1 - m)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Vậy giá trị m thỏa yêu cầu đề bài là $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$ hay $m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án ☒ A

□

Bài 22

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

$$f(x) = -x^3 + 2(2m - 1)x^2 - (m^2 - 8)x + 2$$

đạt giá trị cực tiểu tại điểm $x = -1$.

- A** $m = -2$. **B** $m = 3$. **C** $m = 1$. **D** $m = -9$.

 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 4(2m - 1)x - (m^2 - 8) \Rightarrow f''(x) = -6x + 4(2m - 1)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu tại điểm $x = -1$ thì $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$.

✔ Với $m = 1$, ta có $f''(-1) = 10 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

✔ Với $m = -9$, ta có $f''(-1) = -70 < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Vậy $m = 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Bài 23

Tìm giá trị thực của m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 1$ đạt cực đại tại $x_0 = 3$.

- A** $m = 1$. **B** $m = -1$. **C** $m = 5$. **D** $m = -7$.

 **Lời giải.**

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + m^2 - 4$ và $f''(x) = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 3$ khi

$$\begin{cases} f'(3) = 0 \\ f''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy với $m = 5$ thì hàm số đã cho đạt cực đại tại $x_0 = 3$.

Chọn đáp án **C** □

Bài 24

Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ là

- A** $m > 0$. **B** $m < 0$. **C** $m \in \mathbb{R}$. **D** Không tồn tại m .

 **Lời giải.**

Ta có $y' = x^4 - mx^3 = x^3(x - m)$.

✔ $m = 0 \Rightarrow y' = x^4 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

✔ $m > 0$. Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ (thỏa mãn).

✔ $m < 0$. Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$

Hàm số đạt cực đại tại $x = m$ (không thỏa mãn).

Chọn đáp án **A**



Bài 25

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

- A** $m \in \{-1; -3\}$. **B** $m \in \{1; 3\}$. **C** $m = 1$. **D** $m = 3$.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1$, $y'' = 2x + 2(m^2 - m + 2)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2 \Rightarrow y'(-2) = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$

✔ Với $m = 1 \Rightarrow y' = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

✔ Với $m = 3 \Rightarrow y'(-2) = 0$, $y''(-2) = 12 > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm của m .

Chọn đáp án **D**



Bài 26

Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A** $y(-2) = 2$. **B** $y(-2) = 22$. **C** $y(-2) = 6$. **D** $y(-2) = -18$.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \\ y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Suy ra $y(-2) = -18$.

Chọn đáp án **D**



—HẾT—



§3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

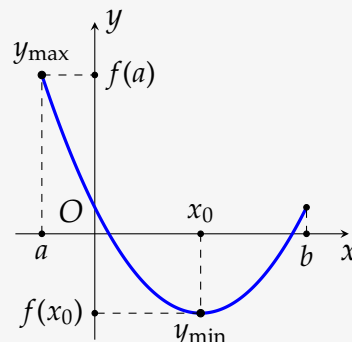
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số

Định nghĩa 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta có

✔ M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M \end{cases}$
 Kí hiệu $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

✔ n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n \end{cases}$
 Kí hiệu $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



2. Các phương pháp thường dùng để tìm max - min

Phương pháp 3.1. Ta sử dụng một số phương pháp sau để tìm max - min.

✔ Dùng đạo hàm (đối với hàm một biến), lập bảng biến thiên.

- Tìm GTLN - GTNN trên một đoạn $[a; b]$
- Tìm GTLN - GTNN trên một khoảng $(a; b)$

✔ Dùng bất đẳng thức đánh giá và kiểm tra dấu bằng

① Bất đẳng thức Cauchy: Với $a_1; a_2; \dots; a_n$ là các số thực không âm, ta luôn có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Trường hợp thường gặp Cauchy cho 2 số hoặc 3 số:

$$\bullet a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}. \quad \bullet a_1 + a_2 + a_3 \geq 3\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}.$$

② Bất đẳng thức Bu-nhia-cốp-xki: Với hai bộ số $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; \dots; b_n$, ta luôn có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

✔ Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình.

Giả sử y_0 thuộc miền giá trị của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, tồn tại $x \in \mathcal{D}$ để phương trình $f(x) = y_0$ có nghiệm. Biện luận điều kiện này, ta sẽ tìm được "khoảng dao động" của y_0 . Từ đó suy ra max, min.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm max – min của hàm số trên đoạn $[a; b]$ cho trước

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ khi đó hàm số luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau

a) Tính y' và tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.

b) Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$. Khi đó

$$\text{✓ } \max_{x \in [a; b]} f(x) = \max_{x \in [a; b]} \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), f(b)\}$$

$$\text{✓ } \min_{x \in [a; b]} f(x) = \min_{x \in [a; b]} \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_i), f(b)\}$$

$$\text{✓ } \text{Nếu hàm số } y = f(x) \text{ luôn tăng hoặc luôn giảm trên } [a; b] \text{ thì } \max_{x \in [a; b]} f(x) = \max\{f(a), f(b)\}; \min_{x \in [a; b]} f(x) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Ví dụ 1

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + 9$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng

(A) 5.

(B) 10.

(C) -10.

(D) -5.

Lời giải.

$$\text{Có } y' = 5x^4 - 4x^3 - 9x^2; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = \frac{9}{5} \notin [-2; 1]. \end{cases}$$

$$\text{Có } \begin{cases} y(-2) = -15 \\ y(1) = 6 \\ y(0) = 9 \\ y(-1) = 10 \end{cases} \text{ . Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số } f(x) \text{ là } -15 + 10 = -5.$$

Chọn đáp án (D)

□

Ví dụ 2

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

(A) 5.

(B) 0.

(C) 7.

(D) 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \notin [2; 4].$$

$$\text{Khi đó } f(2) = 7, f(4) = 57.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[2; 4]$ bằng 7.

Chọn đáp án (C)

□

Ví dụ 3

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

- (A) 12. (B) 98. (C) 17. (D) 73.

 Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$

Khi đó: $y(-4) = 21, y(-3) = 28, y(1) = -4, y(4) = 77$.

Do đó $M + m = 77 + (-4) = 73$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 4

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- (A) $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$. (B) $\min_{[0;3]} y = -3$. (C) $\min_{[0;3]} y = 1$. (D) $\min_{[0;3]} y = -1$.

 Lời giải.

Trên đoạn $[0; 3]$ hàm số luôn xác định.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 3]$ nên hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[0; 3]$.

Do đó $\min_{[0;3]} y = y(0) = -1$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 5

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ bằng

- (A) 4. (B) -3. (C) $-\frac{7}{2}$. (D) $-\frac{13}{3}$.

 Lời giải.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in \left[-2; \frac{1}{2}\right] \\ x = 2 \notin \left[-2; \frac{1}{2}\right] \end{cases}$.

Ta có $y(0) = -3, y(-2) = -\frac{13}{3}, y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$.

Suy ra $\max_{x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]} y = -3$

Chọn đáp án (B) □



Ví dụ 6

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

(A) $M = 4$.

(B) $M = \sqrt{7}$.

(C) $M = 7$.

(D) $M = 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-1; 7]$.

$$y' = \frac{-x + 3}{\sqrt{7 + 6x - x^2}}.$$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in \mathcal{D}$.

Có $y(3) = 4, y(-1) = 0, y(7) = 0$. Vậy $M = 4$.

Chọn đáp án (A) ☐

Ví dụ 7

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

(A) $3\sqrt[3]{9}$.

(B) $2\sqrt[3]{9}$.

(C) $\frac{33}{5}$.

(D) $\frac{25}{4}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có

$$y = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} = 3\sqrt[3]{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{2}$.

Chọn đáp án (A) ☐

Ví dụ 8

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{mx + 1}{x - m}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 3. Khi đó giá trị m thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

(B) $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

(C) $\left(0; \frac{3}{4}\right)$.

(D) $\left(\frac{3}{4}; 11\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-m^2 - 1}{(x - m)^2} < 0, \forall m$.

+) Xét $f(1) = \frac{m + 1}{1 - m} = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. Khi đó thay $m = \frac{1}{2}$ vào hàm số ta được giá trị lớn nhất của hàm số là $f(1) = 3$.

+) Xét $f(2) = \frac{2m + 1}{2 - m} = 3 \Rightarrow m = 1$. Khi đó hàm số không có giá trị lớn nhất bằng 3 trên đoạn $[1; 2]$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C) ☐

Ví dụ 9

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- ☐ A Cực đại của hàm số là 4.
- ☐ B Cực tiểu của hàm số là 3.
- ☐ C $\max_{\mathbb{R}} y = 4$.
- ☐ D $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$			4		4	
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$
						$-\infty$

 **Lời giải.**

Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

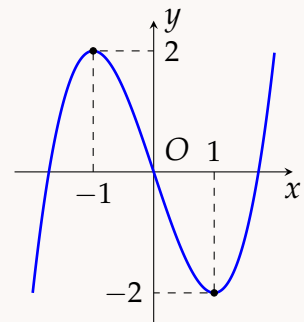
Chọn đáp án **D**



Ví dụ 10

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- ☐ A $m = 2$.
- ☐ B $m = -2$.
- ☐ C $m = 1$.
- ☐ D $m = -1$.



 **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -2 .

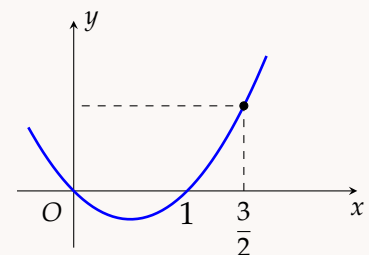
Chọn đáp án **B**



Ví dụ 11

Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?

- ☐ A $x = \frac{3}{2}$.
- ☐ B $x = \frac{1}{2}$.
- ☐ C $x = 1$.
- ☐ D $x = 0$.



 **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Ta có bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y'	-	0	+
y			

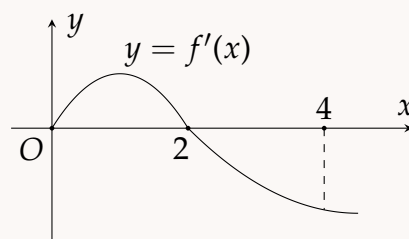
Suy ra hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại $x = 1$.

Chọn đáp án **(C)**

Ví dụ 12

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là

- (A)** $m = f(4), M = f(1)$. **(B)** $m = f(4), M = f(2)$.
(C) $m = f(1), M = f(2)$. **(D)** $m = f(0), M = f(2)$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	2	4	
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$	$f(0)$ $f(2)$ $f(4)$			

Từ bảng biến thiên ta thấy $M = f(2)$.

Mặt khác, từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(1) < f(2) \\ f(3) < f(2) \end{cases} \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2)$.

Do đó $f(4) = f(0) + f(1) + f(3) - 2f(2) < f(0) + f(2) + f(2) - 2f(2) = f(0) \Rightarrow m = f(4)$.

Chọn đáp án **(B)**

Dạng 2 Tìm max – min trên một khoảng $(a; b)$ cho trước

a) Bài toán chuyển động:

- ✔ Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc;
- ✔ Khi đó $s'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$.

b) Bài toán thực tế – tối ưu.

- ✔ Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- ✔ Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện "đúng" và suy ra kết quả.

Ví dụ 1

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

- (A) 5. (B) 1. (C) -1. (D) 3.

 **Lời giải.**

Có $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Ta có bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	3	$-\infty$

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	0	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+		-	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn đáp án **đúng**.

- (A) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$. (B) Hàm số có 4 cực trị.
 (C) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2. (D) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2.

 **Lời giải.**

Từ 4 đáp án, ta thấy đáp án đúng là “Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2”.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 3

Biết hàm số $f(x) = -x + 2020 - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; 4)$ tại x_0 . Giá trị của $P = x_0 + 2020$ bằng

- (A) 4036. (B) 2020. (C) 2021. (D) 2019.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -1 + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	1	4
y'	+	0	-
y			

Suy ra hàm số đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 4)$ tại $x_0 = 1$.

Vậy $P = x_0 + 2020 = 1 + 2020 = 2021$.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 4

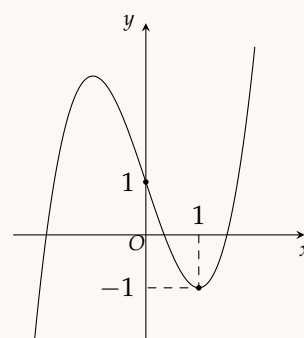
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(\sin x) - 3 \sin x|$ với mọi $x \in (0; \pi)$ bằng

A 4.

B 1.

C 2.

D 3.



Lời giải.

Đặt $t = \sin x$ vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Suy ra $y = |f(t) - 3t|$ với $t \in (0; 1]$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) - 3t \Rightarrow g'(t) = f'(t) - 3$.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(0; 1] \Rightarrow f'(t) \leq 0 \forall t \in (0; 1] \Rightarrow g'(t) \leq 0 \forall t \in (0; 1]$.

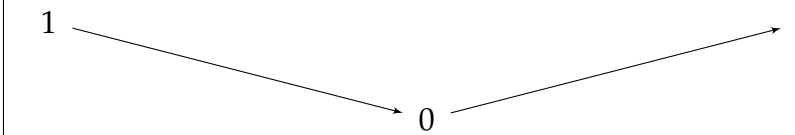
Ta có $g(0) = 1$ và $g(1) = f(1) - 3 = -1 - 3 = -4$.

Bảng biến thiên

t	0	1
$g'(t)$	-	
$g(t)$	1	-4

Từ đó suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |g(t)|$

t	0	1
$g(t)$	1	4



Vậy $\max_{x \in (0; \pi)} y = \max_{t \in (0; 1]} |g(t)| = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Dạng 3 Một số bài toán ứng dụng trong thực tế

a) Bài toán chuyển động:

- ✔ Gọi $s(t)$ là hàm quãng đường; $v(t)$ là hàm vận tốc; $a(t)$ là hàm gia tốc;
- ✔ Khi đó $s'(t) = v(t)$; $v'(t) = a(t)$.

b) Bài toán thực tế – tối ưu.

- ✔ Biểu diễn dữ kiện cần đạt max – min qua một hàm $f(t)$.
- ✔ Khảo sát hàm $f(t)$ trên miền điều kiện "đúng" và suy ra kết quả.

Ví dụ 1

Kì thi THPT Quốc gia năm 2018 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường đại học Bách Khoa Hà Nội. Hoàn cảnh gia đình không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam. Vì vậy gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi $50m$, lấy tiền lo học phí cho Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết $1 m^2$ đất có giá 1500000 VN đồng.

- A** 115687500 VN đồng.

C 114187500 VN đồng.

B 112687500 VN đồng.

D 117187500 VN đồng.

Lời giải.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu lần lượt là $x(m)$, $y(m)$.

Điều kiện $\begin{cases} 0 < y < 12,5 \\ 12,5 < x < 25. \end{cases}$

Từ giả thiết suy ra $2(x + y) = 50 \Leftrightarrow x + y = 25$. (1)

Diện tích của phần đất được bán là $S = xy - y^2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $S = (25 - y)y - y^2 = -2y^2 + 25y$.

Số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất khi và chỉ khi diện tích đất được bán lớn nhất.

Xét hàm số: $f(y) = -2y^2 + 25y, y \in \left(0; \frac{25}{2}\right)$.

Dễ thấy: $\max_{\left(0; \frac{25}{2}\right)} f(y) = f\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{625}{8}$.

Suy ra diện tích đất lớn nhất được bán là $\frac{625}{8}(m^2)$.

Vậy số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất là

$$\frac{625}{8} \cdot 1500000 = 117187500 \text{ (VN đồng)}.$$

Chọn đáp án **(D)**

Ví dụ 2

Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vận tốc v (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

- (A)** $t = 3$ s. **(B)** $t = 4$ s. **(C)** $t = 2$ s. **(D)** $t = 6$ s.

Lời giải.

Ta có $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$.

$v'(t) = 12 - 6t, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

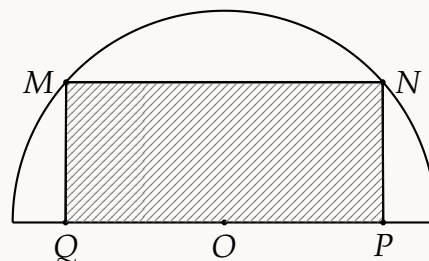
Lập bảng biến thiên ta thấy $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2$.

Chọn đáp án **(C)**

Ví dụ 3

Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

- (A)** $\frac{9}{2}$. **(B)** $6\sqrt{2}$. **(C)** 9. **(D)** $9\sqrt{2}$.



Lời giải.

Đặt $OQ = x$, $(0 < x < 3) \Rightarrow MQ = \sqrt{MO^2 - OQ^2} = \sqrt{9 - x^2}$.

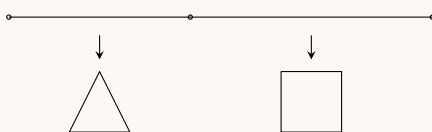
Ta có $S_{MNPQ} = PQ \cdot MQ = 2x \cdot \sqrt{9 - x^2} \leq 2 \cdot \frac{x^2 + 9 - x^2}{2} = 9$.

Dấu = xảy ra khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

Ví dụ 4

Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



- (A)** $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}$ m. **(B)** $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m. **(C)** $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m. **(D)** $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

Lời giải.

Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m). Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$.

Tổng diện tích khi đó là $S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\frac{6-3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}[(9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36]$.

Xét hàm số $f(x) = (9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36, x \in (0; 6)$.

Ta có $f(x)$ là tam thức bậc 2 có $-\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0; 6)$ và $a > 0$.

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$.

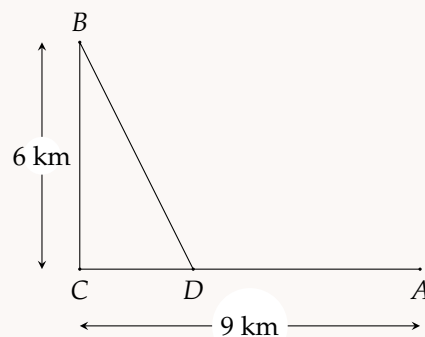
Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$ m.

Chọn đáp án **(D)**

□

Ví dụ 5

Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB . Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100 triệu đồng và dưới nước là 260 triệu đồng.



- (A)** 6,5 km. **(B)** 7,5 km. **(C)** 7 km. **(D)** 6 km.

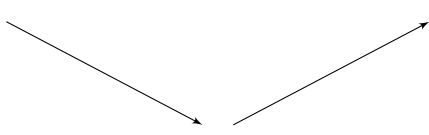
Lời giải.

Đặt $CD = x$ km, $0 \leq x \leq 9$, ta có $AD = 9 - x$ và $BD = \sqrt{x^2 + 36}$.

Chi phí để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB là $T = 100(9 - x) + 260\sqrt{x^2 + 36}$.

Ta có $T' = -100 + \frac{260x}{\sqrt{x^2 + 36}}$; $T' = 0 \Leftrightarrow 100^2(x^2 + 36) = 260^2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 6,25 \Leftrightarrow x = 2,5$.

Bảng biến thiên

x	0	2,5	9
T'	—	0	+
T			

Từ bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất khi $x = 2,5$ hay $AD = 6,5$ km.

Chọn đáp án **(A)**

□

Ví dụ 6

Một công ty bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi

căn hộ 100000 đồng một tháng (theo quy định trong hợp đồng) thì sẽ có 1 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng.

- A** 3900000 đồng. **B** 3700000 đồng. **C** 3500000 đồng. **D** 4000000 đồng.

Lời giải.

Gọi x (đồng/tháng) là số tiền tăng thêm mỗi lần ($x \geq 0$).
Khi đó tổng số tiền công ty thu được là:

$$\begin{aligned} T(x) &= (3000000 + x) \left(40 - \frac{x}{100000} \right) \\ &= 120000000 + 10x - \frac{x^2}{100000} \\ \Rightarrow T'(x) &= 10 - \frac{x}{50000} = 0 \Leftrightarrow x = 500000. \end{aligned}$$

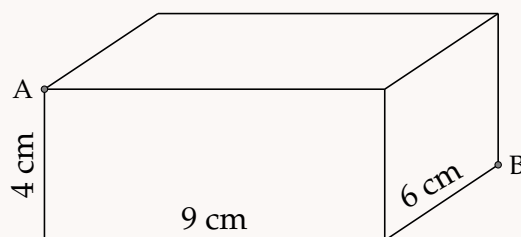
Vậy $\max_{x \geq 0} T(x) = T(500000) = 122500000$. Vậy giá thuê mỗi căn hộ là 3500000 đồng.

Chọn đáp án **C**

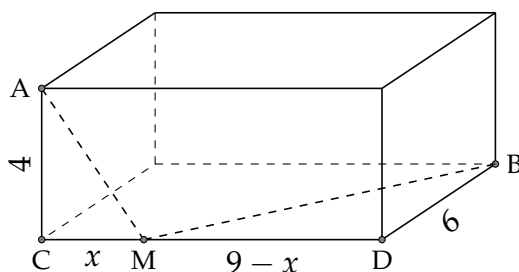
Ví dụ 7

Cho một cái hộp hình hộp chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là 4 cm, 6 cm, 9 cm như hình vẽ. Một con kiến ở vị trí A muốn đi đến vị trí B. Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hoặc trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi x cm là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A** $x \in [15; 16)$. **B** $x \in [13; 14)$.
C $x \in [12; 13)$. **D** $x \in [14; 15)$.



Lời giải.



Cách 1. Đánh số các đỉnh của hình hộp như hình vẽ. Giả sử con kiến đi từ A đến M và từ M đến B. Đặt $MC = x$ (cm) ($x \in [0; 9]$). Khi đó ta có quãng đường con kiến đi từ A đến B là

$$y = AM + MB = \sqrt{16 + x^2} + \sqrt{36 + (9 - x)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$ ta có

$$y \geq \sqrt{(4 + 6)^2 + (x + 9 - x)^2} = \sqrt{181} \approx 13,45 \text{ (cm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4}{6} = \frac{x}{9-x} \Leftrightarrow x = 3,6$.

Chứng minh tương tự với các đường đi khác của con kiến xuống các cạnh khác ta lần lượt được độ dài ngắn nhất trên các đường khác là $\sqrt{205} \approx 14,31$, $\sqrt{241} \approx 15,52$.

Vậy quãng đường con kiến đi ngắn nhất là 13,45 (cm).

Cách 2. Xét hàm số $y = \sqrt{16+x^2} + \sqrt{36+(9-x)^2}$ với $x \in [0;9]$.

Ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}} - \frac{9-x}{\sqrt{36+(9-x)^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x \cdot \sqrt{36+(9-x)^2} = (9-x) \cdot \sqrt{16+x^2} \Leftrightarrow 20x^2 + 288x - 1296 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3,6 \\ x = -18. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên ta có min $y = y(3,6) \approx 13,45$.

Tương tự với các trường hợp còn lại.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 8

Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m^2 . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu? (biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể).

- (A) 90 triệu đồng. (B) 168 triệu đồng. (C) 54 triệu đồng. (D) 108 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi chiều rộng của đáy bể là x ($x > 0$) suy ra chiều dài của đáy bể là $2x$.

Do thể tích của bể là 288 m^3 nên chiều cao của bể là: $h = \frac{288}{2x^2} = \frac{144}{x^2}$.

Nên diện tích cần xây là: $S(x) = 2x^2 + 2xh + 2 \cdot 2x \cdot h = 2x^2 + \frac{864}{x}$.

Để chi phí là thấp nhất thì $S(x)$ là nhỏ nhất.

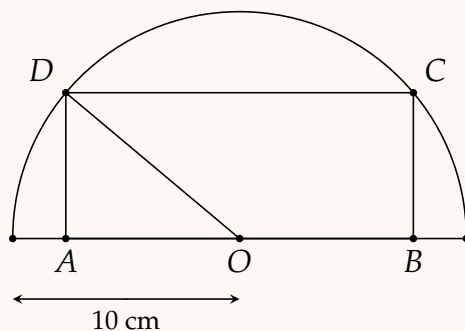
$$S(x) = 2x^2 + \frac{432}{x} + \frac{432}{x} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{432}{x} \cdot \frac{432}{x}} = 216.$$

Vậy chi phí thấp nhất để xây dựng bể là $216 \cdot 500000 = 108.000.000 \text{ đồng}$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 9

Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp trong nửa đường tròn có bán kính 10 cm (hình vẽ)



- (A) 160 cm^2 . (B) 100 cm^2 . (C) 80 cm^2 . (D) 200 cm^2 .

Lời giải.

Đặt $OA = x$ ($0 < x < 10$). Khi đó $DA = \sqrt{OD^2 - OA^2} = \sqrt{100 - x^2}$.
Diện tích hình chữ nhật $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2OA \cdot AD = 2x\sqrt{100 - x^2} \leq x^2 + 100 - x^2 = 100 \text{ cm}^2.$$

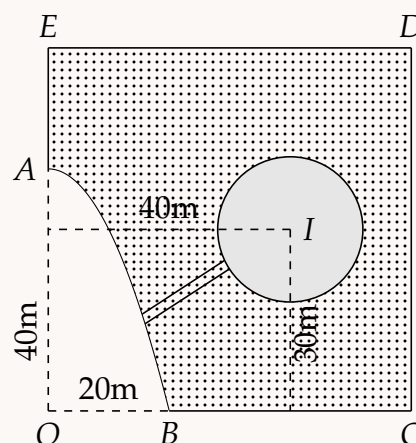
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B)

Ví dụ 10

Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 10m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu biết:

- ✔ Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- ✔ Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- ✔ Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- ✔ Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m.



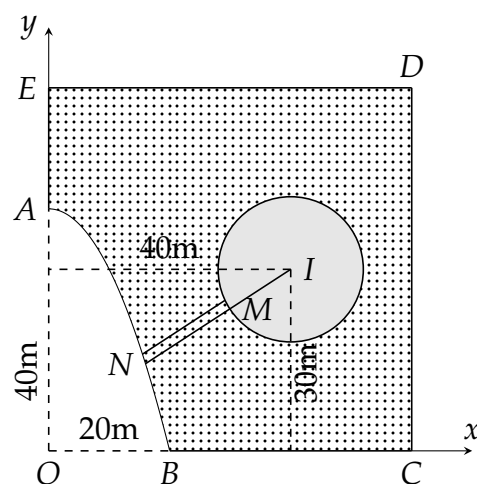
- (A) $l \approx 17,7\text{m}$. (B) $l \approx 25,7\text{m}$. (C) $l \approx 27,7\text{m}$. (D) $l \approx 15,7\text{m}$.

Lời giải.

Ta coi một đơn vị bằng 10m và gán hệ trục tọa độ Oxy sao cho A, B lần lượt thuộc các tia Oy, Ox . Khi đó bờ của mảnh vườn là hình tròn $(C) : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$, bờ AB của ao là phần parabol $(P) : y = 4 - x^2$ ứng với $x \in [0; 2]$. Bài toán trở thành tìm $M \in (C)$ và $N \in (P)$ sao cho MN ngắn nhất.

Ta thấy rằng để MN ngắn nhất thì M, N, I phải thẳng hàng với $I(4; 3)$ là tâm của (C) .

Khi đó $MN = IN - IM = IN - 1$, vì vậy ta chỉ cần tìm $N \in (P)$ sao cho IN ngắn nhất.



Do $N \in (P)$ nên $N(x; 4 - x^2)$ với $x \in [0; 2]$.

$$IN^2 = (x - 4)^2 + (1 - x^2)^2 = x^4 - x^2 - 8x + 17.$$

Xét $f(x) = x^4 - x^2 - 8x + 17$ với $x \in [0; 2]$, $f'(x) = 4x^3 - 2x - 8$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \approx 1,392768772 \in (0; 2).$$

$$f(0) = 17, f(2) = 13, f(x_0) \approx 7,68 \text{ suy ra } \min_{[0; 2]} f(x) \approx 7,68.$$

Vậy $\min IN \approx 2,77$ tức là $l \approx 17,7\text{m}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$. Tính $T = M + 2m$.

- (A) $T = -41$. (B) $T = -44$. (C) $T = -43$. (D) $T = -42$.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\begin{cases} x = -1 & \Rightarrow y = 40 \\ x = 3 & \Rightarrow y = 8. \end{cases}$$

Ta có: $y(4) = 15, y(-4) = -41$.

Suy ra: $M = 40, m = -41$ nên $T = -42$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 2

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- (A) 1. (B) 4. (C) 5. (D) 3.

Lời giải.

Trên đoạn $[-1; 2]$ ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Do đó $\max_{[-1; 2]} y = \max \{y(-1), y(\sqrt{2}), y(2)\} = y(\sqrt{2}) = 4$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 3

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- (A) $\frac{6}{7}$. (B) $\frac{5}{6}$. (C) $\frac{4}{5}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \forall x \neq -2$.

Do $f(1) = \frac{2}{3}$ và $f(3) = \frac{4}{5}$, suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ là $\frac{4}{5}$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 4

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[-4; -2]$ là

- (A) $\min_{[-4; -2]} y = -7$. (B) $\min_{[-4; -2]} y = -\frac{19}{3}$. (C) $\min_{[-4; -2]} y = -8$. (D) $\min_{[-4; -2]} y = -6$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-4; -2]$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin (-4; -2) \\ x = -3 \in (-4; -2). \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-4) = -\frac{19}{3}; y(-3) = -6; y(-2) = -7. \text{ Suy ra } \min_{[-4; -2]} y = -7.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$.

(A) $\max y = 4, \min y = 2.$

(B) $\max y = 4, \min y = -2.$

(C) $\max y = 2, \min y = -2.$

(D) $\max y = 2, \min y = -4.$

 **Lời giải.**

$$\text{Điều kiện: } -2 \leq x \leq 2. \text{ Đạo hàm } y' = 1 - \frac{3x}{\sqrt{12 - 3x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{12 - 3x^2} = 3x \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Ta có } y(-2) = -2, y(2) = 2, y(-1) = 2, y(1) = 4. \text{ Suy ra } \max y = 4, \min y = -2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Xét ba khẳng định sau:

(1) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

(2) Hàm số có một cực đại.

(3) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 0.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$	

 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có các kết luận sau:

✔ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(0; 2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$, $(2; +\infty)$.

✔ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 2$ và giá trị cực đại của hàm số bằng 3. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .

✔ $y \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = \pm 2$. Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} y = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Tổng giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2 - x^2} - x$ bằng bao nhiêu?

(A) $2 - \sqrt{2}.$

(B) 2.

(C) $2 + \sqrt{2}.$

(D) 1.

 **Lời giải.**

$$\text{Tập xác định } \mathcal{D} = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} - 1 = \frac{-x - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{2 - x^2}}.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \Leftrightarrow -x - \sqrt{2-x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} &= -x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2-x^2 = x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= -1. \end{aligned}$$

Ta có $y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$; $y(-1) = 2$; $y(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

Vậy $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = 2$, $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = -\sqrt{2}$ hay $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) + \min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = 2 - \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A)



Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\min_{(-1;+\infty)} f(x) = f(0)$.

(B) $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

(C) $\max_{(-1;1]} f(x) = f(0)$.

(D) $\min_{(-\infty;-1)} f(x) = f(-1)$.

Lời giải.

Bổ sung vào bảng biến thiên trên ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$							

Diagram showing the function values at critical points: $f(x)$ decreases from $-\infty$ to -1 , then increases from -1 to 0 , then decreases from 0 to 1 , and finally increases from 1 to $+\infty$. The values $f(0)$ and $f(1)$ are marked at the points where the derivative is zero.

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(1)$.

Chọn đáp án (B)



Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số có hai điểm cực trị.

(B) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 và giá trị lớn nhất bằng 1.

(C) Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

(D) Hàm số có đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 1$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y						

Diagram showing the function values at critical points: y increases from $-\infty$ to -1 , then decreases from -1 to 0 , then increases from 0 to 1 , and finally decreases from 1 to $+\infty$. The values 0 and 1 are marked at the points where the derivative is zero.

 Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và đạt cực đại tại $x = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Trên khoảng $(0; 1)$, hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

(C) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

 Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$x^3 + \frac{1}{x} = x^3 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} \geq 4\sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{3x}} = \frac{4}{\sqrt[4]{27}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^3 = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ (vì $x > 0$).

Vậy $\min_{x \in (0;1)} y = \frac{4}{\sqrt[4]{27}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11

Hàm số $y = 4 \sin x - 3 \cos x$ có giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m là

(A) $M = 7, m = 1$.

(B) $M = 5, m = -5$.

(C) $M = 1, m = -7$.

(D) $M = 7, m = -7$.

 Lời giải.

Ta có: $y = 4 \sin x - 3 \cos x \Leftrightarrow 4 \sin x - 3 \cos x = y$ (1). Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 4^2 + (-3)^2 \geq y^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Cho hàm số $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$. Tổng các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 là

(A) 2.

(B) -2 .

(C) 0.

(D) 1.

 Lời giải.

Ta có $y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x + 1)^2} > 0$ với mọi $x \in [0; 1] \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên $[0; 1]$

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ là $y(0) = -2$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2. \end{cases}$$

Tổng các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 là 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13

Gọi T là tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 1}{x + m^2}$ có giá trị lớn nhất trên

đoạn $[2; 3]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tính tổng S của các phần tử trong T .

- (A) $S = \frac{18}{5}$. (B) $S = \frac{17}{5}$. (C) $S = 6$. (D) $S = 2$.

Lời giải.

Hàm số luôn xác định trên đoạn $[2; 3]$.

Ta có $y' = \frac{m^3 - 1}{(x + m^2)^2}$ và $y(2) = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$; $y(3) = \frac{3m + 1}{m^2 + 3}$.

Trường hợp 1: nếu $y' < 0, \forall x \in [2; 3]$ thì $m < 1$ và $\max_{[2; 3]} y = y(2) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow m = 2; m = \frac{2}{5}$, do đó ta được $m = \frac{2}{5}$.

Trường hợp 2: nếu $y' > 0, \forall x \in [2; 3]$ thì $m > 1$ và $\max_{[2; 3]} y = y(3) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow m = 3; m = \frac{3}{5}$, do đó ta được $m = 3$.

Vậy $T = \left\{ \frac{2}{5}; 3 \right\}$, do đó tổng các phần tử của T là $S = \frac{17}{5}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 14

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos^2 x - 5 \cos x + 3}{\cos x - 6}$ là

- (A) $y_{\max} = \frac{1}{5}; y_{\min} = -\frac{9}{7}$. (B) $y_{\max} = 13; y_{\min} = 4$.
(C) $y_{\max} = 1; y_{\min} = -\frac{9}{7}$. (D) $y_{\max} = \frac{1}{5}; y_{\min} = -1$.

Lời giải.

Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]$, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{t^2 - 5t + 3}{t - 6}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có $y' = \frac{t^2 - 12t + 27}{(t - 6)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 9 \end{cases}$

Trên đoạn $[-1; 1]$ thì $t^2 - 12t + 27 > 0 \Rightarrow y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Vậy giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là

$$\max y = y(1) = \frac{1}{5}; \min y = y(-1) = -\frac{9}{7}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 15

Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} - \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{3-x}$ trên tập xác định của nó.

- (A) $m = 2\sqrt{2} - 1$. (B) $m = \frac{4}{5}$. (C) $m = 2\sqrt{2} - 2$. (D) $m = \frac{9}{10}$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 3$.

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}$, ta có $\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{3-x} = \frac{t^2 - 4}{2}$.

Ta có $t' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2\sqrt{3-x}}$ và $t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Mà $t(-1) = t(3) = 2, t(1) = 2\sqrt{2}$ nên với $x \in [-1; 3]$ thì $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Do đó, để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên tập xác định của nó, ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(t) = t - \frac{t^2 - 4}{2}$ trên $[2; 2\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(t) = 1 - t < 0, \forall t \in [2; 2\sqrt{2}]$ nên $m = \min_{[-1; 3]} y(x) = \min_{[2; 2\sqrt{2}]} f(t) = f(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$.

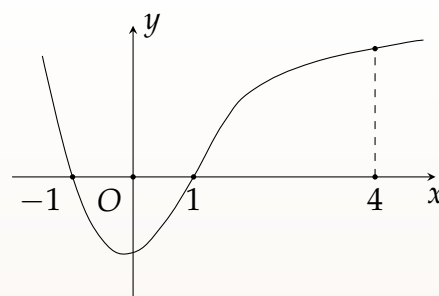
Chọn đáp án (C)

□

Câu 16

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết rằng $f(-1) + f(2) = f(1) + f(4)$, các điểm $A(1; 0), B(-1; 0)$ thuộc đồ thị. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$ lần lượt là

- (A) $f(1), f(-1)$. (B) $f(0), f(2)$.
(C) $f(-1), f(4)$. (D) $f(1), f(4)$.



🗨️ Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	-1	1	4	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(4)$	

Suy ra $\min_{x \in [-1; 4]} f(x) = f(1)$.

Trên đoạn $[1; 4]$ hàm số đồng biến nên $f(1) < f(4)$.

Từ đó ta có $f(4) = f(2) - f(1) + f(-1) > f(-1)$. Suy ra $\max_{x \in [-1; 4]} f(x) = f(4)$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 17

Tìm m để bất phương trình $x^4 - 4x^2 - m + 1 \leq 0$ có nghiệm thực.

- (A) $m \geq -3$. (B) $m \leq 1$. (C) $m \geq 1$. (D) $m \leq -3$.

🗨️ Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow m \geq x^4 - 4x^2 + 1$. Lập bảng biến thiên $y = x^4 - 4x^2 + 1$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow$
 $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$ Từ bảng biến thiên suy ra
 $m \geq \min_{\mathbb{R}} f(x) = -3$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-3	1	-3	$+\infty$

Chọn đáp án (A)



Câu 18

Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+1}$, với m là tham số. Biết $\min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = -2$. Hãy chọn kết luận đúng?

(A) $m = 2$.

(B) $m > 2$.

(C) $m = -2$.

(D) $m < -2$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = \frac{1+m}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên đoạn $[0;3]$. Do đó hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x = 0$; $x = 3$ hoặc ngược lại. Khi đó

$$\min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = -2 \Leftrightarrow f(0) + f(3) = -2 \Leftrightarrow -m + \frac{3-m}{4} = -2 \Leftrightarrow m = \frac{11}{5} > 2.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 19

Tìm giá trị của tham số m để bất phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$.

(A) $m \leq 3$.

(B) $m \leq \frac{7}{2}$.

(C) $m \geq \frac{7}{2}$.

(D) $m \geq 3$.

Lời giải.

Để bất phương trình $\frac{x^2+3x+3}{x+1} \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;1]$ tương đương với $\min_{[0;1]} f(x) \geq m$ với $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nhận) hoặc $x = -2$ (loại).

$f(0) = 3, f(1) = \frac{7}{2}$. Suy ra $\min_{[0;1]} f(x) = 3$. Do đó $3 \geq m$.

Chọn đáp án (A)



Câu 20

Cho $a > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{7(a^2+9)}{a} + \frac{a}{a^2+9}$ bằng

(A) $\frac{251}{3}$.

(B) $2\sqrt{7}$.

(C) $\frac{253}{3}$.

(D) $\frac{253}{6}$.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{a^2+9}{a}, t \geq 6$.

Khi đó $P = 7t + \frac{1}{t}$. Xét hàm số $f(t) = 7t + \frac{1}{t}$ có $f'(t) = 7 - \frac{1}{t^2}$.

$f'(t) = 7 - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$ (loại).

Bảng biến thiên

t	6	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	$f(6)$	$+\infty$

Ta có $\min P = \min_{x \in [6; +\infty)} f(t) = f(6) = \frac{253}{6}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 21

Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 2$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$. Giá trị của $M + m$ bằng

- (A) -4 . (B) $-\frac{1}{2}$. (C) -6 . (D) $1 - 4\sqrt{2}$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$P = 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x + y)(2 - xy) - 3xy.$$

Đặt $t = x + y$. Do $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow xy = \frac{t^2 - 2}{2}$.

Khi đó $P = 2t \left(2 - \frac{t^2 - 2}{2} \right) - 3 \cdot \frac{t^2 - 2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$.

Ta có $(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow t^2 \geq 2(t^2 - 2) \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$.

Xét $f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3, t \in [-2; 2]$.

Ta có $f'(t) = -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-2; 2] \\ t = -2 \in [-2; 2] \end{cases}$.

Ta có $f(1) = \frac{13}{2}, f(2) = 1, f(-2) = -7$.

Vậy $\min P = -7, \max P = \frac{13}{2}$. Khi đó $M + m = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22

M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos x(1 + 2\cos 2x)$. Tìm $2M - m$.

- (A) 9 . (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $6 + \frac{\sqrt{3}}{9}$. (D) $\frac{2\sqrt{3}}{9} + 3$.

 **Lời giải.**

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $y = \cos x(1 + 2\cos 2x) = \cos x + 2\cos x(2\cos^2 x - 1) = 4\cos^3 x - \cos x$.

