



Chuyên đề:

**CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN
LIÊN QUAN ĐẾN GTLN, GTNN
CỦA HÀM SỐ**

NHÓM TOÁN VD - VDC

NHÓM TOÁN VD - VDC

CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN GTLN GTNN CỦA HÀM SỐ

PHẦN I: Xác định trực tiếp GTLN, NN hoặc thông qua phép biến đổi đồ thị

1. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$ trên khoảng, đoạn.
2. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|), y = f(|u(x)|)$ trên khoảng, đoạn.
3. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|, y = |f(u(x))|$ trên khoảng, đoạn.
4. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|+b), y = f(|u(x)|+b), y = f(|x+a|+b), y = f(|u(x)+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.
5. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)+b|, y = |f(u(x))+b|, y = |f(x+a)+b|, y = |f(u(x)+a)+b|$ trên khoảng, đoạn.
6. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(|x|)+b|, y = |f(|u(x)|)+b|, y = |f(|x+a|)+b|, y = |f(|u(x)+a|)+b|$ trên khoảng, đoạn.

PHẦN II: Xác định GTLN, NN hoặc so sánh các giá trị của hàm số thông qua tích phân hoặc so sánh diện tích hình phẳng.

7. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, đoạn.
8. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|)$ trên khoảng, đoạn.
9. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên khoảng, đoạn.
10. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.
11. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)+b|$ trên khoảng, đoạn.
12. Các dạng khác.

PHẦN I: Xác định trực tiếp GTLN, NN hoặc thông qua phép biến đổi đồ thị

Dạng 1: Cho đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$ trên khoảng, đoạn.

- Câu 1.** Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2 + 1}\right)$ có tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là
- A. $M + m$. B. $2M + m$. C. $M + 2m$. D. $2M + 2m$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}, x \in [0; 2]$. Ta có: $g'(x) = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$.

Bảng biến thiên:

x	0	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	2	$\frac{8}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $0 \leq g(x) \leq 2$.

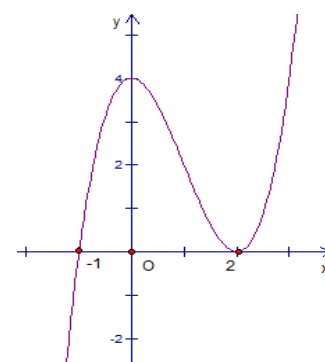
Do đó: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ khi và chỉ khi hàm số $y = f[g(x)]$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có M và m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\frac{4x}{x^2 + 1}\right)$ là $M + m$.

- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số $y = f(2 - x^2)$ đạt GTLN trên $[0; \sqrt{2}]$ bằng
- A. $f(0)$. B. $f(1)$.
C. $f(\sqrt{2})$. D. $f(2)$.

Lời giải

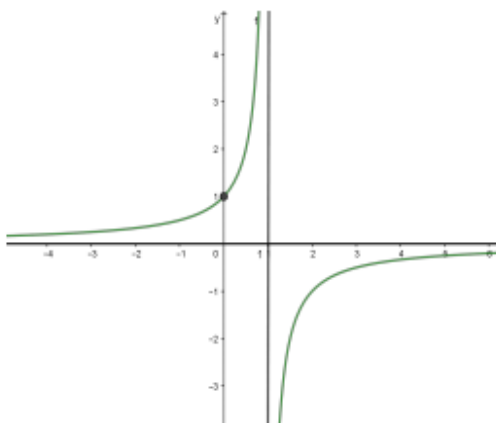
Chọn A



Đặt $t = 2 - x^2$, từ $x \in [0; \sqrt{2}]$, ta có $t \in [0; 2]$.

Trên $[0; 2]$ hàm số $y = f(t)$ nghịch biến. Do đó $\max_{[0; 2]} f(t) = f(0)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ và $g(x) = f(f(x))$.
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3; -1]$.



A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. $-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta có: TCN là $y = \frac{a}{c} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

TCD là $x = -\frac{d}{c} = 1 \Leftrightarrow c = -d$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $\frac{b}{d} = 1 \Leftrightarrow b = d (d \neq 0)$.

Khi đó $f(x) = \frac{d}{-dx+d} = \frac{1}{-x+1} \Rightarrow g(x) = f(f(x)) = \frac{1}{-\frac{1}{-x+1}+1} = \frac{-x+1}{-x}$.

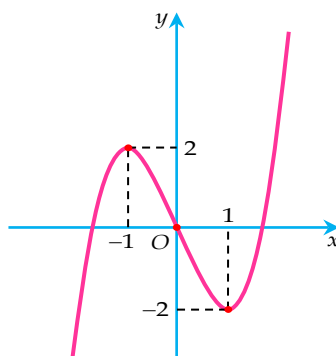
TXĐ hàm $g(x)$ là $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ hàm số $g(x)$ xác định trên $[-3; -1]$.

$g'(x) = \frac{1}{x^2}$, với $\forall x \in [-3; -1]$.

$g(-3) = \frac{4}{3}$, $g(-1) = 2$.

Vậy $\max_{[-3; -1]} g(x) = 2$.

Câu 4. Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 16$ và hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = f\left(\frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4}\right)$. Tính $M^2 + m^2$.



A. $M^2 + m^2 = 4$.

B. $M^2 + m^2 = 1$.

C. $M^2 + m^2 = 25$.

D. $M^2 + m^2 = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $t = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x^2 - y^2 - 2xy + 4} = \frac{8x^2 + 8y^2 - 16}{8x^2 - 8y^2 - 16xy + 2.16} = \frac{3x^2 - 6xy + 3y^2}{18x^2 - 4xy + 2y^2}$.

TH1: Xét $y = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6} \Rightarrow f(t) = m \in (0; -2)$.

TH2: Xét $y \neq 0 \Rightarrow t = \frac{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\frac{x}{y} + 3}{18\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\frac{x}{y} + 2}$. Đặt $u = \frac{x}{y}$, ta có: $t = \frac{3u^2 - 6u + 3}{18u^2 - 4u + 2}$.

Xét $g(u) = \frac{3u^2 - 6u + 3}{18u^2 - 4u + 2}$; $g'(u) = \frac{96u^2 - 96u}{(18u^2 - 4u + 2)^2}$; $g'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 1 \end{cases}$.

Ta lại có: $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = \frac{1}{6}$. Từ đó lập bảng biến thiên ta có

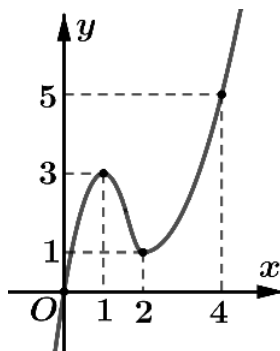
u	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(u)$		+	0	-	0	+	
$g(u)$			$\frac{3}{2}$		0		$\frac{1}{6}$

Từ bảng biến ta có $0 \leq g(u) \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{3}{2}$.

Quan sát đồ thị ta thấy rằng: $\max_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} P = 0$; $\min_{\left[0; \frac{3}{2}\right]} P = -2$.

Vậy $M^2 + m^2 = 4$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f\left[2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right]$.



Tổng $M + m$ bằng

A. 3 .

B. 5 .

C. 4 .

D. 6 .

Lời giải

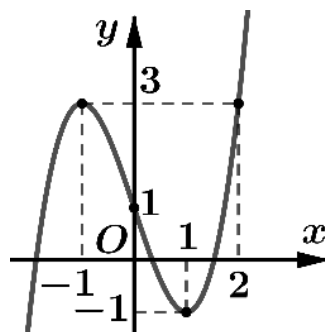
Chọn C

Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $0 \leq \sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \leq 2$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases} M = \max g(x) = f(1) = 3 \\ m = \min g(x) = f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 4$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ .



Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.

A. $m = 3$.

B. $m = -12$.

C. $m = -13$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn C

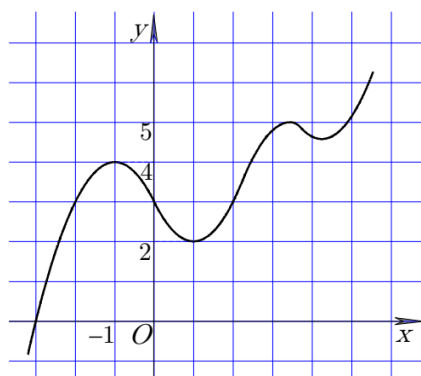
Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0; 1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in [-1; 2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max_{[-1; 2]} f(t) = 3 \Rightarrow \max_{[-1; 2]} [f(t) + m] = 3 + m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(2 \sin x)$ trên $(0; \pi)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2 \sin x$. Với $x \in (0; \pi)$ thì $t \in (0; 2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $\max_{(0; \pi)} f(2 \sin x) = \max_{(0; 2]} f(t) = f(2) = 3$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên dạng

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	-2	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	0	$+\infty$

Hàm số $y = f(2 \sin x)$ đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là M và m . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m = -2M$. **B.** $M = 2m$. **C.** $M + m = 0$. **D.** $M + m = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2$.

Với $t = 2 \sin x \Rightarrow t \in [-2; 2]$.

Khi đó:

$$M = \max_{[-2;2]} f(2 \sin x) = \max_{[-2;2]} f(t) = 2.$$

$$m = \min_{[-2;2]} f(2 \sin x) = \min_{[-2;2]} f(t) = -4.$$

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$\frac{21}{4}$	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			4		2		5		

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. $M.m > 10$.

B. $\frac{M}{m} > 2$.

C. $M - m > 3$.

D. $M + m > 7$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 - 2x$. Ta có $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x - 1 \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)^2 \leq \frac{25}{4}$

$\Leftrightarrow -1 \leq (x - 1)^2 - 1 \leq \frac{21}{4}$ nên $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

Xét hàm số $y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$

Từ bảng biến thiên suy ra: $m = \min_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f(1) = 2, M = \max_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{21}{4}\right) = 5 \Rightarrow \frac{M}{m} > 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$					
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y		$+\infty$		2		3		2		$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x + 3)$ trên đoạn $[0; 2]$ là

A. 64.

B. 65.

C. 66.

D. 67.

Lời giải

Chọn C

Hàm số có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ bảng biến thiên ta có:

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 3.$$

$$x \in [0, 2] \Rightarrow x + 3 \in [3, 5].$$

Trên đoạn $[3, 5]$ hàm số tăng, do đó $\min_{[0, 2]} f(x + 3) = f(3) = 66$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-2	-1	1	4			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0		3		-1		1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(\cos 2x - 4\sin^2 x + 3)$.

Giá trị của $M - m$ bằng

A. 4.

B. -4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\cos 2x - 4\sin^2 x + 3 = 3\cos 2x + 1$.

$\Rightarrow g(x) = f(3\cos 2x + 1)$, đặt $t = 3\cos 2x + 1$, khi đó với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [-2; 4]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-2; 4]} f(t) = 3; \min_{[-2; 4]} f(t) = -1$.

Suy ra $M = \max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{[-2; 4]} f(t) = 3; m = \min_{\mathbb{R}} g(x) = \min_{[-2; 4]} f(t) = -1$.

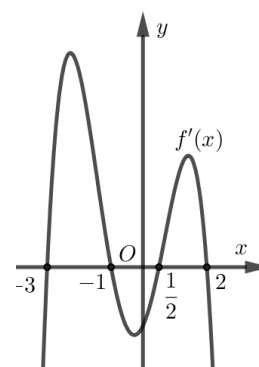
Vậy $M - m = 4$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + n$ ($a, b, c, d, e, n \in \mathbb{R}$).

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên (đồ thị cắt Ox tại 4 điểm

có hoành độ $-3; -1; \frac{1}{2}$ và 2). Đặt $M = \max_{[-3; 2]} f(|x|); m = \min_{[-3; 2]} f(|x|)$ và

$T = M + m$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $T = f(-3) + f(2)$.

B. $T = f(-3) + f(0)$.

C. $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$.

D. $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 5a(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$ (Vì phương trình

$f'(x) = 0$ có 4 nghiệm $-3; -1; \frac{1}{2}$ và 2).

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-3		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			$f(-1)$				$f(2)$		$-\infty$
		$f(-3)$				$f\left(\frac{1}{2}\right)$				

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow a < 0$.

Suy ra bảng biến thiên của $f(|x|)$:

x	-3	-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			$f(-2)$			$f(0)$			$f(2)$			$-\infty$
	$f(-3)$			$f\left(-\frac{1}{2}\right)$			$f\left(\frac{1}{2}\right)$					

Vì hàm số $f(|x|)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = f(2); f(-3) = f(3) \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$$+) f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^3 f'(x) dx = 5a \int_{\frac{1}{2}}^3 (x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) dx = \frac{11125a}{128} < 0$$

$$\Rightarrow f(-3) = f(3) < f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$+) f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x) dx = 5a \int_0^2 (x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) dx = -23a > 0$$

$$\Rightarrow f(-2) = f(2) > f(0) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow M = \max_{[-3;2]} f(|x|) = f(-2) = f(2); m = \min_{[-3;2]} f(|x|) = f(-3).$$

$$\text{Vậy } T = M + m = f(-3) + f(2).$$

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$						

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = f(3-x)$ trên $[0;3]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M = f(0)$.

B. $M = f(3)$.

C. $M = f(1)$.

D. $M = f(2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g'(x) = -f'(3-x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -1 \\ 3-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < -1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 1 \end{cases}.$$

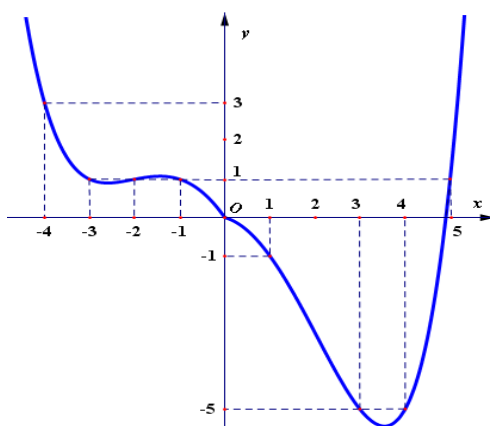
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow -1 < 3-x < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g							

Vậy $M = f(1)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi GTLN, GTNN tương ứng là M và m của hàm số $y = f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right)$. Khi đó $T = M + m$ bằng

A. -4.

B. 2.

C. -6.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

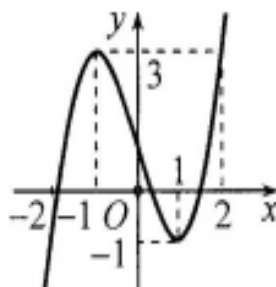
Với $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$, ta có $0 \leq \sqrt{6x - 9x^2} = \sqrt{1 - (1 - 3x)^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -4\sqrt{6x - 9x^2} \geq -4$.