Đặt $t = \cos x (t \in [-1; 1])$, ta được: $y = 4t^3 - t$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 - t$ trên $[-1; 1]$, ta có $f'(t) = 12t^2 - 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}$ (nhận).

Ta có $f(-1) = -3, f(1) = 3, f(-\frac{1}{2\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{3}}{9}, f(\frac{1}{2\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Suy ra $\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-1; 1]} f(t) = f(1) = 3$ và $\min_{\mathbb{R}} y = \min_{[-1; 1]} f(t) = f(-1) = -3$. Vậy $2M - m = 9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23

Cho biểu thức $P = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ với x, y khác 0. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

- (A) -2. (B) 0. (C) -1. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $P + 1 = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + 1 = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} \geq 0$ nên $P \geq -1$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = -y \neq 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24

Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} - 4$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- (A) $m = -1$. (B) $m = -4$. (C) $m = 7$. (D) $m = -3$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} - 4 = 4x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} - 4$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có $f(x) \geq 3 \cdot \sqrt[3]{4x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} - 4 = -1$. Đẳng thức xảy ra khi

$$4x^2 = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = -1$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25

Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x + 19}{x^2 + 16x + 68}$. Tính tích mM .

- (A) $mM = -0.20$. (B) $mM = -0.25$. (C) $mM = -0.15$. (D) $mM = -0.30$.

Câu 26

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \cos^2 2x - \sin x \cos x + 4$ trên $\mathbb{R}$.

- (A) $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{7}{2}$. (B) $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$. (C) $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{10}{3}$. (D) $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{16}{5}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 4 = -\sin^2 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + 5$.

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - \frac{1}{2}t + 5 \Rightarrow f'(t) = -2t - \frac{1}{2}$.

Khi đó, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \in [-1; 1]$.

Mặt khác $f(-1) = \frac{9}{2}$, $f(1) = \frac{7}{2}$, $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{81}{16}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{7}{2}$ khi $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27

Cho x, y là hai số thực không âm thỏa mãn $x + y = 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + y^2 - x + 1$. Khi đó kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) $a + b = \frac{22}{3}$. (B) $a + b = \frac{10}{3}$. (C) $a + b = 8$. (D) $a + b = \frac{32}{3}$.

Lời giải.

Từ $x + y = 2$ ta có $y = 2 - x$ và $x \in [0; 2]$.

Khi đó $P = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (2 - x)^2 - x + 1 = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + 5$ với $x \in [0; 2]$.

Ta có $P' = x^2 + 4x - 5, P' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhận)} \\ x = -5 \text{ (loại)}. \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} P(0) = 5 \\ P(1) = \frac{7}{3} \\ P(2) = \frac{17}{3} \end{cases}$. Suy ra $\max_{x \in [0; 2]} P = \frac{17}{3}$ và $\min_{x \in [0; 2]} P = \frac{7}{3}$. Suy ra $a + b = 8$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 28

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$.

- (A) $\max P = 8$. (B) $\max P = 16$. (C) $\max P = 12$. (D) $\max P = 4$.

Lời giải.

Ta xét giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{P}{4} = \frac{(x - y)^2}{x^2 + 2xy + 3y^2}$.

☑ Nếu $x = 0$ thì $Q = \frac{1}{3}$. (1)

☑ Nếu $x \neq 0$ thì chia cả tử và mẫu cho x^2 , ta được

$$Q = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{1 - 2\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + 2\frac{y}{x} + 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Đặt $t = \frac{y}{x}$, vậy ta được hàm $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{3t^2 + 2t + 1}$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - 4t - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } f(1) = 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3. \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị lớn nhất cần tìm của P là 12.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 29

Một người thợ muốn làm một chiếc thùng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và không có nắp, biết thể tích của khối hộp là $V = 2,16 \text{ m}^3$. Giá nguyên liệu để làm bốn mặt bên là 36000 đồng/ m^2 và giá nguyên liệu để làm đáy là 90000 đồng/ m^2 . Tính các kích thước của

hình hộp để chi phí làm chiếc thùng đó là nhỏ nhất.

- Ⓐ Cạnh đáy là 1,2 m, chiều cao là 1,8 m. Ⓑ Cạnh đáy là 1,5 m, chiều cao là 1,2 m.
Ⓒ Cạnh đáy là 1,7 m, chiều cao là 1 m. Ⓓ Cạnh đáy là 1 m, chiều cao là 1,7 m.

💬 Lời giải.

Gọi độ dài cạnh đáy là x m và chiều cao là h m.

Ta có, diện tích đáy là $x^2 \Rightarrow$

$$\text{thể tích hình hộp là } V = x^2 h = 2,16 \Rightarrow h = \frac{2,16}{x^2}.$$

$$\text{Diện tích mặt bên là } xh = \frac{2,16}{x}.$$

$$\text{Chi phí làm chiếc thùng là } f(x) = 90x^2 + 4 \cdot 36 \cdot \frac{2,16}{x} = 90x^2 + \frac{7776}{25x}.$$

$$f'(x) = 180x - \frac{7776}{25x^2} = 0 \Rightarrow x = 1,2.$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	1,2	$+\infty$
$f'(x)$		− 0 +	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

Để chi phí làm chiếc thùng nhỏ nhất thì cạnh đáy là 1,2 m và chiều cao là $h = \frac{2,16}{1,2} = 1,8$ m.

Chọn đáp án Ⓐ



Câu 30

Cho ba số dương x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x^2 + 8yz} + 3}{\sqrt{(2y + z)^2 + 6}}.$$

- Ⓐ $\frac{5}{2\sqrt{2}}$. Ⓑ $\frac{5}{\sqrt{10}}$. Ⓒ $\frac{6}{\sqrt{10}}$. Ⓓ $\frac{6}{\sqrt{15}}$.

💬 Lời giải.

x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên ta có $x + z = 2y$. Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x^2 + 4(x+z)z} + 3}{\sqrt{(x+2z)^2 + 6}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 4xz + 4z^2} + 3}{\sqrt{(x+2z)^2 + 6}} \\ &= \frac{|x+2z| + 3}{\sqrt{(x+2z)^2 + 6}} \\ &= \frac{t+3}{\sqrt{t^2+6}}. \quad (\text{với } t = |x+2z|, \text{ĐK: } t \geq 0) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t+3}{\sqrt{t^2+6}}$, $t \in [0; +\infty)$

Ta có

$$f'(t) = \frac{\sqrt{t^2+6} - \frac{t(t+3)}{\sqrt{t^2+6}}}{t^2+6} = \frac{t^2+6-t^2-3t}{(\sqrt{t^2+6})^3} = \frac{6-3t}{(\sqrt{t^2+6})^3}.$$

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$\frac{5}{\sqrt{10}}$		

Vậy $\max P = \max_{[0;+\infty)} f(t) = f(2) = \frac{5}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án (B)

□

—HẾT—

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) -5 . (C) $-\frac{7}{2}$. (D) -3 .

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{3}{(1-x)^2} > 0, \forall x \neq 1$, suy ra hàm số đồng biến trên $[2;3]$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[2;3]$ là $f(2) = -5$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 2

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2-4x}{2x+1}$ trên đoạn $[0;3]$.

- (A) $\min_{[0;3]} y = -4$. (B) $\min_{[0;3]} y = 0$. (C) $\min_{[0;3]} y = -1$. (D) $\min_{[0;3]} y = -\frac{3}{7}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}, \forall x \in (0;3)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0;3] \\ x = -2 \notin [0;3] \end{cases}$.

Tính $y(0) = 0, y(3) = -\frac{3}{7}, y(1) = -1$. Từ đó ta có $\min_{[0;3]} y = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 3

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$.

- (A) 5. (B) 17. (C) -15 . (D) 15.

Lời giải.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

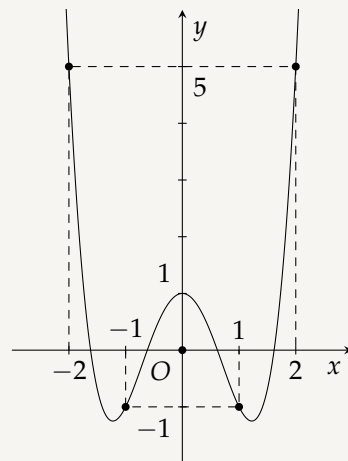
$$f(-2) = 8, f(-1) = 15, f(2) = -12. \text{ Suy ra } \max_{[-2;2]} f(x) = 15.$$

Chọn đáp án (D) □

Bài 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- (A) 5. (B) 2.
(C) 1. (D) Không xác định.



 Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2) = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 5

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ trên đoạn $[0; 1]$.

- (A) -1. (B) 0. (C) -2. (D) 1.

 Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$. Do đó

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 1] \\ x = 1 \in [0; 1] \\ x = -1 \notin [0; 1]. \end{cases}$$

Ta có $y(0) = 0, y(1) = -1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ bằng 0.

Chọn đáp án (B) □

Bài 6

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

 Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2]. \end{cases}$

Tính được $y(0) = 2, y(1) = 0, y(2) = 4$. Vậy $\max_{[0;2]} y = 4$ tại $x = 2$ và $\min_{[0;2]} y = 0$ tại $x = 1$. □

Bài 7

Tìm tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$ có $\min_{x \in [-1;2]} y = m+2$.

 Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Ta có $y' = \frac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0, \forall x \in \mathcal{D}$.

Do đó hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.
Để tồn tại giá trị nhỏ nhất trên $[-1; 2]$ thì $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.
Khi đó

$$\begin{aligned} \min_{x \in [-1; 2]} y = y(2) &\Leftrightarrow \frac{2m+1}{2-m} = m+2 \\ &\Leftrightarrow 2m+1 = (m+2)(2-m) \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm. □

Bài 8

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

- (A) $M = 9$. (B) $M = 10$. (C) $M = 1$. (D) $M = 0$.

Lời giải.

Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0; 2]$.
 $f'(x) = 4x^3 - 4x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Ta có $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(2) = 9$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ là 9.

Chọn đáp án (A) □

Bài 9

Giá trị lớn nhất và giá trị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$ lần lượt là M và m . Tính M và m .

- (A) $M = 54$ và $m = 1$. (B) $M = 25$ và $m = 0$.
(C) $M = 28$ và $m = -4$. (D) $M = 36$ và $m = -5$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x - 9, y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

Có $y(0) = 1, y(1) = -4, y(3) = 28$. Vậy $M = 28$ và $m = -4$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 10

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 + 3x$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- (A) 4. (B) -4. (C) 14. (D) -2.

Lời giải.

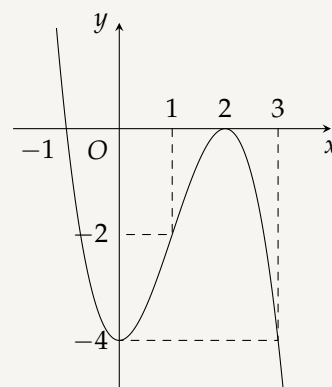
Ta thấy $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow \min_{[-1; 2]} f(x) = f(-1) = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 11

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 3]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- (A) 4. (B) -6. (C) -2. (D) -4.



💬 Lời giải.

Ta có $M = \max_{[1;3]} f(x) = f(2) = 0$; $m = \min_{[1;3]} f(x) = f(1) = -4$.

nên $M + m = 0 + (-4) = -4$.

Chọn đáp án (D)

□

Bài 12

Trên khoảng $(0; 1)$ hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

💬 Lời giải.

Trên khoảng $(0; 1)$, ta có $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^4 - 1}{x^2}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$	$+\infty$

Do đó $\min_{(0;1)} y = f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.

Chọn đáp án (B)

□

Bài 13

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

- (A) 3. (B) 1. (C) -1. (D) 5.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ (loại).

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-
y	1	3	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max_{(0;+\infty)} y = 3$.

Chọn đáp án **(A)**

Bài 14

Kết luận nào sau đây là đúng về hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$?

- (A)** Hàm số có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất.
- (B)** Hàm số có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất.
- (C)** Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.
- (D)** Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$ có tập xác định $\mathcal{D} = [0; 1]$.

Với mọi $x \in (0; 1)$, ta có $y' = \frac{(x - x^2)'}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{1 - 2x}{2\sqrt{x - x^2}}$ và $y' = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	1
y'	+ 0 -		
y	0	$\frac{1}{2}$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\max_{\mathcal{D}} y = \frac{1}{2}$ tại $x = \frac{1}{2}$, $\min_{\mathcal{D}} y = 0$ tại $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Chọn đáp án **(A)**

Bài 15

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ trên $(0; 3]$ bằng

- (A)** $\frac{28}{9}$.
- (B)** $\frac{8}{3}$.
- (C)** 0.
- (D)** 2.

Lời giải.

Ta có $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0; 3]$. Suy ra $\max_{(0;3]} f(x) = f(3) = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 16

Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2ax + 4a - 7$, có giá trị nhỏ nhất là m . Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương mà m có thể nhận?

A 11.

B 8.

C 9.

D 10.

 **Lời giải.**

Ta có: $m \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $m \leq f(2) = 9$. Suy ra các giá trị nguyên dương của m thỏa $1 \leq m \leq 9$.

Có 9 giá trị.

Chọn đáp án **D** □

Bài 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2	
		0		$-\infty$

Bất phương trình $f(x) \geq \sqrt{x^2 + 91} + m$ đúng với mọi $x \in (-3; 0)$ khi và chỉ khi

A $m \in (f(-3) - 10; f(-3) - 91)$.

B $m \in (f(0) - \sqrt{91}; f(0) - 9)$.

C $m \in (-\infty; f(-3) - 10]$.

D $m \in (f(0) - 9; f(0))$.

 **Lời giải.**

Ta có $f(x) - \sqrt{x^2 + 91} \geq m$.

Xét $g(x) = f(x) - \sqrt{x^2 + 91}$ có $g'(x) = f'(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 91}}$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy $f'(x) > 0 \forall x \in (-3; 0)$.

Suy ra $g'(x) = f'(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 91}} > 0 \forall x \in (-3; 0)$.

Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trong khoảng $(-3; 0)$.

Vậy bất phương trình $f(x) \geq \sqrt{x^2 + 91} + m$ đúng với mọi $x \in (-3; 0)$ khi và chỉ khi

$$m \leq \min_{x \in (-3; 0)} g(x) = g(-3) = f(-3) - 10$$

hay $m \in (-\infty; f(-3) - 10]$.

Chọn đáp án **C** □

Bài 18

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x$$

có đúng hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ là $(a; b]$. Giá trị của $a + b$ là

A -1 .

B $\frac{5}{2}$.

C $-\frac{3}{2}$.

D 0 .

 **Lời giải.**

Ta có $(\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m \sin^2 x \Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m \cos x) = m(1 - \cos^2 x)$

$$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(\cos 2x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = m. \end{cases}$$

Phương trình $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ không cho ta nghiệm nào thuộc $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $\cos 2x = m$ có hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Xét hàm số $y = \cos 2x$ trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Đạo hàm $y' = -2\sin 2x; y' = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y'	—	0	+
y	1	—1	$-\frac{1}{2}$

Khi $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ thì $m \in [-1; 1]$.

Với $m = -1$ hoặc $-\frac{1}{2} < m \leq 1$ thì cho ta một nghiệm x .

Với $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$ cho ta hai nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ nên $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right]$.

Vậy $a = -1, b = -\frac{1}{2}$ nên $a + b = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Bài 19

Cho hàm số $y = x + \sqrt{1 - x^2}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$.

(A) $m \geq \sqrt{2}$.

(B) $m \leq -1$.

(C) $-1 \leq m \leq \sqrt{2}$.

(D) $m > -1$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x + \sqrt{1 - x^2}$ trên $[-1; 1]$.

Ta có $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ($x \neq \pm 1$); $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		
y'	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$
y	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x) \geq m$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$ khi và chỉ khi $m \leq \min_{x \in [-1; 1]} f(x) = -1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

—HẾT—

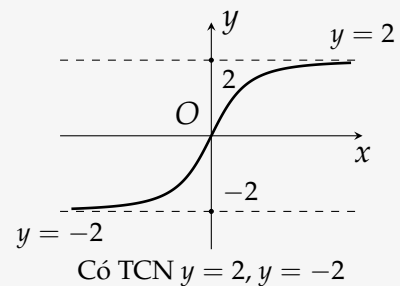
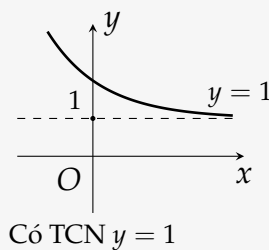
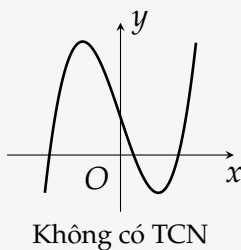
§4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang

Định nghĩa 4.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$. Đường thẳng $y = y_0$ là TCN của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$.

☑ Hình vẽ về tiệm cận ngang của đồ thị hàm số



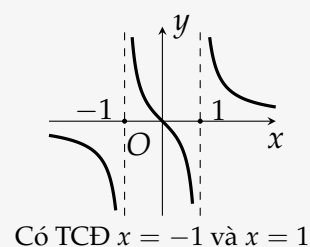
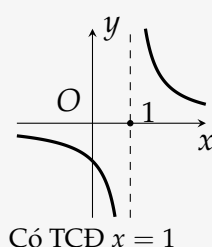
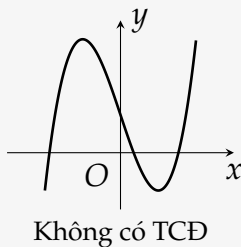
☑ Các bước tìm TCN:

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2. Đường tiệm cận đứng

Định nghĩa 4.2. Đường thẳng $x = x_0$ là TCD của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$.

☑ Hình vẽ về tiệm cận đứng của đồ thị hàm số



☑ Các bước tìm TCD

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO

① Sử dụng máy tính cầm tay để tìm tiệm cận ngang: Nhập biểu thức $f(x)$.

① Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X = 10^8$ để kiểm tra khi $x \rightarrow +\infty$.

② Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X = -10^8$ để kiểm tra khi $x \rightarrow -\infty$.

② Sử dụng máy tính cầm tay để tìm tiệm cận đứng: Nhập biểu thức $f(x)$.

① Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X = x_0 - 0.000001$ để kiểm tra khi $x \rightarrow x_0^-$.

② Bấm $\boxed{\text{CACL}}$ $X = x_0 + 0.000001$ để kiểm tra khi $x \rightarrow x_0^+$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Thực hiện theo lý thuyết đã nêu trên. Chú ý các vấn đề thường gặp sau:

☑ Tính giới hạn của hàm số dạng phân thức $\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots}$ khi $x \rightarrow \pm\infty$ để xác định TCN, ta thường gặp:

① bậc tử < bậc mẫu thì kết quả bằng 0.

② bậc tử = bậc mẫu thì kết quả bằng $\frac{a_n}{b_m}$.

③ bậc tử > bậc mẫu thì kết quả bằng ∞ . Lúc này đồ thị không có đường TCN.

☑ Khi tìm TCD, trước tiên ta tìm nghiệm của mẫu. Chú ý:

① Những nghiệm "đơn" không thỏa tử đều nhận.

② Những nghiệm "đơn" thỏa tử đều bị loại.

☑ Đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

Ví dụ 1

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 4}{x + 2}$ là

A $y = 2$.

B $x = 2$.

C $x = -2$.

D $y = -2$.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 4}{x + 2} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{x + 2} = 2$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn đáp án **A**



Ví dụ 2

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$.

(A) $y = -2$.

(B) $x = -2$.

(C) $y = 2$.

(D) $x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{-x+1} = -2$.

Chọn đáp án **(A)**



Ví dụ 3

Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

(A) $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$.

(B) $y = \frac{1}{x+1}$.

(C) $y = \frac{2}{x+2}$.

(D) $y = \frac{5x}{2-x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{5x}{2-x}$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x = 10 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0$ và $x-2 < 0$ khi $x > 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{2-x} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{5x}{2-x}$ nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(D)**



Ví dụ 4

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

(A) $x = -2$.

(B) $x = 2$.

(C) $y = 3$.

(D) $y = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty$.

Chọn đáp án **(B)**



Ví dụ 5

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

(A) $x = -1$.

(B) $y = 1; y = -5$.

(C) $x = 1; x = -5$.

(D) $x = \pm 5$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 5^-} y = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -5$.

Chọn đáp án **(C)**



Ví dụ 6

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 3.

Lời giải.

Tiệm cận đứng $x = 2$.

Tiệm cận ngang $y = 0$.

Chọn đáp án **(B)**



Ví dụ 7

Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2.

(D) 3.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

Ta lại có $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$ và $\lim_{x \rightarrow -2} y = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x+2} = -\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x = -2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án **(C)**



Ví dụ 8

Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{2-3x}$.

(A) $I\left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

(B) $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

(C) $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

(D) $I\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số lần lượt là $x = \frac{2}{3}$ và $y = -\frac{2}{3}$. Nên giao điểm I có tọa độ $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(B)**



Ví dụ 9

Cho hàm số $y = \frac{1-2x}{x+3}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A)** Tâm đối xứng của đồ thị (C) là điểm $I(3; 2)$.
- (B)** Điểm $P(-3; 2017)$ thuộc đường tiệm cận đứng của đồ thị (C).
- (C)** Đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của (C).
- (D)** Đường thẳng $x = -3$ là tiệm cận đứng của (C).

 **Lời giải.**

Ta có: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{x+3}$ là $I(-3; -2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Ví dụ 10

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)** Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
- (B)** Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
- (C)** Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
- (D)** Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Chọn đáp án **(A)** □

Ví dụ 11

(Quốc Gia - 2018) Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

(A) 3. **(B)** 2. **(C)** 0. **(D)** 1.

 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = [-9; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Ngoài ra $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \frac{1}{6}$ nên $x = 0$ không thể là một tiệm cận được.

Chọn đáp án **(D)** □

Ví dụ 12

Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

- (A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4x + 3 - (4x^2 + 1)}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{4x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$, do đó đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1}$ có 2 đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 13

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-4}$ cắt hai trục tọa độ tại các điểm A, B . Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là

- (A) $R = 4$. (B) $R = 5$. (C) $R = \frac{5}{2}$. (D) $R = 3$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-4}$ có hai đường tiệm cận là $d_1 : x = 4$ và $d_2 : y = 3$.

Giả sử $d_1 \cap Ox = A \Rightarrow A(4; 0)$, $d_2 \cap Oy = B \Rightarrow B(0; 3)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O nên độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác bằng một nửa cạnh huyền, do đó :

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 3^2}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Dạng 2 Xác định TCN và TCD khi biết bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$

☑ Nhìn "vị trí" $\pm\infty$ để xác định đường TCN.

- ① Nếu "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì vị trí đó có TCN.
- ② Nếu "vị trí" nào không tồn tại hoặc ra kết quả ∞ thì "vị trí" đó không có TCN.

☑ Nhìn "vị trí có hai gạch sọc" để xác định TCD.

- ① Nếu "vị trí" nào xuất hiện ∞ thì vị trí đó là TCD.
- ② Nếu "vị trí" nào không xuất hiện ∞ ở cả hai bên (giới hạn trái và giới hạn phải) thì vị trí đó không là TCD.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Chọn khẳng định đúng.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$ $\searrow$ -1	$-\infty$ $\nearrow$ 2	$-\infty$ $\searrow$ $-\infty$	

- A** Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
B Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
C Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
D Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

 **Lời giải.**

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$ suy ra $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **C** □

Ví dụ 2

Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau. Đồ thị của hàm số đã cho có tổng số bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 3	

- A** 3. **B** 1. **C** 0. **D** 2.

 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tổng số 2 đường tiệm cận đứng và ngang.

Chọn đáp án **D** □

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	+	
y	-2 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	1	$+\infty$ $\nearrow$	-2 $\nearrow$ $-\infty$

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \pm\infty. \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \mp\infty.$$

Do đó $x = 1$ và $x = -1$ là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -2$. Do đó $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C)



Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+		-	0	+
y	-2 3		$+\infty$ -2 $+\infty$		

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 1.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2.$

✓ $\lim_{x \rightarrow -2^+} y = +\infty.$

✓ $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = +\infty.$

Vậy đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

Chọn đáp án (C)



Dạng 3

Một số bài toán biện luận theo tham số m



Ví dụ 1

Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+2}{x-5}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(1;3)$.

A $m = -3$.

B $m = 1$.

C $m = -1$.

D $m = 3$.

Lời giải.

Tiệm cận ngang $y = m$ đi qua điểm $A(1;3)$ nên $m = 3$.

Chọn đáp án **D**



Ví dụ 2

Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, xác định a và b để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

A $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

B $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

C $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$

D $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**



Ví dụ 3

Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$ có tiệm cận đứng.

A $\begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$

B $m \neq 0$.

C $m \neq 2$.

D $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $2(m)^2 - 5(m) + m \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **D**



Ví dụ 4

Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Giá trị của m là

A $m = \pm 2$.

B $m = -1$.

C $m = 2$.

D $m = \pm 1$.

Lời giải.

Điều kiện $m \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-m} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-m} = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

✔ Xét $m > -\frac{1}{2}$, ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{2x+1}{x-m} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x+1}{x-m} = -\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

✔ Xét $m < -\frac{1}{2}$, ta có $\lim_{x \rightarrow m^+} \frac{2x+1}{x-m} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x+1}{x-m} = +\infty \Rightarrow x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Diện tích hình chữ nhật là $|2m| = 2 \Rightarrow m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án **(D)**

Ví dụ 5

Tìm tất cả các điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

- (A)** $(2 + \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ và $(2 - \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$. **(B)** $(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ và $(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.
(C) $(1 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$ và $(1 - \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$. **(D)** $(2 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3})$ và $(2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.

Lời giải.

Xét $M_0 \left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0-2} \right)$ thuộc đồ thị hàm số.

Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $x = 2$ (TCD) và $y = 1$ (TCN).

Tổng khoảng cách từ M_0 đến hai đường tiệm cận là

$$|x_0 - 2| + \left| \frac{x_0+1}{x_0-2} - 1 \right| = |x_0 - 2| + \frac{3}{|x_0-2|} \geq 2\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$|x_0 - 2| = \frac{3}{|x_0-2|} \Leftrightarrow |x_0 - 2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 + \sqrt{3} \\ x_0 = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 1 + \sqrt{3} \\ y_0 = 1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)**

Ví dụ 6

Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

- (A)** $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq \frac{5}{2} \\ m < -2 \end{cases}$. **(B)** $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq -\frac{5}{2} \end{cases}$. **(C)** $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. **(D)** $-2 < m < 2$.

 Lời giải.

ĐKXĐ: $x^2 - mx + 1 \neq 0$

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{x^2-mx+1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang.

Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận khi và chỉ khi phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2.

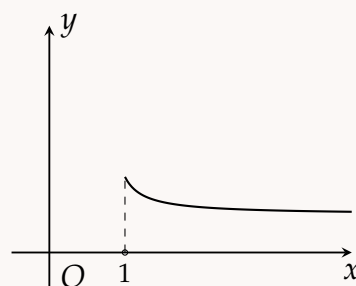
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ 2^2 - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Ví dụ 7

Hỏi có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ để hàm số $y = \frac{2x-a}{4x-b}$ có đồ thị trên $(1; +\infty)$ như hình vẽ bên?

- (A)** 1. **(B)** 4. **(C)** 2. **(D)** 3.



 Lời giải.

Ta có, $y' = \frac{4a-2b}{(4x-b)^2}$ và đường tiệm cận đứng $x = \frac{b}{4}$.

Yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} y' < 0 \\ \frac{b}{4} < 1 \\ a > 0, b > 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b < 0 \\ b < 4 \\ a > 0, b > 0 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2a < b < 4 \\ a, b \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)** □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x-1}$ là

- (A) $y = 5$. (B) $y = 0$. (C) $x = 1$. (D) $y = 1$.

💬 Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$, nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

đã cho.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$.
 (B) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$.
 (C) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.
 (D) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.

💬 Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-2}$ có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) ☐

Câu 3

Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x^2-4}$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

💬 Lời giải.

Ta có $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \Rightarrow x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 4

Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- (A) $y = \frac{2x^2+1}{2-x}$. (B) $y = \frac{x^2+2x+1}{1+x}$. (C) $y = \frac{x+1}{1-2x}$. (D) $y = \frac{2x-2}{x+2}$.

 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{x+2} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-2}{x+2} = 2 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A)** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- (B)** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- (C)** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x = -2$ và $x = 2$.
- (D)** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -2$ và $y = 2$.

 **Lời giải.**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ nên $y = -2$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ nên $y = 2$ là tiệm cận ngang.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Tìm kết luận đúng trong các kết luận sau.

- (A)** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = y_0$.
- (B)** Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = y_0$.
- (C)** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- (D)** Đồ thị hàm số có cả tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

 **Lời giải.**

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = y_0$ làm tiệm cận ngang.

Do hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên không tồn tại giá trị x_0 làm cho $\lim_{x \rightarrow (x_0)^\pm} f(x) = \pm\infty$, vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H) . Số đường tiệm cận của (H) là

- (A)** 0.
- (B)** 2.
- (C)** 3.
- (D)** 4.

 **Lời giải.**

Đồ thị (H) có tiệm cận đứng là $x = 2$, tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy số đường tiệm cận của (H) là 2.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 8

Cho đồ thị (C): $y = \frac{x-3}{x+2}$ có hai đường tiệm cận cắt nhau tại I . Tính độ dài đoạn thẳng OI (với O là gốc tọa độ).

- (A) $OI = \sqrt{3}$. (B) $OI = \sqrt{2}$. (C) $OI = 1$. (D) $OI = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $x = -2$ và tiệm cận ngang là $y = 1$. Do đó $I(-2; 1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

Ta có $OI = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Số đường tiệm cận (đứng và ngang) của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ là bao nhiêu?

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 0$ làm tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Tìm số tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$.

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 0$ nên

$y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x^2-3x+2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2-3x+2} = +\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-3x+2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2-3x+2} = -\infty$ nên $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số có 3 tiệm cận đứng và ngang.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ có đường tiệm cận ngang là



(A) $y = 2$.

(B) $y = \pm 2$.

(C) $y = 1$.

(D) $y = \pm 1$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$. Do đó đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận (đứng và ngang)?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 3.

Lời giải.

Để thấy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{1-x} = -1.$$

Vậy hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13

Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

(A) 3.

(B) 1.

(C) 4.

(D) 2.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-3x}} = \frac{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-3x}}{-x} = \frac{|x| \left(\sqrt{1-\frac{4}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right)}{-x}.$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}} - \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right) = -2;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1-\frac{4}{x}} + \sqrt{1-\frac{3}{x}} \right) = 2.$$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ có đồ thị (C). Gọi d là tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến các đường tiệm cận của (C). Tính d.

A $d = 1$.

B $d = \sqrt{2}$.

C $d = 2$.

D $d = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $d_1: x = 0$, tiệm cận ngang là $d_2: y - 1 = 0$.

Gọi $M \in (C) \Rightarrow M\left(m; \frac{m+2}{m}\right), (m \neq 0)$.

Ta có $d(M, d_1) = |m|$; $d(M, d_2) = \frac{2}{|m|}$. Do đó $d = |m| \cdot \frac{2}{|m|} = 2$.

Chọn đáp án **C**



Câu 15

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A 4.

B 1.

C 3.

D 2.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	5

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta có

✓ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ suy ra $y = 2$ là tiệm cận ngang.

✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$ suy ra $y = 5$ là tiệm cận ngang.

✓ $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$ suy ra $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số tổng cộng có 3 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **C**



Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

A 0.

B 2.

C 3.

D 1.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	+		+	0 -
y	-1	$+\infty$	2	$-\infty$

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên $y = -1$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Chọn đáp án **B**



Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—		—	—	—
$f(x)$	-2	$+\infty$	-1	$+\infty$	2

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A)** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -2, y = 2$.
(B) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 1, x = -1$.
(C) Hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.
(D) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Lời giải.

Vì qua $x = 0$ đạo hàm của hàm số không đổi dấu nên khẳng định “Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = 0$ ” là khẳng định sai.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $f(x)$ là

- (A)** 4. **(B)** 2.
(C) 1. **(D)** 3.

x	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	—
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	0

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \end{cases}$, suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 tiệm cận trong đó có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 19

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A)** 1. **(B)** 2.
(C) 3. **(D)** 4.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	—	0	+
y	2	$-\infty$	1	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} y = -\infty$$

Vậy hàm số có một tiệm cận ngang $y = 2$, một tiệm cận đứng $x = 0$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 20

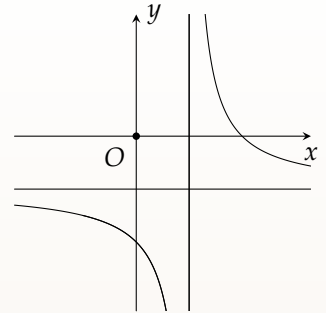
Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

(A) $b < 0 < a$.

(B) $0 < b < a$.

(C) $b < a < 0$.

(D) $a < b < 0$.



Lời giải.

① Tiệm cận ngang $y = a$. Theo hình vẽ thì $a < 0$.

② Giao với Oy tại điểm $(0; b)$. Theo hình vẽ thì $b < 0$ và $b < a$.

Vậy $b < a < 0$.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 21

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng.

(A) $m = 0$ hoặc $m = 1$.

(B) $m = 2$.

(C) $m = 1$.

(D) $m = 0$.

Lời giải.

Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng khi m là nghiệm của $2x^2 - 3x + m$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 3m + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**



Câu 22

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - m}$ đi qua điểm $M(2; 5)$ khi m bằng bao nhiêu?

(A) $m = -2$.

(B) $m = -5$.

(C) $m = 5$.

(D) $m = 2$.

Lời giải.

Với $m \neq -\frac{1}{2}$ đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = m$. Tiệm cận đứng $x = m$ đi qua $M(2; 5)$ khi chỉ khi $m = 2$.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 23

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y			4		$+\infty$
	$-\infty$			-2	

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2018}{f(x)}$ là

- (A) 4. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt. Do đó hàm số $y = \frac{2018}{f(x)}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 24

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2+2mx+1}$ có hai tiệm cận đứng là

- (A) $(-1; 1)$. (B) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
(C) $\left\{-\frac{5}{4}\right\}$. (D) $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x-2}{x^2+2mx+1}$ có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2+2mx+1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4+4m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1 > 0 \\ 4m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \\ m \neq -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}; -1\right) \cup (1; +\infty).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 25

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có đúng hai đường tiệm cận.

- (A) 2. (B) 3. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho luôn có 1 tiệm cận ngang với mọi m .

Do đó bài toán trở thành tìm m để đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng.

✔ Với $m = 0$, $y = \frac{x-1}{-2x+3}$. Đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$.

✔ Với $m \neq 0$. Đồ thị hàm số đã cho có đúng 1 tiệm cận đứng khi phương trình $mx^2 - 2x + 3 = 0$ có nghiệm kép hoặc nghiệm $x = 1$.

Điều đó tương đương với

$$\begin{cases} 1 - 3m = 0 \\ m - 2 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = -1. \end{cases}$$

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn đề bài là $-1, 0, \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

(A) $m < 0$.

(B) $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$.

(C) $m > 0$.

(D) $m > 0$ và $m \neq -\frac{5}{4}$.

💬 Lời giải.

Với $m \neq \frac{5}{4}$, đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng $x = m$.

Tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung $\Leftrightarrow m > 0$.

Vậy $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27

Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(a-3)x + a + 2018}{x - (b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a + b$ là

(A) 3.

(B) -3.

(C) 6.

(D) 0.

💬 Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng nên

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} y = \infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 3 = 0 \\ b + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -3. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 28

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	3	$-\infty$	$-\infty$
		2				

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

 **Lời giải.**

Hàm số $g(x) = \frac{1}{2f(x) - 5}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \neq 1 \\ f(x) \neq \frac{5}{2} \end{cases}$.

✔ Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$ nên $x = 1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm $g(x)$.

✔ Xét phương trình $f(x) = \frac{5}{2}$ (1).

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (với $x_1 < -2 < x_2 < 1 < x_3 < 2 < x_4$).

Mặt khác hàm số $g(x) = \frac{1}{2f(x) - 5}$ có tử thức là hằng số nên ta suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29

Tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng là

- (A) $\left\{\frac{7}{2}\right\}$. (B) $\mathbb{R}$. (C) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}$. (D) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

 **Lời giải.**

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 + 6x - 2 = 0$ không có nghiệm $x = -2$. Khi đó

$$4m - 14 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{2}.$$

Vậy tập hợp các giá trị m cần tìm là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2mx + 2m}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A $m \neq -\frac{1}{4}$.

B $\begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases}$.

C $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$.

D $0 < m < 2$.

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$. Để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có thêm 2 tiệm cận đứng nữa. Muốn thế thì phương trình $x^2 - 2mx + 2m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 . Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 - 2m \cdot 1 + 2m \neq 0 \\ (-1)^2 - 2m(-1) + 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C**



HẾT

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Hàm số nào sau đây có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận?

A $y = \frac{1}{x+1}$.

B $y = \frac{5x}{2-x}$.

C $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$.

D $y = \frac{2}{x+2}$.

 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x}{2-x} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x}{2-x} = +\infty$ nên đồ thị hàm số $y = \frac{5x}{2-x}$ nhận $x = 2$ làm tiệm cận đứng.

Chọn đáp án **B** □

Bài 2

Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

A $y = \frac{1-2x}{1-x}$.

B $y = \frac{x-2}{2x-4}$.

C $y = \frac{2x^2+3}{x+2}$.

D $y = \frac{1-x}{1-2x}$.

 **Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2}{\frac{1}{x} - 1} = 2$.

Vậy $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{1-x}$.

Chọn đáp án **A** □

Bài 3

Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

A 0.

B 1.

C 3.

D 2.

 **Lời giải.**

Nhận thấy hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$ xác định trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} = 0$, nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận.

Chọn đáp án **B** □

Bài 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A 1.

B 2.

C 3.

D 4.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+
y	2 ↘ $-\infty$	$-\infty$	1 ↗ $-\infty$	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} y = -\infty$$

Vậy hàm số có một tiệm cận ngang $y = 2$, một tiệm cận đứng $x = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 5

Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có đúng hai đường tiệm cận?

- (A)** $y = \frac{1}{x^2 - 4}$. **(B)** $y = x^{-2018}$. **(C)** $y = \frac{x^3 - 1}{4}$. **(D)** $y = \frac{1}{x^2 + 4}$.

Lời giải.

Xét từng đáp án, ta có

- ✔ Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ có tiệm cận đứng là $x = 2, x = -2$ và tiệm cận ngang là $y = 0$.
- ✔ Hàm số $y = x^{-2018} = \frac{1}{x^{2018}}$ nên đồ thị nhận tiệm cận đứng là $x = 0$ và tiệm cận ngang là $y = 0$.
- ✔ Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 1}{4}$ không có tiệm cận.
- ✔ Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ có đúng một tiệm cận ngang $y = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A)** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.
(B) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 3$ và $x = -3$.
(C) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
(D) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ nên đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 3$ và $y = -3$.

Chọn đáp án **(A)**

Bài 7

Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 + x - 2}$ là

- (A)** 1. **(B)** 4. **(C)** 3. **(D)** 2.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.
Ta có

☑ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 0$. Suy ra đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

☑ $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$. Suy ra đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -2$.

☑ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$. Suy ra, $x = 1$ không phải là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2.

Chọn đáp án (D) □

Bài 8

Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

- (A) 4. (B) 3. (C) 1. (D) 2.

 **Lời giải.**

☑ Tập xác định $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

☑ $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = -\infty$. Suy ra $x = -2$, $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

☑ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$. Suy ra $y = -1$, $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

Chọn đáp án (A) □

Bài 9

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-5x+6}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- (A) 3. (B) 4. (C) 2. (D) 1.

 **Lời giải.**

Ta có

☑ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}}}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = 0;$

☑ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}}}{x^2 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^4}}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} = 0.$

Suy ra đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$\text{Mặt khác } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Lại có

$$\textcircled{✓} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}(x-3)} = -\infty;$$

$$\textcircled{✓} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 5x + 6} \text{ không tồn tại}$$

$$\textcircled{✓} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x-2)(x-3)} = +\infty$$

$$\textcircled{✓} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{(x-2)(x-3)} = -\infty.$$

Suy ra đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = 2$ và $x = 3$.

Vậy đồ thị hàm số có tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang bằng 3.

Chọn đáp án **(A)**



Bài 10

Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{2x + m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -1$.

Lời giải.

Ta có tiệm cận đứng là $2x + m = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Kết luận: $m = 2$.



Bài 11

Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x - 5m}{2x - m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

(A) $m = 2$.

(B) $m = \frac{5}{2}$.

(C) $m = 0$.

(D) $m = 1$.

Lời giải.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x - 5m}{2x - m}$ là $y = \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(D)**



Bài 12

Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{3x - 1}{x - m}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 5$.

Lời giải.

Ta có tiệm cận đứng là $x - m = 0 \Leftrightarrow x = m = 5$.