$\Leftrightarrow 3 \geq 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2} \geq -1$.

Dựa vào đồ thị ta có: $-5 \leq f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) \leq 1$.

Do đó $T = M + m = -4$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khi đó GTLN của hàm số $y = f\left(\sqrt{4 - x^2}\right)$ trên nửa khoảng $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{3}\right]$ là

A. 3.

B. -1.

C. 0.

D. Không tồn tại

Lời giải

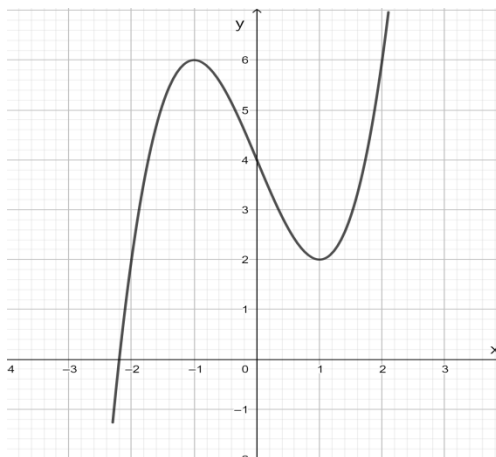
Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Ta có: $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ do $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$ nên $t \in (1; 2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in (1; 2]$ ta suy ra GTLN bằng 3.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

Trên $(-\infty; +\infty)$. Tổng của $M + m$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \frac{2x}{x^2+1}. \text{ Ta có: } t'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
t'		$-$	0	$+$	0	$-$
t						

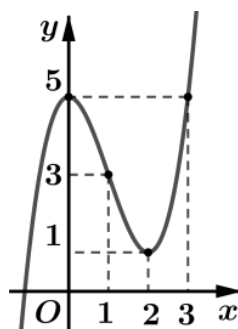
$0 \rightarrow -1 \rightarrow 1 \rightarrow 0$

Từ bảng biến thiên ta có $t \in [-1; 1]$. Quan sát đồ thị hàm số trên $[-1; 1]$, ta có

$$\begin{cases} M = \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = 6 \\ m = \min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \min_{t \in [-1; 1]} f(t) = 2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 8.$$

Dạng 2: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|)$, $y = f(|u(x)|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ như sau:



Hàm số $y = f(|x|)$ có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng

- A. 0. B. 2. **C. 1.** D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

Do đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần bên phải trục Oy , bỏ phần bên trái Oy rồi lấy đối xứng phần bên phải qua trục Oy nên giá trị nhỏ nhất bằng 1.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(0)$		$+\infty$	
		$f(-2)$		$f(4)$		

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng

- A. $f(2)$. B. $f(0)$.
C. $f(4)$. D. Không xác định được.

Lời giải

Chọn C

Từ yêu cầu bài toán ta có bảng biến thiên cho hàm số $y = f(|x|)$ như sau

x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(0)$		$+\infty$	
		$f(4)$		$f(4)$		

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{[-2;4]} f(|x|) = f(4)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	1	$+$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+$			4	
		-3			$-\infty$

Hàm số $y = f(|x-1|)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $f(-2)$.

B. $f(2)$.

C. $f(1)$.

D. $f(0)$.

Lời giải

Chọn C

$y = f(|x-1|)$. Đặt $t = |x-1|$, $t \geq 0$ thì (1) trở thành: $y = f(t)$ ($t \geq 0$).

$$\text{Có } t = \sqrt{(x-1)^2} \Rightarrow t'_x = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}}.$$

$$\text{Có } y'_x = t'_x f'(t).$$

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t'_x = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = -2(L) \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

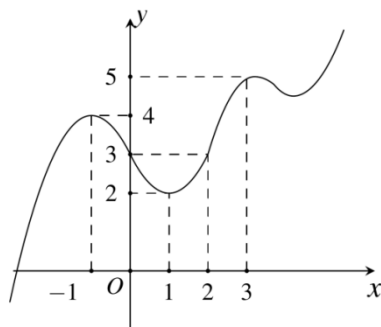
Lấy $x = 3$ có $t'(3)f'(2) < 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	0	1	2
y'		$-$	$+$
y			

CT

Hàm số $y = f(|x-1|)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng $f(1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x-2|)$ trên đoạn $[-1, 5]$. Tổng $M + m$ bằng

- A. 9. B. 8. C. 7. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Rightarrow 0 \leq |x-2| \leq 3$

Do đó $\forall x \in [-1, 5], 0 \leq |x-2| \leq 3$.

Đặt $t = |x-2|$ với $t \in [0, 3]$.

Xét hàm số $y = f(t)$ liên tục $\forall t \in [0, 3]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max_{[0,3]} f(t) = 5, \min_{[0,3]} f(t) = 2$.

Suy ra $m = 2, M = 5$ nên $M + m = 7$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	1	4	6	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	4	-2	9	$-\infty$

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|-x^2 + 2x + 5|)$ trên $[-1, 3]$ lần lượt là M, m . Tính $M + m$.

- A. 13. B. 7. C. $f(2) - 2$. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ trên $[-1, 3]$.

Hàm số $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$ có

$$g'(x) = -2x + 2, g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3].$$

$$g(1) = 6, g(-1) = 2, g(3) = 2.$$

$$\forall x \in [-1; 3] \Rightarrow g(x) \in [2; 6] \Rightarrow |g(x)| \in [2; 6].$$

Đặt $t = |g(x)| = |-x^2 + 2x + 5|$. Ta có: $y = f(|-x^2 + 2x + 5|) = f(t)$.

$$\forall x \in [-1; 3] \Rightarrow t \in [2; 6].$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(t)$ trên $[2; 6]$

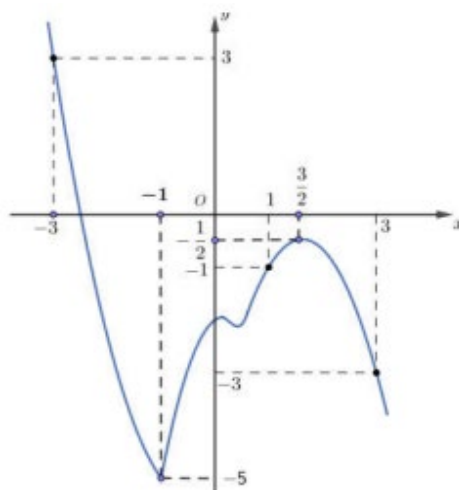
Ta có: $-2 = f(4) < f(2) < f(6) = 4$ nên

$$M = \max_{[2; 6]} f(t) = \max \{f(2); f(4); f(6)\} = f(6) = 9,$$

$$m = \min_{[2; 6]} f(t) = \min \{f(2); f(4); f(6)\} = f(4) = -2.$$

Vậy $M + m = 7$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(-\infty; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x^3 - 3x + 1|)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $M + m$.

A. $M + m = -2$.

B. $M + m = -\frac{7}{2}$.

C. $M + m = -\frac{11}{2}$.

D. $M + m = 0$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 1$ trên $[-2; 0]$.

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 0]$.

$$g'(x) = 3x^2 - 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in (-2; 0) \\ x = 1 \notin (-2; 0) \end{cases}$$

$$g(-2) = -1; g(-1) = 3; g(0) = 1.$$

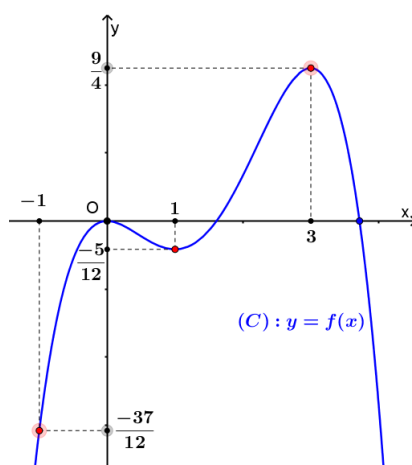
Vậy $\min_{x \in [-2;0]} g(x) = -1$ và $\max_{x \in [-2;0]} g(x) = 3 \Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [-2;0] \Rightarrow 0 \leq |g(x)| \leq 3,$
 $\forall x \in [-2;0].$

Xét hàm số $y = f(u)$ với $u = |g(x)| = |x^3 - 3x + 1|$ trên $[0;3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $M = -\frac{1}{2}$ và $m = -3$.

Vậy $M + m = -\frac{7}{2}$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị (C) như hình vẽ.



Gọi M, m theo thứ tự là GTLN-GTNN của hàm số $y = f(|-x^3 + 3x^2 - 1|)$ trên đoạn $[-1;3]$.
 Tích $M.m$ bằng

A. 0.

B. $\frac{-111}{16}$.

C. $\frac{-45}{48}$.

D. $\frac{185}{144}$.

Lời giải

Chọn C

• Hàm số $y = g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$;

$$+ g'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{Vi} \begin{cases} g(-1) = 3 \\ g(0) = -1 \\ g(2) = 3 \\ g(3) = -1 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} \min_{[-1;3]} g(x) = -1 \\ \max_{[-1;3]} g(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [-1;3].$$

$$\Rightarrow 0 \leq |g(x)| \leq 3, \forall x \in [-1; 3].$$

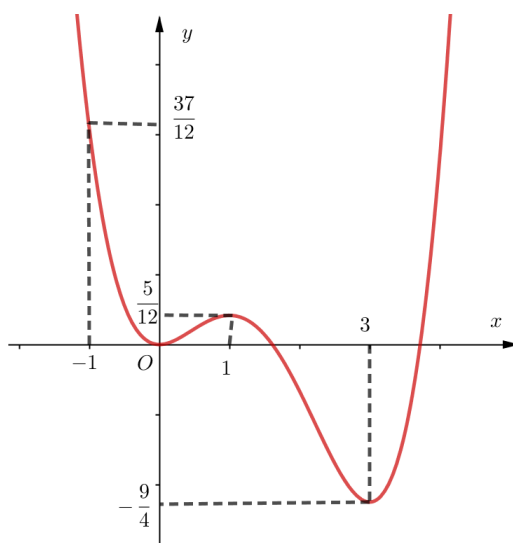
• Từ đồ thị $(C): y = f(x)$;

$$+ m = \min_{[-1;3]} f(|g(x)|) = \frac{-5}{12} \text{ khi } |g(x)| = 1 \text{ tại } x = 0 \vee x = 1 \vee x = 3 \dots$$

$$+ M = \max_{[-1;3]} f(|g(x)|) = \frac{9}{4} \text{ khi } |g(x)| = 3 \text{ tại } x = -1 \vee x = 2.$$

• Vậy $m.M = \frac{-45}{48}.$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x^3 - 3x^2 + 1|)$ trên $[-1; 3]$.
Tính $3m + M$.

A. $3m + M = \frac{7}{2}$.

B. $3m + M = \frac{-19}{3}$.

C. $3m + M = -1$.

D. $3m + M = \frac{-11}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1; 3) \\ x = 2 \in (-1; 3) \end{cases}.$$

$$g(-1) = -3; g(0) = 1; g(2) = -3; g(3) = 1.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-1;3]} g(x) = 1; \min_{[-1;3]} g(x) = -3 \Rightarrow -3 \leq g(x) \leq 1, \forall x \in [-1;3] \Rightarrow 0 \leq |g(x)| \leq 3, \forall x \in [-1;3].$$

Dựa vào đồ thị ta thấy :

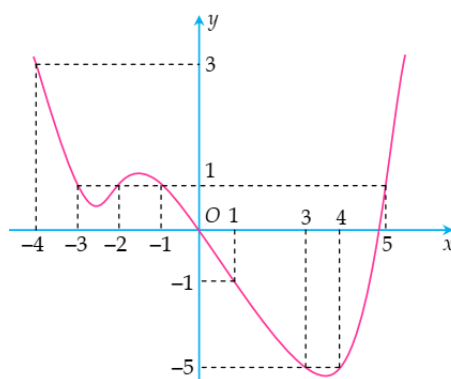
$$\text{Hàm số } y = f(|x^3 - 3x^2 + 1|) = f(|g(x)|) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất là } m = \frac{-9}{4} \text{ khi } |g(x)| = 3 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Hàm số } y = f(|x^3 - 3x^2 + 1|) = f(|g(x)|) \text{ đạt giá trị lớn nhất là } M = \frac{5}{12} \text{ khi } |g(x)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } 3m + M = \frac{-19}{3}.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|\right)$.

Giá trị biểu thức $T = 3M - m$ bằng

A. $T = 2$.

B. $T = 0$.

C. $T = -8$.

D. $T = 14$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } 6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Với } x \in \left[0; \frac{2}{3}\right] \text{ ta có: } 0 \leq \sqrt{6x - 9x^2} = \sqrt{-9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 1} \leq 1.$$

$$\Rightarrow 0 \geq -2\sqrt{6x - 9x^2} \geq -2 \Leftrightarrow 3 \geq 3 - 2\sqrt{6x - 9x^2} \geq 1.$$

$$\text{Đặt } u = \left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right| \Rightarrow 1 \leq u \leq 3.$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(u) \text{ với } u = \left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right| \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $M = -1; m = -5 \Rightarrow T = 3M - m = -3 + 5 = 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	1	-1	-3	$-\sqrt{2}-1$	$+\infty$

Xét hàm số $g(x) = x + \sqrt{1-x^2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f[\lfloor g(x) \rfloor]$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc đoạn $[m; M]$?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = g(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

$$g'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có } g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}; \quad g(-1) = -1 \text{ và } g(1) = 1.$$

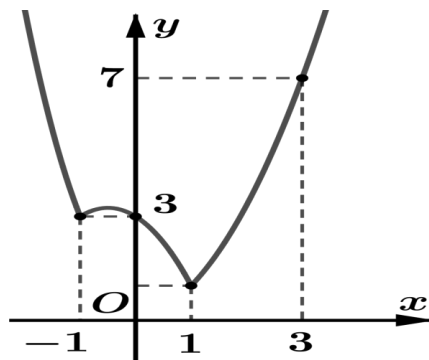
$$\text{Suy ra } -1 \leq g(x) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq \lfloor g(x) \rfloor \leq \sqrt{2}.$$

Từ bảng biến thiên của $y = f(x)$ ta được $M = -1$ và $m = -3$

Nên có 3 số nguyên thuộc khoảng $[m; M]$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là hình bên và hàm số $y = g(t) = t^3 - 3t^2 + 5$.

Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của $y = g(\lfloor f(x) - 2 \rfloor)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tích $M.m$ bằng



A. 2.

B. 3.

C. 54.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

$$y = g(|f(x) - 2|) = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5.$$

Trên $[-1; 3]$, ta có $1 \leq f(x) \leq 7 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) - 2 \leq 5 \longrightarrow 0 \leq |f(x) - 2| \leq 5$.