Kết luận: $m = 5$ là giá trị cần tìm.



Bài 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	0	$-\infty$

Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- ☐ A) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ là 0.
☐ B) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
☐ C) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận.
☐ D) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$ là -1 .

 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

- ☒ Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 0.
☒ Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
☒ Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
☒ Hàm số có giá trị cực tiểu $y_{CT} = -1$.
☒ Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án **D** □

Bài 14

Tìm tổng tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ chỉ có một tiệm cận đứng.

- ☐ A) -8 . ☐ B) 4 . ☐ C) -120 . ☐ D) 8 .

 **Lời giải.**

Đặt $g(x) = x^2 - 4x + m = 0$. Ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $\Delta'_g = 0 \Leftrightarrow m = 4$ thì đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Trường hợp 2. $\Delta'_g > 0 \Leftrightarrow m < 4$ thì $g(x) = 0$ có 2 nghiệm.

Vậy để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng khi và chỉ khi

$$g(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4(-2) + m = 0 \Leftrightarrow m = -12.$$

Vậy tổng tất cả giá trị của m bằng $4 + (-12) = -8$.

Chọn đáp án **A** □

Bài 15

Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{m^2x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là

đường thẳng $y = 4$.

(A) $\{-4; 4\}$.

(B) $\{-2; -1\}$.

(C) $\{1; 2\}$.

(D) $\{-2; 2\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m^2x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{m^2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = m^2$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y = m^2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Như vậy, đường thẳng $y = 4$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Chọn đáp án (D)

□

Bài 16

Tập hợp các giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$ có tiệm cận đứng là

(A) $\left\{\frac{7}{2}\right\}$.

(B) $\mathbb{R}$.

(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

(D) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $mx^2 + 6x - 2 = 0$ không có nghiệm $x = -2$. Khi đó

$$4m - 14 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{7}{2}.$$

Vậy tập hợp các giá trị m cần tìm là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Chọn đáp án (D)

□

Bài 17

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 4}{x^2 - mx + 4}$ có hai đường tiệm cận đứng là

(A) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.

(B) $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

(C) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$.

(D) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x - 4}{x^2 - mx + 4}$ có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $x^2 - mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 4, tức

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - 16 > 0 \\ 20 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \vee m < -4 \\ m \neq 5. \end{cases}$$

Vậy với $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty) \setminus \{5\}$, đồ thị hàm số $y = \frac{x - 4}{x^2 - mx + 4}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C)

□

Bài 18

Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n - 3)x + n - 2017}{x + m + 3}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng $m - 2n$.

- (A) 0. (B) -3. (C) -9. (D) 6.

 **Lời giải.**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n-3 + \frac{n-2017}{x}}{1 + \frac{m+3}{x}} = n-3.$$

Vì đồ thị nhận trục hoành làm tiệm cận ngang nên $n-3=0 \Leftrightarrow n=3$.

$$\bullet \text{ Vì đồ thị hàm số nhận trục tung làm tiệm cận đứng nên } \begin{cases} n-2017 \neq 0 \\ m+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 2017 \\ m=-3. \end{cases}$$

Vậy $m-2n=-9$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 19

Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2}$ có đúng ba đường tiệm cận?

- (A) 12. (B) 11. (C) 0. (D) 10.

 **Lời giải.**

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1-\frac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{m}{x}}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 1.$$

Suy ra $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{m}{x}}-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{m}{x}}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = -1.$$

Suy ra $y=-1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó bài toán thỏa khi và chỉ khi đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một tiệm cận đứng.

$$\text{Ta lại có: } y = \frac{\sqrt{x(x-m)}-1}{x+2} = \frac{x^2-mx-1}{(x+2)(\sqrt{x(x-m)}+1)}.$$

Để đồ thị hàm số chỉ có duy nhất một đường TCD thì $x=-2$ không là nghiệm của tử và $x=-2$ thuộc tập xác định của hàm số.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(-2-m) \geq 0 \\ (-2)^2 - m \cdot (-2) - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ 2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m \neq -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Do $m \in (-10; 10)$, $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; \dots; 8; 9\}$ và có 12 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Bài 20

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tạo với các trục tọa độ một đa giác có diện tích bằng (đơn vị diện tích)

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

 **Lời giải.**

Hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 1$.

Suy ra các đường tiệm cận của đồ thị cùng với các trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật có 2 kích thước là 1 và 2.

Vậy diện tích hình chữ nhật bằng 2 (đvdt).

Chọn đáp án **(C)**

Bài 21

Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận ngang?

- (A)** $y = (x+1)^{\frac{1}{2}}$. **(B)** $y = (x+1)^{-1}$. **(C)** $y = \log_2(x+1)$. **(D)** $y = (x+1)^2$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+1)^{-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ nên đồ thị hàm số $y = (x+1)^{-1}$ có tiệm cận ngang.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 22

Một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	—	—	—
y	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 2	

Đó là hàm số nào?

- (A)** $y = \frac{2x-1}{x+2}$. **(B)** $y = \frac{2x+3}{x-2}$. **(C)** $y = \frac{x-4}{x-2}$. **(D)** $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và tiệm cận đứng là $x = 2$.

Trong 4 hàm số đã cho ở 4 phương án, chỉ có hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ thỏa mãn cả hai điều trên.

Chọn đáp án **(B)**

Bài 23

Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-1)x+3}{x-m+1}$ (m là tham số) có hai đường tiệm cận. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận và $A(4;7)$. Tổng của tất cả các giá trị của tham số m sao cho $AI = 5$ là

- (A)** $\frac{42}{5}$. **(B)** 2. **(C)** $\frac{32}{5}$. **(D)** $\frac{25}{5}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = m-1$, đường tiệm cận ngang $y = 2m-1$.

Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(m-1; 2m-1)$.

$$AI = 5 \Leftrightarrow (m-1-4)^2 + (2m-1-7)^2 = 25 \Leftrightarrow 5m^2 - 42m + 64 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{32}{5} \\ m = 2. \end{cases}$$

Tổng các giá trị m là $\frac{42}{5}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 24

Biết đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + ax + b}{(x-5)^2}$ không có tiệm cận đứng. Tính $a^2 + b^3$.

(A) $-\frac{4841}{152}$.

(B) $-\frac{4814}{152}$.

(C) $\frac{4841}{152}$.

(D) $\frac{4814}{152}$.

 **Lời giải.**

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1} + ax + b$ có $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} + a$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $f(x) = (x-5)^2 \cdot g(x)$.
Tức là, ta có điều kiện

$$\begin{cases} f(5) = 0 \\ f'(5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3 \cdot 5 + 1} + a \cdot 5 + b = 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 5 + 1}} + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a + b = -4 \\ a = -\frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{17}{8} \\ a = -\frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy $a^2 + b^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{4814}{152}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 25

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Biết rằng $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm trên đồ thị (C) có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tính giá trị $P = x_1x_2 + y_1y_2$.

(A) -1.

(B) 0.

(C) -2.

(D) 1.

 **Lời giải.**

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty \Rightarrow \Delta_1: x = -1$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \Rightarrow \Delta_2: y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ta có: $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$, gọi $M\left(a; 2 - \frac{3}{a+1}\right) \in (C), (a \neq -1)$.

$d(M, \Delta_1) = |a+1|$.

$d(M, \Delta_2) = \left| \frac{-3}{a+1} \right| = \frac{3}{|a+1|}$.

$S = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = |a+1| + \frac{3}{|a+1|} \geq 2\sqrt{|a+1| \cdot \frac{3}{|a+1|}} = 2\sqrt{3}, \forall a \neq -1$.

Suy ra $\min S = 2\sqrt{3}$, đạt được khi $|a+1| = \frac{3}{|a+1|} \Leftrightarrow (a+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - \sqrt{3} \\ a = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$.

Do đó $M_1(-1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}), M_2(-1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ là hai điểm trên (C) có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận nhỏ nhất.

Vậy $P = x_1x_2 + y_1y_2 = (-1 - \sqrt{3})(-1 + \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = -1$.

Chọn đáp án (A) □

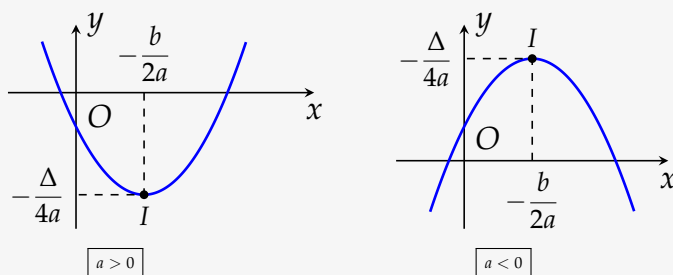
—HẾT—

§5. ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$

Phương pháp 5.1. Đối với hàm số bậc hai ta có



GHI NHỚ

- ① Tọa độ đỉnh:

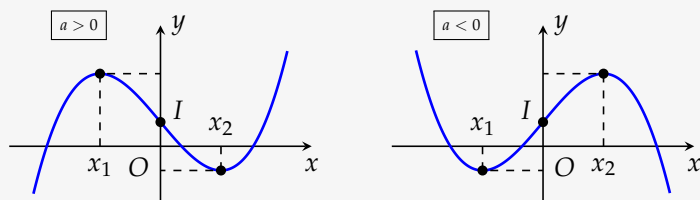
$$I(x_0; y_0) = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$
- ② (P) viết theo tọa độ đỉnh:

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

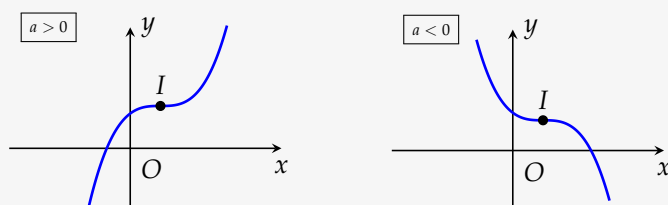
2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Phương pháp 5.2. Đối với hàm số bậc ba ta có

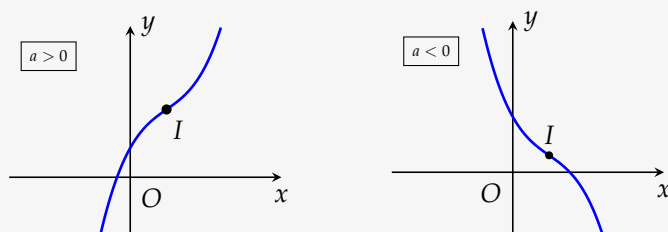
☑ **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



☑ **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.



☑ **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



GHI NHỚ

- ① Hàm số có hai điểm cực trị

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$
- ② Liên hệ tổng tích hai nghiệm

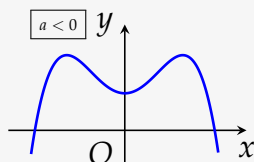
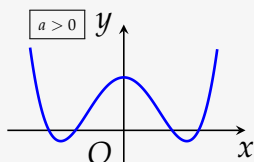
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$
- ③ Hàm số không có điểm cực trị

$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$
- ④ Hoành độ điểm uốn là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$. Tọa độ điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị.
- ⑤ Tiếp tuyến tại điểm uốn $I(x_0; y_0)$ sẽ có hệ số góc nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$.

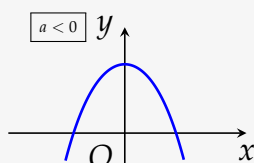
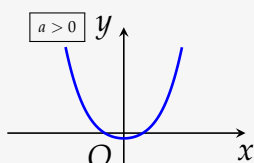
3. Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

Phương pháp 5.3. Đối với hàm số trùng phương ta có

☑ $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Khi đó, hàm số có ba điểm cực trị $x = 0$ và $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.



☑ $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm $x = 0$. Khi đó, hàm số có đúng 1 điểm cực trị.



GHI NHỚ

① Hàm số có ba điểm cực trị

$$ab < 0$$

② Hàm số có đúng một điểm cực trị

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a, b \text{ không đồng thời bằng } 0 \end{cases}$$

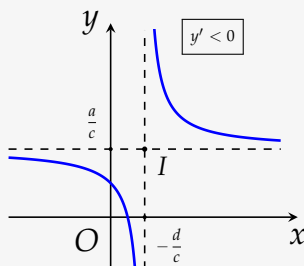
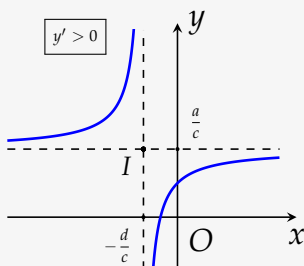
③ Hàm số chẵn, đối xứng nhau qua Oy.

4. Hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Phương pháp 5.4. Đối với hàm số bậc nhất ta có

☑ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

☑ Hình dạng đồ thị:



GHI NHỚ

① Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

② Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

③ Giao với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

④ Giao với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$.

⑤ Giao hai đường tiệm cận (điểm I) là tâm đối xứng của đồ thị.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Nhận dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

☑ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

① Bên phải đi lên thì $a > 0$.

② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

☑ Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay tọa độ đó vào hàm số phải thỏa mãn. Đồ thị qua điểm $(0; d)$.

☑ Nhìn cực trị:

① Đồ thị hàm số có điểm cực đại (cực tiểu) là $(x_0; y_0)$ thì $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

② Mối liên hệ giữa hai điểm cực trị x_1 và x_2 của hàm số: $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c}{3a}$.

Ví dụ 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ $y = -x^3 - 2x^2 + 5$. Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 + 5$.
 Ⓒ $y = -x^3 - 3x + 5$. Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Ví dụ 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

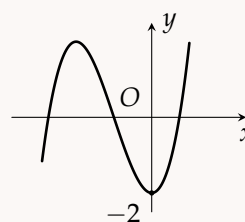
- Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + x + 3$. Ⓑ $y = x^3 - 3x + 4$.
 Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	2	$+\infty$

Ví dụ 3

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- Ⓐ $y = -x^3 + x^2 - 2$. Ⓑ $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
 Ⓒ $y = x^3 - 3x + 2$. Ⓓ $y = x^2 - 3x - 2$.



Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị, ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a > 0$ nên loại các hàm $y = x^4 + x^2 - 2$, $y = -x^2 - 3x - 2$. Mặt khác, đồ thị đi qua điểm $(0; -2)$ nên loại hàm $y = x^3 - 3x + 2$.

(Ngoài ra, ta có thể đánh giá dấu của các hệ số a, b, c thông qua hoành độ 2 điểm cực trị và hoành độ trung điểm của hai điểm cực trị. Trong đồ thị này ta còn thấy hàm số có điểm cực tiểu $x = 0$ nên $c = 0$)

Chọn đáp án Ⓑ



Ví dụ 4

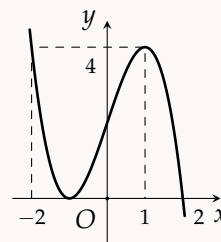
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^3 + 3x - 2.$

B $y = x^3 - 3x + 2.$

C $y = -x^3 + 3x + 2.$

D $y = -x^3 - 3x - 2.$



Lời giải.

Quan sát đồ thị, ta thấy nhánh cuối của đồ thị hướng xuống dưới nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, suy ra hệ số $a < 0$. Như vậy hai hàm số $y = x^3 + 3x - 2$; $y = x^3 - 3x + 2$ không thỏa mãn. Mặt khác hàm số có hai điểm cực trị nên hàm số $y = -x^3 - 3x - 2$ có $y' = -3x^2 - 3 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ không thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

Ví dụ 5

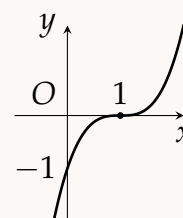
Cho hàm số đa thức bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hỏi (C) là đồ thị của hàm số nào?

A $y = x^3 - 1.$

B $y = (x + 1)^3.$

C $y = (x - 1)^3.$

D $y = x^3 + 1.$



Lời giải.

(C) tiếp xúc với Ox tại điểm uốn, suy ra $f(x)$ có nghiệm bội ba $x = 1$ nên hàm số có dạng $y = a(x - 1)^3$. Mà $(0; -1) \in (C)$ nên $a = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Ví dụ 6

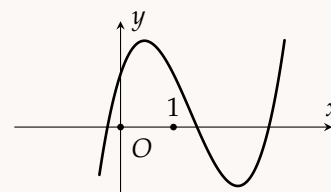
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0.$

B $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0.$

C $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$

D $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0.$



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đi từ $-\infty$ lên $+\infty$ nên $a > 0$.

Giao điểm với trục tung nằm trên trục hoành, do đó $d > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị, và hai điểm cực trị đều dương. Suy ra tổng hai điểm cực trị và tích hai điểm cực trị đều dương.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên tổng hai điểm cực trị là $-\frac{2b}{3a}$. Suy ra $-\frac{2b}{3a} > 0$, hay $b < 0$.



Còn tích hai điểm cực trị là $\frac{c}{3a}$. Suy ra $\frac{c}{3a} > 0$ hay $c > 0$.

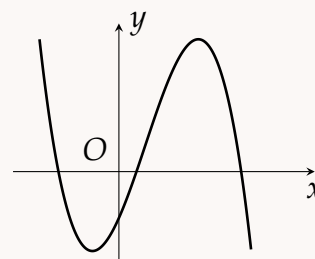
Chọn đáp án **(D)**



Ví dụ 7

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)** $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$. **(B)** $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **(D)** $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị suy ra $a < 0$.

Dựa vào vị trí điểm cực đại và điểm cực tiểu, suy ra $x_{CT} + x_{CD} > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Hai điểm cực trị có hoành độ trái dấu nên $x_{CT} \cdot x_{CD} < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0$ và $d > 0$.

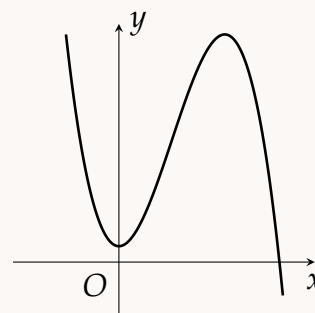
Chọn đáp án **(C)**



Ví dụ 8

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A)** $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. **(B)** $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
(C) $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$. **(D)** $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có thể thấy $a < 0$, đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Hàm số có hai cực trị thỏa $\begin{cases} S > 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c = 0. \end{cases}$

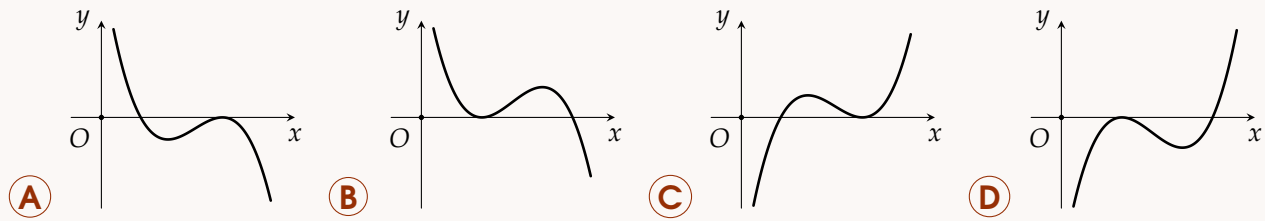
Chọn đáp án **(C)**



Ví dụ 9

Tìm đồ thị hàm số $y = f(x)$ được cho bởi một trong các phương án dưới đây, biết $f(x) = (a - x)(b - x)^2$ với $a < b$.





Lời giải.

Hàm số đã cho thỏa mãn các điều kiện sau

- ✔ Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ $x = b$ (do $f(b) = f'(b) = 0$).
- ✔ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, do $f(x)$ là hàm số bậc ba có hệ số cao nhất âm.

Chọn đáp án **A**



Dạng 2 Nhận dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$

✔ Nhìn "dáng điệu" của đồ thị:

① Bên phải đi lên thì $a > 0$.

② Bên phải đi xuống thì $a < 0$.

✔ Nhìn điểm thuộc đồ thị: Thay tọa độ đó vào hàm số phải thỏa mãn. Đồ thị qua điểm $(0; c)$.

✔ Nhìn điểm cực trị

① Đồ thị có 3 điểm cực trị $ab < 0$

② Đồ thị có một điểm cực trị $ab > 0$.

Ví dụ 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A** $y = x^4 - 8x^2 + 2$.
- B** $y = x^4 + 6x^2 + 2$.
- C** $y = x^4 - 6x^2 + 2$.
- D** $y = -x^4 + 8x^2 + 2$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	-7	2	-7	$-\infty$

Ví dụ 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- A** $y = -x^4 + 3x^2 + 2$.
- B** $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
- C** $y = -x^4 - 3x^2 + 2$.
- D** $y = -x^4 + x^2 + 2$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		$+$	$-$
y	$-\infty$	2	$-\infty$

Ví dụ 3

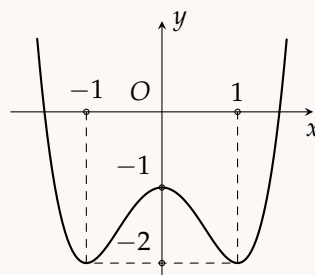
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^4 - 2x^2 - 1.$

B $y = 2x^4 - 4x^2 - 1.$

C $y = -x^4 + 2x^2 - 1.$

D $y = -2x^4 + 4x^2 - 1.$



Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số trùng phương với $a > 0$, do đó loại phương án $y = -x^4 + 2x^2 - 1$, $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

Đồ thị đi qua điểm $A(1; -2)$ nên thay tọa độ điểm A vào ta có đáp án $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Chọn đáp án **A**



Ví dụ 4

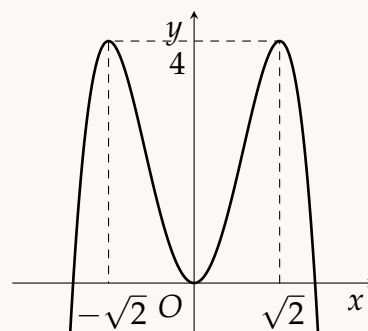
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = -x^4 + 4x^2.$

B $y = x^4 - 3x^2.$

C $y = -x^4 - 2x^2.$

D $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2.$



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0; 0)$, $A(-\sqrt{2}; 4)$ và $B(\sqrt{2}; 4)$. Thay lần lượt tọa độ các điểm O , A , B vào các hàm số trên ta thấy $y = -x^4 + 4x^2$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **A**



Ví dụ 5

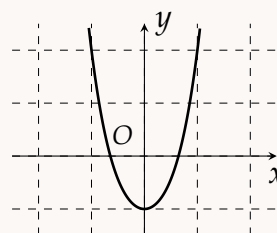
Đồ thị ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = x^2 - 1.$

B $y = x^4 - 2x^2 - 1.$

C $y = x^4 + 2x^2 - 1.$

D $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 1.$

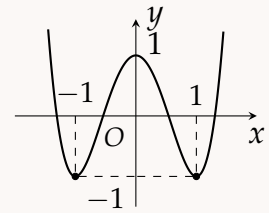




Ví dụ 6

Biết rằng hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong hình vẽ bên. Tính giá trị $f(a + b + c)$.

- ☐ A $f(a + b + c) = -1$.
 ☐ B $f(a + b + c) = 2$.
 ☐ C $f(a + b + c) = -2$.
 ☐ D $f(a + b + c) = 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ nên $c = 1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; -1)$ nên $a + b + c = -1 \Rightarrow a + b = -2$. (1)

Hàm số có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

Do hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 1$ nên $4a + 2b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $a = 2, b = -4$.

Như vậy $a = 2, b = -4, c = 1$. Do đó $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ và $a + b + c = -1$.

Từ đó $f(a + b + c) = f(-1) = -1$.

Chọn đáp án ☐ A

□

Ví dụ 7

Biết đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị là điểm có tọa độ $(0; -1)$, khi đó b và c thỏa mãn những điều kiện nào dưới đây?

- ☐ A $b < 0$ và $c = -1$.
 ☐ B $b \geq 0$ và $c > 0$.
 ☐ C $b < 0$ và $c < 0$.
 ☐ D $b \geq 0$ và $c = -1$.

Lời giải.

☒ Đồ thị hàm số $y = x^4 + bx^2 + c$ chỉ có một điểm cực trị $\Rightarrow b \geq 0$.

☒ Điểm cực trị $(0; -1)$ thuộc đồ thị hàm số suy ra $c = -1$.

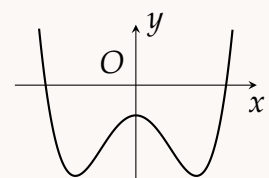
Chọn đáp án ☐ D

□

Ví dụ 8

Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các tham số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $a < 0, b > 0, c < 0$.
 ☐ B $a < 0, b < 0, c < 0$.
 ☐ C $a > 0, b < 0, c < 0$.
 ☐ D $a > 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải.

Dựa vào hình dạng của đồ thị ta có $a > 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung tại điểm có tung độ $c < 0$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Chọn đáp án ☐ C

□



Ví dụ 9

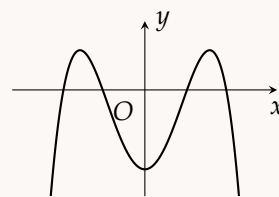
Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $a < 0, b > 0, c > 0$.

(B) $a < 0, b < 0, c < 0$.

(C) $a < 0, b > 0, c < 0$.

(D) $a < 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta suy ra $a < 0$, đạo hàm của hàm số có 3 nghiệm phân biệt và do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ c nên $c < 0$.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2ax^2 = -b$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Như vậy: $a < 0, b > 0, c < 0$.

Chọn đáp án (C)



Ví dụ 10

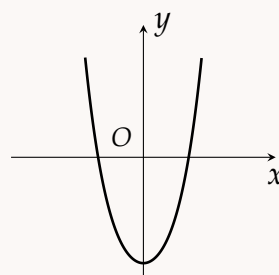
Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $a < 0, b > 0, c > 0$.

(B) $a > 0, b > 0, c > 0$.

(C) $a > 0, b < 0, c > 0$.

(D) $a > 0, b > 0, c < 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta suy ra $a < 0$, đạo hàm của hàm số có 3 nghiệm phân biệt và do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ c nên $c < 0$.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$, nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2ax^2 = -b$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Như vậy: $a < 0, b > 0, c < 0$.

Chọn đáp án (D)



Dạng 3

Nhận dạng đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Chú ý bốn thông số

① Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.

② Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.

③ Giao với Ox : $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

④ Giao với Oy : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$.

Ví dụ 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của hàm số nào?

A $y = \frac{2x-1}{x+3}$.

B $y = \frac{4x-6}{x-2}$.

C $y = \frac{3-x}{2-x}$.

D $y = \frac{x+5}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{x+5}{x-2}$ có

$$\begin{cases} y' = \frac{-7}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**



Ví dụ 2

Bảng biến thiên sau là của hàm số nào trong các hàm số bên dưới?

A $y = \frac{x-1}{x-3}$.

B $y = \frac{x-1}{-x-3}$.

C $y = \frac{x+5}{-x+3}$.

D $y = \frac{1}{x-3}$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra

- ✔ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- ✔ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 3$ và đường thẳng $y = -1$ làm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Vậy ta nhận hàm số $y = \frac{x+5}{x-2}$.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 3

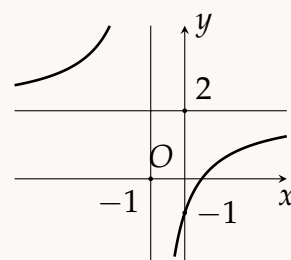
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

A $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

C $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

D $y = \frac{2x+1}{x+1}$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$ nên loại đáp án $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$ nên loại đáp án $y = \frac{1-2x}{x+1}$ và $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án **(A)**



Ví dụ 4

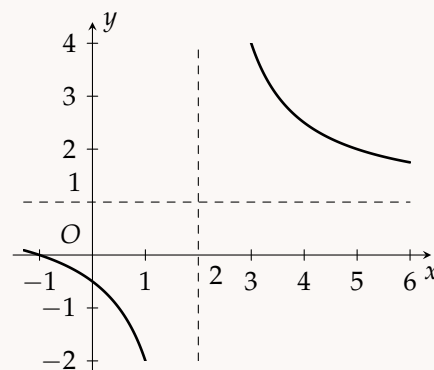
Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$

(A) $T = 2$.

(B) $T = 0$.

(C) $T = -1$.

(D) $T = 3$.



Lời giải.

Từ biểu thức của hàm số, suy ra tiệm cận đứng là $x = \frac{2}{b}$, tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{b}$.

Dựa vào hình vẽ, suy ra tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 1$.

Từ hai điều trên suy ra $a = 1, b = 1$. Vậy $T = 1 + 1 = 2$.

Chọn đáp án **(A)**



Ví dụ 5

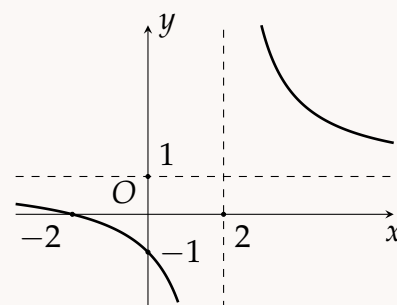
Hãy xác định a, b để hàm số $y = \frac{2-ax}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ?

(A) $a = 1; b = -2$.

(B) $a = b = 2$.

(C) $a = -1; b = -2$.

(D) $a = b = -2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 2$ nên $b + 2 = 0 \Leftrightarrow b = -2$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$ nên $2 + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$.

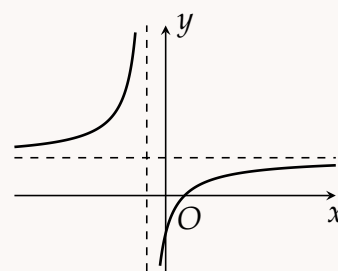
Chọn đáp án **(C)**



Ví dụ 6

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

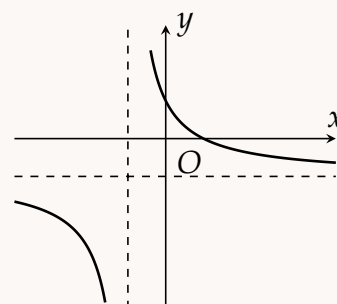
- ☐ A $ab > 0, bd < 0$. ☐ B $ab < 0, ad > 0$.
☐ C $ab < 0, ad < 0$. ☐ D $bd > 0, ad > 0$.



Ví dụ 7

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- ☐ A $bd < 0, ab > 0$. ☐ B $ad > 0, ab < 0$.
☐ C $ad < 0, ab < 0$. ☐ D $bd > 0, ad > 0$.



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1

Đồ thị hàm số nào dưới đây **không** đi qua điểm $A(1; 1)$?

- (A) $y = x$. (B) $y = 2x^2 - 1$. (C) $y = 2x^3 - x - 1$. (D) $y = -x^4 + 2$.

Lời giải.

Do $2 \cdot 1^3 - 1 - 1 \neq 1$ nên đồ thị hàm số $y = 2x^3 - x - 1$ không đi qua điểm $A(1; 1)$.

Chọn đáp án (C)

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Đồ thị (C) đi qua điểm nào?

- (A) $M(1; 3)$. (B) $M(0; -2)$. (C) $M(-1; \frac{1}{3})$. (D) $M(3; 5)$.

Lời giải.

✓ Khi $x = 1 \Rightarrow y = -1$.

✓ Khi $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

✓ Khi $x = -1 \Rightarrow y = 1$.

✓ Khi $x = 3 \Rightarrow y = 5$.

Vậy đồ thị (C) đi qua điểm $M(3; 5)$.

Chọn đáp án (D)

Câu 3

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A) $y = -x^3 - 3x - 2$.
(B) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.
(C) $y = x^3 + 3x^2 - 1$.
(D) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			-1		-5		$+\infty$
	$-\infty$						

Lời giải.

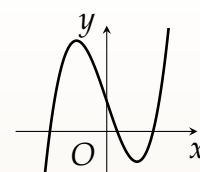
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị là hàm bậc ba, có hệ số $a > 0$, cắt trục tung tại điểm $A(0; -1)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 4

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = -x^3 + 3x + 1$. (B) $y = x^3 + 3x + 1$.
(C) $y = -x^3 - 3x + 1$. (D) $y = x^3 - 3x + 1$.



Lời giải.



Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hệ số $a > 0$.

Dựa vào hình ta thấy đồ thị có 2 điểm cực trị.

Mặt khác $y = x^3 + 3x + 1$ có $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm cần tìm là $y = x^3 - 3x + 1$.

Chọn đáp án (D)



Câu 5

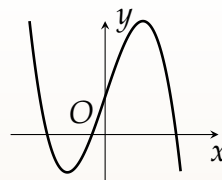
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

(A) $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

(B) $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$.

(C) $y = -x^3 + 3x + 1$.

(D) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số suy ra hệ số $a < 0$, đồ thị đi qua các điểm có tọa độ $(0;1)$ nên chọn hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

Chọn đáp án (C)



Câu 6

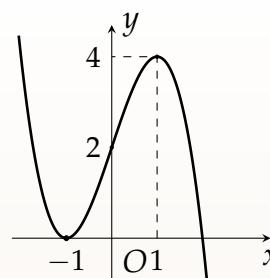
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào dưới đây?

(A) $y = (x+1)^2(1+x)$.

(B) $y = (x+1)^2(1-x)$.

(C) $y = (x+1)^2(2-x)$.

(D) $y = (x+1)^2(2+x)$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-1;0)$ và $(2;0)$. Ta thấy chỉ có đồ thị hàm $y = (x+1)^2(2-x)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)

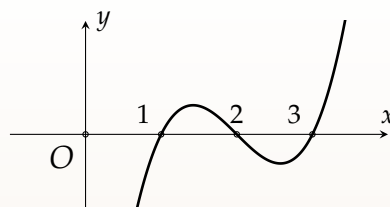


Câu 7

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$. (B) $f(1,5) > 0 > f(2,5)$.

(C) $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$. (D) $f(1,5) < 0 < f(2,5)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) > 0 \forall x \in (1;2)$ và $f(x) < 0 \forall x \in (2;3)$.

Do đó, $f(1,5) > 0, f(2,5) < 0$.

Chọn đáp án (B)



Câu 8

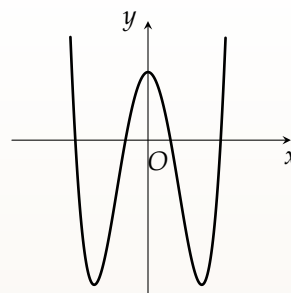
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

☐ A $y = x^4 + 5x^2 + 2$.

☐ B $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

☐ C $y = x^4 - 5x^2 + 2$.

☐ D $y = -x^4 + 5x^2 + 2$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số, suy ra $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = +\infty$ và đồ thị hàm số có ba cực trị nên hàm số cần tìm là $y = x^4 - 5x^2 + 2$.

Chọn đáp án ☒ C

□

Câu 9

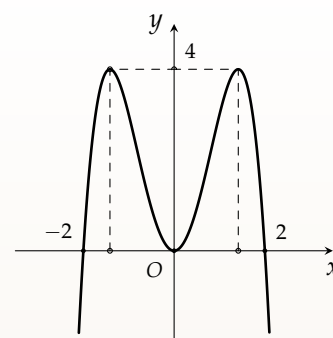
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

☐ A $y = x^4 - 3x^2$.

☐ B $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2$.

☐ C $y = -x^4 - 2x^2$.

☐ D $y = -x^4 + 4x^2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, suy ra: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$, hàm số có ba điểm cực trị, đồ thị hàm số đi qua điểm (2; 0). Vậy hàm số cần tìm là $y = -x^4 + 4x^2$.

Chọn đáp án ☒ D

□

Câu 10

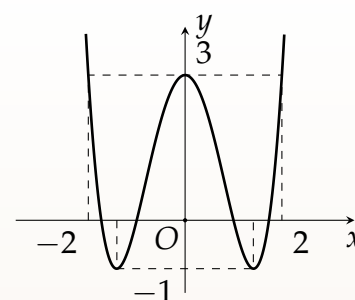
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

☐ A $y = -x^4 + 4x^2 + 3$.

☐ B $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

☐ C $y = (x^2 - 2)^2 - 1$.

☐ D $y = (x^2 + 2)^2 - 1$.



Lời giải.

✔ Dựa vào dạng đồ thị hàm $y = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow a > 0$.

✔ Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị khi $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Do đó, đây là đồ thị của hàm số $y = (x^2 - 1)^2 - 1$.

Chọn đáp án ☒ C

□

Câu 11

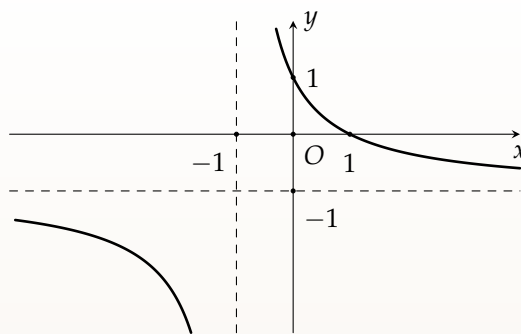
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.

B $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

C $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

D $y = \frac{-x}{x+1}$.



Lời giải.

Từ đồ thị của hàm số đã cho ta thấy

Tiệm cận đứng của đồ thị là đường thẳng có phương trình $x = -1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị là đường thẳng có phương trình $y = -1$.

Đồ thị đi qua các điểm $(1; 0)$ và $(0; 1)$.

Suy ra hàm số cần tìm là $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 12

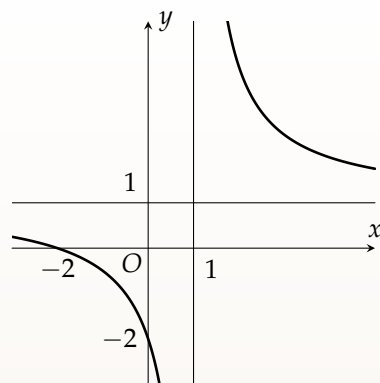
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B $y = \frac{x+2}{1-x}$.

C $y = \frac{x+2}{x-1}$.

D $y = \frac{x+1}{x-1}$.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$.

Do đó loại các hàm số $y = \frac{x+2}{1-x}$, $y = \frac{x+1}{x-1}$ và $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 13

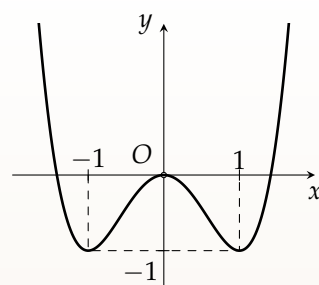
Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

A $y = x^4 - 2x^2$.

B $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

C $y = -x^4 + 2x^2$.

D $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $x = 1$ và $y = -1$.

Thay vào các đáp án ta thấy hàm số $y = x^4 - 2x^2$ thay $x = 1$ thì $y = -1$.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 14

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A)** Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
- (B)** Hàm số có hai điểm cực trị.
- (C)** Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- (D)** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	5	-2	4	-1

Lời giải.

Đáp án sai là: Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

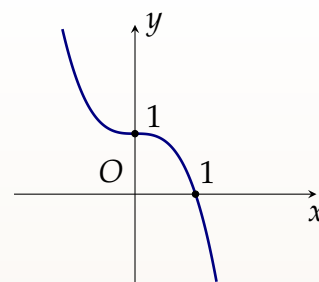
Chọn đáp án **(D)**



Câu 15

Đường cong ở hình bên là đồ thị một trong bốn hàm số cho ở phương án A, B, C, D. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A)** $y = -x^3 + 1$.
- (B)** $y = -2x^3 + x^2$.
- (C)** $y = 3x^2 + 1$.
- (D)** $y = -4x^3 + 1$.



Lời giải.

Các điểm $A(0; 1)$ và $B(1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số nên chỉ có hàm số $y = -x^3 + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 16

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên?

- (A)** $y = \frac{2x-3}{x+2}$.
- (B)** $y = \frac{x+4}{x-2}$.
- (C)** $y = \frac{2x+3}{x-2}$.
- (D)** $y = \frac{2x-7}{x-2}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
y	2	$+\infty$	2

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

- ✔ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng.
- ✔ Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $y = 2$ làm tiệm cận ngang.
- ✔ Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Xét qua bốn hàm số, chỉ có hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ là thỏa mãn các tính chất trên.



Chọn đáp án (C)



Câu 17

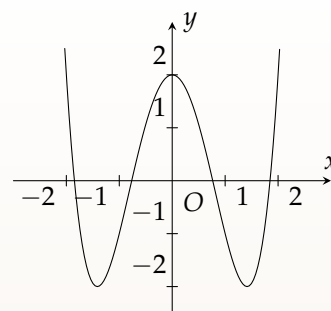
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) $a > 0, b < 0, c > 0$.

(B) $a > 0, b < 0, c < 0$.

(C) $a > 0, b > 0, c > 0$.

(D) $a < 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải.

Dựa vào hình dạng của đồ thị ta thấy $a > 0$.

Cho $x = 0$ ta được $y = c$.

Do đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; c)$.

Mà từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Suy ra $c > 0$.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx^2$.