Đặt $t = |f(x) - 2|$ với $t \in [0; 5]$. Khi đó $y = t^3 - 3t^2 + 5 \rightarrow y' = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$.

Ta có $y(0) = 5$; $y(2) = 1$; $y(5) = 55$. Suy ra $\begin{cases} M = 55 \\ m = 1 \end{cases} \longrightarrow M.m = 55$.

Câu 12. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$ là?

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{7}{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\cos x = t$, hàm số đã cho trở thành $y = f(t) = \frac{t^2 + |t| + 1}{|t| + 1}$, với $|t| \leq 1$.

Nếu $t \in [0; 1]$ thì $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} > 0$ với mọi $t \in [0; 1]$.

Ta có: $\min_{t \in [0; 1]} f(t) = f(0) = 1$; $\max_{t \in [0; 1]} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}$

Nếu $t \in [-1; 0]$ thì $f'(t) = \frac{-t^2 + 2t}{(-t+1)^2} < 0$ với mọi $t \in [-1; 0]$.

Ta có: $\min_{t \in [-1; 0]} f(t) = f(0) = 1$; $\max_{t \in [-1; 0]} f(t) = f(-1) = \frac{3}{2}$.

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng:

$$\min_{t \in [-1;1]} f(t) + \max_{t \in [-1;1]} f(t) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + a$. Gọi $M = \max_{x \in [-3;2]} f(|x|)$, $m = \min_{x \in [-3;2]} f(|x|)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-35;35]$ sao cho $M \leq 3m$.

A. 23.

B. 24.

C. 25.

D. 26.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Để thấy rằng } M = \max_{x \in [-3;2]} f(|x|) = \max_{x \in [0;3]} f(|x|) = \max_{x \in [0;3]} f(x),$$

$$m = \min_{x \in [-3;2]} f(|x|) = \min_{x \in [0;3]} f(|x|) = \min_{x \in [0;3]} f(x).$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0;3] \\ x = 1 \in [0;3]. \end{cases}$$

$$\text{Mà } f(0) = a, f(1) = a - 2, f(3) = a + 18.$$

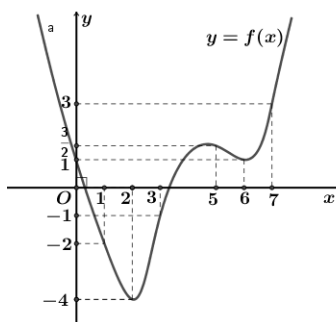
$$\text{Vậy } M = a + 18, m = a - 2.$$

Yêu cầu bài toán tương đương với $a + 18 \leq 3(a - 2) \Leftrightarrow a \geq 12$. Kết hợp với điều kiện $a \in [-35;35]$ suy ra $a \in \{12;13;14;\dots;35\}$, do đó có 24 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 3: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số

$y = f(|x|), y = f(|u(x)|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $M + m$.

A. $M + m = 4$.

B. $M + m = 7$.

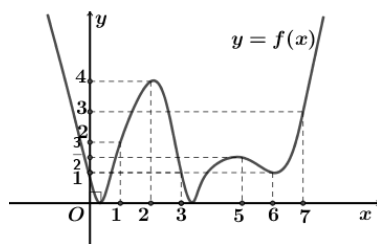
C. $M + m = 5$.

D. $M + m = 6$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2} \Rightarrow t' = \frac{-4x^2 + 4}{(2x^2 + 2)^2}; \quad t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

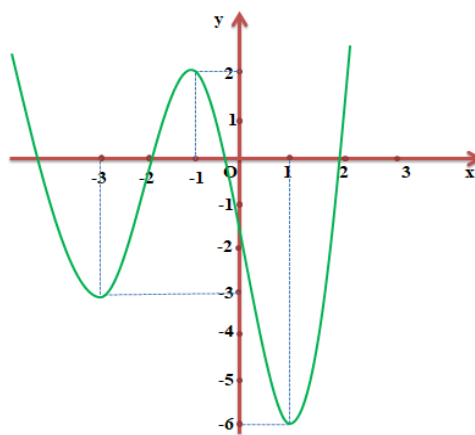
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t'	$-$	0	$+$	0
t	$\frac{3}{2}$	1	2	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in \mathbb{R} \Rightarrow t \in [1; 2]$.

$$M = \max_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = \max_{[1;2]} |f(t)| = 4; \quad m = \min_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{3x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 2}\right) \right| = \min_{[1;2]} |f(t)| = 2.$$

$$\Rightarrow M + m = 6.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x-1)|$ trên đoạn $[-3; 3]$. Tìm M .

A. $M = 0$.

B. $M = 6$.

C. $M = 5$.

D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

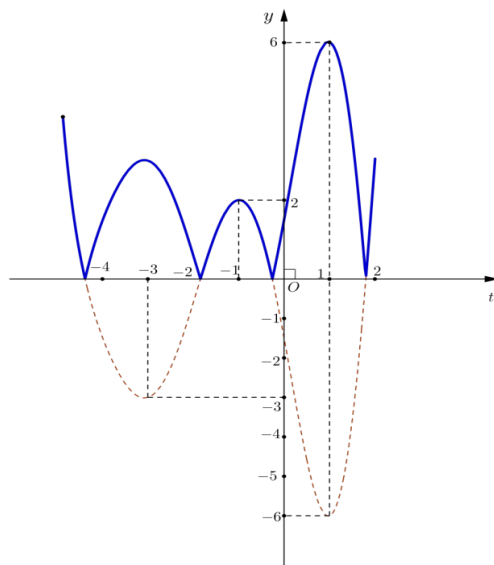
Đặt $t = x - 1$ Do $x \in [-3; 3] \Rightarrow t \in [-4; 2]$.

Xét hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$.

Cách vẽ đồ thị hàm $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$

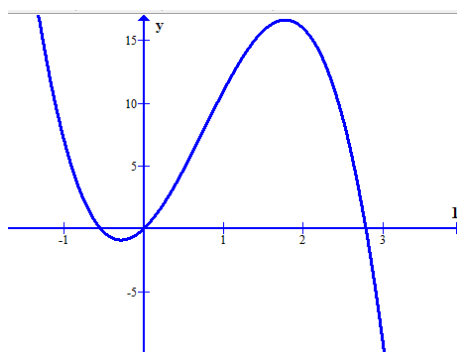
- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = f(x)$ ứng với phần phía trên trục hoành ta được nhánh (I).
- Lấy đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành qua trục hoành ta được nhánh (II).