Từ hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Do đó phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Mà $a > 0$ nên $b < 0$.

Chọn đáp án (A)



Câu 18

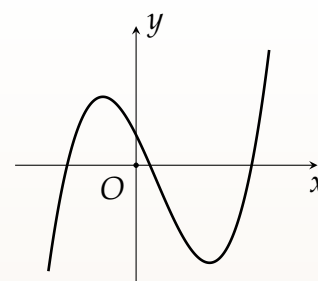
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

(B) $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

(C) $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

(D) $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



Lời giải.

✔ Dựa vào hình dáng đồ thị, suy ra $a > 0$.

✔ Do đồ thị cắt trục tung tại điểm phía trên trục hoành nên $d > 0$.

✔ Hàm số có hai cực trị trái dấu, suy ra $ac < 0 \Rightarrow c < 0$.

✔ Điểm uốn nằm bên phải trục tung, suy ra $ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

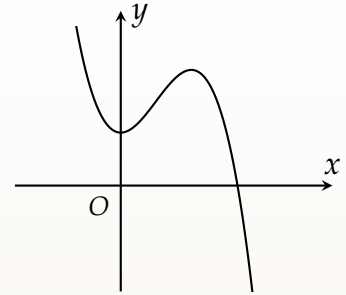
Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Chọn đáp án (B)



Câu 19

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, điểm cực tiểu của đồ thị nằm trên trục tung. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- ☐ A $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$. ☐ B $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
☐ C $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. ☐ D $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta thấy $a < 0$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; d) \Rightarrow d > 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có điểm cực tiểu là $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị, từ đồ thị ta có $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0$. Mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \neq 0$. Biết đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1; -1), B(-1; 3)$. Tính $f(4)$.

- ☐ A $f(4) = 53$. ☐ B $f(4) = -17$. ☐ C $f(4) = -53$. ☐ D $f(4) = 17$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai cực trị là $A(1; -1), B(-1; 3)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(-1) = 3 \\ f'(1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases}.$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} a + b + c + d = -1 \\ -a + b - c + d = 3 \\ 3a + b + c = 0 \\ 3a - b + c = 0 \end{cases}.$$

Từ đây ta giải được $a = 1, b = 0, c = -3, d = 1$. Hay $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Do đó, $f(4) = 53$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 21

Cho $A(0; -3)$ là điểm cực đại và $B(-1; -5)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- ☐ A $y(-2) = 43$. ☐ B $y(-2) = 23$. ☐ C $y(-2) = 19$. ☐ D $y(-2) = 13$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx; y'' = 12ax^2 + 2b$.

Do $A(0; -3), B(-1; -5)$ là các điểm cực trị nên
$$\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(0) = -3 \\ y(-1) = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a - 2b = 0 \\ c = 3 \\ a + b + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -3 \end{cases}.$$

$\Rightarrow y = 2x^4 - 4x^2 - 3$.

Thử lại với $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$ có $y' = 8x^3 - 8x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-5	-3	-5	$+\infty$

Vậy $y = 2x^4 - 4x^2 - 3$. Suy ra: $y(-2) = 13$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 22

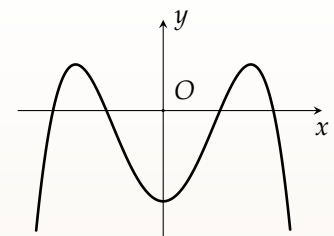
Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a > 0, b < 0, c < 0$.

(B) $a < 0, b < 0, c < 0$.

(C) $a < 0, b > 0, c < 0$.

(D) $a > 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải.

Dựa vào hình dạng đồ thị suy ra $a < 0$.

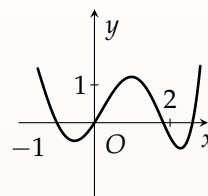
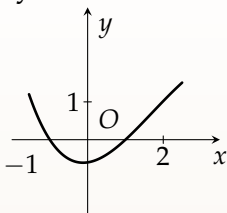
Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

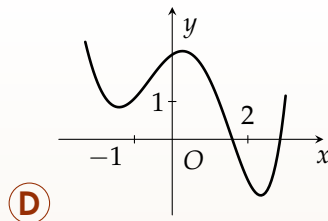
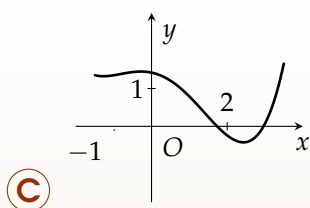
Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $c < 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23

Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $g'(0) = 0, g''(x) > 0 \quad \forall x \in (-1; 2)$. Hỏi đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị của hàm số $g(x)$?





Lời giải.

$g'(0) = 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ đạt cực trị tại $x = 0$ (1).

$g''(x) > 0 \Rightarrow g''(0) > 0$.

Ta có: $g'(0) = 0; g''(0) > 0 \Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Do đó, ta thu được đáp án.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 24

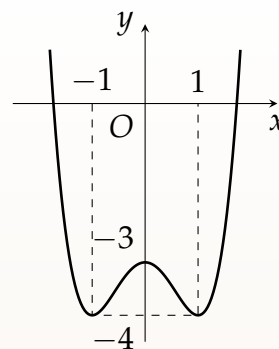
Xác định các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

(A) $a = -\frac{1}{4}, b = 3, c = -3$.

(B) $a = 1, b = -2, c = -3$.

(C) $a = 1, b = -3, c = 3$.

(D) $a = 1, b = 3, c = -3$.



Lời giải.

✓ Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

✓ Từ hình vẽ, suy ra đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị có tọa độ là $(-1; -4)$, $(0; -3)$, $(1; -4)$.

✓ Khi đó:
$$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y(-1) = y(1) = -4 \\ y'(-1) = y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3 \\ a + b + c = -4 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 25

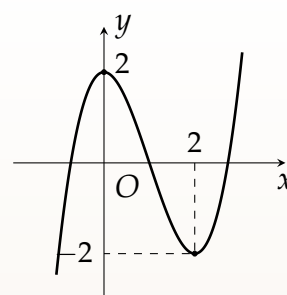
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình bên. Tính tổng $S = a + b + c + d$.

(A) $S = 0$.

(B) $S = 6$.

(C) $S = -4$.

(D) $S = 2$.



Lời giải.

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, cực tiểu tại $x = 2$ và $f(0) = 2, f(2) = -2$ nên ta có hệ
$$\begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0. \end{cases}$$
 Giải hệ ta tìm được $a = 1, b = -3, c = 0, d = 2$. Do đó $a + b + c + d = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26

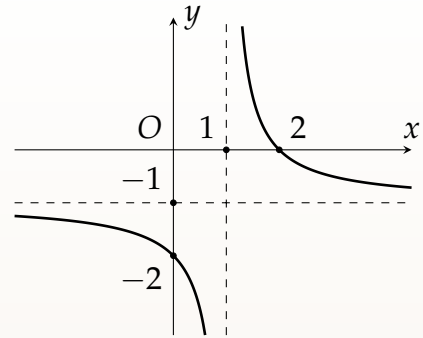
Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.

(A) $T = 12$.

(B) $T = -7$.

(C) $T = 10$.

(D) $T = -9$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 0)$ nên $2a + b = 0$.

Đồ thị nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng nên $c = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; -2)$ nên $\frac{b}{c} = -2$ suy ra $b = 2, a = -1$.

Vậy $a - 3b + 2c = -9$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 27

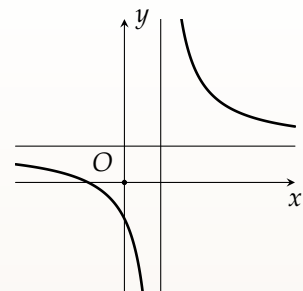
Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $ac > 0, bd > 0, cd > 0$.

(B) $ad < 0, bc > 0, cd > 0$.

(C) $ab > 0, bc > 0, bd < 0$.

(D) $bc > 0, ad < 0, ac < 0$.



Lời giải.

Ta có $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Đồ thị trong hình vẽ có các tính chất

✔ nghịch biến trên từng khoảng xác định nên $ad - bc < 0$ hay $bc - ad > 0$,

✔ đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm và cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{b}{d} < 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} ab > 0 \\ bd < 0, \end{cases}$$

✔ đường tiệm cận ngang của đồ thị nằm phía trên trục hoành nên $\frac{a}{c} > 0 \Leftrightarrow ac > 0$,

☑ đường tiệm cận đứng của đồ thị nằm phía bên phải trục tung nên $-\frac{d}{c} > 0 \Leftrightarrow cd < 0$.

Do đó,

- ☑ mệnh đề " $ac > 0, bd > 0, cd > 0$ " bị loại vì có $bd > 0$,
- ☑ mệnh đề " $bc > 0, ad < 0, ac < 0$ " bị loại vì có $ac < 0$,
- ☑ mệnh đề " $ad < 0, bc > 0, cd > 0$ " bị loại vì có $cd > 0$,
- ☑ mệnh đề " $ab > 0, bc > 0, bd < 0$ " đúng. Thật vậy, từ $ab > 0, ac > 0$ suy ra $bc > 0$.

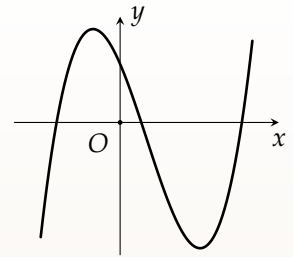
Vậy mệnh đề đúng là " $ab > 0, bc > 0, bd < 0$ ".

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 28

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A)** $ab < 0, bc > 0, cd < 0$. **(B)** $ab > 0, bc > 0, cd < 0$.
(C) $ab < 0, bc < 0, cd > 0$. **(D)** $ab < 0, bc > 0, cd > 0$.



💬 Lời giải.

Từ đồ thị suy ra hệ số $a > 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$. Có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm dương nên

$$\begin{cases} ac < 0 \\ -\frac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ do } (a > 0).$$

Do đó $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 29

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0)$, $x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A)** $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **(B)** $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
(C) $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **(D)** $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

💬 Lời giải.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Vì hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 và hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ nên $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

$$\text{Vì } x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2) \text{ nên } \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 30

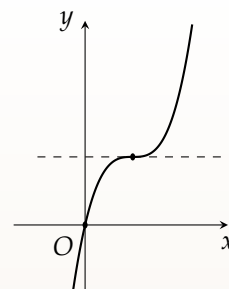
Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 2d + 1$.

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) 1.

(C) $\frac{5}{8}$.

(D) $\frac{1}{3}$.



Lời giải.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ đồ thị suy ra $d = 0$, $b^2 - 3ac = 0 \Rightarrow ac = \frac{b^2}{3}$.

Do đó, $P \geq 2ac + b + 1 = \frac{2b^2}{3} + b + 1 = \frac{2}{3} \left(b + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{8} \geq \frac{5}{8}$.

Vậy min $P = \frac{5}{8}$ tương ứng với $a = c = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $b = -\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

—HẾT—

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

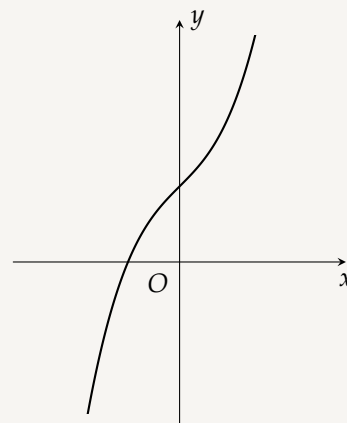
Đồ thị của hàm số nào sau đây có dạng như đường cong trong hình bên?

A $y = x^3 + x + 1.$

B $y = x^3 - x + 1.$

C $y = x^3 - x - 1.$

D $y = x^3 + x - 1.$



Lời giải.

Nhìn vào hình vẽ ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên loại các đáp án $y = x^3 - x - 1$ và $y = x^3 + x - 1$.

Ta thấy đồ thị hàm số không có cực trị nên chọn đáp án $y = x^3 + x + 1$ vì hàm số này có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x$.

Chọn đáp án **A**

□

Bài 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số dưới đây. Tìm hàm số đó.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

A $y = x^3 - 5x^2 + x + 6.$

B $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1.$

C $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7.$

D $y = x^4 + x^2 - 3.$

Lời giải.

Phương pháp:

Dựa vào cách đọc Bảng biến thiên để xác định hàm số.

Tìm ra các điểm thuộc đồ thị hàm số rồi thay tọa độ vào các hàm số ở đáp án để loại trừ.

Cách giải:

Từ bảng biến thiên, ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên loại $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$ và $y = x^4 + x^2 - 3$.

Ta thấy điểm $(3; -1)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên thay $x = 3$; $y = -1$ vào hai hàm số ở phương án $y = x^3 - 5x^2 + x + 6$ và phương án $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ta thấy chỉ có hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ thỏa mãn nên hàm số cần tìm là $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Chọn đáp án (B)

Bài 3

Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		—	—
y	1	$+\infty$	1

(A) $y = \frac{x-1}{2x+1}$.

(B) $y = \frac{2x+1}{x-2}$.

(C) $y = \frac{x+3}{2+x}$.

(D) $y = \frac{x+1}{x-2}$.

 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số giảm, TCN $y = 1$; TCD $x = 2$.

Chọn đáp án (D)

Bài 4

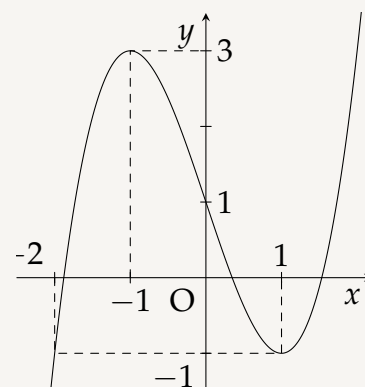
Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

(A) $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

(B) $y = x^3 - 3x + 1$.

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

(D) $y = -x^3 + 3x + 1$.



 **Lời giải.**

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba với hệ số $a > 0$ và hàm số có hai cực trị tại $x = \pm 1$.

a) Xét $y = x^3 - 3x + 1$, ta có $y' = 3x^2 - 3$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, suy ra bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó hàm số đạt cực trị tại $x = \pm 1$.

b) Xét $y = x^3 - 3x^2 + 1$, ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$, suy ra bảng xét dấu của y'

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+

Do đó hàm số đạt cực trị tại $x = 0, x = 2$.

Chọn đáp án (B)

Bài 5

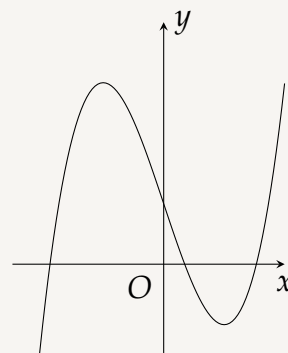
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

A $y = x^3 - 3x + 1.$

B $y = -x^3 + 3x - 1.$

C $y = x^3 + 3x + 1.$

D $y = -x^4 - 4x^2 + 1.$



Lời giải.

Ta thấy đồ thị hàm số trên có 2 điểm cực trị và cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ thoả mãn.

Chọn đáp án **A**



Bài 6

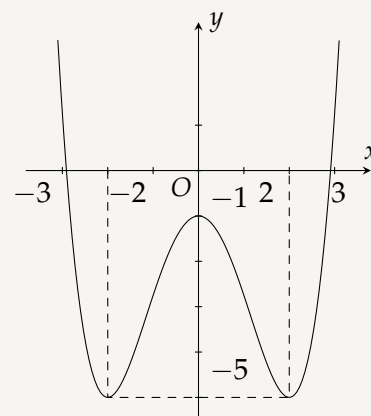
Đồ thị hình bên là của hàm số

A $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 1.$

B $y = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 1.$

C $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1.$

D $y = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 1.$



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị là $-2; 0; 2$ và hệ số $a > 0$. Các điểm cực của hàm số chính là nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Xét hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 1$ có $y' = x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ (nhận).

Chọn đáp án **C**



Bài 7

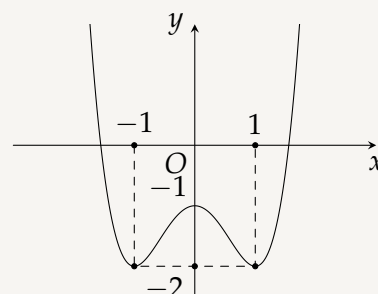
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = -x^4 + 2x^2 - 1.$

B $y = -x^3 + x^2 - 1.$

C $y = x^3 - x^2 - 1.$

D $y = x^4 - 2x^2 - 1.$



Lời giải.



Từ đồ thị đã cho ta suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $(-1; -2)$, $(1; -2)$ và một điểm cực đại là $(0; -1)$, cho nên đây là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Chọn đáp án **(D)**



Bài 8

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.

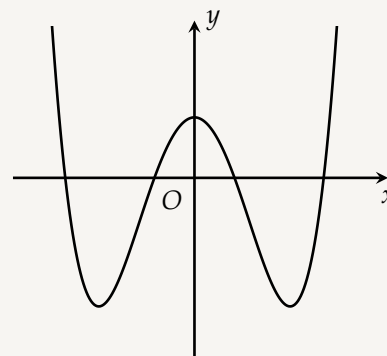
Hàm số đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^4 + 5x^2 + 2$.

(B) $y = x^4 + 5x^2 + 2$.

(C) $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

(D) $y = x^4 - 5x^2 + 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số trong hình vẽ là đồ thị của hàm số bậc 4 trùng phương, có 3 điểm cực trị và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hàm số đó là $y = x^4 - 5x^2 + 2$.

Chọn đáp án **(D)**



Bài 9

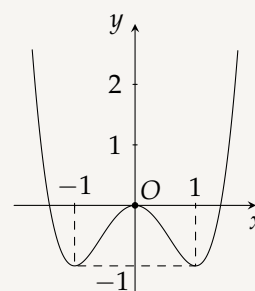
Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

(A) $y = x^4 + 2x^2$.

(B) $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

(C) $y = x^4 - 2x^2$.

(D) $y = x^2 - 2x^4$.



Lời giải.

Đồ thị hình bên là hàm trùng phương có hệ số $a > 0$ và có tọa độ các điểm cực trị là $(-1, -1)$, $(1, -1)$ và $(0, 0)$ nên ta chọn $y = x^4 - 2x^2$.

Chọn đáp án **(C)**



Bài 10

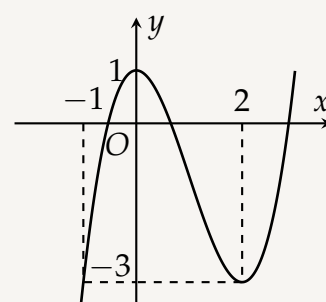
Đường cong như hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

(B) $y = x^4 - x^2 + 1$.

(C) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

(D) $y = x^3 - 3x^2 + 1$.



Lời giải.



Nhận thấy đây là đồ thị của hàm bậc ba có hệ số $a > 0$ nên đồ thị đã cho là của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

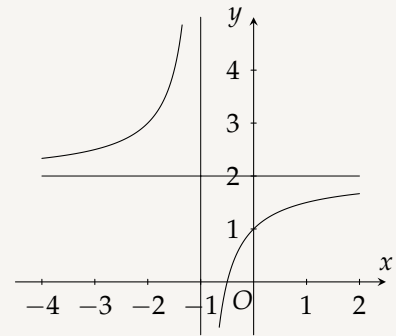
Chọn đáp án **(D)**



Bài 11

Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

- (A)** $y = \frac{x+2}{x+1}$.
(B) $y = \frac{2x+1}{x+1}$.
(C) $y = \frac{2x-1}{x+1}$.
(D) $y = \frac{-x+1}{x-2}$.



Lời giải.

Đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ nên ta loại 2 đáp án $y = \frac{x+2}{x+1}$ và $y = \frac{-x+1}{x-2}$.

Mặt khác do hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ nên chỉ có đáp án $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là phù hợp.

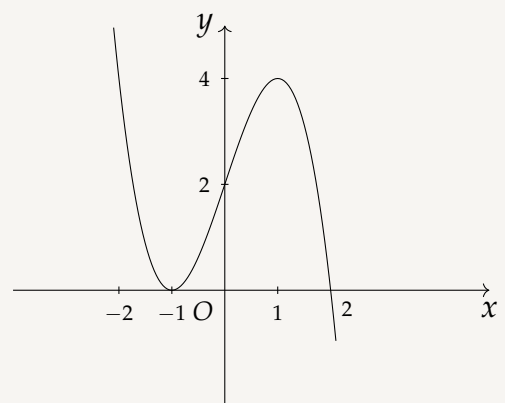
Chọn đáp án **(B)**



Bài 12

Hàm số nào cho dưới đây có đồ thị như hình bên?

- (A)** $y = (x+1)^2(1+x)$. **(B)** $y = (x+1)^2(1-x)$.
(C) $y = (x+1)^2(2-x)$. **(D)** $y = (x+1)^2(2+x)$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-1; 0)$ và $(2; 0)$. Ta thấy chỉ có đồ thị hàm $y = (x+1)^2(2-x)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)**



Bài 13

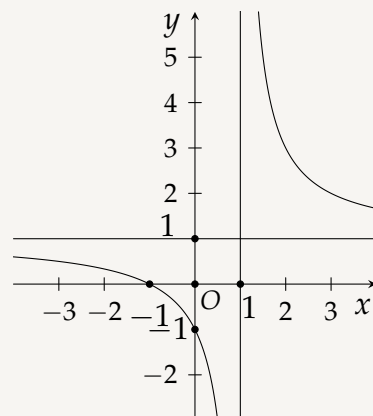
Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

A $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

C $y = \frac{x+2}{1-x}$.

D $y = \frac{2x-1}{x-1}$.



Lời giải.

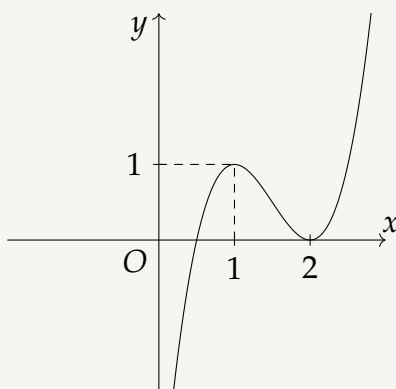
Đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận ngang $y = 1$, vậy đồ thị là của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án **A**

□

Bài 14

Đường cong trong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A $y = -2x^3 + 9x^2 - 12x - 4$.

B $y = x^3 - 3x - 4$.

C $y = x^4 - 3x^2 - 4$.

D $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 1)$ suy ra trong 4 phương án đã cho có duy nhất phương án thỏa mãn là $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

Xét hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ ta có:

$$y' = 6x^2 - 18x + 12, y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

$$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 2).$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; +\infty)$; nghịch biến trên $(1; 2)$.

Điểm cực đại của đồ thị hàm số $(1; 1)$, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $(2; 0)$.

Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

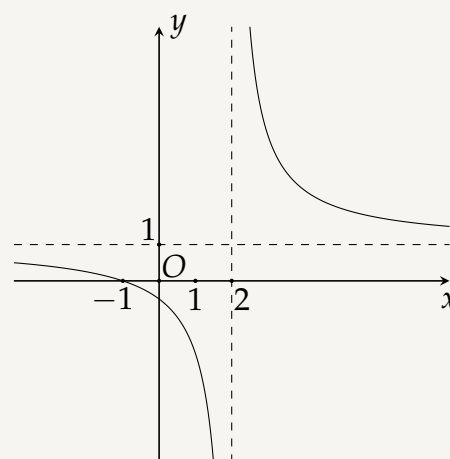
Chọn đáp án **D**

□

Bài 15

Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$.

- (A) $T = 0$. (B) $T = 2$. (C) $T = -1$. (D) $T = 3$.



Lời giải.

Nhận thấy, $x = 2$, $y = 1$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Suy ra, $\begin{cases} \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$. Vậy $T = a + b = 2$.

Chọn đáp án (D)



Bài 16

Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên

- (A) $y = -x^3 + 3x$.
(B) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
(C) $y = x^3 - 3x$.
(D) $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 - 3x$ có $y' = 3x^2 - 3$,

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Từ bảng biến thiên như hình bên suy ra hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-2		

Chọn đáp án (C)

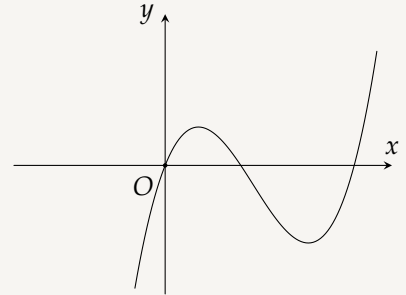




Bài 17

Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.
Kết luận nào sau đây đúng?

- ☒ A $a > 0, b < 0, c > 0, d = 0$.
- ☐ B $a > 0, b \geq 0, c > 0, d = 0$.
- ☐ C $a > 0, b \leq 0, c > 0, d < 0$.
- ☐ D $a > 0, b \geq 0, c > 0, d > 0$.



🗨️ Lời giải.

Đồ thị hàm số có dạng đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$.

Ta có $O(0;0)$ thuộc đồ thị hàm số nên $d = 0$.

Do đó $y = x(ax^2 + bx + c)$; $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $ax^2 + bx + c = 0$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy phương trình $y = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x = 0, x_1 > 0, x_2 > 0$.

Do đó phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c > 0. \end{cases}$$

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0, d = 0$.

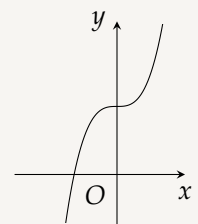
Chọn đáp án ☒ A



Bài 18

Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 + d$ ($b, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☒ A $b < 0, d > 0$.
- ☐ B $b > 0, d > 0$.
- ☐ C $b = 0, d > 0$.
- ☐ D $b > 0, d = 0$.



🗨️ Lời giải.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ $d > 0$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2b}{3}. \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = x^3 + bx^2 + d$, ($b, d \in \mathbb{R}$) không có cực trị nên phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, từ đó ta suy ra $b = 0$.

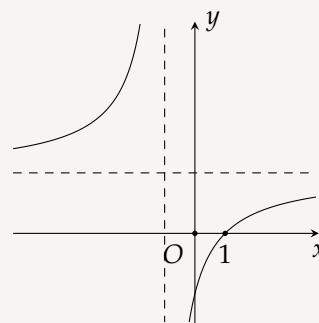
Chọn đáp án ☒ C



Bài 19

Cho hàm số $y = \frac{ax - 2}{x + b}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $b < a < 0$. (B) $0 < b < a$. (C) $0 < a < b$. (D) $b < 0 < a$.



Lời giải.

Quan sát đồ thị ta có tiệm cận ngang $y = a$ nằm phía trên Ox nên $a > 0$, đường tiệm cận đứng $x = -b$ nằm bên trái Oy nên $-b < 0 \Leftrightarrow b > 0$.

Giao điểm của hai tiệm cận là $I(a; -b)$. Ta thấy $d(I, Ox) > d(I, Oy) \Leftrightarrow |a| > |b| \Leftrightarrow a > b$.

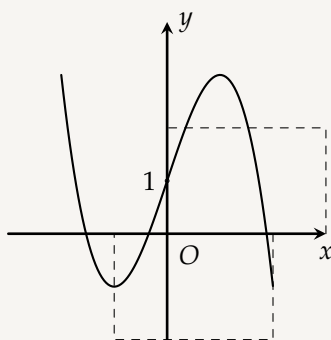
Vậy $0 < b < a$.

Chọn đáp án (B)



Bài 20

Đường cong bên dưới là đồ thị hàm số nêu dưới đây



(A) $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

(B) $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$.

(C) $y = -x^3 + 3x + 1$.

(D) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Lời giải.

Để hàm số có đồ thị như hình vẽ thì $y = -x^3 - 2x^2 + x - 2$ hoặc $y = -x^3 + 3x + 1$.

Vì đồ thị đi qua $(0, 1)$ nên $y = -x^3 + 3x + 1$.

Chọn đáp án (C)



—HẾT—



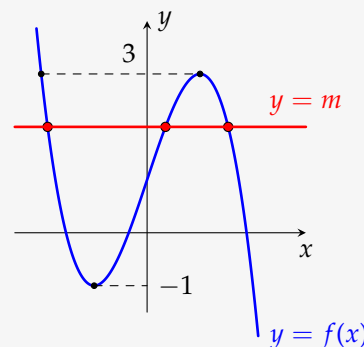
§6. ỨNG DỤNG ĐỒ THỊ ĐỂ BIỆN LUẬN NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH.

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm phương trình.

Định nghĩa 6.1.

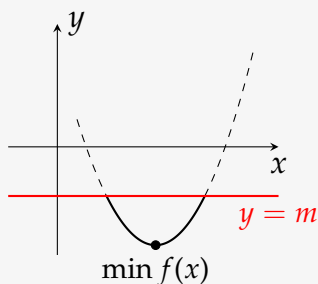
- ☑ Xét phương trình $f(x) = m$, với m là tham số. Nghiệm của phương trình này có thể coi là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ (cố định) với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).
- ☑ Từ đó, để biện luận nghiệm phương trình $f(x) = m$, ta có thể thực hiện các bước như sau:
 - ① Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên miền xác định mà đề bài yêu cầu.
 - ② Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo hướng "lên, xuống". Quan sát số giao điểm để quy ra số nghiệm tương ứng.



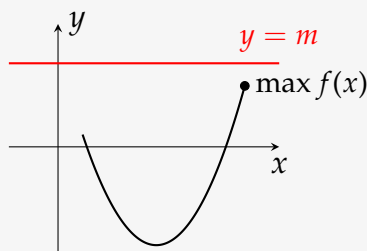
2. Ứng dụng đồ thị để biện luận nghiệm bất phương trình.

Phương pháp 6.1. Để giải bất phương trình

- ☑ Xét bất phương trình ở dạng $f(x) < m$ (1), với m là tham số.
 - ① **Bài toán 1.** Tìm điều kiện của tham số m để (1) có nghiệm trên miền $\mathcal{D}$: Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y = f(x)$ có phần nằm dưới đường thẳng $y = m$.
 - ② **Bài toán 2.** Tìm điều kiện của tham số m để (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc miền $\mathcal{D}$: Khi đó, ta tìm điều kiện để đồ thị $y = f(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $y = m$.



Mình họa Bài toán 1



Mình họa Bài toán 2

- ☑ Các bài toán tương tự:

- | | |
|---|---|
| ① $f(x) > m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$. | ② $f(x) > m$ có nghiệm trên miền $\mathcal{D}$. |
| ③ $f(x) \leq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$. | ④ $f(x) \leq m$ có nghiệm trên miền $\mathcal{D}$. |
| ⑤ $f(x) \geq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathcal{D}$. | ⑥ $f(x) \geq m$ có nghiệm trên miền $\mathcal{D}$. |



! Khi muốn sử dụng phương pháp đồ thị để biện luận nghiệm của phương trình $f(x, m) = 0$ hoặc bất phương trình $f(x, m) > 0$, $f(x, m) < 0$, ta phải thực hiện "cô lập" tham số m .

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

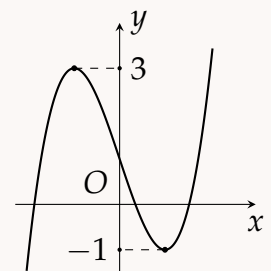
Dạng 1 Giải, biện luận nghiệm phương trình bằng phương pháp đồ thị

- Chuyển phương trình đã cho về dạng $f(x) = m$;
- Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ lên xuống theo phương ngang. Nhìn giao điểm với đồ thị $y = f(x)$ để quy ra số nghiệm tương ứng.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- (A) 2. (B) 1.
(C) 0. (D) 3.



Lời giải.

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

Từ đồ thị suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

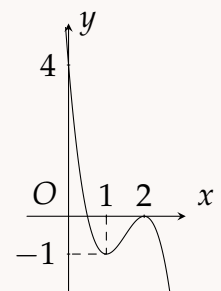
Chọn đáp án (D)



Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($d \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

- (A) 0. (B) 1.
(C) 2. (D) 3.



Lời giải.

Ta có $3f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}$.

Khi đó số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ chính là số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$. Dựa vào đồ thị ta có số nghiệm của phương trình là 1.

Chọn đáp án (B)



Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- ☐ A $-3 \leq m \leq 3$. ☐ B $-2 \leq m \leq 4$.
☐ C $-2 < m < 4$. ☐ D $-3 < m < 3$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

 **Lời giải.**

Dựa vào bảng biến thiên phương trình $f(x) = m + 1$ có ba nghiệm thực phân biệt khi

$$-2 < m + 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Chọn đáp án ☒ D

□

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

- ☐ A $(-\infty; 4]$. ☐ B $[-2; 4]$.
☐ C $(-2; 4)$. ☐ D $(-2; 4]$.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	4	$-\infty$

 **Lời giải.**

Với mỗi tham số m ta có một đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng với Ox .

Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 4$.

Chọn đáp án ☒ C

□

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- ☐ A 2 nghiệm. ☐ B 4 nghiệm.
☐ C 3 nghiệm. ☐ D 1 nghiệm.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	3	$+\infty$

 **Lời giải.**

Từ bảng biến thiên đề bài, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$ 0 $+$	
$ f(x) $	2	$+\infty$	3	$+\infty$

Ta có $3|f(x)| - 10 = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = \frac{10}{3}$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 3$.
Dựa vào bảng biến thiên trên, suy ra phương trình (1) có 3 nghiệm.

Chọn đáp án **C**

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau. Hỏi phương trình $f(|x|) = 1$ có mấy nghiệm?

- A** 6 nghiệm. **B** 2 nghiệm.
C 3 nghiệm. **D** 4 nghiệm.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$ 0 $+$	
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\begin{aligned}
 & f(|x|) = 1 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} |x| = a \quad (a < 0) \\ |x| = b \quad (0 < b < 2) \\ |x| = c \quad (c > 2) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \pm b \\ x = \pm c. \end{cases}
 \end{aligned}$$

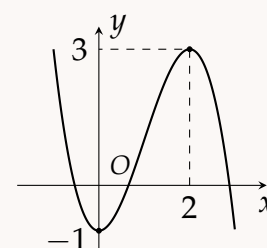
Vậy phương trình $f(|x|) = 1$ có bốn nghiệm.

Chọn đáp án **D**

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2f(|x|) - m = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

- A** $1 < m < 3$. **B** $-1 < m < 3$.
C $-2 < m < 6$. **D** $2 < m < 6$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } f(|x|) = \begin{cases} f(x), & x \in [0; +\infty) \\ f(-x), & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ gồm hai phần:

- ✔ Phần 1: Phần đồ thị bên phải trục Oy của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- ✔ Phần 2: Đối xứng với phần 1 qua Oy .

Ta có

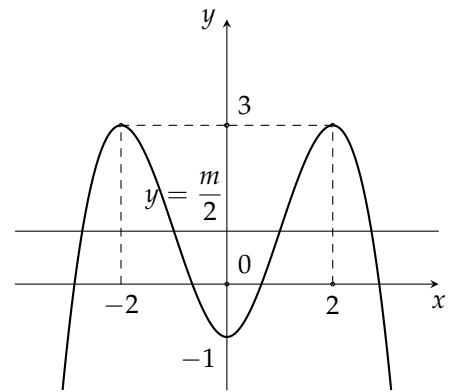
$$2f(|x|) = m \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{m}{2}. \quad (1)$$

Số nghiệm của phương trình (1) chính bằng số giao điểm của đường thẳng $d: y = \frac{m}{2}$ và đồ thị hàm số $y = f(|x|)$.

Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{m}{2} < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 6.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $-2 < m < 6$.



Chọn đáp án **C** □

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0$ là

- A** 2. **B** 3.
C 6. **D** 0.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			3		$\frac{1}{3}$	1
		1	$\nearrow$	$\searrow$		

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2[f(x)]^2 - 3f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Phương trình $f(x) = 1$ có duy nhất nghiệm x_0 .

Phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác x_0 . Vậy phương trình có ba nghiệm.

Chọn đáp án **B** □

Ví dụ 9

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A** $-2 \leq m \leq \frac{-3}{2}$. **B** $\frac{-3}{2} < m < 2$. **C** $-2 < m < \frac{-3}{2}$. **D** $3 < m < 4$.

Lời giải.

Ta có $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m + 3 = x^4 - 2x^2$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ và đường thẳng $y = 2m + 3$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của hai đồ thị.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có $y' = 4x^3 - 4x$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			0			$+\infty$
		-1			-1		

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để có bốn giao điểm thì

$$-1 < 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow -4 < 2m < -3 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 10

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị đều thuộc khoảng $(-1; 4)$?

A 4.

B 9.

C 8.

D 3.

Lời giải.

Để hàm số có hai điểm cực trị đều thuộc khoảng $(-1; 4)$ thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 4)$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow m = 2x - x^2 = g(x)$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	-1	1	4
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	-3	1	-8

Để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 4)$ thì $-3 < m < 1$.
Vậy có 3 giá trị của m .

Chọn đáp án **D**



Ví dụ 11

Cho phương trình $\sin^3 x - 3\sin^2 x + 2 - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm?

- (A) 3. (B) 1. (C) 5. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t = \sin x$, điều kiện: $t \in [-1; 1]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^3 - 3t^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 2 = m$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t^2 + 2$ với $t \in [-1; 1]$. Ta có

$$f'(t) = 3t^2 - 6t, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 & (\text{nhận}) \\ t = 2 & (\text{loại}). \end{cases}$$

Do $f(-1) = -2, f(0) = 2, f(1) = 0$ nên $f(t) \in [-2; 2]$.

Vì vậy, để phương trình đã cho có nghiệm thì $-2 \leq m \leq 2$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị m .

Chọn đáp án (C) □

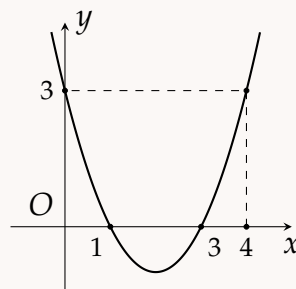
Dạng 2

Giải, biện luận nghiệm bất phương trình bằng phương pháp đồ thị

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $f(x) \leq 3$ là

- (A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 2.



Lời giải.

Theo hình vẽ, nghiệm của bất phương trình $f(x) \leq 3$ là $0 \leq x \leq 4$. Suy ra các nghiệm nguyên là $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 2

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2m - 1)x + 2019$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

- (A) $m < \frac{1}{2}$. (B) $m = \frac{1}{2}$. (C) $m \geq 0$. (D) $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2m - 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x > 2$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2m - 1 \geq 0, \forall x > 2$$

$$\Leftrightarrow -2m + 1 \leq 3x^2 - 6x, \forall x > 2.$$

Xét $g(x) = 3x^2 - 6x, \forall x > 2$. Ta có $g'(x) = 6x - 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (2; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $1 - 2m \leq g(x), \forall x > 2 \Leftrightarrow 1 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**



Ví dụ 3

Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

(A) 5.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 4.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^6} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - \frac{1}{x^6} \leq m, \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 - \frac{1}{x^6} \leq m, x \in (0; +\infty)$.

$$g'(x) = -6x + \frac{6}{x^7} = \frac{-6(x^8 - 1)}{x^7}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Bảng biến thiên

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $m \geq -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4; -3; -2; -1$.

Chọn đáp án **(D)**



Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m\sqrt{x^2 - 2x + 2} + m + 2x - x^2 \leq 0$ có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$.

A $m \leq \frac{2}{3}$.

B $m \leq 0$.

C $m \geq \frac{2}{3}$.

D $m \leq -1$.

Lời giải.

$$m\sqrt{x^2 - 2x + 2} + m + 2x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1}$ trên $[0; 1 + \sqrt{3}]$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1$, với $x \in [0; 1 + \sqrt{3}] \Rightarrow t \in [2; 3]$.

Khi đó hàm số $f(x)$ trở thành $f(t) = \frac{(t-1)^2 - 2}{t} = t - 2 - \frac{1}{t}$; $t \in [2; 3]$.

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t \in [2; 3]$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[2; 3]$

$$\Rightarrow \max_{[2;3]} f(t) = f(3) = \frac{2}{3}.$$

Phương trình (*) có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$ khi và chỉ khi $m \leq \max_{[0;1+\sqrt{3}]} f(x) = \max_{[2;3]} f(t) = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **A** □

Ví dụ 5

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0; 2019]$ để bất phương trình $x^2 - m + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq 0$ đúng với mọi $x \in [-1; 1]$. Số phần tử của tập S bằng

A 1.

B 2020.

C 2019.

D 2.

Lời giải.

Ta có $x^2 - m + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq m$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^3}$ trên $[-1; 1]$.

Với mọi x thuộc $[-1; 1]$, ta có: $f'(x) = x(2 - 3\sqrt{(1 - x^2)})$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$.

Vì $f(\pm 1) = 1, f(0) = 1, f\left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{23}{27}$ nên $\max_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

Do đó, $x^2 + \sqrt{(1 - x^2)^3} \leq m \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [-1;1]} f(x) \Leftrightarrow m \geq 1$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của m thuộc $[0; 2019]$ thỏa yêu cầu bài toán.