Hợp của hai nhánh (I) và (II) ta được đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ trên $[-4; 2]$ như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị suy ra $M = 6$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ đồng thời có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = f(x) + m \Rightarrow g'(x) = f'(x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	-1	0	2	3
g'	-	0	+	0
g	$m+7$	m	$m+16$	$m-9$

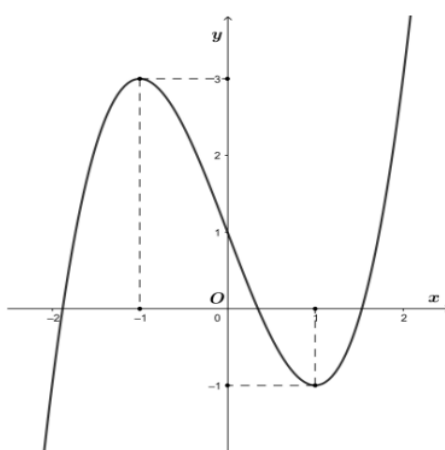
$$\max_{[-1;3]} g(x) = m+16 ; \min_{[-1;3]} g(x) = m-9 \Rightarrow \max_{[-1;3]} y = \max \{ |m+16| ; |m-9| \} .$$

$$+ \text{ Nếu } |m+16| \geq |m-9| \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2} \Rightarrow \max_{[-1;3]} y = |m+16| = m+16 = 2018 . \text{ Suy ra } m = 2002 .$$

$$+ \text{ Nếu } |m+16| \leq |m-9| \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{2} \Rightarrow \max_{[-1;3]} y = |m-9| = m-9 = 2018 . \text{ Suy ra } m = 2025 .$$

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ dưới đây



$$\text{Đặt } M = \max_R |f(\sin^2 2x)|, m = \min_R |f(\sin^2 2x)| . \text{ Tổng } M + m \text{ bằng}$$

A. 0 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 3 .

Lời giải

Chọn B

$$\forall x \in R, 0 \leq X = \sin^2 2x \leq 1$$

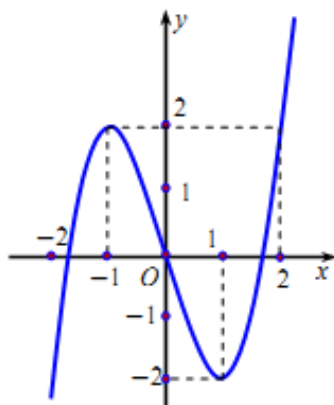
$$\text{Từ đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ trên } R \text{ ta có } \max_{[0;1]} f(X) = 1 = f(0), \min_{[0;1]} f(X) = -1 = f(1) .$$

Vì $\min_{[0;1]} f(X) = -1 < 0 < \max_{[0;1]} f(X) = 1$ nên

$$M = \max_R |f(\sin^2 2x)| = \left| \min_{[0;1]} f(X) \right| = \max_{[0;1]} f(X) = 1, m = \min_R |f(\sin^2 2x)| = 0$$

Vậy $M + m = 1$.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f\left(\sqrt{2f(\cos x)}\right) \right|$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O nên $d = 0$.

Mặt khác đồ thị hàm số còn đi qua các điểm $A(-1; 2), B(1; -2), C(2; 2)$ nên ta có hệ phương

$$\text{trình: } \begin{cases} -a + b - c = 2 \\ a + b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases}.$$

Do đó $f(x) = x^3 - 3x$.

Đặt $t = \cos x$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow t \in [-1; 0] \Rightarrow f(\cos x) = f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in [-1; 0]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 < 0, \forall t \in [-1; 0] \Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên $[-1; 0]$

$$\Rightarrow 2f(t) \in [2f(0); 2f(-1)] \text{ hay } 2f(t) \in [0; 4].$$

Đặt $u = \sqrt{2f(t)} \Rightarrow u \in [0; 2] \Rightarrow y = |f(u)| = |u^3 - 3u|$ với $u \in [0; 2]$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3 \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 1 \in [0; 2]$.

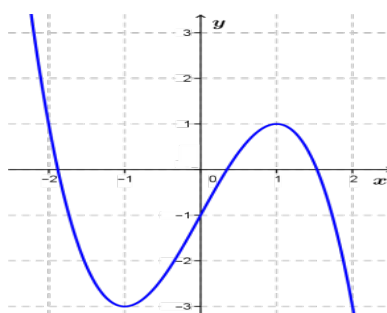
Bảng biến thiên của $f(u)$

u	0	1	2	
$f'(u)$		-	0	+
$f(u)$	0		-2	2

Từ bảng biến thiên suy ra $-2 \leq f(u) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq |f(u)| \leq 2$

Vậy $\max y = 2, \min y = 0 \Rightarrow \max y + \min y = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$ trên $\mathbb{R}$. Tính $T = M - m$.



A. 2 .

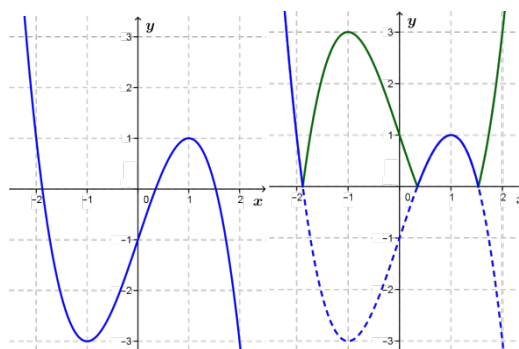
B. 0 .

C. 3 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A



Xét hàm số: $g(x) = |f(2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2)|$.

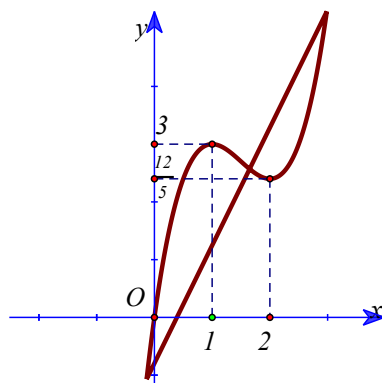
Đặt $t = 2\sin^4 x + 2\cos^4 x - 2 = 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - 2 = -4\sin^2 x \cos^2 x$

$\Rightarrow t = -\sin^2 2x$ ($-1 \leq t \leq 0$). Suy ra hàm số $g(x)$ có dạng $|f(t)|$ ($-1 \leq t \leq 0$).

Dựa vào đồ thị hàm số $|f(x)|$, ta có:

$\max g(x) = \max_{t \in [-1; 0]} |f(t)| = 3 \Rightarrow M = 3$; $\min g(x) = \min_{t \in [-1; 0]} |f(t)| = 1 \Rightarrow m = 1$. Nên $M - m = 2$

Câu 7. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $M = \max_{\mathbb{R}} \left| f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right) \right|$, $m = \min_{\mathbb{R}} \left| f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right) \right|$. Tính tổng $M + m$.

A. 3.

B. $\frac{27}{5}$.

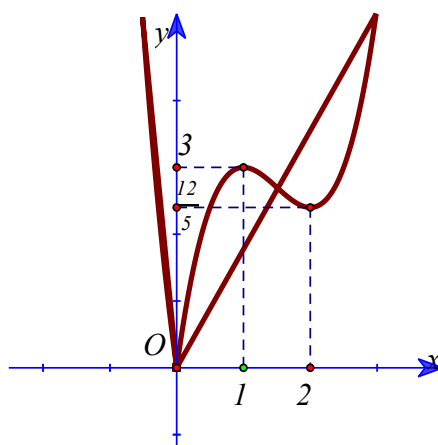
C. $\frac{22}{5}$.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

* Đồ thị $y = |f(x)|$ được vẽ như sau:



$$\text{Đặt } t = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 2 - \sin^2 2x$$

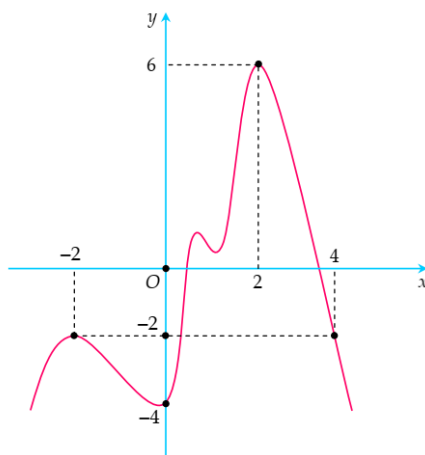
$$\text{Ta có } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sin^2 2x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$$

$$\text{Khi đó } \left| f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right) \right| = |f(t)| \text{ với } t \in [1; 2]$$

$$\text{Dựa vào đồ thị } M = \max_{\mathbb{R}} \left| f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right) \right| = \max_{t \in [1; 2]} |f(t)| = 3;$$

$$m = \min_{\mathbb{R}} \left| f\left(2(\sin^4 x + \cos^4 x)\right) \right| = \min_{t \in [1; 2]} |f(t)| = \frac{12}{5} \Rightarrow M + m = \frac{27}{5}.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới:



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right)\right) \right|$. Khi đó tổng $m + M$ là

A. $\frac{2}{3}$.

B. 4.

C. 2.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $0 \leq |\sin x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{3} |\sin x| \leq \frac{\pi}{3}$.

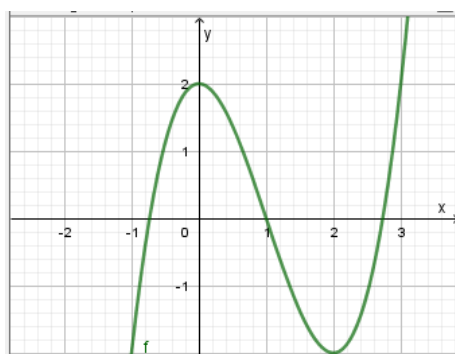
Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ hàm số $\sin$ luôn tăng nên suy ra $\sin 0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right) \leq \sin \frac{\pi}{3}$.

Hay $0 \leq \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right) \in [0; 2]$

Quan sát đồ thị ta thấy: $\frac{1}{3} f\left(\frac{4}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right)\right) \in \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$

Từ đó $\max y = 2; \min y = 0$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số $y = h(x) = |f(x^2 + 1)|$ thuộc đoạn $[0; 1]$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

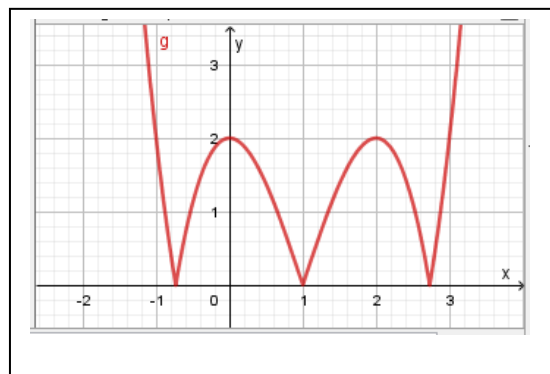
Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy đồ thị

$$y = g(x) = |f(x)|$$

Xét hàm số $h(x) = |f(x^2 + 1)|, x \in [0; 1]$

Đặt $t = x^2 + 1 (t \in [1; 2])$, suy ra hàm số có dạng

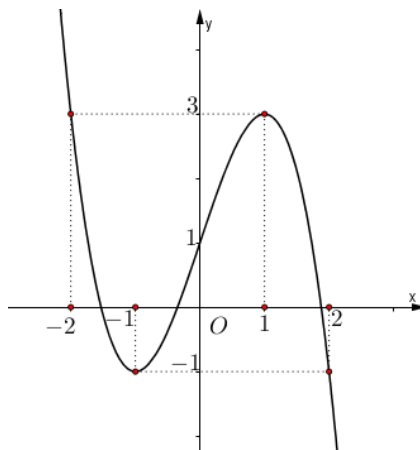
$$y = g(t) = |f(t)|$$



Dựa vào đồ thị của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$, ta suy ra được:

$$\max_{[1; 2]} g(t) = 2 \Rightarrow \max_{[0; 1]} h(x) = 2, \min_{[1; 2]} g(t) = 0 \Rightarrow \min_{[0; 1]} h(x) = 0$$

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(2x - 1)|$ trên đoạn

$$\left[0; \frac{1}{2}\right]. \text{ Tính giá trị } M - m.$$

A. 3

B. 0.

C. 1.

D. 2.

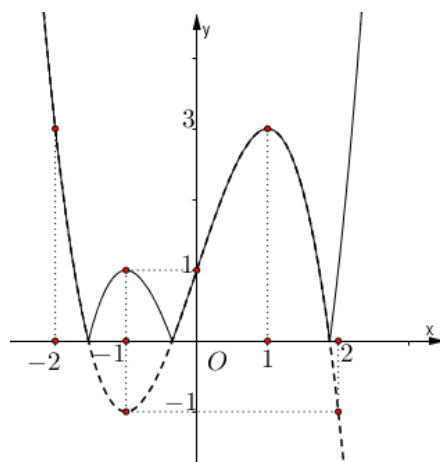
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 2x - 1$.

Với $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 0]$.

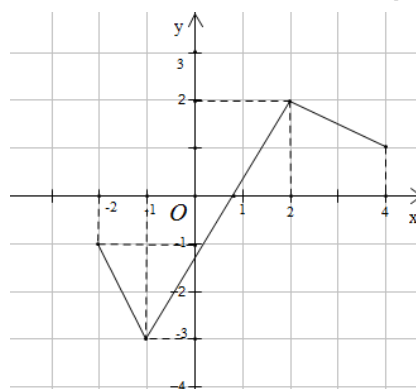
Đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ có dạng



Suy ra với $t \in [-1; 0]$ ta có $m = 0$, $M = 1$.

Vậy $M - m = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2; 4]$ như hình vẽ. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$.



A. 2.

B. $|f(0)|$.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

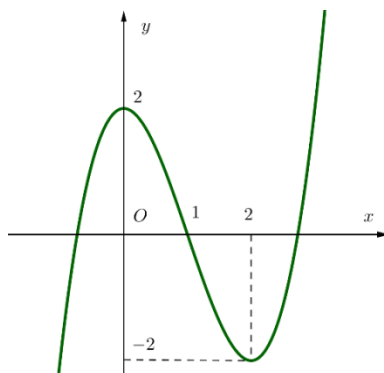
Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 4]$ ta có tập giá trị $y = f(x)$ là $[-3; 2]$.

Suy ra tập giá trị của hàm số $|f(x)|$ trên $[-2; 4]$ là $[0; 3]$.

Do đó $\max_{[-2; 4]} |f(x)| = 3$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left| \frac{3}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) \right|$ trên đoạn $[2; 4]$.

Khi đó $M + m$ bằng

- A. 4. B. 2. **C. 3.** D. 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $g(x) = \frac{3}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$

Ta có $g'(x) = \frac{3}{4} f'\left(\frac{x}{2}\right)$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[2; 4]$

x	2	4
$g'(x)$	-	
$ g(x) $	0	-3

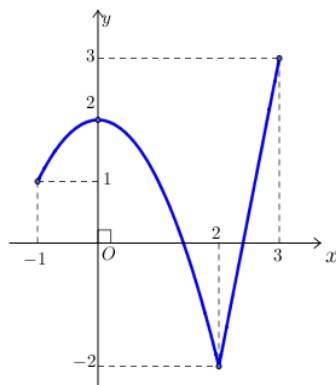
Từ BBT ta suy ra được GTLN và GTNN của hàm số $y = |g(x)|$ trên $[2; 4]$ lần lượt là 3; 0

Vậy $M + m = 3$.