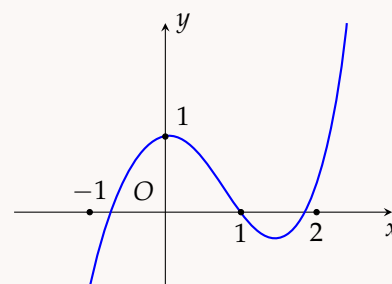
Chọn đáp án **C** □

Dạng 3 Một số bài toán liên quan đến hàm hợp

Ví dụ 1

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó phương trình $4f(3x^4) - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm dương?

- (A) 2. (B) 4.
(C) 5. (D) 1.



Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $y = 3x^4$ Ta có: $4f(3x^4) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(3x^4) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 = x_1, & x_1 \in (-1; 0) \\ 3x^4 = x_2, & x_2 \in (0; 1) \\ 3x^4 = x_3, & x_3 \in (1; 2) \end{cases}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $3x^4 = x_1$ vô nghiệm; $3x^4 = x_2$ có một nghiệm âm một nghiệm dương; $3x^4 = x_3$ có một nghiệm âm một nghiệm dương.

Vậy phương trình $4f(3x^4) - 3 = 0$ có 2 nghiệm dương

Chọn đáp án (A)

□

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(3x^4 - 6x^2 + 1) = 1$ là

- (A) 4. (B) 5.
(C) 6. (D) 3.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$	

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -2) \\ x = b \in (-2; 1) \\ x = c \in (1; +\infty) \end{cases}$

Do đó $f(3x^4 - 6x^2 + 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 6x^2 + 1 = a(1) \\ 3x^4 - 6x^2 + 1 = b(2) \\ 3x^4 - 6x^2 + 1 = c(3) \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = 3x^4 - 6x^2 + 1$

Có $g'(x) = 12x^3 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

Dựa vào bảng biến thiên, có:

- Phương trình (1) vô nghiệm.
- Phương trình (2) có đúng 4 nghiệm phân biệt.

- Phương trình (3) có đúng 2 nghiệm phân biệt.
 Vậy phương trình đã cho có tất cả 6 nghiệm.

Chọn đáp án **C**



Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A** 2. **B** 6. **C** 0. **D** 4.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-1		3		$-\infty$

 **Lời giải.**

Đặt $t = 4x - x^2$. Khi đó $t = -(x - 2)^2 + 4 \leq 4$.

Từ mỗi giá trị $t < 4$ ta tìm được hai giá trị x . Với $t = 4$ ta tìm được $x = 2$.

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f(t) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha \in (-\infty; 0) \\ t = \beta \in (0; 4) \\ t = \gamma \in (4; +\infty) \end{cases}$

Vậy phương trình $f(4x - x^2) - 2 = 0$ có 4 nghiệm.

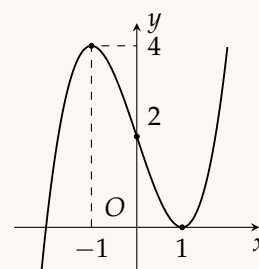
Chọn đáp án **D**



Ví dụ 4

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 5\pi]$ của phương trình $f(\cos x) = 1$

- A** 3. **B** 4. **C** 5. **D** 6.



 **Lời giải.**

Đặt $t = \cos x, t \in [-1; 1]$ ta được $f(t) = 1 \Leftrightarrow t = a$ với $a \in (0; 1)$

Xét hàm số $g(x) = \cos x$ trên đoạn $[0; 5\pi]$

Đồ thị của hàm số $g(x) = \cos x$ trên đoạn $[0; 5\pi]$ là

Dựa vào đồ thị ta có $\cos x = a$ có 5 nghiệm trên $[0; 5\pi]$

Vậy phương trình $f(\cos x) = 1$ có 5 nghiệm trên $[0; 5\pi]$.

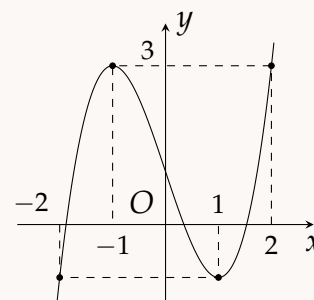
Chọn đáp án **C**



Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(1 - \cos 2x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là

- A** $[-1; 3]$. **B** $(-1; 1)$. **C** $(-1; 3)$. **D** $(-1; 1]$.



Lời giải.

Ta có $x \in (0; \pi)$ thì $\cos 2x \in [-1; 1)$ nên $t = 1 - \cos 2x \in (0; 2]$.

Phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2]$ khi và chỉ khi $m \in [-1; 3]$.

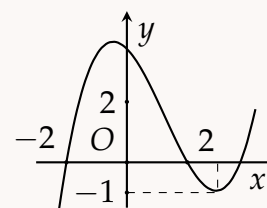
Chọn đáp án **A**



Ví dụ 6

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ là

- A** 6. **B** 10. **C** 3. **D** 9.



Lời giải.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$ (1).

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- ✔ $t \in (-2; 2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1).
- ✔ $t \in \{-2; 2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1).
- ✔ $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ (2) trở thành $|f(t)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = \frac{2}{3} \\ f(t) = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị ta có:



- ✔ Phương trình $f(t) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2 < t_1 < t_2 < 2 < t_3$. Suy ra có 7 nghiệm của phương trình (2).
- ✔ Phương trình $f(t) = -\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6$. Suy ra có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Chọn đáp án (B)



Ví dụ 7

Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

- (A) 5. (B) 9. (C) 7. (D) 3.

💬 Lời giải.

$$\text{Có } (f(4x^2 + 4x))' = (8x + 4)f'(4x^2 + 4x), (f(4x^2 + 4x))' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ f'(4x^2 + 4x) = 0. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		a_1	a_2	a_3	a_4
		-3		-1	

$$\text{Từ bảng biến thiên trên ta có } f'(4x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x = a_1 \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 + 4x = a_2 \in (-1; 0) \\ 4x^2 + 4x = a_3 \in (0; 1) \\ 4x^2 + 4x = a_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \quad (1)$$

Xét $g(x) = 4x^2 + 4x, g'(x) = 8x + 4, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

- ✔ Phương trình $4x^2 + 4x = a_1 \in (-\infty; -1)$ vô nghiệm.
- ✔ Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (-1; 0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.
- ✔ Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (0; 1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.
- ✔ Phương trình $4x^2 + 4x = a_2 \in (1; +\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

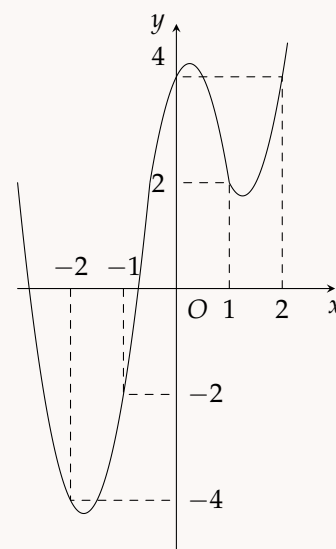
Chọn đáp án **C**

□

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - x^2$ là

- A** 1. **B** 2.
C 3. **D** 4.



Lời giải.



Đặt $g(x) = f(x) - x^2$. Khi đó $g'(x) = f'(x) - 2x$.

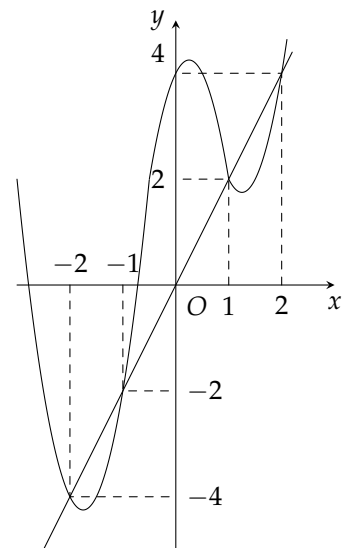
Trên hình đã cho, ta vẽ thêm đồ thị hàm số $y = 2x$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là $-2; -1; 1; 2$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có bảng xét dấu của đạo hàm $g'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+

Do đó, hàm số $y = g(x)$ có 4 điểm cực trị.



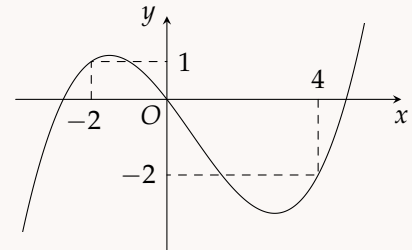
Chọn đáp án **(D)**



Ví dụ 9

Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A)** $(1; \frac{3}{2})$. **(B)** $(0; \frac{1}{2})$. **(C)** $(-2; -1)$. **(D)** $(2; 3)$.

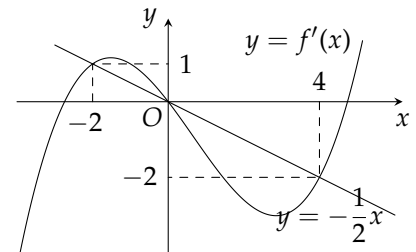


Lời giải.

Xét đường thẳng $d: y = -\frac{1}{2}x$ đi qua các điểm $A(-2; 1)$, $O(0; 0)$ và $B(4; -2)$ được bổ sung vào đồ thị đã cho (như hình vẽ).

Và theo đồ thị ta có: $f'(X) > -\frac{X}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < X < 0 \\ X > 4. \end{cases}$

Với $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ ta có $g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$.
 Từ đó $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -2f'(1 - 2x) + 2x - 1 < 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) > \frac{1 - 2x}{2}$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 1 - 2x < 0 \\ 1 - 2x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

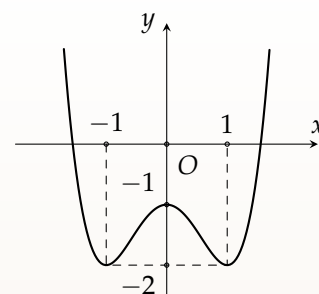
Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\frac{3}{2})$ và $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ nên nghịch biến trên khoảng $(1; \frac{3}{2})$.

Chọn đáp án **(A)**

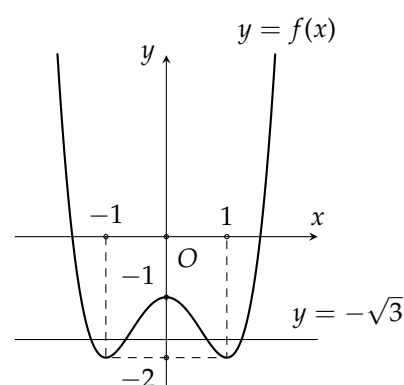


**C BÀI TẬP RÈN LUYỆN****Câu 1**

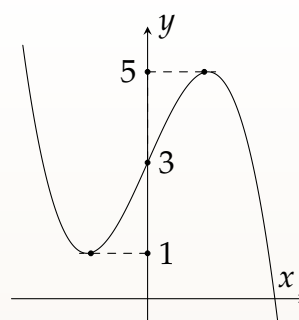
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là

(A) 1.**(B)** 3.**(C)** 2.**(D)** 4.**Lời giải.**

Vì $-2 < -\sqrt{3} < -1$ nên suy ra đường thẳng $y = -\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có hai điểm phân biệt có hoành độ dương. Do đó phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ có hai nghiệm dương phân biệt.

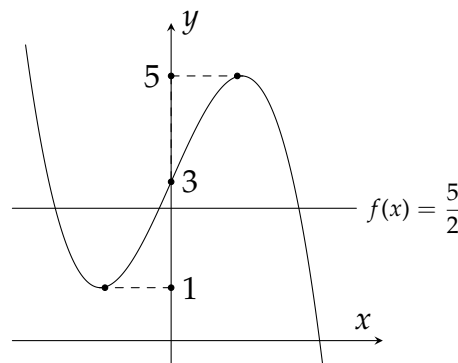
Chọn đáp án **(C)****Câu 2**

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm âm?

(A) 0.**(B)** 2.**(C)** 1.**(D)** 3.**Lời giải.**

Ta có $2f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2}$.

Đường thẳng $y = \frac{5}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm trong đó có 2 điểm có hoành độ âm nên phương trình $2f(x) - 5 = 0$ có 2 nghiệm âm.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên. Số phần tử tập nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là

- (A) 4. (B) 3. (C) 5. (D) 6.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$+\infty$	$-\infty$	2	$-\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình $f(x) = 2$ có 2 nghiệm và phương trình $f(x) = -2$ có 2 nghiệm. Vậy tổng số nghiệm là 4.

Chọn đáp án (A)

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(x + 5) - 4 = 0$ là

- (A) 0. (B) 2.
(C) 3. (D) 1.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$

Lời giải.

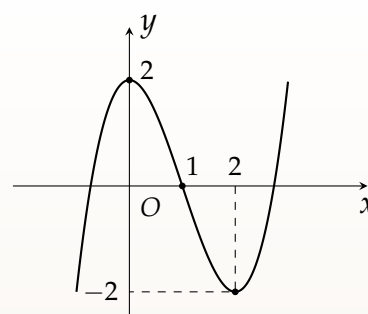
Số nghiệm của phương trình $f(x + 5) - 4 = 0$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y = 4$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$. Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (B)

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) = -x + 1$.

- (A) 2. (B) 4.
(C) 1. (D) 3.

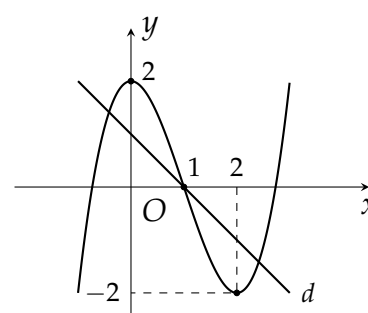


Lời giải.

Nhận thấy số nghiệm của phương trình $f(x) = -x + 1$ chính là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = -x + 1$.

Qua hình vẽ ta thấy, hai đồ thị hàm số giao nhau tại 3 điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.



Chọn đáp án (D)



Câu 6

(2D1B5-3)

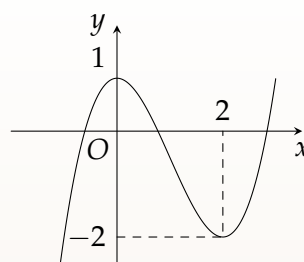
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x^2) + 3 = 0$.

(A) 4.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 6.



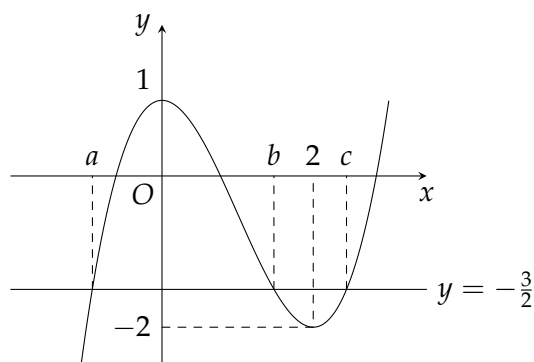
🗨️ Lời giải.

Ta có $2f(x^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^2) = -\frac{3}{2}$. (1)

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -\frac{3}{2}$ tại các điểm có hoành độ a, b, c trong đó

$$a < 0 < b < 2 < c \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra



$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \text{ (loại)} \\ x^2 = b \\ x^2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{b} \\ x = \pm\sqrt{c}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (A)



Câu 7

Số nghiệm thực của phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2} = 0$ là

(A) 2.

(B) 6.

(C) 4.

(D) 3.

🗨️ Lời giải.



Xét hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$.

Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

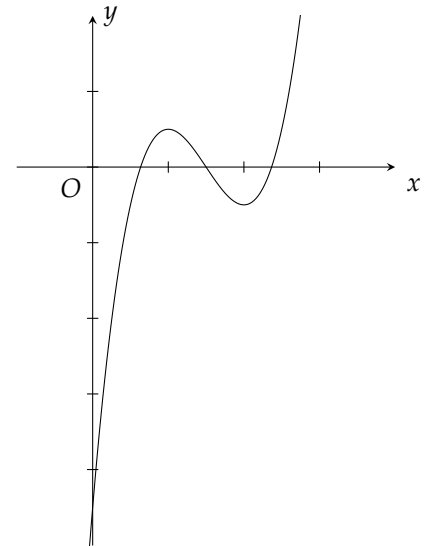
Ta có $y' = 6x^2 - 18x + 12$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty.$$

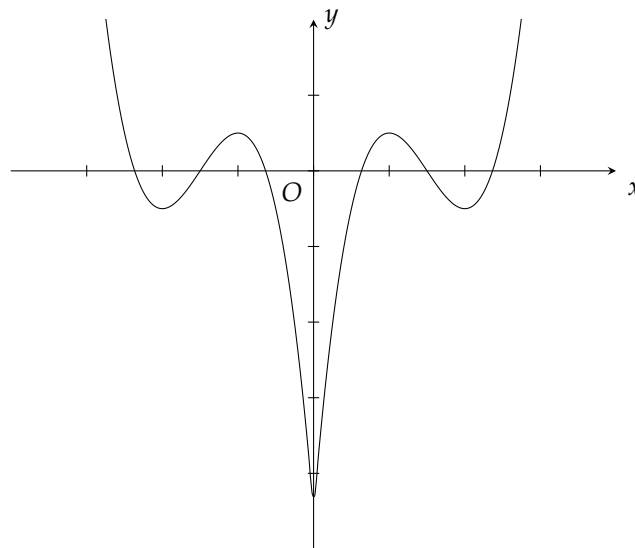
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



Đồ thị (C) của $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$ (như hình vẽ).

Từ đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2}$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị (C) phía bên phải trục tung ($x \geq 0$) và lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị (C) bên phải trục tung. Như vậy ta được đồ thị như sau



Rõ ràng đồ thị này cắt trục hoành tại 6 điểm nên phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - \frac{9}{2} = 0$ có 6 nghiệm.

Chọn đáp án (B)

□



Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

- (A) $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$ (B) $-2 < m < -1$.
 (C) $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq -1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Lời giải.

Ta có $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = m + 1$. Để phương trình $f(x) - 1 = m$ có hai nghiệm thì đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm.

Dựa vào bảng biến thiên ta có đường thẳng d cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m + 1 = -1 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$$

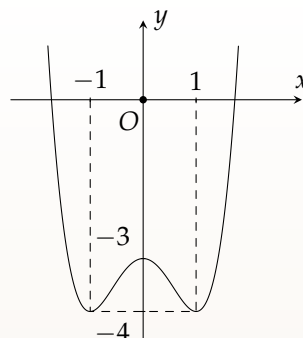
Chọn đáp án (A)

□

Câu 9

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f(x) + m = 0$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt?

- (A) 4. (B) 3.
 (C) 2. (D) 0.



Lời giải.

Ta có $4f(x) + m = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{m}{4}$.

Phương trình có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < -\frac{m}{4} < -3 \Leftrightarrow 12 < m < 16$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 10

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m - 4 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- (A) $4 < m < 8$. (B) $m < 0$. (C) $-8 < m < -4$. (D) $0 \leq m \leq 4$.

Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x^2 - m - 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 4 = m$. (1)

Xét $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	-8	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi $-8 < m < -4$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 11

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

(A) $-\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{3}{2}$.

(C) $-\frac{5}{2}$.

(D) $\frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = 2m + 1$ có đúng hai điểm chung. Điều này tương đương với $\begin{cases} 2m + 1 = 0 \\ 2m + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = -1. \end{cases}$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 12

Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

(A) $(-1; 3)$.

(B) $(-3; 1)$.

(C) $(2; 4)$.

(D) $(-3; 0)$.

 **Lời giải.**



Ta có: $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = m$.

Xét hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$, khi đó: $y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
y			3		3		
	$-\infty$			-1			$-\infty$

Vậy để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì $-3 < m < 1 \Rightarrow m \in (-3; 1)$.

Chọn đáp án (B)



Câu 13

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt?

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2.

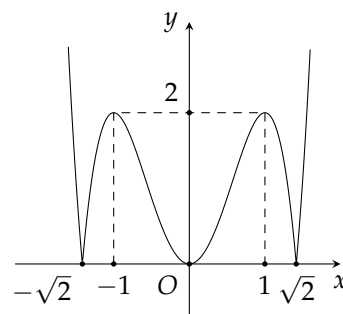
(D) 3.

Lời giải.

$$y = 2x^2|x^2 - 2| = \begin{cases} 2x^2(x^2 - 2) & \text{khi } x \leq -\sqrt{2} \\ & x \geq \sqrt{2} \\ -2x^2(x^2 - 2) & \text{khi } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = 2x^2(x^2 - 2)$, từ đó suy ra đồ thị hàm số đã cho như hình.

Do đó, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.



Chọn đáp án (A)



Câu 14

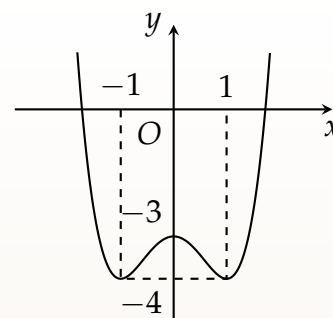
Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

(A) $-4 < m < -3$.

(B) $0 < m < 3$.

(C) $m > 4$.

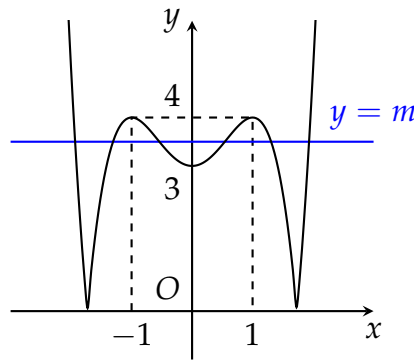
(D) $3 < m < 4$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$





Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số và đường thẳng $y = m$. Phương trình có 6 nghiệm phân biệt khi $3 < m < 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên. Khi đó, phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi và chỉ khi

(A) $\frac{1}{2} < m < 1$.

(B) $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

(C) $0 < m < 1$.

(D) $0 < m \leq 1$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

$-\infty$

$\nearrow$

1

$\searrow$

0

$\nearrow$

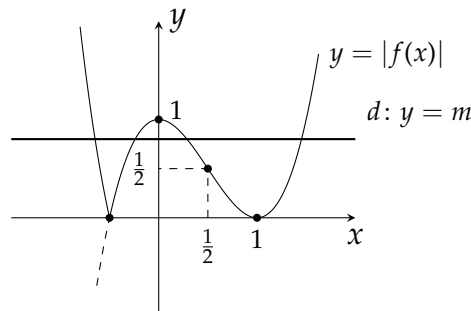
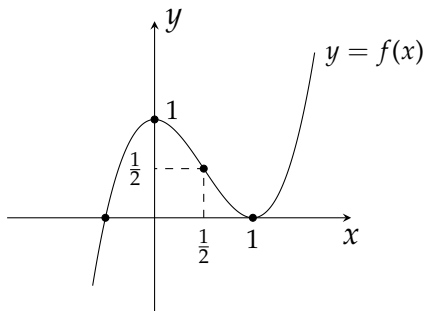
$+\infty$

Lời giải.

Nghiệm phương trình $|f(x)| = m$ chính là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = |f(x)|$ với đường thẳng $d: y = m$.

① Tọa độ hai điểm cực trị là $(0; 1)$ và $(1; 0)$, suy ra tọa độ điểm uốn là $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

② Hình ảnh đồ thị $y = f(x)$ và $y = |f(x)|$ được minh họa như hình bên dưới:



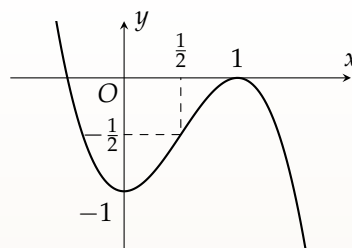
③ Theo đồ thị $y = |f(x)|$ để hoành độ giao điểm thỏa $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ thì $\frac{1}{2} < m < 1$.

Chọn đáp án (A) □



Câu 16

Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ có đồ thị như hình vẽ. Bằng cách sử dụng đồ thị hàm số, xác định m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2m = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm lớn hơn $\frac{1}{2}$.



A $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

B $m \in (-1; 0)$.

C $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D $m \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $-2x^3 + 3x^2 - 1 = 2m - 1$. Số nghiệm của phương trình đúng bằng số hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ và $y = 2m - 1$.
Nên để phương trình đã cho có nghiệm thỏa mãn yêu cầu thì ta cần có

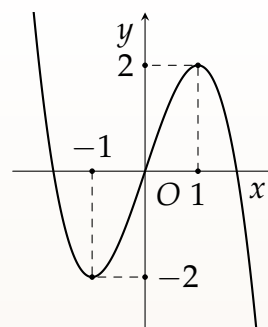
$$-\frac{1}{2} < 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **D**



Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \leq 2^m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.



A $0 \leq m \leq 2$.

B $m \geq 2$.

C $0 \leq m \leq 1$.

D $m \geq 1$.

Lời giải.

Bất phương trình $f(x) \leq 2^m$ có nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$

$$\Leftrightarrow \max_{x \in [0; 1]} f(x) \leq 2^m \Leftrightarrow 2 \leq 2^m \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Chọn đáp án **D**



Câu 18

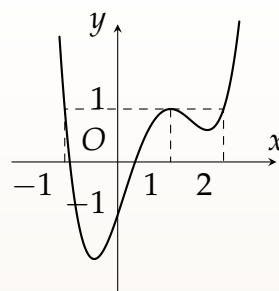
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 + x) = 1$ là

A 2.

B 3.

C 4.

D 5.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có



$$\begin{cases} x^2 + x = -1 \\ x^2 + x = 1 \\ x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; -2; 1 \right\}.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm thực.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 19

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{2x-3}) + 4 = 0$ là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'		+	- 0 +	
y	$-\infty$	2	$+\infty$ -4 $+\infty$	$+\infty$

🗨️ Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{2x-3}$ ($t \geq 0$), ta được phương trình $f(t) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -4$.

Từ bảng biến thiên ta suy ra $t = 3$. Do đó, ta có $\sqrt{2x-3} = 3 \Leftrightarrow x = 6$.

Vậy phương trình $f(\sqrt{2x-3}) + 4 = 0$ có 1 nghiệm.

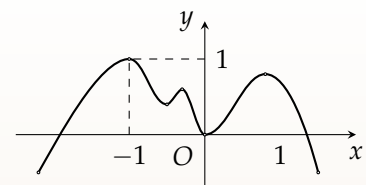
Chọn đáp án (D)

□

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(\sin 2x)) = 0$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.



🗨️ Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) \leq 1$, suy ra $f(f(\sin 2x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\sin 2x) = a < -1 \\ f(\sin 2x) = 0 \\ f(\sin 2x) = b > 1. \end{cases}$

✔️ Khi $f(\sin 2x) = a < -1 \Rightarrow \sin 2a = a' < -1$, suy ra phương trình vô nghiệm.

✔️ Khi $f(\sin 2x) = b > 1$, suy ra phương trình vô nghiệm.

✔️ Khi $f(\sin 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = m < -1 \\ \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = n > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Khi $x \in (0; \pi) \Leftrightarrow 0 < k < 2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = \frac{\pi}{2}.$

Chọn đáp án (D)

□



Câu 21

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

A $m \leq -3$.

B $m < -3$.

C $m \geq 3$.

D $m > 3$.

Lời giải.

$$y' = 3x^2 + 6x - m.$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{x \in (-\infty; 0)} (3x^2 + 6x) \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in (-\infty; 0)} [3(x+1)^2 - 3] \Leftrightarrow m \leq -3.$$

Chọn đáp án **A**



Câu 22

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 4m$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ là

A $m > 4$.

B $m \geq 4$.

C $m \leq -8$.

D $m < 8$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m - 1$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1; 1)$ khi

$$y' \geq 0, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 1 \geq -m, \forall x \in (-1; 1). \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 6x - 1$ trên $(-1; 1)$, ta có $g'(x) = 6x + 6$.

Ta có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-1	1
g'	+	
g	-4	8

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số g , ta có

$$(*) \Leftrightarrow -m \leq -4 \Leftrightarrow m \geq 4.$$

Vậy $m \geq 4$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**



Câu 23

Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

A 3.

B 9.

C 5.

D 7.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Lời giải.



Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ x^2 + 2x = a, & a < -1 \\ x^2 + 2x = b, & -1 < b < 0 \\ x^2 + 2x = c, & 0 < c < 1 \\ x^2 + 2x = d, & d > 1. \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$, có $y' = 2x + 2$, ta có bảng biến thiên như hình vẽ.

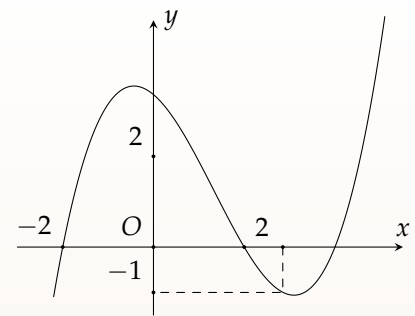
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$ 0 $+$	
$g(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn nên hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.
Chọn đáp án **(D)** □

Câu 24

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$ là

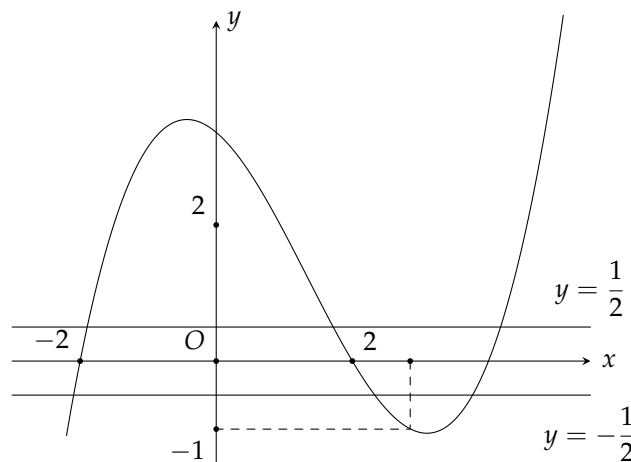
- (A)** 6. **(B)** 10. **(C)** 12. **(D)** 3.



Lời giải.

Ta có $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} & (1) \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} & (2). \end{cases}$

Từ đồ thị ta có



✔ (1) $\Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_1 & (-2 < \alpha_1 < 0) \\ x^3 - 3x = \alpha_2 & (0 < \alpha_2 < 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_3 & (\alpha_3 > 2). \end{cases}$

$$\textcircled{v} (2) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_4 & (\alpha_4 < -2) \\ x^3 - 3x = \alpha_5 & (\alpha_5 > 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_6 & (\alpha_6 > 2). \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $y' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có

- $\textcircled{v}$ Phương trình $x^3 - 3x = \alpha_1$ có 3 nghiệm.
- $\textcircled{v}$ Phương trình $x^3 - 3x = \alpha_2$ có 3 nghiệm.
- $\textcircled{v}$ Mỗi phương trình $x^3 - 3x = \alpha_3, x^3 - 3x = \alpha_4, x^3 - 3x = \alpha_5, x^3 - 3x = \alpha_6$ đều có một nghiệm.

Từ đó suy ra phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Chọn đáp án $\textcircled{B}$

□

Câu 25

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}|\cos^3 x| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

- $\textcircled{A} -\frac{3}{2} < m < -\frac{1}{3}. \quad \textcircled{B} \frac{1}{3} \leq m < \frac{3}{2}. \quad \textcircled{C} \frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}. \quad \textcircled{D} -\frac{3}{2} \leq m \leq -\frac{1}{3}.$

Lời giải.

Đặt $t = \cos x, t \in (-1; 1]$.

Phương trình trở thành $2m = -\frac{1}{3}|t^3| + 3t^2 - 5|t| + 3 \Leftrightarrow 2m = f(|t|)$ với $f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t + 3$.

Ta có $f'(t) = -t^2 + 6t - 5 \leq 0, \forall t \in (-1; 1]$.

Bảng biến thiên

t	-1	0	1
$f'(t)$	0	$-$	0
$f(t)$	$\frac{34}{3}$	3	$\frac{2}{3}$
$f(t)$	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{2}{3}$

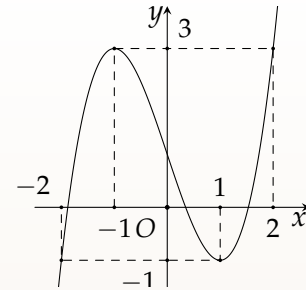
Phương trình $\frac{1}{3}|\cos^3 x| - 3\cos^2 x + 5|\cos x| - 3 + 2m = 0$ có đúng bốn nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $2m = f(|t|)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1]$. Điều này tương đương với $\frac{2}{3} < 2m < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt là

- (A) 5. (B) 3. (C) 0. (D) 1.



Lời giải.

Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy, phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < f(m) < 3$.

Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy, $-1 < f(x) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq -1, x \neq 1. \end{cases}$

Do đó $-1 < f(m) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1, m \neq 1 \end{cases}$, do m nguyên nên $m = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\sin^2 x - 4\cos x + 2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- (A) Không có m thỏa mãn. (B) $m \leq -\frac{5}{2}$.
(C) $m \geq 2$. (D) $m \geq -\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\sin^2 x - 4\cos x + 2m \geq 0$ hay $-t^2 - 4t + 2m + 1 \geq 0, \forall t \in [-1; 1]$ với $t = \cos x$.

Khi đó $m \geq \frac{t^2 + 4t - 1}{2}, \forall t \in [-1; 1]$ hay $m \geq \max_{[-1; 1]} g(x)$ với $g(x) = \frac{t^2 + 4t - 1}{2}$.

Ta có $g'(x) = t + 2 > 0, \forall t \in [-1; 1]$. Vậy $m \geq \max_{[-1; 1]} g(x) \Leftrightarrow m \geq g(1) \Leftrightarrow m \geq 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$ có hai nghiệm phân biệt.

- (A) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$. (B) $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
(C) $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$.

Xét hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}} \Rightarrow y' = \frac{1-2x}{\sqrt{2x^2+1}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		0	
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 29

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^4 + 1 - x^2 + x\sqrt{2mx^4 + 2m} \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $S = [a; b]$. Giá trị của $a\sqrt{8} + 12b$ bằng

(A) 3.

(B) 2.

(C) 6.

(D) 5.

Lời giải.

Để thấy bất phương trình xác định khi $m \geq 0$.

Khi $x \geq 0$, bất phương trình đã cho hiển nhiên đúng. Ta chỉ cần xét khi $x < 0$. Thật vậy, bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 - x^2 &\geq -x\sqrt{x^4 + 1}\sqrt{2m} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2m} &\leq \frac{x^4 + 1 - x^2}{-x\sqrt{x^4 + 1}} \\ \Leftrightarrow 2m &\leq \frac{(x^4 + 1 - x^2)^2}{x^2(x^4 + 1)} \\ \Leftrightarrow 2m &\leq \frac{\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right)^2}{x^2 + \frac{1}{x^2}}. (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow t \geq 2$. Bất phương trình (1) trở thành

$$2m \leq \frac{(t-1)^2}{t} = f(t), \forall t \geq 2. \quad (2)$$

Để (2) xảy ra với mọi $t \geq 2$ thì

$$2m \leq \min_{[2; +\infty)} f(t). \quad (3)$$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{2}{t^2} > 0, \forall t \geq 2$, suy ra $\min_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = \frac{1}{2}$.

Từ (3), ta suy ra $2m \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$. Kết hợp với điều kiện xác định ta có $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$.

Suy ra $a = 0, b = \frac{1}{4} \Rightarrow a\sqrt{8} + 12b = 3$.

Chọn đáp án (A)



Câu 30

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = 3x^3 - 2(m-1)x + \frac{1}{x^5}$. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi

$$3x^3 - 2(m-1)x + \frac{1}{x^5} \geq 0, \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + \frac{1}{x^5} \geq 2(m-1)x, \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow h(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6} \geq 2(m-1), \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow \min_{x>0} h(x) > 2(m-1).$$

$$\text{Xét } h'(x) = 6x - \frac{6}{x^7} = 0 \Leftrightarrow x^8 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \min_{x>0} h(x) = 4.$$

Do đó $2(m-1) \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (C)



—HẾT—

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x) + 7 = 0$ là

(A) 2.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 1.

Lời giải.

Ta nhận thấy hàm số nhận giá trị -7 tại đúng một điểm trong mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ nhưng không nhận giá trị -7 trong $(-1; 1)$. Do đó, phương trình $f(x) + 7 = 0$ có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (A)

Bài 2

Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ như hình vẽ.

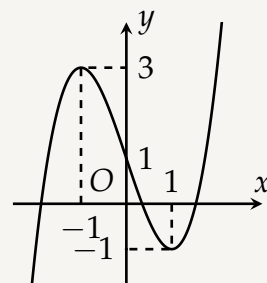
Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt

(A) $-2 < m < 3$.

(B) $-2 < m < 2$.

(C) $-2 \leq m < 2$.

(D) $-1 < m < 3$.



Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = m + 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số hình bên ta thấy phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án (B)

Bài 3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$-\sqrt{2}$	$+\infty$	-1

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 1 = 0$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

 **Lời giải.**

$$2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

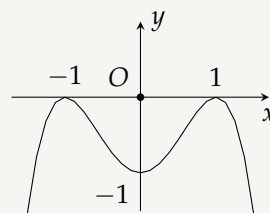
Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Bài 4

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - m + 2019 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt?

- (A) $\begin{cases} m < 2018 \\ m > 2019 \end{cases}$ (B) $2018 \leq m \leq 2019$.
(C) $-1 < m < 0$. (D) $2018 < m < 2019$.



 **Lời giải.**

Phương trình $f(x) - m + 2019 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = m - 2019$ có 4 nghiệm phân biệt hay đường thẳng $y = m - 2019$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt. (*)

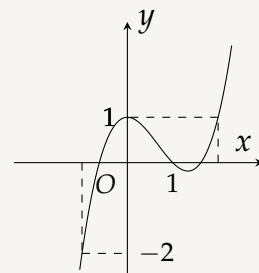
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có (*) $\Leftrightarrow -1 < m - 2019 < 0 \Leftrightarrow 2018 < m < 2019$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

- (A) 0. (B) 3. (C) 1. (D) 2.



 **Lời giải.**

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt khi chỉ khi m nhận giá trị nguyên bằng 0.

Chọn đáp án (C) □

Bài 6

Cho hàm số $y = x^3 + 4x$. Số giao điểm của đồ thị hàm số và trục Ox bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

 **Lời giải.**

Phương trình hoành độ của đồ thị hàm số và trục Ox là

$$x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$



Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 + 4x$ cắt trục Ox tại đúng một điểm.

Chọn đáp án (A)



Bài 7

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) + 3 = 0$ là

- (A) 0. (B) 1. (C) 3. (D) 2.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			2		$+\infty$	
	$-\infty$			-3		

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = -3$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

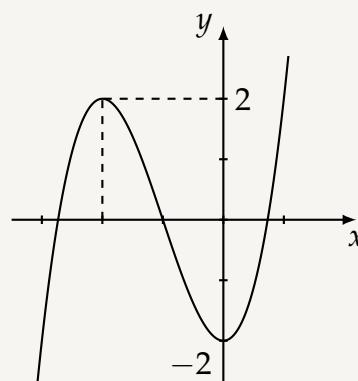
Chọn đáp án (D)



Bài 8

Cho đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$. Số giá trị m nguyên để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt là

- (A) 4.
(B) 5.
(C) vô số.
(D) 3.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị $y = f(x)$ ta có, phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 2$.
Vậy $m \in \{-1; 0; 1\}$.

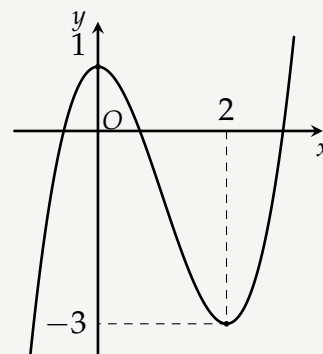
Chọn đáp án (D)



Bài 9

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- (A) Phương trình không có nghiệm.
(B) Phương trình có đúng một nghiệm.
(C) Phương trình có đúng hai nghiệm.
(D) Phương trình có đúng ba nghiệm.



Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ bằng số giao điểm của đồ thị $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với trục hoành.

Dựa vào hình vẽ, phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có đúng ba nghiệm.

Chọn đáp án (D)



Bài 10

Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+			-	0	+
$f(x)$				0		-1	$+\infty$

Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 2$ có ba nghiệm phân biệt.

- Ⓐ $-2 \leq m \leq -1$. Ⓑ $-3 \leq m \leq -2$. Ⓒ $-3 < m < -2$. Ⓓ $-2 < m < -1$.

💬 Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m + 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m + 2$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = m + 2$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

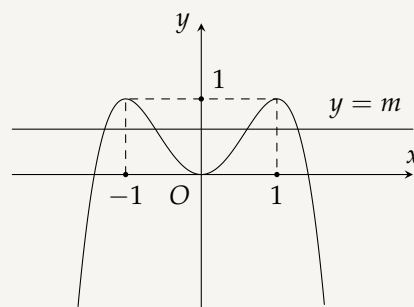
$$-1 < m + 2 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < -2.$$

Chọn đáp án Ⓒ

Bài 11

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- Ⓐ $0 < m < 1$.
 Ⓑ $0 \leq m \leq 1$.
 Ⓒ $m < 1$.
 Ⓓ $m > 0$.



💬 Lời giải.

Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ tại bốn điểm phân biệt. Do đó $0 < m < 1$.

Chọn đáp án Ⓐ

Bài 12

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y					0		-1	

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

- Ⓐ $m = -2, m \geq -1$. Ⓑ $m > 0, m = -1$.



C $m = -2, m > -1.$

D $-2 < m < -1.$

Lời giải.

$$f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1.$$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm thì

$$\begin{cases} m + 1 > 0 \\ m + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**



Bài 13

Câu 19

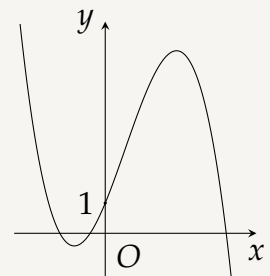
Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(|x|) + 1 = 0$ là

A 4.

B 3.

C 2.

D 1.



Lời giải.

Đặt $|x| = t > 0$. Ta có $f(|x|) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -1$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -1$ tại đúng 1 điểm có hoành độ dương.

Do đó $f(t) = -1 \Leftrightarrow t = a > 0 \Leftrightarrow |x| = a > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -a. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **C**



Bài 14

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-5	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	-	+
$f(x)$	3	$+\infty$	2	$-\infty$	-3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = 3m$ có ba nghiệm phân biệt.

A $-1 < m < \frac{2}{3}.$

B $m < -1.$

C $m \leq -1.$

D $m < -3.$

Lời giải.

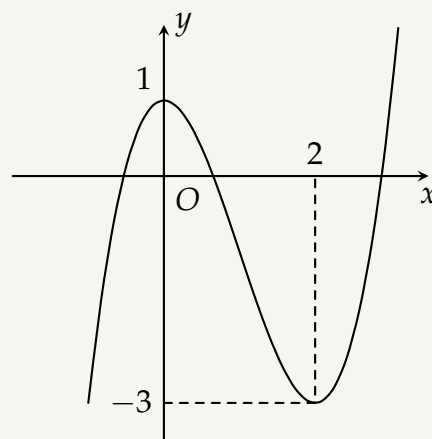
Để $f(x) = 3m$ có ba nghiệm phân biệt thì $3m < -3 \Leftrightarrow m < -1$.

Chọn đáp án **B**



Bài 15

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ sau đây. Điều kiện của m để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt là?



- (A) $-3 \leq m \leq 1$. (B) $\frac{1}{8} < m < 2$. (C) $\frac{1}{8} \leq m \leq 2$. (D) $-3 < m < 1$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d - m = 0 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-3 < m < 1$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 16

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1}$ có hai nghiệm phân biệt.

- (A) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{6}$. (B) $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
 (C) $m > \frac{\sqrt{6}}{6}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải.

Phương trình $x + 1 = m\sqrt{2x^2 + 1} \Leftrightarrow m = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

Xét hàm số $y = \frac{x + 1}{\sqrt{2x^2 + 1}} \Rightarrow y' = \frac{1 - 2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'		+	0
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □



Bài 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$		3	5	3	$+\infty$

Tìm m để phương trình $f(x) = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A $m < -1$ hoặc $m > \frac{1}{3}$.

B $m \leq -1$.

C $-1 < m < -\frac{1}{3}$.

D $m = -\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta suy ra điều kiện để phương trình $f(x) = 2 - 3m$ có bốn nghiệm phân biệt là $3 < 2 - 3m < 5 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **C**



Bài 18

Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có 3 nghiệm phân biệt?

x	$-\infty$	20	0	40	2	60	$+\infty$
y'	11	$-$		$+$	0	$-$	71
y	$+\infty$	21	-2	42	4	62	72
	13	23		44	53	63	73
	14	24		44	54	64	$-\infty$

A $m \in [-2; 4]$.

B $m \in (-2; 4)$.

C $m \in (-2; 4]$.

D $m \in (-\infty; 4]$.

Lời giải.

Để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt thì $-2 < m < 4$.

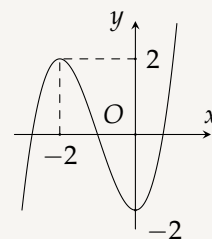
Chọn đáp án **B**



Bài 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2019}{f(x) - 1}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.



Lời giải.

Hàm số $y = \frac{2019}{f(x) - 1}$ có số đường tiệm cận đứng bằng số nghiệm của phương trình $f(x) - 1 = 0$.

Dựa vào đồ thị đã cho suy ra phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

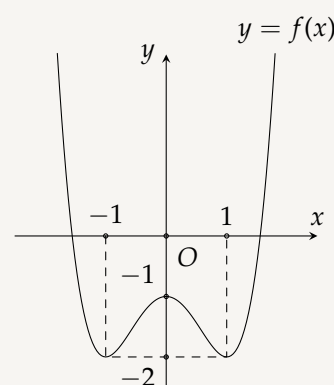
Vậy hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận đứng.

Chọn đáp án (C) □

Bài 20

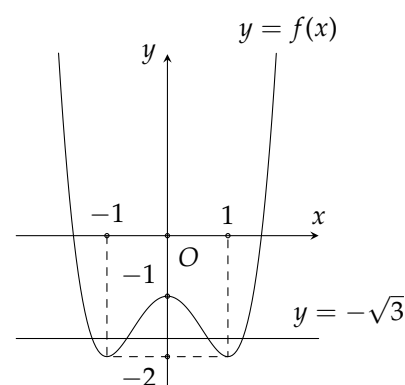
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên. Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.



Lời giải.

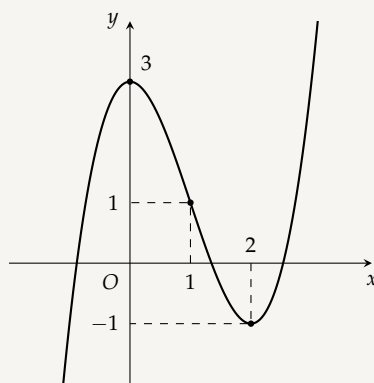
Vì $-2 < -\sqrt{3} < -1$ nên suy ra đường thẳng $y = -\sqrt{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có hai điểm phân biệt có hoành độ dương. Do đó phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ có hai nghiệm dương phân biệt.



Chọn đáp án (C) □

Bài 21

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $[f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?



(A) 7.

(B) 4.

(C) 5.

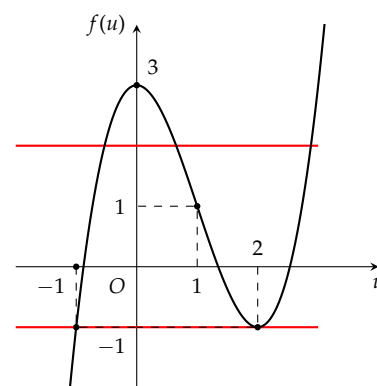
(D) 6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } [f(x^2 + 1)]^2 - f(x^2 + 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^2 + 1) = -1 \\ f(x^2 + 1) = 2. \end{cases}$$

Đặt $u = x^2 + 1$, khi đó phương trình trở thành $\begin{cases} f(u) = -1 \\ f(u) = 2. \end{cases}$

Xét sự tương giao của hàm số $y = f(u)$ và các đường thẳng $y = -1$, $y = 2$ ta có



$$\begin{cases} u = u_1 \in (-2; -1] \\ u = 2 \\ u = u_2 \in (-1; 0) \\ u = u_3 \in (0; 1) \\ u = u_4 \in (2; 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = u_1 \in (-2; -1] & (1) \\ x^2 + 1 = 2 & (2) \\ x^2 + 1 = u_2 \in (-1; 0) & (3) \\ x^2 + 1 = u_3 \in (0; 1) & (4) \\ x^2 + 1 = u_4 \in (2; 4). & (5) \end{cases}$$

✓ Các phương trình (1), (3), (4) vô nghiệm.

✓ Phương trình (2) có hai nghiệm.

✓ Phương trình (5) có hai nghiệm khác phương trình (2)

Vậy phương trình đã cho có tổng cộng 4 nghiệm.

Chọn đáp án (C)

□

Bài 22

Cho hàm số $f(x) = x^3 + x - 2^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$.

(A) 3.

(B) 4.

(C) 0.

(D) 2.

Lời giải.

$$\text{Đặt } y = f(x), \text{ ta có hệ } \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Rightarrow x + f(x) = y + f(y). (*)$$

Xét hàm số $g(t) = t + f(t)$ có $g'(t) = 1 + f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ với mọi $t \in \mathbb{R} \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ phương trình (*) ta có

$$g(y) = g(x) \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = 2^m.$$

Để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$ thì phương trình $x^3 = 2^m$ có nghiệm

$$x \in [1; 2]$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2^m \leq 8 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$ nên có tất cả 4 giá trị nguyên.

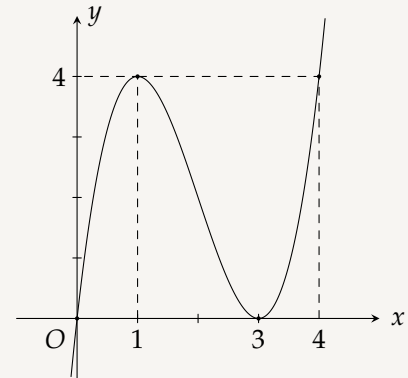
Chọn đáp án (B)



Bài 23

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(f(x))) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- (A) 14. (B) 5. (C) 8. (D) 9.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có

$$f(f(f(x))) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 0 \\ f(f(x)) = 3 \end{cases}$$

$$\checkmark f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = a \ (0 < a < 1) \\ x = b \ (1 < b < 3) \\ x = c \ (3 < c < 4) \end{cases}$$

$$\checkmark f(f(x)) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ f(x) = b \\ f(x) = c \end{cases}$$

- Với $f(x) = a$ ($0 < a < 1$), phương trình có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .
- Với $f(x) = b$ ($1 < b < 3$), phương trình có 3 nghiệm phân biệt x_4, x_5, x_6 .
- Với $f(x) = c$ ($3 < c < 4$), phương trình có 3 nghiệm phân biệt x_7, x_8, x_9 .

Vậy phương trình $f(f(f(x))) = 0$ có $5 + 3 + 3 + 3 = 14$ nghiệm phân biệt.

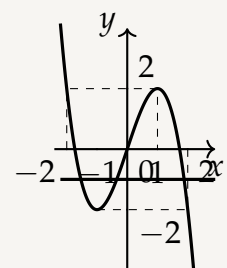
Chọn đáp án (A)



Bài 24

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
 (B) Nếu $|m| > 2$ thì phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất.
 (C) Hàm số $y = f(x)$ có cực tiểu bằng -1 .
 (D) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 2.



**Lời giải.**

Đáp án A: đúng.

Đáp án B: Với $m > 2$ hoặc $m < -2$ thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại một điểm duy nhất nên B đúng.

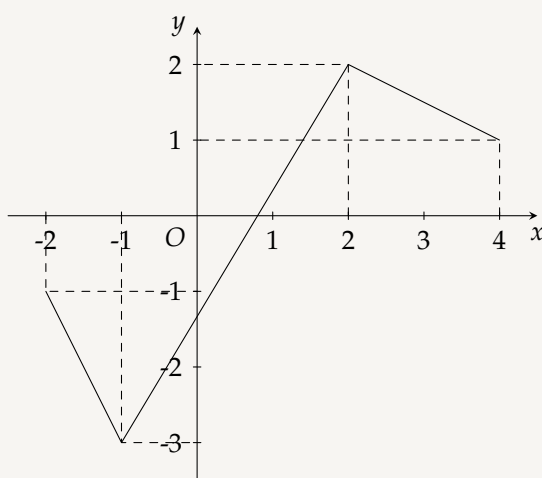
Đáp án C: Hàm số đạt cực tiểu tại chứ không phải đạt cực tiểu bằng -1 nên C sai.

Đáp án D: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ đạt được bằng 2 tại $x = -2$ nên D đúng.

Chọn đáp án **C**

**Bài 25**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ. Khẳng định đúng là



- A** Điểm cực đại của đồ thị hàm số là 2.
- B** Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x \in [-2; 4]$.
- C** $f'(-\frac{3}{2})f(0) > 0$.
- D** $\max_{[-2; 4]} f(x) = 4$.

Lời giải.

Theo đồ thị ta thấy $f(0) < 0$ và $f'(-\frac{3}{2}) < 0$ (do hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$) nên $f'(-\frac{3}{2})f(0) > 0$.

Chọn đáp án **C**

**Bài 26**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như biến dưới. Hỏi phương trình $|f(x)| = 2$ có bao nhiêu nghiệm?



x	$-\infty$	20	0	40	1	60	$+\infty$
y'	11	21		21	0	+	71
y	1	22	$+\infty$	42	52	62	$+\infty$
	13	23		43	53	63	73
	14	24	$-\infty$	44	1	64	74

- ☐ A 1 nghiệm.
 ☐ B 2 nghiệm.
 ☐ C 3 nghiệm.
 ☐ D 4 nghiệm.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ có dạng

x	$-\infty$	a	0	1	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	1		$+\infty$		$+\infty$
		0		1	

Từ bảng biến thiên ta thấy rằng phương trình $|f(x)| = 2$ có ba nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **C**

Bài 27

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			5		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

Phương trình $|f(1 - 2x) + 2| = 5$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt

- ☐ A 5.
 ☐ B 4.
 ☐ C 3.
 ☐ D 6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |f(1 - 2x) + 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1 - 2x) + 2 = 5 \\ f(1 - 2x) + 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1 - 2x) = 3 (2) \\ f(1 - 2x) = -7 (3) \end{cases}$$

Đặt $1 - 2x = t$ với mỗi $x \in \mathbb{R}$ có 1 và chỉ 1 giá trị $t \in \mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số $y = f(t)$ cũng là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

Số nghiệm của phương trình (2) là số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ với đường thẳng $y = 3$. Có 3 giao điểm nên phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của phương trình (3) là số hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ với đường



thẳng $y = -7$. Có 1 giao điểm nên phương trình (3) có đúng 1 nghiệm.
 Nghiệm của phương trình (3) không trùng với nghiệm của phương trình (2).
 Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
 Chọn đáp án (B)



Bài 28

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.
 Phương trình $f(x^2 - 3) = 5$ có bao nhiêu nghiệm âm?

- (A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			5		-3	$+\infty$

Lời giải.

Đặt $u = x^2 - 3$, khi đó, nghiệm của phương trình $f(x^2 - 3) = 5$ chính là giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(u)$ và đường thẳng $y = 5$.

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ ta có

$$f(x^2 - 3) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 5 \\ x^2 - 3 = u_1 \text{ với } u_1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 = 3 + u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{u_1 + 3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt.

Chọn đáp án (D)



Bài 29

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
		$-\infty$		3	

Số nghiệm của phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$3|f(x)| - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{10}{3} \\ f(x) = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

✔ Phương trình $f(x) = \frac{10}{3}$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{10}{3}$.

Theo bảng biến thiên, đường thẳng $y = \frac{10}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt, nên phương trình $f(x) = \frac{10}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.





- ☑ Phương trình $f(x) = -\frac{10}{3}$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{10}{3}$.

Theo bảng biến thiên, đường thẳng $y = -\frac{10}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm, nên phương trình $f(x) = -\frac{10}{3}$ có 1 nghiệm.

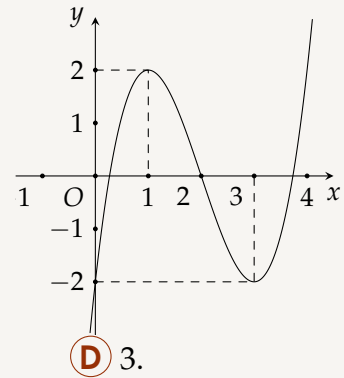
Vậy phương trình $3|f(x)| - 10 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (C)



Bài 30

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x) = f(8a + 4b + 2c + d)$ có bao nhiêu nghiệm?



(A) 0.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 3.

💬 Lời giải.

Ta có $f(x) = f(8a + 4b + 2c + d) \Leftrightarrow f(x) = f(f(2))$.

Từ đồ thị hàm số ta có $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ hay $f(2) = 0$.

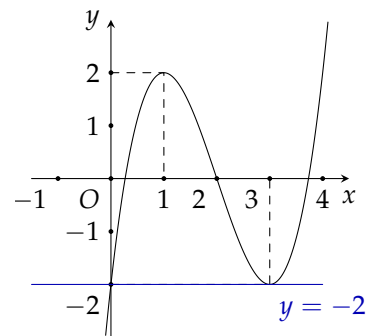
Suy ra $f(x) = f(f(2)) \Leftrightarrow f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = -2$.

Do đó số nghiệm của phương trình $f(x) = f(8a + 4b + 2c + d)$ là số nghiệm của phương trình $f(x) = -2$.

Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = -2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 2 điểm có hoành độ là $x = 0$ và $x = 3$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (B)



Bài 31

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-2	2	-2	2	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để phương trình $f(2 \sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm thực?

(A) 5.

(B) 4.

(C) 3.

(D) 2.

Lời giải.

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $-1 \leq 2 \sin x + 1 \leq 3$.

Từ bảng biến thiên, suy ra $-2 \leq f(2 \sin x + 1) \leq 2$.

Do đó phương trình $f(2 \sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $-2 \leq f(m) \leq 2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $-1 \leq m \leq 3$.

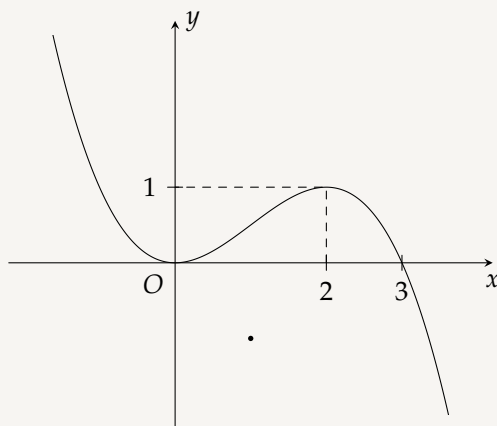
Do đó có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)**



Bài 32

Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5; 5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



(A) 0.

(B) 2.

(C) 5.

(D) 7.

Lời giải.

Vì $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn nên $f'(x)$ là đa thức bậc ba.

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ ta suy ra $f'(x) = kx^2(x - 3)$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua điểm $(2; 1)$ nên $k = -\frac{1}{4}$.

Do đó $f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

Ta lại có $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, suy ra $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases} a = -\frac{1}{16}, & b = \frac{1}{4} \\ c = d = 0 \end{cases}$.

Vậy $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + e$

Với phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$, ta đặt $X = -x^2 + 2x + m$ thì được $f(X) = e$

Tức là, $-\frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{4}X^3 + e = e \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ X = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - m = 0 \\ x^2 - 2x - m + 4 = 0 \end{cases}$

Để thấy rằng mọi nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - m = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - m + 4 = 0$ nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì mỗi phương trình bậc hai trên phải có hai nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với

$\begin{cases} 1 + m > 0 \\ -3 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$

Vậy có hai giá trị nguyên của m trên $[-5; 5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án (B)

Bài 33

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1$ có đúng bảy nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$?

(A) 3.

(B) 5.

(C) 7.

(D) 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 3x - \cos 2x + m \cos x = 1 &\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x - (2 \cos^2 x - 1) + m \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x + (m - 3) \cos x = 0. \end{aligned}$$

Đặt $\cos x = t$ với $t \in [-1; 1]$. Ta có phương trình

$$4t^3 - 2t^2 + (m - 3)t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 4t^2 - 2t + (m - 3) = 0 (*) \end{cases}$$

- ✔ Với $t = 0$ thì $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, có 2 nghiệm là $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$ thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.
- ✔ Với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình $\cos x = t$ có 3 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.
- ✔ Với mỗi giá trị $t \in (-1; 0]$ thì phương trình $\cos x = t$ có 2 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.
- ✔ Với $t = -1$ thì phương trình $\cos x = t$ có 1 nghiệm của thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Để pt có đúng 7 nghiệm thỏa mãn thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm $t_1; t_2$ thỏa mãn điều kiện $-1 < t_1 < 0 < t_2 < 1$.

Ta có (*) $\Leftrightarrow m = -4t^2 + 2t + 3$.

Bảng biến thiên hàm số $y = -4t^2 + 2t + 3$

x	-1	0	$\frac{1}{4}$	1
y'		+	0	-
y	-3	3	$\frac{13}{4}$	1

Từ bảng biến thiên trên ta có $m \in (1; 3)$.

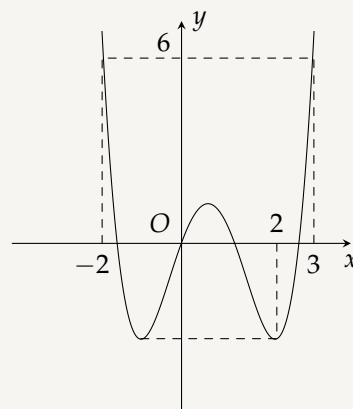
Vậy $m = \{2\}$.

Chọn đáp án (D)

Bài 34

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

- (A) 3. (B) 2. (C) 6. (D) 7.



Lời giải.

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x, x \in [-1; 2]$.

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$.

x	-1	1	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	2	-2	2

Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

$t \in (-2; 2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0, m = -1$.

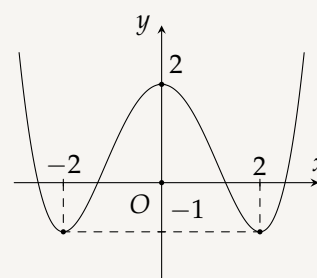
Chọn đáp án (B)

□

Bài 35

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(f(x))$ là

- (A) 10. (B) 9. (C) 7. (D) 8.



Lời giải.

Đặt $g(x) = f(f(x))$, suy ra

$$g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = \pm 2. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau

- ✔ $f(x) = 0$ có 4 nghiệm đôi một khác nhau a, b, c và d .
- ✔ $f(x) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = m, x = n$.
- ✔ $f(x) = -2$ vô nghiệm.

Phương trình $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn đôi một khác nhau và có 1 nghiệm $x = 0$ bội 2.

Vậy hàm số $y = f(f(x))$ có 8 điểm cực trị.

Chọn đáp án **(D)**

□

—HẾT—

§7. SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Phương pháp đại số

Định nghĩa 7.1. Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta thực hiện các bước:

- ① Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$. Tìm các nghiệm $x_0 \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- ② Với x_0 vừa tìm, thay vào 1 trong 2 hàm số ban đầu để tìm y_0 .
- ③ Kết luận giao điểm $(x_0; y_0)$.

2. Phương pháp đồ thị

Định nghĩa 7.2.

- ① Nếu đề bài cho hình ảnh đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta có thể dùng hình vẽ để xác định tọa độ giao điểm giữa chúng.
- ② Số nghiệm phương trình $f(x) = m$ chính bằng số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).

B CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 Biện luận giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số bậc ba

Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y = kx + n$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + n \quad (1)$$

Ta có hai trường hợp xảy ra:

☑ Trường hợp 1: Phương trình (1) có “nghiệm đẹp” x_0 . Khi đó, ta phân tích (1) về dạng

$$(1) \Leftrightarrow (x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Các bài toán thường gặp:

① (C) và d có đúng ba điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$$

② (C) và d có đúng hai điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) có đúng 1 nghiệm khác x_0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{B}{2A} \neq x_0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$



- ③ (C) và d có đúng một điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm duy nhất và nghiệm đó bằng x_0 .

$$\Leftrightarrow \Delta < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{B}{2A} = x_0 \end{cases}$$

☑ Trường hợp 2: Phương trình (1) không có “nghiệm đẹp”. Khi đó ta tiến hành các bước:

- ① Cô lập tham số m , chuyển phương trình (1) về dạng $f(x) = m$. Số nghiệm phương trình này chính bằng hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$ (nằm ngang).
- ② Lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ trên miền đề bài yêu cầu.
- ③ Tịnh tiến đường thẳng $y = m$ theo phương song song với Ox , nhìn giao điểm suy ra kết quả.

Ví dụ 1

Đường thẳng $y = -3x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 1$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Chọn câu trả lời **sai** trong các câu trả lời sau đây.

Ⓐ $x_0^3 - 2x_0^2 - 1 - y_0 = 0$.

Ⓑ $y_0 + 3x_0 - 1 = 0$.

Ⓒ $x_0 + y_0 + 2 = 0$.

Ⓓ $x_0^3 - 2 = 2x_0^3 - 3x_0$.

💬 Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng và đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = x^3 - 2x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓒ



Ví dụ 2

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$ và trục hoành là

Ⓐ 0.

Ⓑ 1.

Ⓒ 2.

Ⓓ 3.

💬 Lời giải.

Phương trình $y = 0$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$.

Chọn đáp án Ⓒ



Ví dụ 3

Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x - 1$ tại hai điểm. Tìm tổng tung độ các giao điểm đó.

Ⓐ -3.

Ⓑ 2.

Ⓒ 0.

Ⓓ -1.

💬 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = -1. \end{cases}$$

Tổng tung độ các giao điểm là $0 + (-1) = -1$.

Chọn đáp án **(D)**

Ví dụ 4

Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

- (A)** $AB = 3$. **(B)** $AB = 2\sqrt{2}$. **(C)** $AB = 2$. **(D)** $AB = 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

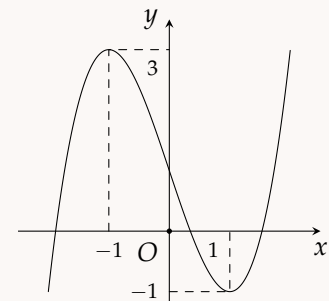
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A(1; -1), B(2; -1)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = (1; 0) \Rightarrow AB = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

Ví dụ 5

Đồ thị sau đây là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt?

- (A)** $-2 < m < 2$. **(B)** $-1 < m < 3$.
(C) $-2 \leq m < 2$. **(D)** $-2 < m < 3$.



Lời giải.

Ta có $x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = m + 1$.

Phương trình có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án **(A)**

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

- (A)** $-1 < m < 2$. **(B)** $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}$. **(C)** $\begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **(D)** $-2 < m < -1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi phương trình

$$(x-2)(x^2+mx+m^2-3)=0$$

có 3 nghiệm phân biệt hay phương trình $x^2+mx+m^2-3=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3m^2 + 12 > 0 \\ m^2 + 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C). Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3; 20)$ và có hệ số góc là m . Với giá trị nào của m thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt?

- (A) $\begin{cases} m < \frac{15}{4} \\ m \neq 4 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} m > \frac{1}{5} \\ m \neq 1 \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng $d: y = m(x-3) + 20$ hay $d: y = mx - 3m + 20$.

Hoành độ giao điểm của d và (C) là nghiệm phương trình

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= mx - 3m + 20 \\ \Leftrightarrow x^3 - (3+m)x + 3m - 18 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 6 - m) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + 3x + 6 - m \end{cases} &(1) \end{aligned}$$

$$\text{Đường thẳng } d \text{ cắt (C) tại ba điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m - 15 > 0 \\ 3^2 + 3 \cdot 3 + 6 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 8

Biết có hai số m_1, m_2 là hai giá trị của tham số m sao cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$. Tính $m_1 + m_2$.

- (A) 0. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)[x^2 + (1-3m)x - 3m - 2] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 + (1-3m)x - 3m - 2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

$$\begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 6m + 9 > 0 \\ -6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 1 \\ x_1 x_2 = -3m - 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 15 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 14 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 14 &= 0 \\ \Rightarrow (3m - 1)^2 - 2(-3m - 2) - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9m^2 - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m_1 + m_2 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 9

Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m$ (C_m). Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$\begin{aligned} x^3 + mx^2 - x - m &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + m)(x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x = \pm 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Từ đó có ba trường hợp:

- Trường hợp 1. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-m, -1, 1$.
Khi đó $m = 3$.
- Trường hợp 2. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-1, -m, 1$.
Khi đó $m = 0$.
- Trường hợp 3. Thứ tự các số hạng của cấp số cộng là $-m, 1, -1$.
Khi đó $m = -3$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 10

Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $\Delta: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B và C sao cho diện tích tam giác MBC bằng 4, với $M(1; 3)$.

A $m = 2$ hoặc $m = 3$.

B $m = -2$ hoặc $m = 3$.

C $m = 3$.

D $m = -2$ hoặc $m = -3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + 2mx^2 + (m + 3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m + 2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases}$$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2, m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$.

Gọi hoành độ giao điểm của B, C là b, c . Ta có $B(b; b + 4)$, $C(c; c + 4)$ và $c + b = -2m$, $bc = m + 2$.

$$BC = \sqrt{(c - b)^2 + (c + 4 - b - 4)^2} = \sqrt{2[(c + b)^2 - 4bc]} = 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)}.$$

Đường thẳng $\Delta: x - y + 4 = 0$. Khoảng cách $d(M, BC) = d(M, \Delta) = \sqrt{2}$.

Diện tích tam giác MBC bằng 4 nên

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2(m^2 - m - 2)} \cdot \sqrt{2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m - 2} = 2 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -2.$$

$m = -2$ không thỏa mãn điều kiện. Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm

Chọn đáp án **C**

□

Dạng 2

Biện luận giao điểm của đường thẳng và đồ thị của hàm số trùng phương

Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (C) và đường thẳng $y = k$ có đồ thị d .
Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$ax^4 + bx^2 + c = k \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta có phương trình $at^2 + bt + c - k = 0 \quad (2)$.

Các bài toán thường gặp:

① (C) và d có bốn điểm chung $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$$

② (C) và d có ba điểm chung $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm dương và một nghiệm $t = 0$.

③ (C) và d có hai điểm chung $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm kép dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

④ (C) và d có một điểm chung $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t = 0$ và một nghiệm âm.

⑤ (C) và d không có điểm chung $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm.

⚠ Có thể chuyển bài toán về biện luận giao điểm của đồ thị cô định với một đường thẳng nằm ngang.

Ví dụ 1

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ với trục Ox .

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

💬 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm là

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy có hai giao điểm.

Chọn đáp án (B)

□

Ví dụ 2

Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 4.

💬 Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^2 &= -x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^4 - 2x^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & (\text{loại}) \\ x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} & \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

□

Ví dụ 3

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ tại bốn điểm phân biệt.

(A) $m > -1$.

(B) $-1 < m < 1$.

(C) $m < -4$.

(D) $-4 < m < -3$.

💬 Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$. Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3			$+\infty$
		-4			-4		

Suy ra với $-4 < m < -3$ thì hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (D)

□

Ví dụ 4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - m - 1$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

(A) $\begin{cases} m > -1 \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}$

(B) $m > -1$.

(C) $\begin{cases} m \geq -1 \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}$

(D) $m \geq -1$.

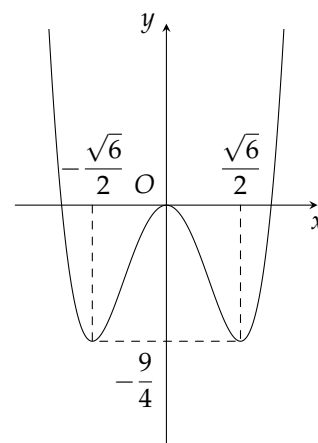
 Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2$, có $f'(x) = 4x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$.

Tính các giá trị $f(0) = 0$; $f\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{9}{4}$, suy ra đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.

Để phương trình $f(x) = m + 1$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ m + 1 = -\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}.$$



Chọn đáp án (A)

□

Ví dụ 5

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt?

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2.

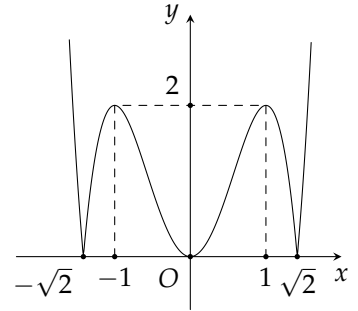
(D) 3.

 Lời giải.

$$y = 2x^2|x^2 - 2| = \begin{cases} 2x^2(x^2 - 2) & \text{khi } \begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \\ x \geq \sqrt{2} \end{cases} \\ -2x^2(x^2 - 2) & \text{khi } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = 2x^2(x^2 - 2)$, từ đó suy ra đồ thị hàm số đã cho như hình.

Do đó, đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = 2x^2|x^2 - 2|$ tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.



Chọn đáp án **(A)**

Ví dụ 6

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m trong khoảng $(-3; 5)$ để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m - 5)x^2 - mx + 4 - 2m$ tiếp xúc với trục hoành?

(A) 2.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\begin{aligned} & x^4 + (m - 5)x^2 - mx + 4 - 2m = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + 1)(x - 2)(x^2 + x + m - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x^2 + x + m - 2 = 0. \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Để đồ thị hàm số $y = x^4 + (m - 5)x^2 - mx + 4 - 2m$ tiếp xúc với trục hoành thì phương trình (1) phải có nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 2$ hoặc có nghiệm kép khác -1 và -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 1 + m - 2 = 0 \\ 4 + 2 + m - 2 = 0 \\ 1 - 4(m - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -4 \text{ (loại)} \\ m = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn đề.

Chọn đáp án **(A)**

Ví dụ 7

Cho hàm số: $y = x^4 - (2m - 1)x^2 + 2m$ có đồ thị (C). Tất cả có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $d: y = 2$ cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt đều có hoành độ bé hơn 3?

(A) 3.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C)

$$x^4 - (2m - 1)x^2 + 2m = 2 \Leftrightarrow x^4 - (2m - 1)x^2 + 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 2m - 2 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra để d cắt (C) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ bé hơn 3 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 0 < 2m - 2 < 9 \\ 2m - 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < \frac{11}{2} \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)** □

Dạng 3

Biện luận giao của đường thẳng và đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, $(ad - bc \neq 0)$ có đồ thị (C) và đường thẳng d có phương trình $y = kx + n$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{ax + b}{cx + d} = kx + n \Leftrightarrow \begin{cases} Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (1) \\ x \neq -\frac{d}{c} = x_0 \end{cases}$$

Các bài toán thường gặp

- ① (C) và d có hai điểm chung $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ Ax_0^2 + Bx_0 + C \neq 0 \end{cases}$
- ② Giả sử hai đồ thị trên cắt nhau tại hai điểm phân biệt $M(x_1; kx_1 + n)$ và $N(x_2; kx_2 + n)$.
Khi đó

$$MN = \sqrt{k^2 + 1} \sqrt{\frac{\Delta}{A^2}}$$

Ví dụ 1 

Đồ thị của hàm số $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B . Khi đó diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

(A) 1.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) 2.

(D) $\frac{1}{2}$.

 **Lời giải.**

Ta có $A(1; 0), B(0; -1)$. Diện tích $S_{\triangle OAB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Ví dụ 2 

Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x - 1}$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm hoành

độ trọng tâm tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

(A) $\frac{2}{3}$.

(B) 2.

(C) $\frac{4}{3}$.

(D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x - 2 = \frac{x}{x - 1}$ (Điều kiện $x \neq 1$).

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 1) = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (1).$$

Khi đó $A(x_1; x_1 - 2)$, $B(x_2; x_2 - 2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}. \text{ Gọi } G(x_G; y_G) \text{ là trọng tâm tam giác } OAB.$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 3

Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x + 4}{x - 1}$. Tìm hoành độ trung điểm của đoạn thẳng MN .

(A) $x = -1$.

(B) $x = 1$.

(C) $x = -2$.

(D) $x = 2$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x + 1 = \frac{2x + 4}{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_M + x_N = 2 \Rightarrow x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x + 1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $d: y = x$ với đồ thị (C). Tính độ dài đoạn AB .

(A) $AB = \sqrt{2}$.

(B) $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(C) $AB = 1$.

(D) $AB = 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2x}{x + 1} = x, (x \neq -1) \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0; 0) \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1; 1) \end{cases}$$

Vậy $AB = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 5

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-14; 15]$ sao cho đường thẳng $y = mx + 3$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt.

- (A) 17. (B) 16. (C) 20. (D) 15.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $mx + 3 = \frac{2x+1}{x-1} \Leftrightarrow mx^2 + x(1-m) - 4 = 0 (*)$.

- Với $m = 0$ thì phương trình (*) có một nghiệm $x = 4$.
- Với $m \neq 0$, xét biệt thức $\Delta = m^2 + 14m + 1$.

Đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt nên

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -7 + 4\sqrt{3} \\ m < -7 - 4\sqrt{3} \end{cases}.$$

Suy ra, có 16 giá trị nguyên của $m \in [-14; 15]$ thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

- (A) $m = 4 \pm \sqrt{3}$. (B) $m = 2 \pm \sqrt{3}$. (C) $m = 4 \pm \sqrt{10}$. (D) $m = 2 \pm \sqrt{10}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+1} &= x + m - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + m-2 &= 0, (x \neq -1) \quad (1) \end{aligned}$$

Để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (-1)^2 + (m-2) \cdot (-1) + m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2. \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó d cắt (C) tại $A(x_1; x_1 + m - 1), B(x_2; x_2 + m - 1)$. Ta có

$$\begin{aligned} AB &= 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 &= 6 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 6 \\ \Leftrightarrow (m-2)^2 - 4(m-2) - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= 4 \pm \sqrt{10} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện } (*)). \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 7

Biết rằng có hai giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = mx + 3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ). Tổng của hai giá trị đó bằng

- (A) 0. (B) 4. (C) 8. (D) 6.

Lời giải.

Với điều kiện $x \neq 1$ ta có phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{2x+1}{x-1} = y = mx + 3 \Rightarrow 2x + 1 = (mx + 3)(x - 1) \Leftrightarrow mx^2 - (m - 1)x - 4 = 0. \quad (*)$$

Rõ ràng $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (*). Như vậy đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ (m - 1)^2 + 16m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 14m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \begin{cases} m < -7 - 4\sqrt{3} \\ m > -7 + 4\sqrt{3} \end{cases} \end{cases} \quad (**)$$

Gọi các giao điểm của d và (C) là $A(x_1; mx_1 + 3)$ và $B(x_2; mx_2 + 3)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*).

Theo giả thiết, tam giác OAB vuông tại O nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + (mx_1 + 3)(mx_2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + m^2x_1x_2 + 3m(x_1 + x_2) + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow (m^2 + 1)x_1x_2 + 3m(x_1 + x_2) + 9 &= 0 \Leftrightarrow \frac{-4(m^2 + 1)}{m} + \frac{3m(m - 1)}{m} + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow -4(m^2 + 1) + 3m(m - 1) + 9m &= 0 \Leftrightarrow -m^2 + 6m - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow m &= 3 \pm \sqrt{5}. \text{ (thỏa mã điều kiện (**))} \end{aligned}$$

Vậy $m = 3 \pm \sqrt{5}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán và tổng của chúng bằng 6.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(-5; 5)$. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho tứ giác $OAMN$ là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

- (A) $m = 3$. (B) $m = 2 + \sqrt{5}$.
(C) $m = 2 + \sqrt{5}, m = 2 - \sqrt{5}$. (D) $m = 2 - \sqrt{5}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = \frac{3x-2}{x+1}$ và $y = -x + m$ là

$$\frac{3x-2}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (4 - m)x - 2 - m = 0 \quad (*).$$

Ta có $\Delta = (4 - m)^2 - 4(-2 - m) = m^2 - 4m + 24 = (m - 2)^2 + 20 > 0$, với mọi m .

Suy ra đồ thị (C) luôn cắt đường thẳng d tại hai điểm phân biệt $M(x_1; -x_1 + m)$ và $N(x_2; -x_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*).

Ta có $OAMN$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{NM} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = -5$ (1).

Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 4 & (2) \\ x_1 x_2 = -2 - m & (3) \end{cases}$ Từ (1) & (2), ta được $x_1 = \frac{m-9}{2}$ và $x_2 = \frac{m+1}{2}$,
thay vào (3), ta được

$$\frac{m-9}{2} \cdot \frac{m+1}{2} = -2 - m \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **C**

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $y = 2$.

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4x - 1 = 0.$$

Sử dụng máy tính ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt. Vậy số giao điểm là 3.

Chọn đáp án (B)



Câu 2

Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^3 - 3$ cắt trục tung tại mấy điểm?

- (A) 1 điểm. (B) 2 điểm. (C) 4 điểm. (D) 3 điểm.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm duy nhất có tọa độ $(0; -3)$.

Chọn đáp án (A)



Câu 3

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- (A) 0. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 4

Tìm số giao điểm n của hai đồ thị $(C_1): y = x^4 - 3x^2 + 2$ và $(C_2): y = x^2 - 2$.

- (A) $n = 1$. (B) $n = 4$. (C) $n = 2$. (D) $n = 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x^4 - 3x^2 + 2 = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm nên số giao điểm là 2.

Chọn đáp án (C)



Câu 5

Đồ thị hàm số $y = \frac{4x+4}{x-1}$ và $y = x^2 - 1$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

- (A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Số giao điểm của hai đồ thị tương ứng với số nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} \frac{4x+4}{x-1} = x^2 - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 4x+4 = (x-1) \cdot (x^2-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (x+1) \cdot [(x-1)^2-4] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x+1=0 \\ (x-1)^2-4=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x+1=0 \\ x-1=2 \\ x-1=-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x = -1$ và $x = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6

Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - x + 2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 - x + 5$ cắt nhau tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

- (A) 0. (B) 4. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị

$$x^3 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 7

Đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

- (A) $y = \frac{4x+1}{x+2}$. (B) $y = \frac{-2x+3}{x+1}$. (C) $y = \frac{3x+4}{x-1}$. (D) $y = \frac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải.

✔ Đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{x+2}$ cắt trục tung tại điểm $(0; \frac{1}{2})$.

✔ Đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+3}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm $(0; 3)$.

✔ Đồ thị hàm số $y = \frac{3x+4}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $(0; -4)$.

✔ Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $(0; 3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8

Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B . Khi đó

- (A) $x_A + x_B = 5$. (B) $x_A + x_B = 2$. (C) $x_A + x_B = 1$. (D) $x_A + x_B = 3$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x - 2 = \frac{2x+1}{x-1}$. (1)

Với $x \neq 1$, phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0$.

Như vậy, $x_A + x_B = 5$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 9

Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = 1$ tại hai điểm phân biệt A và B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

- (A) $AB = 2$. (B) $AB = 3$. (C) $AB = 2\sqrt{2}$. (D) $AB = 1$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ và $y = 1$ là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

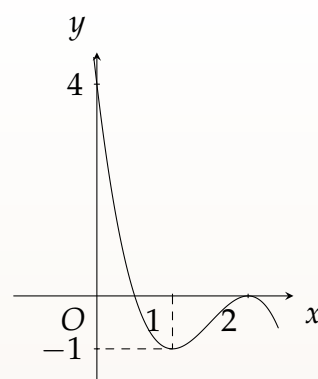
Suy ra tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên là $A(1; 1)$ và $B(2; 1)$. Khi đó $AB = 1$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 10

Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($d \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



Lời giải.

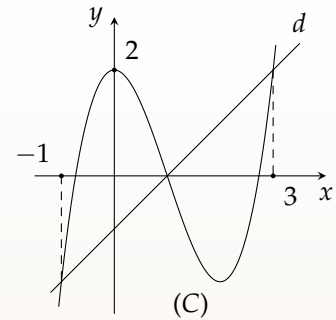
Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại 1 điểm nên phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 11

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của $x_1 x_3$ bằng

- (A) -2 . (B) $-\frac{5}{2}$. (C) $-\frac{7}{3}$. (D) -3 .



Lời giải.

Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Dựa vào đồ thị ta thấy, (C) đi qua các điểm $(1; 0)$, $(-1; -2)$, $(3; 2)$, $(0; 2)$. Suy ra

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + b - c + d = -2 \\ 27a + 9b + 3c + d = 2 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2. \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm là $1 - \sqrt{3}$, 1 , $1 + \sqrt{3}$.

Vậy $x_1 x_3 = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = -2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12

Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = -m$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

- (A) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$. (B) $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$. (C) $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. (D) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^2 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ là

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta suy ra để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt thì $\frac{1}{3} < -m < 1 \Leftrightarrow -1 < m < -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13

Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ cắt trục hoành bốn điểm phân biệt.

- (A) $m > 0$. (B) $0 < m < 1$. (C) $m > 1$. (D) $m < 1$.

Lời giải.

Yêu cầu đề bài tương đương với đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2$ tại bốn điểm phân biệt. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên, ta suy ra $-1 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 14

Có bao nhiêu số m nguyên âm để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1 - m)x + m + 1$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 + (1 - m)x + m + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 1 = 0 \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{f(x)} > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$. Vậy có một giá trị m thỏa bài toán.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 15

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt.

- (A) $m \in (2; +\infty)$. (B) $m \in (-2; 2)$. (C) $m \in \mathbb{R}$. (D) $m \in (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							
	$-\infty$			2			$+\infty$

Để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + m$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm phân biệt thì đường thẳng $y = -m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại đúng ba điểm phân biệt.

Từ bảng biến thiên ta suy ra $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (3m - 1)x + 6m$ có đồ thị là (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20$. Tính tổng các phần tử của tập S.

(A) $\frac{4}{3}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{5}{3}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

 **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là

$$x^3 - 3mx^2 + (3m - 1)x + 6m = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - (3m + 1)x + 6m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 = x_3 \\ g(x) = x^2 - (3m + 1)x + 6m = 0(*) \end{cases}$$

Điều kiện để (C) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 là (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 18m + 1 > 0 \\ 9m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3} \\ m > \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} \\ m \neq -\frac{2}{9} \end{cases}$$

Khi đó

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = 20 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 19$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 19 = 0 \Leftrightarrow (3m + 1)^2 - 18m - 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 12m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{22}}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 17

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - 7$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

(A) $\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2} \end{cases}$

(B) $m = \frac{-1 + \sqrt{15}}{2}$

(C) $m = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2}$

(D) $m = 1$

Lời giải.

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt lập thành một cấp số cộng thì điểm đối xứng của đồ thị nằm trên trục hoành.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 9 \Rightarrow y'' = 6x - 6m \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x_0 = m \Rightarrow y_0 = -2m^3 + 9m - 7$
 $\Rightarrow y_0 = 0$, (Vì điểm đối xứng nằm trên trục Ox nên tung độ bằng 0)

$$\Rightarrow -2m^3 + 9m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 18

Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx$ cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt và cách đều nhau là

(A) 2.

(B) 1.

(C) -2.

(D) 0.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm cách đều nhau thì phương trình $y = 0$ có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

$$\text{Ta có } x^3 - 3x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x - m = 0 (*) \end{cases}$$

Do tổng 2 nghiệm của phương trình (*) bằng 3 nên để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng thì phương trình (*) phải có hai nghiệm thỏa mãn $x_2 = 2x_1$.

Từ đó ta suy ra được $x_1 = 1, x_2 = 2$. Thay vào phương trình (*) ta được $m = -2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 19

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

(A) $-2 \leq m \leq \frac{-3}{2}$

(B) $\frac{-3}{2} < m < 2$

(C) $-2 < m < \frac{-3}{2}$

(D) $3 < m < 4$

Lời giải.

Ta có $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow 2m + 3 = x^4 - 2x^2$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ và đường thẳng $y = 2m + 3$.

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của hai đồ thị.

$$\text{Xét hàm số } y = x^4 - 2x^2 \text{ có } y' = 4x^3 - 4x. \text{ Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			0			$+\infty$
		$\swarrow$		$\searrow$		$\swarrow$	
		-1		-1			

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để có bốn giao điểm thì

$$-1 < 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow -4 < 2m < -3 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 20

Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - m = 0$ có bốn nghiệm thực.

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) Không có giá trị m .

 **Lời giải.**

Ta có $x^4 - 2x^2 + 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = x^4 - 2x^2 + 3$.

Xét $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				3			$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 2 2

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 < m < 3$. Mặt khác m nguyên nên không có giá trị m thỏa mãn bài.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 21

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2 - 3|$ và đường thẳng $y = 2$.

(A) 8.

(B) 2.

(C) 6.

(D) 4.

 **Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2|x^2 - 3| = 2$ (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 3 \\ x^2(x^2 - 3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}} \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 < 3 \\ x^2(3 - x^2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2|x^2 - 3|$ và đường thẳng $y = 2$ chính là số nghiệm của phương trình (1).
Do đó số giao điểm là 6.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 22

Có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{5x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt mà hai giao điểm đó có hoành độ và tung độ là các số nguyên?

(A) 15.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 6.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{5x-3}{x-1} = 5 + \frac{2}{x-1}$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên để $y \in \mathbb{Z}$ thì $x-1 \in \{\pm 1; \pm 2\}$. Từ đó ta tìm được 4 điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số. Do đó số đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên là $C_4^2 = 6$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 23

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi

(A) $m > -2$.

(B) $m > 6$.

(C) $\begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases}$.

(D) $m < -2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\frac{x-3}{x+1} = x + m$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (x+1)(x+m) = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x^2 + mx + m + 3 = 0. \end{cases}$

Vậy (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} (-1)^2 + m \cdot (-1) + m + 3 \neq 0 \\ \Delta = m^2 - 4m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 6. \end{cases}$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 24

Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($b < 0, a \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai giao điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Tính giá trị của biểu thức $T = 2(ab - c) + 3$.

(A) $T = 5$.

(B) $T = 2$.

(C) $T = 3$.

(D) $T = 1$.

Lời giải.

Do đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt trong đó có hai giao điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ nên phương trình $y = 0$ có 3 nghiệm phân biệt là m và $\pm n$ ($n \neq 0, m \neq \pm n$). Khi đó hàm số y có thể viết dưới dạng

$$y = (x-m)(x-n)(x+n) = (x-m)(x^2 - n^2) = x^3 - mx^2 - n^2x + mn^2.$$

Mà $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ nên đồng nhất hệ số ta có
$$\begin{cases} a = -m \\ b = -n^2 < 0 \\ c = mn^2. \end{cases}$$

Vậy $T = 2(ab - c) + 3 = 2(mn^2 - mn^2) + 3 = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25

Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = ax + 2b - 4$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. Tính $a + b$.

- (A) $T = 2$. (B) $T = \frac{5}{2}$. (C) $T = 4$. (D) $T = \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Vì A và B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O nên O là trung điểm của AB và do đó $O \in d$.
Thay tọa độ điểm O vào phương trình đường thẳng d ta có $0 = a \cdot 0 + 2b - 4 \Leftrightarrow b = 2$.
Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$\frac{3x+2}{x+2} = ax \Leftrightarrow 3x+2 = ax^2 + 2ax \Leftrightarrow ax^2 + (2a-3)x - 2 = 0.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình trên.

Vì A và B đối xứng nhau qua O nên $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2a-3}{a} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Vậy $a + b = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26

Đường thẳng d đi qua $A(2; 1)$ với hệ số góc k cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-8}{x-4}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

- (A) $k > 0$. (B) $-1 < k < 1$. (C) $k < 1$ hoặc $k > 3$. (D) $k < 0$ hoặc $k > 4$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua $A(2; 1)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x - 2) + 1$.
Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\begin{aligned} \frac{x-8}{x-4} &= k(x-2) + 1 \quad (x \neq 4) \\ \Leftrightarrow (k(x-2) + 1)(x-4) &= x-8 \quad (\text{Nhận xét: } x=4 \text{ không là nghiệm của phương trình này}). \\ \Leftrightarrow kx^2 - 6kx + 8k + 4 &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 4k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 27

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y =$

$x + m - 1$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

- (A) $m = 4 \pm \sqrt{3}$. (B) $m = 4 \pm \sqrt{10}$. (C) $m = 2 \pm \sqrt{10}$. (D) $m = 2 \pm \sqrt{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$\frac{2x+1}{x+1} = x+m-1 \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + m-2 = 0, x \neq -1, \quad (1.1)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1 , nghĩa là

$$\begin{cases} (-1)^2 + (m-2) \cdot (-1) + m-2 \neq 0 \\ (m-2)^2 - 4(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (m-2)(m-6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Khi đó giao điểm của d và (C) là $A(x_1; x_1 + m - 1)$, $B(x_2; x_2 + m - 1)$, với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1).

Ta có

$$AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 2m^2 - 16m + 24.$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$AB^2 = (2\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 16m + 24 = 12 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \pm \sqrt{10}.$$

Hai giá trị trên của m đều thỏa mãn (2).

Chọn đáp án (B) □

Câu 28

Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho đoạn AB ngắn nhất.

- (A) $m = 0$. (B) $m = -1$. (C) $m = -2$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+1}{x-1} = 2x+m$ (1).

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x+1 = (x-1)(2x+m) \Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - (m+1) = 0$ (2).

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -2 \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (m-3)^2 + 8(m+1) > 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 + 2m + 17 > 0 \\ &\Leftrightarrow (m+1)^2 + 16 > 0 \text{ (luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Khi đó (2) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3-m}{2} \\ x_1x_2 = -\frac{m+1}{2} \end{cases}$.

Tọa độ $A(x_1; 2x_1 + m)$, $B(x_2; 2x_2 + m) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; 2x_2 - 2x_1)$

$$AB^2 = 5(x_2 - x_1)^2 = 5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2$$

$$AB^2 = 5\left(\frac{3-m}{2}\right)^2 - 20 \cdot \left(-\frac{m+1}{2}\right)$$

$$AB^2 = \frac{5m^2 + 10m + 85}{4}$$

$$AB^2 = \frac{5(m+1)^2 + 80}{4} \geq 20.$$

Suy ra AB nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $m = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 29

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = mx - m - 1$ cắt đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại 3 điểm A, B, C phân biệt (B thuộc đoạn AC), sao cho tam giác AOC cân tại O (với O là gốc tọa độ).

(A) $m = -1$.

(B) $m = 1$.

(C) $m = 2$.

(D) $m = -2$.

 **Lời giải.**

Ta có

$$x^3 - 3x^2 + 1 = mx - m - 1 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 - m = 0(*) \end{cases}$$

Đường thẳng (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$(*) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = m + 3$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi $m > -3$.

Khi đó $(*)$ có hai nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{m+3}$, $x_2 = 1 + \sqrt{m+3}$ thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Không mất tính tổng quát, ta gọi $A(1 - \sqrt{m+3}; -m\sqrt{m+3} - 1)$, $C(1 + \sqrt{m+3}; m\sqrt{m+3} - 1)$, $B(1; -1)$.

Tam giác AOC cân tại $O \Leftrightarrow OA = OC \Leftrightarrow OA^2 = OC^2$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{m+3})^2 + (-m\sqrt{m+3} - 1)^2 = (1 + \sqrt{m+3})^2 + (m\sqrt{m+3} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{m+3} - 4m\sqrt{m+3} = 0 \Leftrightarrow 4(m-1)\sqrt{m+3} = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Với $m = 1$ thỏa mãn điều kiện tồn tại các điểm A, B, C và khi đó $(d): y = x - 2$ không đi qua gốc tọa độ O nên $\triangle AOC$ là tam giác cân.

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + c > b + 1 \\ a + b + c + 1 < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox .

(A) 2.

(B) 3.

(C) 0.

(D) 1.

 **Lời giải.**

Đặt $y = x^3 + ax^2 + bx + c = f(x)$.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} a + c > b + 1 \\ a + b + c + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(1) < 0. \end{cases}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c) = -\infty ; \exists \alpha \in (-\infty; -1)$ sao cho $f(\alpha) < 0$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c) = +\infty ; \exists \beta \in (1; +\infty)$ sao cho $f(\beta) > 0$.

Do đó: $f(\alpha) \cdot f(-1) < 0 ; f(1) \cdot f(-1) < 0 ; f(\beta) \cdot f(1) < 0$.

Vì $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên

$\exists x_1 \in (\alpha; -1)$ sao cho $f(x_1) = 0$.

$\exists x_2 \in (-1; 1)$ sao cho $f(x_2) = 0$.

$\exists x_3 \in (1; \beta)$ sao cho $f(x_3) = 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm.

Mặt khác $y = f(x)$ là hàm số bậc ba nên $f(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Chọn đáp án **(B)**

□

—HẾT—

§8. TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

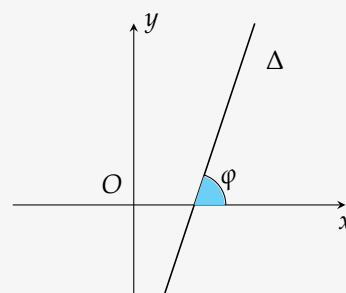
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Phương pháp 8.1. ☒ Đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k có phương trình là $y = k(x - x_0) + y_0$.

! ① $k = \tan \varphi$, với φ là góc hợp bởi đường thẳng Δ với chiều dương của trục Ox và $\varphi \neq 90^\circ$.

② Cho hai đường thẳng $\Delta_1: y = k_1x + m_1$ và $\Delta_2: y = k_2x + m_2$.

- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$ và $m_1 \neq m_2$.
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

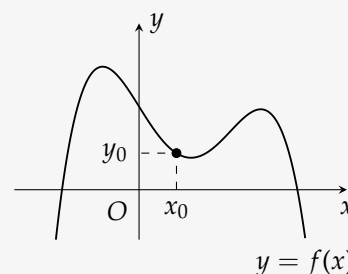


☒ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$:

① Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ có phương trình là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (lúc này $k = f'(x_0)$).

Trong đó

- x_0 gọi là hoành độ tiếp điểm;
- y_0 là tung độ tiếp điểm, với $y_0 = f(x_0)$;
- $f'(x_0)$ gọi là hệ số góc của tiếp tuyến.



B CÁC VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(x_0; y_0)$ cho trước

- Tính $f'(x)$. Từ đây tính $f'(x_0)$ hoặc bấm máy $\left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=x_0}$.
- Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, thu gọn kết quả về dạng $y = Ax + B$.

! Trong nhiều trường hợp, đề bài chưa cho đầy đủ $(x_0; y_0)$, ta thường gặp các loại sau:

- ① Cho biết trước x_0 hoặc y_0 . Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số $y = f(x)$, sẽ tính được đại lượng còn lại.
- ② Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm x_0 .

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 4$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(1; 1)$.

- (A) $y = -x + 2$. (B) $y = -2x + 3$. (C) $y = -3x + 4$. (D) $y = -4x + 5$.

Lời giải.

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x$, $y'(1) = -4$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 1)$ là: $y = y'(1)(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = -4x + 5$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 2

Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{3}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có hệ số góc là

- (A) $-\frac{2}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) 2. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -\frac{6}{(2x-1)^2}$ nên $f'(2) = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - 3x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

- (A) $y = 3x - 8$. (B) $y = 3x - 10$. (C) $y = -3x + 10$. (D) $y = -3x - 8$.

Lời giải.

Ta có $x_0 = 3$, nên $y_0 = 1$. Mà $y' = 2x - 3$ nên $y'(3) = 3$. Phương trình tiếp tuyến $y = 3x - 8$.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 4

Tìm hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$.

- (A) $\frac{9}{5}$. (B) $-\frac{5}{9}$. (C) $\frac{5}{9}$. (D) -10.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{5}{(x-2)^2}$. Gọi $M(x_0; -\frac{7}{3})$ là tiếp điểm, ta có

$$\begin{aligned} \frac{3-4x_0}{x_0-2} &= -\frac{7}{3} \Leftrightarrow 5x_0 = -5 \\ &\Leftrightarrow x_0 = -1. \end{aligned}$$

Vậy hệ số góc tiếp tuyến tại $M\left(x_0; -\frac{7}{3}\right)$ là $k = y'(-1) = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 5

Tiếp tuyến của đường cong (C): $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại điểm $M(2; 5)$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B . Tính diện tích tam giác OAB .

(A) $\frac{121}{6}$.

(B) $-\frac{121}{6}$.

(C) $\frac{121}{3}$.

(D) $-\frac{121}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $k = y'(2) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y = -3x + 11$.

Tiếp tuyến cắt các trục tọa độ tại $A\left(\frac{11}{3}; 0\right), B(0; 11)$, do đó diện tích tam giác OAB là

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{3} \cdot 11 = \frac{121}{6}.$$

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 6

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là

(A) $y = 9x + 9$.

(B) $y = -9x + 9$ và $y = 0$.

(C) $y = 9x - 9$ và $y = 0$.

(D) $y = -9x - 9$.

Lời giải.

Gọi phương trình tiếp tuyến có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là: $\begin{cases} y = 0 \\ y = -x^3 - 3x^2 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

✓ $x = 1; y = 0; f'(1) = -9 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -9(x - 1) \Leftrightarrow y = -9x + 9$.

✓ $x = -2; y = 0; f'(-2) = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = -2x + m - 1$ (m là tham số thực). Gọi k_1, k_2 là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của (d) và (C). Khi đó $k_1 \cdot k_2$ bằng

(A) 3.

(B) 4.

(C) $\frac{1}{4}$.

(D) 2.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x+1}{x+2} = -2x + m - 1, (x \neq -2) \Leftrightarrow 2x^2 + (6-m)x - 2m + 3 = 0$.

(1)

Ta thấy $\Delta = (m-6)^2 - 8(-2m+3) = (m+2)^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do vậy, phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-2m+3}{2} \end{cases}$$

Ta có

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{(x_1+2)^2 \cdot (x_2+2)^2} = \frac{1}{[x_1 \cdot x_2 + 2(x_1+x_2) + 4]^2} = \frac{1}{\left[\frac{-2m+3}{2} + 2 \cdot \frac{m-6}{2} + 4\right]^2} = 4.$$

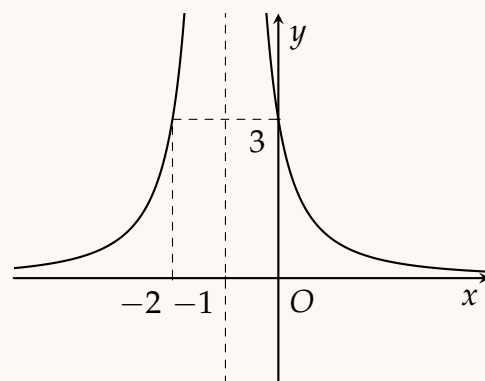
Chọn đáp án **(B)**



Ví dụ 8

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, (a, b, c, d \in \mathbb{R}; c \neq 0, d \neq 0)$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Biết (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

- (A)** $x - 3y + 2 = 0.$ **(B)** $x + 3y - 2 = 0.$
(C) $x + 3y + 2 = 0.$ **(D)** $x - 3y - 2 = 0.$



Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$. Khi đó $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

Do (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 nên $-\frac{b}{d} = -2 \Leftrightarrow b = -2d$ (1).

Do đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có tiệm cận đứng $x = -1$ nên $-\frac{d}{c} = -1 \Leftrightarrow d = c$ (2).

Do đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt trục Oy tại điểm $(0; 3)$ nên $\frac{ad-bc}{d^2} = 3$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có $ad + 2d^2 = 3d^2 \Leftrightarrow d(a-d) = 0 \Leftrightarrow a-d = 0 \Leftrightarrow a = d$.

Khi đó $y = \frac{dx-2d}{dx+d} = \frac{x-2}{x+1}$. Nên $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó $x_0 = 2, y_0 = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(2; 0)$ là

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \frac{1}{3}(x - 2) + 0 \Leftrightarrow 3y = x - 2 \Leftrightarrow x - 3y - 2 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**





Dạng 2 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng k_0

- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = k_0$, tìm nghiệm x_0 .
- Thay x_0 vào $y = f(x)$, tìm y_0 .
- Viết phương trình tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ theo công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

! Trong nhiều trường hợp, ta gặp các dạng sau:

- ① Biết tiếp tuyến song song với $\Delta: y = ax + b$. Khi đó $k_0 = a$ hay $f'(x_0) = a$.
- ② Biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta: y = ax + b$. Khi đó $k_0 \cdot a = -1$ hay $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$.
- ③ Biết tiếp tuyến tạo với Ox một góc φ thì $k_0 = \pm \tan \varphi$.
- ④ Biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B thỏa $OA = m \cdot OB$ thì $k_0 = \pm \frac{OB}{OA}$.
- ⑤ Biết tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất (hoặc lớn nhất) thì $k_0 = \min f'(x)$ (hoặc $\max f'(x)$).
Đối với hàm bậc ba thì $k_{\max}$ hoặc $k_{\min}$ đạt được tại x_0 thỏa $f''(x) = 0$.

Ví dụ 1

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 6$.

- A** $y = 6x + 6$. **B** $y = -6x + 1$. **C** $y = -6x + 10$. **D** $y = 6x + 10$.

Lời giải.

Ta có $y' = -4x^3 - 2x$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó

$$k = 6 \Leftrightarrow y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = 6 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Vậy $M(-1; 4)$. Phương trình tiếp tuyến là

$$\Delta: y = 6(x + 1) + 4 \Leftrightarrow \Delta: y = 6x + 10.$$

Chọn đáp án **D**



Ví dụ 2

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 5$ có hệ số góc lớn nhất là

- A** $y = 12x + 18$. **B** $y = 9x - 9$. **C** $y = 12x + 6$. **D** $y = 4x + 4$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2 + 2x + 1) + 12 = -3(x + 1)^2 + 12 \leq 12$.

Hệ số góc lớn nhất là 12 khi $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -6$.

Vậy phương trình tiếp tuyến: $y = 12(x + 1) - 6 \Leftrightarrow y = 12x + 6$.

Chọn đáp án **C**





Ví dụ 3

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất là

- (A) $y = -x + \frac{17}{3}$. (B) $y = -x + \frac{23}{3}$. (C) $y = 5$. (D) $y = \frac{19}{3}$.

Lời giải.

- $y' = x^2 - 4x + 3$ nên min $y' = y'(2) = -1$.
- $\Delta: y = y'(2)(x - 2) + y(2) \Rightarrow \Delta: y = -x + \frac{23}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x - 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) là

- (A) $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - 22$. (B) $y = -2x - 10; y = -2x - \frac{22}{3}$.
(C) $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x + \frac{22}{3}$. (D) $y = -2x + \frac{10}{3}; y = -2x - \frac{22}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 - 6x + 3$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + y(x_0)$ (Δ). Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $y = -2x - 1$ suy ra $y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow x_0^2 - 6x_0 + 3 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 5 \end{cases}$.

Với $x_0 = 1, \Delta: y = -2(x - 1) + \frac{4}{3} = -2x + \frac{10}{3}$.

Với $x_0 = 5, \Delta: y = -2(x - 5) - \frac{52}{3} = -2x - \frac{22}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 5

Cho $(C_m): y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3m+4}{2}x^2 + 3m + 3$. Gọi $A \in (C_m)$ có hoành độ 1. Tìm m để tiếp tuyến tại A song song với đường thẳng $d: y = 6x + 2017$?

- (A) $m = -3$. (B) $m = 3$. (C) $m = 5$. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^3 - (3m+4)x \Rightarrow y'(1) = -3m - 3$.

Gọi Δ là tiếp tuyến tại A của $(C_m) \Rightarrow$ hệ số góc của Δ là $y'(1) = -3m - 3$.

Vì $\Delta \parallel d$ nên $y'(1) = 6 \Leftrightarrow -3m - 3 = 6 \Leftrightarrow m = -3$.

Thử lại với $m = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 6, A\left(1; -\frac{13}{4}\right)$.

Tiếp tuyến $\Delta: y = y'(1)(x - 1) - \frac{13}{4} \Rightarrow \Delta: y = 6(x - 1) - \frac{13}{4}$

$$\Rightarrow \Delta: y = 6x - \frac{37}{4} \text{ (thỏa mãn } \Delta // d).$$

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 6

Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

- (A) $M(-2; -4)$. (B) $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. (C) $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. (D) $M(-2; 0)$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = x^2 - 1$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là hoành độ tiếp điểm. Do tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$$\text{nên ta có } y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Do $x_0 < 0$ nên $x_0 = -2 \Rightarrow M(-2; 0)$.

Chọn đáp án (D) □

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là

- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

 **Lời giải.**

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị (C) thỏa mãn bài toán.

Từ giả thiết suy ra

$$y'(x_0) \cdot \frac{1}{9} = -1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3. \end{cases}$$

- Khi $x_0 = -1$ suy ra $y_0 = 1$ nên phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -9x - 8$.

- Khi $x_0 = 3$ suy ra $y_0 = -3$ nên phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -9x + 24$.

Vậy số lượng tiếp tuyến thỏa mãn bài toán là 2.

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 8

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 4.

Lời giải.

- $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.
- Do $OA = 4OB$ nên suy ra $k = f'(x_0) = \pm \frac{OB}{OA} = \pm \frac{1}{4}$.
- Với $f'(x_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = \frac{1}{4}$ (vô nghiệm).
Với $f'(x_0) = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4}$ (có hai nghiệm phân biệt).
- Vậy, có hai tiếp tuyến thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án **(A)**



Dạng 3 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

- Gọi $d: y = k(x - x_A) + y_A$ (1) là đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k .
- d là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}$ (2) có nghiệm x .
- Giải hệ (2), tìm x và k .
- Thay k vào (1), ta được kết quả.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ có đồ thị (C). Qua điểm $M(-2; 5)$ kẻ được tất cả bao nhiêu tiếp tuyến đến (C)?

- (A)** 0. **(B)** 1. **(C)** 2. **(D)** 3.

Lời giải.

Tiếp tuyến (Δ) tại $M(x_0; x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2)$ của (C) có dạng

$$y = (3x_0^2 - 18x_0 + 17)(x - x_0) + x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2.$$

Vì (Δ) qua $M(-2; 5)$ nên ta có

$$\begin{aligned} 5 &= (3x_0^2 - 18x_0 + 17)(-2 - x_0) + x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2 \\ \Leftrightarrow 2x_0^3 - 3x_0^2 - 36x_0 + 37 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - 3\sqrt{33}}{4} \\ x = 1 \\ x = \frac{1 + 3\sqrt{33}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy qua $M(-2; 5)$ kẻ được 3 tiếp tuyến đến (C).

Chọn đáp án **(D)**



Ví dụ 2

Cho đường cong (C): $y = x^4 - 4x^2 + 2$ và điểm $A(0; a)$. Nếu qua A kẻ được 4 tiếp tuyến với (C) thì a phải thỏa mãn điều kiện

(A) $a \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$.

(B) $a \in (2; +\infty)$.

(C) $a \in (-\infty; 2) \cup \left(\frac{10}{3}; +\infty\right)$.

(D) $a \in \left(-\infty; \frac{10}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$. Gọi tọa độ tiếp điểm là $M_0(x_0; x_0^4 - 4x_0^2 + 2) \Rightarrow y'(x_0) = 4x_0^3 - 8x_0$. Do đó, phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 là

$$y = (4x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 2.$$

Vì tiếp tuyến đi qua điểm $A(0; a)$ nên ta có

$$a = (4x_0^3 - 8x_0)(0 - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 2 \Leftrightarrow a = -3x_0^4 + 4x_0^2 + 2. \quad (*)$$

Xét $f(t) = -3t^4 + 4t^2 + 2$, có $f'(t) = -12t^3 + 8t$. Do đó, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-	0	-
$f(t)$	$-\infty$	$\frac{10}{3}$	2	$\frac{10}{3}$	$-\infty$

Để qua $A(0; a)$ kẻ được 4 tiếp tuyến đến (C) thì phương trình (*) phải có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow a \in \left(2; \frac{10}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Ví dụ 3

Đường thẳng $x + y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi m bằng

(A) -3 hoặc 1.

(B) 1 hoặc 3.

(C) -1 hoặc 3.

(D) -3 hoặc -1.

Lời giải.

$x + y = 2m \Leftrightarrow y = -x + 2m$ (d). Đường thẳng d tiếp xúc với đường cong $y = -x^3 + 2x + 4$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -3x^2 + 2 = -1 \\ -x^3 + 2x + 4 = -x + 2m \end{cases}$$

Suy ra $m = 1$ hoặc $m = 3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để từ A kẻ được hai tiếp tuyến AM, AN đến (C) với M, N là các tiếp điểm và $MN = 4$. Tổng các phần tử của S bằng bao nhiêu?

(A) 4.

(B) 3.

(C) 6.

(D) 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $A(0; a)$ và có hệ số góc k, ta có $d: y = kx + a$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi chỉ khi hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2x}{x+1} = kx + a & (1) \\ \frac{2}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thế (2) vào (1), ta có $\frac{2x}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2} + a \Leftrightarrow (a-2)x^2 + 2ax + a = 0$ (*)

Yêu cầu bài toán thỏa khi chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt (lưu ý phương trình không thể nhận $x = -1$ làm nghiệm) $\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a > 0. \end{cases}$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (*), suy ra $M(x_1; 2 - \frac{2}{x_1+1})$, $N(x_2; 2 - \frac{2}{x_2+1})$.

Ta có

$$\begin{aligned} MN^2 &= (x_2 - x_1)^2 + 4 \frac{(x_1 - x_2)^2}{[x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1]^2} \\ &= \left[\frac{8a}{(a-2)^2} \right] [1 + (a-2)^2] \\ &= \frac{8(a^3 - 4a^2 + 5a)}{a^2 - 4a + 4}. \end{aligned}$$

Trong đó

$$\textcircled{v} (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \frac{4a^2}{(a-2)^2} - \frac{4a}{a-2} = \frac{8a}{(a-2)^2}.$$

$$\textcircled{v} x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = \frac{a}{a-2} - \frac{2a}{a-2} + 1 = -\frac{2}{a-2}.$$

$$\text{Mà } MN = 4 \Leftrightarrow 16 = \frac{8(a^3 - 4a^2 + 5a)}{a^2 - 4a + 4} \Leftrightarrow a^3 - 6a^2 + 13a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án (D)

□

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (1). Biết trên trục tung có đúng hai điểm M, N mà từ đó chỉ kẻ được tới đồ thị của hàm số (1) đúng một tiếp tuyến. Độ dài đoạn MN là

(A) $\sqrt{5}$.

(B) 2.

(C) $\frac{2}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

 Lời giải.

$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$, tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0 có phương trình

$$y = \frac{-2}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-1} \quad (\Delta)$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $K(0; m)$ khi

$$m = \frac{-2}{(x_0-1)^2}(-x_0) + \frac{x_0+1}{x_0-1} \Leftrightarrow (m-1)x_0^2 - 2(m+1)x_0 + m+1 = 0 \quad (2)$$

Từ K kẻ được đúng một tiếp tuyến khi phương trình (2) có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \Delta' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Khi đó, $M(0; 1)$, $N(0; -1)$, $MN = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Dạng 4 Bài tập tổng hợp

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) , biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác OAB cân tại O , với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.

(A) -1.

(B) -2.

(C) 0.

(D) -3.

 Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có $y' = -\frac{1}{(2x+3)^2} < 0$.

Gọi tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là $M\left(x_0; \frac{x_0+2}{2x_0+3}\right)$. Vì tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) tạo với

hai trục tọa độ một tam giác cân nên $f'(x_0) = \pm 1$ hay $-\frac{1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -2 \end{cases}$

Ta xét hai trường hợp sau

TH 1. Nếu $x_0 = -1$ thì tiếp điểm $M(-1; 1)$. Khi đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là $y = -(x+1) + 1$ hay $y = -x$ loại (vì đường thẳng này không tạo với hai trục tọa độ thành một tam giác).

TH 2. Nếu $x_0 = -2$ thì tiếp điểm $M(-2; 0)$. Khi đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là $y = -(x+2)$ hay $y = -x - 2$. Hay $a = -1, b = -2$ hay $a + b = -3$.

Vậy $a + b = -3$.

Chọn đáp án **(D)** □

Ví dụ 2

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Nếu hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ x_0 bằng nhau và khác không thì

- A** $f(x_0) > \frac{1}{4}$. **B** $f(x_0) \leq \frac{1}{4}$. **C** $f(x_0) \leq \frac{1}{2}$. **D** $f(x_0) < \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Gọi k_1, k_2, k_3 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ tại điểm có hoành độ x_0 . Khi đó $k_1 = f'(x_0)$, $k_2 = g'(x_0)$.

Ta có

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} \Rightarrow k_3 = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Mặt khác $k_1 = k_2 = k_3 \neq 0 \Rightarrow f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{(g(x_0))^2} = k$.

Ta có

$$\frac{k \cdot g(x_0) - k \cdot f(x_0)}{(g(x_0))^2} = k \Leftrightarrow (g(x_0))^2 - g(x_0) + f(x_0) = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $1^2 - 4f(x_0) \geq 0 \Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{1}{4}$. Vậy $f(x_0) \leq \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **B**

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$, có đồ thị (H) . Biết $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Tìm độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB .

- A** $2\sqrt{6}$. **B** $\sqrt{3}$. **C** $\sqrt{6}$. **D** $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2}$, $\forall x \neq \frac{1}{2}$.

Gọi $A\left(x_1; \frac{1}{2} + \frac{3}{2(2x_1-1)}\right)$ và $B\left(x_2; \frac{1}{2} + \frac{3}{2(2x_2-1)}\right)$, với $x_1 \neq x_2 \neq \frac{1}{2}$.

Vì tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau nên

$$\frac{-3}{(2x_1-1)^2} = \frac{-3}{(2x_2-1)^2} \Leftrightarrow (2x_1-1)^2 = (2x_2-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1-1 = -2x_2+1 \\ 2x_1-1 = 2x_2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1-x_1 \\ x_2 = x_1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$\Rightarrow B\left(1-x_1; \frac{1}{2} + \frac{3}{2(1-2x_1)}\right)$. Khi đó, theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$AB^2 = (1-2x_1)^2 + \frac{9}{(1-2x_1)^2} \geq 6.$$

Vậy $\min AB = \sqrt{6}$ khi và chỉ khi $x_1 = 2$, khi đó $A(2; 1)$ và $B(-1; 1)$.

Chọn đáp án **C**

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = x + m$. Với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Giá trị nhỏ nhất của $T = k_1^{2020} + k_2^{2020}$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{-x+1}{2x-1} = x+m \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0, \left(x \neq \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1), ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -\frac{m+1}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Ta được
$$\begin{cases} k_1 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} \\ k_2 = -\frac{1}{(2x_2-1)^2}. \end{cases}$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} & k_1^{2020} + k_2^{2020} \\ &= \frac{1}{(2x_1-1)^{4040}} + \frac{1}{(2x_2-1)^{4040}} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{(2x_1-1)^{4040}} \cdot \frac{1}{(2x_2-1)^{4040}}} \\ &= 2\frac{1}{[(2x_1-1)(2x_2-1)]^{2020}} \\ &= 2\frac{1}{[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1]^{2020}} \\ &\stackrel{(2)}{=} 2. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 2.

Chọn đáp án (B)



C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x + 7$ tại điểm $A(-1; 2)$ có hệ số góc là

- (A) 2. (B) 4. (C) -2. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $y' = -2x + 4$.

Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị tại điểm A có hệ số góc là $k = f'(-1) = 6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ 2 là

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) -1. (C) $\frac{1}{9}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1}{(2x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = \frac{1}{9}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ 2 là $y'(2) = \frac{1}{9}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1; 2)$ là

- (A) $y = -6x + 8$. (B) $y = -6x + 6$. (C) $y = -6x - 6$. (D) $y = -6x - 8$.

Lời giải.

Ta có: $y' = -8x^3 + 2x \Rightarrow y'(1) = -6$. Bởi vậy, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -2x^4 + x^2 + 3$ tại điểm $M(1; 2)$ là

$$y = -6(x - 1) + 2 \Leftrightarrow y = -6x + 8.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

- (A) $y = -x - 7$. (B) $y = 7x - 14$. (C) $y = 7x - 7$. (D) $y = -x + 9$.

Lời giải.

Với $x_0 = 2$ ta có $y_0 = f(x_0) = 7$.

Và $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(2) = 7$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = f'(2)(x - 2) + 7 \Leftrightarrow y = 7x - 7$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 2$ tại điểm có tung độ bằng 2 là

- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

 **Lời giải.**

Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Ta có $y_0 = 2 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Vậy chỉ có 1 tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- (A) $y = -2x + 1$. (B) $y = 2x + 1$. (C) $y = 3x - 2$. (D) $y = -3x - 2$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = -3x^2 + 3$.

Giao điểm của (C) với trục tung có tọa độ là $(0; -2)$.

Tiếp tuyến cần tìm có phương trình $y = y'(0)(x - 0) - 2 = 3x - 2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M, biết M là giao điểm của (C) với đường thẳng có phương trình $y = -x - 2$ và $x_M > 0$.

- (A) $y = -9x - 12$. (B) $y = -9x + 12$. (C) $y = -9x + 14$. (D) $y = -9x - 14$.

 **Lời giải.**

- Phương trình hoành độ giao điểm có ba nghiệm là 0, -2, 2. Suy ra $x_M = 2$.

- Do đó $M(2; -4)$ và $y'(2) = -9$, phương trình tiếp tuyến là $y = -9(x - 2) - 4 = -9x + 14$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ (C) có hệ số góc $k = -9$ là đường thẳng

- (A) (d) : $y - 16 = -9(x + 3)$. (B) (d) : $y = -9(x + 3)$.
(C) (d) : $y + 16 = -9(x + 3)$. (D) (d) : $y - 16 = -9(x - 3)$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = x^2 + 6x$. Tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ nên ta có phương trình

$$x^2 + 6x = -9$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow y = 16.$$

Phương trình tiếp tuyến là (d) : $y = -9(x + 3) + 16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$ song song với đường thẳng $(d) : y = x + 28$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 0.

(D) 3.

Lời giải.

$(\Delta) \parallel (d) : y = x + 28$ nên $k_{(\Delta)} = 1$.

(Δ) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số nên $y' = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 8 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = -3$ suy ra $(\Delta) : y = x - 4$ (thỏa mãn).

Với $x = -3 \Rightarrow y = 25$ suy ra $(\Delta) : y = x + 28$ (không thỏa mãn).

Vậy, có 1 tiếp tuyến.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 10

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ song song với đường thẳng $y = 5x + 17$ có phương trình là

(A) $y = 5x + 17; y = 5x + 3$.

(B) $y = 5x + 3$.

(C) $y = 5x - 3$.

(D) $y = 5x + 17; y = 5x - 3$.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{5}{(x+1)^2}$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 5x + 17$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là

$$f'(x_0) = 5 \Rightarrow \frac{5}{(x_0+1)^2} = 5 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

✓ Với $x_0 = 0, y_0 = -3 \Rightarrow$ tiếp tuyến có phương trình là $y = 5x - 3$.

✓ Với $x_0 = -2, y_0 = 7 \Rightarrow$ tiếp tuyến có phương trình là $y = 5(x + 2) + 7 \Leftrightarrow 5x + 17$ (loại do trùng với đường thẳng đã cho).

Chọn đáp án (C)

□

Câu 11

Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 1.

Lời giải.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Do tiếp tuyến song song với đường $y = x$ nên

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Với $x_0 = 1$, phương trình tiếp tuyến là $y = x$ (loại).

Vậy đồ thị hàm số chỉ có 1 tiếp tuyến song song với đường $y = x$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 12

Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -4x + 3$.

A $y = \frac{1}{4}x - \frac{7}{4}$.

B $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

C $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$ và $y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

D $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $y' = f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với đồ thị hàm số, suy ra ta có phương trình tiếp tuyến

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0.$$

Để $\Delta \perp d$ khi và chỉ khi

$$f'(x_0) \cdot (-4) = -1 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

- Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}$ suy ra $\Delta: y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

- Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2}$ suy ra $\Delta: y = \frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 13

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ có phương trình là

A $x - 3y + 3 = 0$.

B $3x - y - 3 = 0$.

C $3x + y - 3 = 0$.

D $3x + y - 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ có hệ số góc là $\frac{1}{3}$.

Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ sẽ có hệ số góc $k = -3$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến là $y - 0 = -3(x - 1) \Leftrightarrow 3x + y - 3 = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{x^2+x}{x-2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x$. Biết d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Tích các hệ số góc của các tiếp tuyến của (C) tại A, B bằng

A 0.

B 4.

C $-\frac{1}{6}$.

D $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{x^2+x}{x-2}$, ta có $f'(x) = \frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$.

Xét phương trình $\frac{x^2+x}{x-2} = -2x, x \neq 2$.

(1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 + x = -2x^2 + 4x \Leftrightarrow 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$, cả hai nghiệm cùng thỏa mãn điều kiện.

✔ Với $x = 0 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến tại tiếp điểm $(0; 0)$ là

$$k_1 = f'(0) = -\frac{1}{2}. \quad (2)$$

✔ Với $x = 1 \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $x = 1$ là

$$k_2 = f'(1) = -5. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ tích các hệ số góc cần tính là $k_1 \cdot k_2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-5) = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15

Cho hàm số $y = 4x + 2 \cos 2x$ có đồ thị là (C). Hoành độ của các điểm trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành là

(A) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

(B) $x = \pi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

(D) $x = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

💬 Lời giải.

$$y' = 4 - 4 \sin 2x.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của (C) và tiếp tuyến cần tìm.

Trục hoành có phương trình $y = 0$. Để tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với trục hoành thì hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm là $y'(x_0) = 0$. Suy ra

$$4 - 4 \sin 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x_0 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x_0 = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Ký hiệu d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 2m^2 + 1$ (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành đồng thời (C) đi qua điểm $A(1; 0)$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng d thỏa mãn bài toán?

(A) 3.

(B) 2.

(C) 8.

(D) 4.

💬 Lời giải.

Vì (C) đi qua điểm $A(1; 0)$ nên $1 - 4 + 2m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1$. Do đó, $y = x^4 - 4x^2 + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và trục hoành là

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Như thế đồ thị (C) cắt trục hoành tại bốn điểm $M(x_0; 0)$ với $x_0 \in \{\pm 1; \pm \sqrt{3}\}$.

Phương trình đường tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0; 0)$ là $y = y'(x_0)(x - x_0) + 0$.

Ta có $y'(x_0) \in \{-4; 4; 4\sqrt{3}; -4\sqrt{3}\}$.

Vậy có tất cả 4 đường thẳng d thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án (D) □

Câu 17

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0; -1)$, tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k = -3$. Giá trị của a và b là

- (A) $a = 1; b = 1$. (B) $a = 2; b = 2$. (C) $a = 2; b = 1$. (D) $a = 1; b = 2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x-1}$ cắt trục tung tại điểm $A(0; -1)$ nên $\frac{a \cdot 0 + b}{0 - 1} = -1 \Leftrightarrow b = 1$.

Khi đó $y = \frac{ax+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-a-1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -a-1$. Do tiếp tuyến của đồ thị tại điểm A có hệ số góc $k = -3$ nên $-a-1 = -3 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $a = 2; b = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$. Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy . Tìm giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$.

- (A) $m = -\frac{3}{2}$. (B) $m = -\frac{1}{2}$. (C) $m = -3$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Với $x = 0 \Rightarrow y = -m \Rightarrow A(0; -m)$. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m + 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $A(0; -m)$ là $y'(0) = m + 1$. Để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại A vuông góc với $y = 2x - 3$ thì $y'(0) \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 2(m+1) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Cho parabol $(P) : y = x^2 - 3x$. Tiếp tuyến của (P) đi qua điểm $A(5; 10)$ có phương trình là

- (A) $y = 5x - 15$. (B) $y = 7x - 25$. (C) $y = x + 5$. (D) $y = 3x - 5$.

Lời giải.

Ta thấy điểm $A(5; 10)$ thuộc parabol nên A là tiếp điểm.

$y' = 2x - 3 \Rightarrow y'(5) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 7x - 25$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 20

Cho đồ thị $(C) : y = \frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

- (A) 3. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 2. (D) $2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Do $(C) : y = \frac{x-1}{2x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2x^2}, \forall x \neq 0$.

Gọi $M\left(x_1; \frac{x_1-1}{2x_1}\right), N\left(x_2; \frac{x_2-1}{2x_2}\right), x_1 \neq x_2, x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$.

Từ giả thiết suy ra $y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2} = \frac{1}{2x_2^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$.

Khi đó $M\left(x_1; \frac{x_1 - 1}{2x_1}\right); N\left(x_1; \frac{x_1 + 1}{2x_1}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến d_1 tại $M\left(x_1; \frac{x_1 - 1}{2x_1}\right)$ có dạng: $y = \frac{1}{2x_1^2}(x - x_1) + \frac{x_1 - 1}{2x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2}(x - x_1) - y + \frac{x_1 - 1}{2x_1} = 0$.

Khi đó $d(d_1; d_2) = d(N; d_1) = \frac{\left|\frac{2}{x_1}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4x_1^4} + 1}} = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}}$.

Áp dụng BĐT Cô-Si ta có $4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \geq 2\sqrt{4x_1^2 \cdot \frac{1}{x_1^2}} = 4 \Rightarrow d(d_1; d_2) = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}} \leq \frac{4}{2} = 2$.

Vậy $\max d(d_1; d_2) = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 21

Biết đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 3x + 2$ tiếp xúc với đồ thị hàm số (C'): $y = ax^2 + b$ tại điểm có hoành độ $x \in (0; 2)$. Giá trị lớn nhất của $S = a + b$ là

- A** -1. **B** 0. **C** 1. **D** -3.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta thấy $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 = ax^2 + b \\ 3x^2 - 3 = 2ax \end{cases}$ có nghiệm $x \in (0; 2)$.

Ta được $\begin{cases} a = \frac{3x}{2} - \frac{3}{2x} \\ b = -\frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2} + 2 \end{cases}, x \in (0; 2) \Rightarrow a + b = -\frac{x^3}{2} - \frac{3}{2x} + 2, x \in (0; 2)$.

Với $x \in (0; 2)$, ta có $\frac{x^3}{2} + \frac{3}{2x} = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{2} \cdot \frac{1}{(2x)^3}} = 2$.

Do vậy, ta được $a + b \leq 0, \forall x \in (0; 2)$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ x = 1. \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của S là 0.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 22

Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x), y = \frac{f(x) + 3}{g(x) + 1}$. Hệ số góc tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A** $f(1) \leq -\frac{11}{4}$. **B** $f(1) < -\frac{11}{4}$. **C** $f(1) > -\frac{11}{4}$. **D** $f(1) \geq -\frac{11}{4}$.

Lời giải.

Đặt $h(x) = \frac{f(x) + 3}{g(x) + 1}$, ta có $h'(x) = \frac{f'(x)[g(x) + 1] - g'(x)[f(x) + 3]}{[g(x) + 1]^2}$.

Vì $f'(1) = g'(1) = h'(1) \neq 0$ nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{f'(1)[g(1) - f(1) - 2]}{[g(1) + 1]^2} &= f'(1) \\ \Rightarrow [g(1) + 1]^2 &= g(1) - f(1) - 2 \\ \Rightarrow g^2(1) + g(1) + f(1) + 3 &= 0 \\ \Rightarrow f(1) &\leq -\frac{11}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là

- (A) $y = 3x + 1$. (B) $y = -3x + 1$. (C) $y = 3x - 1$. (D) $y = -3x - 1$.

 **Lời giải.**

Ta có $y' = -3x^2 + 6x = -3(x - 1)^2 + 3 \leq 3$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 1$.

Với $x = 1$, ta có $y(1) = 4$.

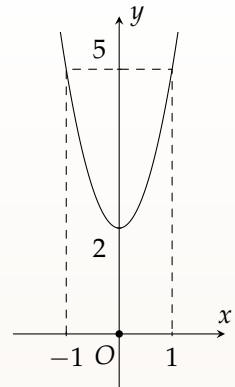
Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x - 1) + 4 \Leftrightarrow y = 3x + 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị là (C). Biết đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $x = 1$.

- (A) $y = x + 2$. (B) $y = x + 4$. (C) $y = 5x + 2$. (D) $y = 5x - 2$.



 **Lời giải.**

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Theo đồ thị ta có

$$\begin{cases} y'(-1) = 5 \\ y'(1) = 5 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b + c = 5 \\ 3a + 2b + c = 5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2. \end{cases}$$

Vì (C) đi qua gốc tọa độ nên ta có $d = 0$.

Vậy $y = x^3 + 2x$ suy ra $y' = 3x^2 + 2$.

Ta có $y(1) = 3$ và $y'(1) = 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = 5(x - 1) + 3 = 5x - 2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 25

Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + 2m$ có đồ thị là (C_m) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để từ $M(1; 2)$ kẻ được đúng hai tiếp tuyến với (C_m) . Tính tổng các phần tử của S .

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{81}{109}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{217}{81}$.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + m - 1$.

Phương trình đường thẳng đi qua $M(1; 2)$ có hệ số góc k có dạng $d: y = kx - k + 2$.

Đường thẳng d tiếp xúc với (C_m) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 - (m - 1)x + 2m = kx - k + 2 & (1) \\ 3x^2 - 4x + (m - 1) = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) và rút gọn ta được

$$2x^3 - 5x^2 + 4x - 3(m - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x = 3(m - 1) \quad (*)$$

Để từ M kẻ được đúng hai tiếp tuyến với (C_m) thì phương trình $(*)$ phải có đúng hai nghiệm phân biệt hay hai đồ thị $y = 2x^3 - 5x^2 + 4x$ (C) và $y = 3(m - 1)$ cắt nhau tại đúng hai điểm phân biệt.

Hàm số $y = 2x^3 - 5x^2 + 4x$ có $y' = 6x^2 - 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		↗ 1		↘ $\frac{28}{27}$		↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} 3(m - 1) = 1 \\ 3(m - 1) = \frac{28}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = \frac{109}{81} \end{cases}$.

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{4}{3} + \frac{109}{81} = \frac{217}{81}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 26

Cho hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) với hoành độ $x_0 = 0$ cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (C) tại hai điểm A, B . Tính diện tích tam giác IAB , với I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị (C).

- (A) $S_{\triangle IAB} = 6$. (B) $S_{\triangle IAB} = 3$. (C) $S_{\triangle IAB} = 12$. (D) $S_{\triangle IAB} = 6\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M(0; -1) \in (C)$. Ta có $y' = \frac{-3}{(x - 1)^2} \Rightarrow y'(0) = -3$.

Tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại M có phương trình : $y = y'(0) \cdot (x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1$.

Đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) là $d_1: x = 1 \Rightarrow \Delta \cap d_1 = A(1; -4)$.

Đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) là $d_2: y = 2 \Rightarrow \Delta \cap d_2 = B(-1; 2)$.

Ta có $I(1; 2) \Rightarrow IA = 6$ và $IB = 2$. Do $\triangle IAB$ vuông tại I, suy ra $S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = 6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có bao nhiêu tiếp tuyến song song với trục Ox .

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

 **Lời giải.**

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

- ✔ Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$, khi đó phương trình tiếp tuyến $y = 0$. (trường hợp loại vì trùng trục Ox)
- ✔ Với $x = 1 \Rightarrow y = -1$, khi đó phương trình tiếp tuyến $y = -1$.
- ✔ Với $x = -1 \Rightarrow y = -1$, khi đó phương trình tiếp tuyến $y = -1$.

Vậy có duy nhất tiếp tuyến $y = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(0; a)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tích các giá trị các phần tử của S là

- (A) 1. (B) -1. (C) 0. (D) 3.

 **Lời giải.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C).

Khi đó tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $\Delta: y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + (x_0^3 - 3x_0^2)$.

Để có hai đường tiếp tuyến Δ đi qua A thì phương trình ẩn x_0 sau có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} a &= (3x_0^2 - 6x_0)(0 - x_0) + (x_0^3 - 3x_0^2) \\ \Leftrightarrow a &= -3x_0^3 + 6x_0^2 + x_0^3 - 3x_0^2 \\ \Leftrightarrow a &= -2x_0^3 + 3x_0^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Để (1) có hai nghiệm thì a bằng giá trị cực tiểu hoặc cực đại của hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x^2$.

Như vậy $a = 0$ hoặc $a = 1$. Nên $S = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29

Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1 - y_2 = 6(x_1 - x_2)$?

- (A) 2. (B) 3. (C) 1. (D) 0.

 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

★ Nhận xét đây là hàm số trùng phương có hệ số $a > 0$.

★ Ta có $y' = x^3 - 7x$ nên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{7} \\ x = \sqrt{7}. \end{cases}$

★ Phương trình tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ (là đường thẳng qua hai điểm M, N) có hệ số góc:

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 6.$$

Do đó để tiếp tuyến tại $A(x_0; y_0)$ có hệ số góc $k = 6 > 0$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thì $-\sqrt{7} < x_0 < 0$ và $x_0 \neq -\frac{\sqrt{21}}{3}$ (hoành độ điểm uốn).

★ Ta có phương trình: $y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow x_0^3 - 7x_0 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \text{ (loại)}. \end{cases}$

Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 30

Cho hàm số $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ có đồ thị (C). Tồn tại hai tiếp tuyến của (C) phân biệt và có cùng hệ số góc k , đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2017 \cdot OB$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn yêu cầu bài toán?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

🗨️ Lời giải.

Gọi $M_1(x_1; f(x_1)); M_2(x_2; f(x_2))$ là hai tiếp điểm mà tại đó tiếp tuyến có cùng hệ số góc. Ta có $y' = 3x^2 + 12x + 9$.

Khi đó $k = 3x_1^2 + 12x_1 + 9 = 3x_2^2 + 12x_2 + 9 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4$ (1).

Hệ số góc của đường thẳng M_1M_2 là $k' = \pm \frac{OA}{OB} = \pm \frac{1}{2017} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

$$\Leftrightarrow \pm \frac{1}{2017} = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + 6(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = \frac{2016}{2017} = P \\ x_1x_2 = \frac{2018}{2017} = P \end{cases} \quad (2).$$

Với $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 = S \\ x_1x_2 = \frac{2016}{2017} = P \end{cases}$ có $S^2 > 4P$ nên tồn tại hai cặp $x_1, x_2 \Rightarrow$ tồn tại 1 giá trị k .

Với $\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 = S \\ x_1x_2 = \frac{2018}{2017} = P \end{cases}$ có $S^2 > 4P$ nên tồn tại hai cặp $x_1, x_2 \Rightarrow$ tồn tại 1 giá trị k .

Vậy có 2 giá trị k thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C)

□

—HẾT—

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1 .

- (A) $y = 12x + 14$. (B) $y = 12x - 14$. (C) $y = 12x + 10$. (D) $y = -20x - 22$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của đồ thị và tiếp tuyến cần tìm.

Ta có $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2$; hệ số góc $k = y'(-1) = 12$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 12(x + 1) + 2 = 12x + 14$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 2

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

- (A) $y = 3x - 2$. (B) $y = x - \frac{2}{3}$. (C) $y = -3x + 2$. (D) $y = -x + \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $y' = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = 1(x - 1) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow y = x - \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 3

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ là

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{7}{9}$. (C) 7. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị tại điểm có hoành độ $x = -1$ là $y'(-1) = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 4

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 là

- (A) $y = 3x + 13$. (B) $y = -3x - 5$. (C) $y = 3x + 5$. (D) $y = -3x + 13$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$.

Ta có $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 4, y'(-3) = 3$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3(x + 3) + 4$ hay $y = 3x + 13$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 5

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{18}$?

(A) $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

(B) $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}.$

(C) $y = \frac{9}{4}x + \frac{31}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}.$

(D) $y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}; y = \frac{4}{9}x + \frac{1}{9}.$

💬 Lời giải.

Ta có: $y' = \frac{4}{(x+2)^2}$. Gọi $M(x_0; y_0)$ ($x_0 \neq -2$) là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm với đồ thị (C). Khi

đó phương trình tiếp tuyến là $y = \frac{4}{(x_0+2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0}{x_0+2} = \frac{4x}{(x_0+2)^2} + \frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}$ (d).

(d) cắt hai trục tọa độ tại $A\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2}\right); B\left(-\frac{x_0^2}{2}; 0\right).$

Vì tam giác OAB có diện tích $\frac{1}{18}$ nên $\frac{x_0^4}{(x_0+2)^2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow (3x_0^2)^2 = (x_0+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -\frac{2}{3}. \end{cases}$

Do đó phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{4}{9}x + \frac{2}{9}; y = \frac{9}{4}x + \frac{1}{2}.$

Chọn đáp án (A) □

Bài 6

Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$. Số các tiếp tuyến với đồ thị (C) mà các tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + 1$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 0.

💬 Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3.$

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x + 1$ có hệ số góc $k = 3$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình $y' = k \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Bài 7

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục Ox .

(A) $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$

(B) $y = 3x - 3.$

(C) $y = 3x.$

(D) $y = x - 3.$

💬 Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là $\frac{x-1}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow$ giao điểm là $M(1; 0).$

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{3}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;0)$ là: $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 8

Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

- (A) $m \neq 0$. (B) $m > 1$. (C) $m \neq 1$. (D) $m \in \emptyset$.

 **Lời giải.**

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 1$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 + 2m - 3$.

Hệ số góc luôn dương $\Leftrightarrow y'(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-3)^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Chọn đáp án (D) □

Bài 9

Trên đồ thị (C) : $y = \frac{x+1}{x+2}$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng $d: x + y = 1$.

- (A) 0. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

 **Lời giải.**

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có $y' = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}$. Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0+2}\right) \in (C)$.

Ta có phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ $x = x_0$ là

$$y' = \frac{1}{(x_0+2)^2} (x - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0+2} \quad (d').$$

Để $(d') \parallel (d): x + y = 1$ thì ta có $\frac{1}{(x_0+2)^2} = -1$ (vô nghiệm).

Do đó không có điểm M nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Chú ý: Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song với đường thẳng $y = kx + b$ khi và chỉ khi $f'(x_0) = k$ (Thử lại để loại trường hợp trùng.)

Chọn đáp án (A) □

Bài 10

Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x + 2$.

- (A) $y = x + \frac{68}{27}$. (B) $y = x + 2$. (C) $y = x + \frac{50}{27}$. (D) $y = x - \frac{1}{3}$.

 **Lời giải.**

Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $d: y = x + 2$ nên Δ có dạng $y = x + m, m \neq 2$.

Điều kiện tiếp xúc của Δ và (C) là $\begin{cases} -x^3 + 2x^2 + 2 = x + m & (1) \\ -3x^2 + 4x = 1. & (2) \end{cases}$

$$(2) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

✔ Với $x = 1$, $(1) \Leftrightarrow m = -x^3 + 2x^2 - x + 2 = 2$ (loại).

✔ Với $x = \frac{1}{3}$, $(1) \Leftrightarrow m = -x^3 + 2x^2 - x + 2 = \frac{50}{27}$ (nhận).

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = x + \frac{50}{27}$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 11

Cho hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ có đồ thị là (C). Trong số các tiếp tuyến của (C) có một tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng

(A) -3,5.

(B) -5,5.

(C) -7,5.

(D) -9,5.

💬 Lời giải.

Ta có $y' = 6x^2 + 6x - 4 = 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 5,5 \geq -5,5$ với mọi x .

Vậy hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến của đồ thị (C) là -5,5.

Chọn đáp án (B) □

Bài 12

Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Số tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $M(-1; 1)$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 4.

💬 Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$.

Gọi $A(x_0; \frac{2x_0+1}{x_0-1})$ thuộc đồ thị (C) với $x_0 \neq 1$.

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1}$.

Vì tiếp tuyến đi qua $M(-1; 1)$ nên $\frac{-3}{(x_0-1)^2}(-1-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0-1} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 4x_0 + 1 = 0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy không có tiếp tuyến nào đi qua M.

Chọn đáp án (C) □

Bài 13

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung.

(A) $y = x + 2$.

(B) $y = x$.

(C) $y = -x + 2$.

(D) $y = -x$.

💬 Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $M(0; 2)$.

Ta có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2}$, $y'(0) = -1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $y = -1 \cdot x + 2 = -x + 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 14

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$. Trong các tiếp tuyến với đồ thị, tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng

(A) 2.

(B) 1.

(C) -1.

(D) 3.

 **Lời giải.**

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 6 = 3(x_0 - 1)^2 + 3 \geq 3$.

Vậy tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 3.

Chọn đáp án **(D)** □

Bài 15

Biết đường thẳng $y = 2 \ln 4 \cdot x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = 4^{2x}$ khi đó giá trị tham số m bằng

(A) $2 \ln 4 - 1$.

(B) 1 hoặc 3.

(C) 1.

(D) 1 hoặc $2 \ln 4 - 1$.

 **Lời giải.**

Đường thẳng $y = 2 \ln 4 \cdot x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = 4^{2x}$ khi và chỉ khi hệ phương trình

$$\begin{cases} 4^{2x} = 2 \ln 4 \cdot x + m \\ 2 \cdot 4^{2x} \ln 4 = 2 \ln 4 \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có $\begin{cases} 4^{2x} = 2 \ln 4 \cdot x + m \\ 2 \cdot 4^{2x} \ln 4 = 2 \ln 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{2x} = 2 \ln 4 \cdot x + m \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Bài 16

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(2x) + f(1 - 2x) = 12x^2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

(A) $y = 4x - 6$.

(B) $y = 2x - 6$.

(C) $y = 4x - 2$.

(D) $y = 2x + 2$.

 **Lời giải.**

Từ đẳng thức trên, thay $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$ vào ta được

$$\begin{cases} 2f(0) + f(1) = 0 \\ 2f(1) + f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow f(1) = 2.$$

Lấy đạo hàm cả hai vế ta được

$$4f'(2x) - 2f'(1 - 2x) = 24x.$$

Lần lượt thay $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$ vào ta được

$$\begin{cases} 4f'(0) - 2f'(1) = 0 \\ 4f'(1) - 2f'(0) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow f'(1) = 4.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 4(x - 1) + 2 = 4x - 2.$$

Chọn đáp án **C**

Bài 17

Cho hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; -4)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m nguyên thuộc khoảng $(2; 5)$ để từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C). Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng

A 7.

B 9.

C 3.

D 4.

Lời giải.

Tiếp tuyến qua $A(m; -4)$ có dạng $y = k(x - m) - 4$.

$$\text{Điều kiện tiếp xúc: } \begin{cases} k(x - m) - 4 = x^3 - 12x + 12 \\ y' = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x - m) - 4 = x^3 - 12x + 12 \\ k = 3x^2 - 12 \end{cases}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 12)(x - m) - 4 = x^3 - 12x + 12 \\ \Leftrightarrow & 2x^3 - 3mx^2 + 12m - 16 = 0 \quad (1) \\ \Leftrightarrow & (x - 2)[2x^2 + (4 - 3m)x + 8 - 6m] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ 2x^2 + (4 - 3m)x + 8 - 6m = 0. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Yêu cầu bài toán từ A kẻ được ba tiếp tuyến với đồ thị (C) tại 3 tiếp điểm nghĩa là phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 8 + 2(4 - 3m) + 8 - 6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 + 8m - 16 > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > \frac{4}{3} \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Kết hợp với m nguyên thuộc khoảng $(2; 5)$ nên m nguyên thuộc khoảng $(2; 5)$.

Vậy $S = \{3; 4\}$. Tổng tất cả các phần tử nguyên của S bằng 7.

Chọn đáp án **A**

Bài 18

Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm trên trục tung từ đó có thể vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

A 0.

B 1.

C 2.

D 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 4x^3 - 8x$. Gọi điểm nằm trên trục tung có dạng $M(0; m)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) có dạng $\Delta: y'(x_0)(x - x_0) + y_0$; với $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Khi đó $\Delta: y = (4x_0^3 - 8x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 3$.

Mà Δ đi qua M nên $(4x_0^3 - 8x_0)(-x_0) + x_0^4 - 4x_0^2 + 3 = m \Leftrightarrow -3x_0^4 + 4x_0^2 + 3 - m = 0$ (*).

Từ M kẻ được 3 tiếp tuyến tới (C) nghĩa là phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

Từ đó $-3t^2 + 4t + 3 - m = 0$ có 2 nghiệm $t_1 = 0$ và $t_2 > 0$, suy ra $m = 3$.

Chọn đáp án **D**

Bài 19

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ (C). Tiếp tuyến d của đồ thị hàm số (C) cắt (C) tại 2 điểm A, B phân biệt cách đều trục tung. Tính độ dài AB .

- (A) $6\sqrt{82}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) $2\sqrt{15}$. (D) 6.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$. Tiếp tuyến d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B suy ra A hoặc B là tiếp điểm, không mất tổng quát ta giả sử A là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(x_0; y_0)$ có dạng

$$y = (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 &= (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 \\ \Leftrightarrow (x - x_0)^2(x + 2x_0 - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ x = 3 - 2x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Hai điểm A và B cách đều trục tung suy ra $x_0 + 3 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3$. Do đó $A(3; 54)$, $B(-3; 0)$, khi đó $AB = \sqrt{6^2 + 54^2} = 6\sqrt{82}$.

Chọn đáp án (A) □

Bài 20

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số và $a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt M, N, P và các tiếp tuyến của (C) tại M, N có hệ số góc là -6 và 2 . Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại P . Chọn mệnh đề đúng?

- (A) $k \in [4; 7)$. (B) $k \in [-5; -2)$. (C) $k \in [1; 4)$. (D) $k \in [-2; 1)$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là hoành độ của M, N, P .

Khi đó, x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Suy ra, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Do đó, $f'(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + a(x - x_2)(x - x_3) + a(x - x_3)(x - x_1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại M, N, P là

$$\begin{cases} f'(x_1) = a(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) = -6 \\ f'(x_2) = a(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) = 2 \\ f'(x_3) = a(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = k. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{x_3 - x_2 + x_1 - x_3 + x_2 - x_1}{a(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0.$$

$$\text{Hay } \frac{1}{-6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{k} = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Vậy $k \in [-5; -2)$.

Chọn đáp án (B) □

Bài 21

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của với đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng

$m - 2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1; y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2; y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2 + y_1 = -5$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

(A) 0.

(B) 4.

(C) 10.

(D) 9.

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$. Với $x = m - 2$ thì $y = 1 - \frac{3}{m}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = m - 2$ là $d: y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \frac{3}{m}$.
Tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số lần lượt là $y = 1$ và $x = -2$.
Tọa độ A là nghiệm hệ

$$\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \frac{3}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - \frac{6}{m} \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 1 - \frac{6}{m}.$$

Tọa độ điểm B là nghiệm hệ

$$\begin{cases} y = \frac{3}{m^2}(x - m + 2) + 1 - \frac{3}{m} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2m - 2 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3m - 2.$$

$$\text{Vậy } x_2 + y_1 = 2m - \frac{6}{m} - 1 = -5 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 = 10.$$

Chọn đáp án (C)

□

Bài 22

Cho hàm số $y = \frac{-2x - 2}{x + 3}$ có đồ thị hàm số (C). Xét điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (C) có $x_0 > -3$. Tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm M lần lượt cắt các đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của (C) tại E và F . Tính $2x_0 - y_0$ khi độ dài EF đạt giá trị nhỏ nhất.

(A) $2x_0 - y_0 = 0$.

(B) $2x_0 - y_0 = 2$.

(C) $2x_0 - y_0 = -3$.

(D) $2x_0 - y_0 = -2$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ta có $y' = \frac{-4}{(x+3)^2} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y = \frac{-4}{(x_0+3)^2}(x - x_0) + \frac{-2x_0 - 2}{x_0 + 3}$.

Các đường thẳng $y = -2$ và $x = -3$ là các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Theo giả thiết, E, F là giao điểm của Δ với các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Do đó, $E\left(-3; \frac{-2x_0 + 2}{x_0 + 3}\right)$ và $F(2x_0 + 3; -2)$.

$$\Rightarrow EF^2 = 4(x_0 + 3)^2 + \frac{64}{(x_0 + 3)^2} \geq 2\sqrt{4(x_0 + 3)^2 \cdot \frac{64}{(x_0 + 3)^2}} = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min EF = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 4(x_0 + 3)^2 = \frac{64}{(x_0 + 3)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -5 \end{cases}$$

Vì $x_0 > -3$ nên ta có $M(-1; 0) \Rightarrow 2x_0 - y_0 = -2$.

Chọn đáp án (D)

□

Bài 23

Cho đồ thị (C): $y = \frac{x-1}{2x}$ và d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau. Khoảng cách lớn nhất giữa d_1 và d_2 là

- (A) 3. (B) $2\sqrt{3}$. (C) 2. (D) $2\sqrt{2}$.

 Lời giải.

Do (C): $y = \frac{x-1}{2x}, y' = \frac{1}{2x^2}$ với mọi $x \neq 0$.

d_1, d_2 là hai tiếp tuyến của (C) song song với nhau lần lượt có các hoành độ tiếp điểm là $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$, nên ta có $y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2} = \frac{1}{2x_2^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2$.

Phương trình tiếp tuyến d_1 tại $M\left(x_1; \frac{x_1-1}{2x_1}\right)$: $y = \frac{1}{2x_1^2}(x - x_1) + \frac{x_1-1}{2x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{2x_1^2}(x - x_1) - y + \frac{x_1-1}{2x_1} = 0$.

Khi đó $d_{(d_1; d_2)} = d_{(N; d_1)} = \frac{\left|\frac{2}{x_1}\right|}{\sqrt{\frac{1}{4x_1^4} + 1}} = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}}$.

Áp dụng BĐT Cô-si ta có $\frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}} \geq 2\sqrt{4x_1^2 \cdot \frac{1}{x_1^2}} = 4 \Rightarrow d_{(d_1; d_2)} = \frac{4}{\sqrt{4x_1^2 + \frac{1}{x_1^2}}} \leq \frac{4}{2} = 2$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 24

Gọi (T) là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ (C) tại điểm có tung độ dương, đồng thời (T) cắt hai đường tiệm cận của (C) lần lượt tại A và B sao cho độ dài AB nhỏ nhất. Khi đó (T) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{5}{2}$. (C) $\frac{25}{2}$. (D) 8.

 Lời giải.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1$ và đường tiệm cận đứng $x = -2$.

Gọi A là giao điểm của (T) và đường tiệm cận đứng, B là giao điểm của (T) và đường tiệm cận ngang

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = \frac{1}{(x_0+2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0+2}$.

$A(-2; y_A) \in (T) \Rightarrow y_A = \frac{1}{(x_0+2)^2}(-2 - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0+2} \Rightarrow A\left(-2; \frac{x_0}{x_0+2}\right)$.

$B(x_B; 1) \in (T) \Rightarrow 1 = \frac{1}{(x_0+2)^2}(x_B - x_0) + \frac{x_0+1}{x_0+2} \Leftrightarrow x_B = 2x_0 + 2 \Rightarrow B(2x_0 + 2; 1)$.

$AB^2 = 4(x_0+2)^2 + \frac{4}{(x_0+2)^2} \geq 2\sqrt{16} = 8, AB_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi $|x_0+2| = 1 \Leftrightarrow x_0 = -1$ (loại), $x_0 = -3$. Phương trình của (T): $y = x + 5$ suy ra (T) tạo với các trục tọa độ tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 25

Đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x$ có hai điểm cực trị là A, B ; tiếp tuyến của (C) tại $M(a; b)$ cắt (C) tại điểm thứ hai là N (N khác M) và tam giác NAB có diện tích bằng 60. Tính $|a + b|$.

- (A) 2. (B) 0. (C) 4. (D) 56.

Lời giải.

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Suy ra tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(-1; 2), B(1; -2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và tiếp tuyến là

$$(3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a = x^3 - 3x \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = -2a. \end{cases}$$

Do đó $x_N = -2a \Rightarrow y_N = -8a^3 + 6a \Rightarrow N(-2a; -8a^3 + 6a)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2; -4)$ và $\overrightarrow{AN} = (1 - 2a; -8a^3 + 6a - 2)$.

Vậy ta có $60 = S_{ABN} = \frac{1}{2} |2(-8a^3 + 6a - 2) - (-4)(1 - 2a)| = |2a - 8a^3| \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2. \end{cases}$

Nếu $a = 2$ thì $b = 2$. Suy ra $|a + b| = 4$.

Nếu $a = -2$ thì $b = -2$. Suy ra $|a + b| = 4$.

Chọn đáp án (C) □

Bài 26

Cho hàm số $y = x(x^2 - 3)$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) thỏa mãn tiếp tuyến tại M của (C) cắt (C) và trục hoành lần lượt tại hai điểm phân biệt A (khác M) và B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$.

Vì điểm M và điểm A thuộc (C) nên ta gọi tọa độ hai điểm này lần lượt là $M(x_M; x_M^3 - 3x_M)$ và $A(x_A; x_A^3 - 3x_A)$. Điểm B nằm trên trục hoành nên ta gọi điểm B có tọa độ là $B(x_B; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là

$$d: y = 3(x_M^2 - 1)(x - x_M) + x_M^3 - 3x_M$$

Nếu $x_M = \pm 1$ thì tại M có hai tiếp tuyến với (C) lần lượt là $y = 2$ và $y = -2$ (không thỏa mãn đề bài).

Vì $B \in d$ nên $0 = 3(x_M^2 - 1)(x_B - x_M) + x_M^3 - 3x_M \Rightarrow x_B = x_M + \frac{-x_M^3 + 3x_M}{3(x_M^2 - 1)} = \frac{2x_M^2}{3(x_M^2 - 1)}$.

Vì $A \in d$ nên

$$\begin{aligned} x_A^3 - 3x_A &= 3(x_M^2 - 1)(x_A - x_M) + x_M^3 - 3x_M \\ \Leftrightarrow x_A^3 - 3x_A &= 3(x_M^2 - 1)x_A - 2x_M^3 \Leftrightarrow x_A^3 - 3x_A = 3x_M^2x_A - 3x_A - 2x_M^3 \\ \Leftrightarrow x_A^3 - 3x_M^2x_A + 2x_M^3 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x_A}{x_M} = -2 \\ \frac{x_A}{x_M} = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Xét trường hợp $x_A = -2x_M$.

$$\begin{aligned} \text{Vì } M \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên ta có } x_A + x_B = 2x_M \Rightarrow x_B = 4x_M \Leftrightarrow \frac{2x_M^2}{3(x_M^2 - 1)} = 4x_M. \\ \Rightarrow 2x_M^2 = 12x_M(x_M^2 - 1) \Leftrightarrow 2x_M(-6x_M^2 + x_M + 6) = 0 \end{aligned}$$

Nếu $x_M = 0 \Rightarrow x_A = 0$, suy ra điểm A trùng điểm M nên trường hợp này bị loại.

Phương trình $-6x_M^2 + x_M + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên tồn tại hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Xét trường hợp $x_A = x_M$, suy ra điểm A trùng điểm M nên trường hợp này bị loại. Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Bài 27

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+2}$, có đồ thị (C) và điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ (với $x_0 \neq 0$). Biết rằng khoảng cách từ $I(-2; 2)$ đến tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A** $2x_0 + y_0 = 0$. **B** $2x_0 + y_0 = -4$. **C** $2x_0 + y_0 = 2$. **D** $2x_0 + y_0 = -2$.

 **Lời giải.**

$$\text{Do } M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; \frac{2x_0}{x_0+2}\right). \text{ Ta có: } y = f(x) = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$\begin{aligned} (\Delta): y &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \\ \Leftrightarrow (\Delta): \frac{4}{(x_0+2)^2} \cdot x - y - \frac{4x_0}{(x_0+2)^2} + \frac{2x_0}{x_0+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\Delta): \frac{4}{(x_0+2)^2} \cdot x - y + \frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, (\Delta)) &= \frac{\left| \frac{4}{(x_0+2)^2} \cdot (-2) - 2 - \frac{2x_0^2}{(x_0+2)^2} \right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{(x_0+2)^2} \right)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\left| \frac{-8(x_0+2)}{(x_0+2)^2} \right|}{\sqrt{\frac{16 + (x_0+2)^4}{(x_0+2)^4}}} = \frac{\frac{8}{|x_0+2|}}{\frac{\sqrt{16 + (x_0+2)^4}}{(x_0+2)^2}} \\ &= \frac{8|x_0+2|}{\sqrt{16 + (x_0+2)^4}}. \end{aligned}$$

Đặt $|x_0 + 2| = t, t \geq 0$. Khi đó $d(I, (\Delta)) = \frac{8t}{\sqrt{16 + t^4}} = g(t)$. Ta có

$$g'(t) = \frac{8 \cdot \sqrt{16 + t^4} - \frac{2t^3}{\sqrt{16 + t^4}} \cdot 8t}{16 + t^4} = \frac{128 - 8t^4}{\sqrt{16 + t^4}}.$$

Xét

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{128 - 8t^4}{\sqrt{16 + t^4}} = 0 \Leftrightarrow 128 - 8t^4 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ (do } t \geq 0 \text{)}.$$

$$\text{Suy ra } |x_0 + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 2 \\ x_0 + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = -4 \text{ (nhận)} \end{cases}.$$

$$\text{Với } x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = \frac{2 \cdot (-4)}{-4 + 2} = 4.$$

$$\text{Do đó } 2x_0 + y_0 = -4.$$

Chọn đáp án (B)

□

Bài 28

Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = x + m$. Với mọi giá trị của m đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Giá trị nhỏ nhất của $T = k_1^{2020} + k_2^{2020}$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{-x+1}{2x-1} = x+m \Leftrightarrow 2x^2 + 2mx - m - 1 = 0, \left(x \neq \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

$$\text{Gọi } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của phương trình (1), ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -\frac{m+1}{2} \end{cases}. \quad (2)$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} \\ k_2 = -\frac{1}{(2x_2-1)^2} \end{cases}.$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} & k_1^{2020} + k_2^{2020} \\ &= \frac{1}{(2x_1-1)^{4040}} + \frac{1}{(2x_2-1)^{4040}} \\ &\geq 2\sqrt{\frac{1}{(2x_1-1)^{4040}} \cdot \frac{1}{(2x_2-1)^{4040}}} \\ &= 2\frac{1}{[(2x_1-1)(2x_2-1)]^{2020}} \\ &= 2\frac{1}{[4x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 1]^{2020}} \\ &\stackrel{(2)}{=} 2. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 2.

Chọn đáp án (B)

□

Bài 29

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. Trong các tiếp tuyến của đồ thị. Tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

- (A) 2. (B) 1. (C) -1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 6$ nên $\min y' = y'(1) = 3$.

Chọn đáp án **(D)**



—HẾT—