Dạng 4: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x| + b), y = f(|u(x)| + b), y = f(|x + a| + b), y = f(|u(x) + a| + b)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Giá

trị lớn nhất của hàm số $y = f(3|\cos x| - 1)$ bằng



A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3|\cos x| - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có: $0 \leq |\cos x| \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3|\cos x| \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq 3|\cos x| - 1 \leq 2$.

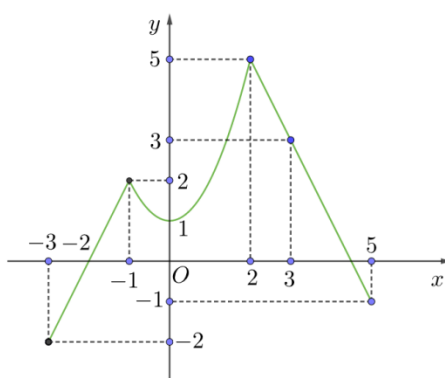
Vậy $t \in [-1; 2]$

Khi đó hàm số $y = f(3|\cos x| - 1)$ trở thành: $y = f(t)$ với $t \in [-1; 2]$.

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3|\cos x| - 1)$ bằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta có: $\max_{\mathbb{R}} f(3|\cos x| - 1) = \max_{[-1; 2]} f(t) = f(0) = 2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|3\cos x + 4\sin x| - 2)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = |3\cos x + 4\sin x| - 2$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ ta có: } (3 \cos x + 4 \sin x)^2 \leq (3^2 + 4^2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = 25.$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq |3 \cos x + 4 \sin x| \leq 5 \Leftrightarrow -2 \leq |3 \cos x + 4 \sin x| - 2 \leq 3.$$

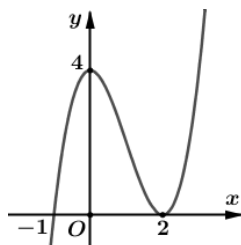
$$\text{Vậy } t \in [-2; 3]$$

Khi đó hàm số $y = f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2)$ trở thành: $y = f(t)$ với $t \in [-2; 3]$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2)$ bằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[-2; 3]$.

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } f(x) \text{ ta có: } \min_{\mathbb{R}} f(|3 \cos x + 4 \sin x| - 2) = \min_{[-2; 3]} f(t) = f(-2) = 0.$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ trên $[-4; 4]$ là

A. 0

B. 4.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

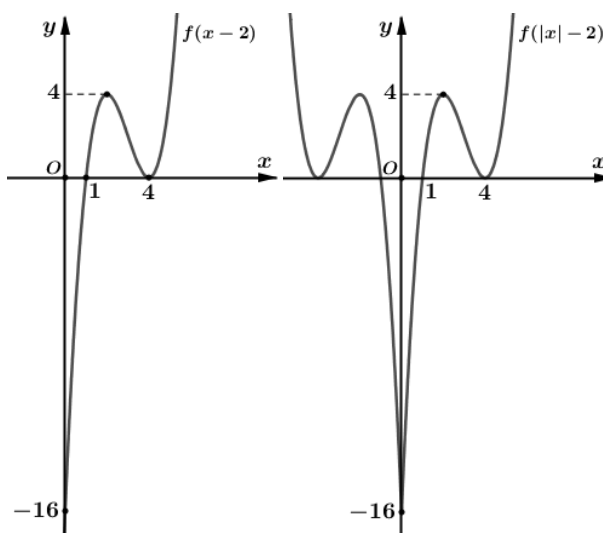
Chọn B

Xét hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Ta lại có: khi $x \geq 0$ thì hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ trở thành: $g(x) = f(x - 2)$.

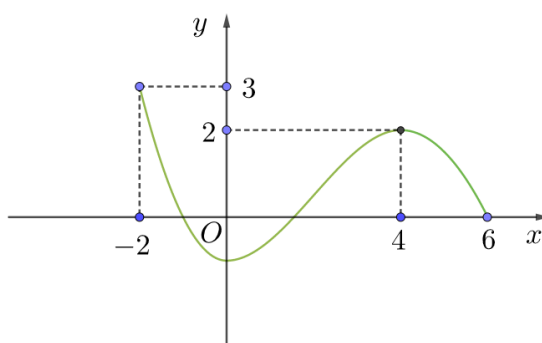
Từ đồ thị hàm số $f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $f(x - 2)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải (theo phương Ox) 2 đơn vị.

Từ đồ thị hàm số $f(x - 2)$ ta suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $f(x - 2)$ bên phải trục Oy qua trục Oy. Ta được đồ thị của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 trên $[-4; 4]$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 6]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x| + 1)$ trên đoạn $[-2; 4]$. Giá trị của M bằng

A. 3

B. -1.

C. 2.

D. 0.

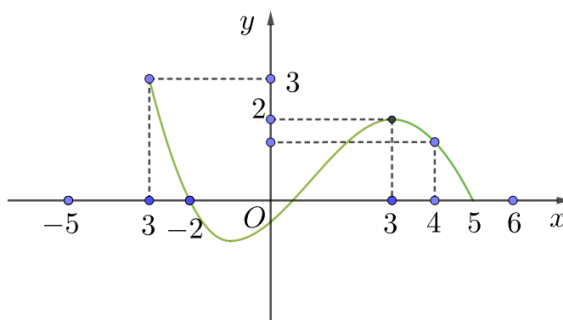
Lời giải

Chọn C

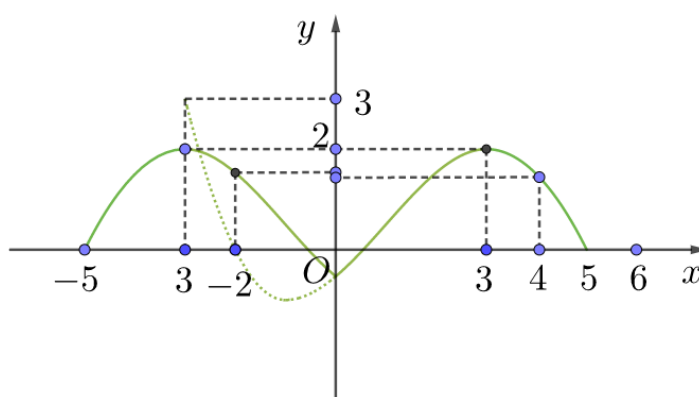
Xét hàm số $y = f(|x| + 1)$. Ta thấy hàm số là hàm chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Khi $x \geq 0$ hàm số $y = f(|x| + 1)$ trở thành $y = f(x + 1)$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái (theo phương Ox) 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ như sau:



Từ đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ bên phải trục Oy qua trục Oy , ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ như sau:

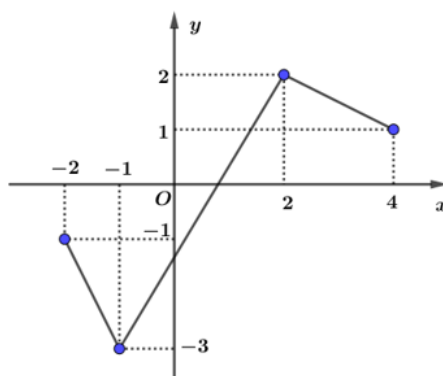


Từ đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(|x|+1)$ trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 2.

Dạng 5: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số

$y = |f(x)+b|, y = |f(u(x))+b|, y = |f(x+a)+b|, y = |f(u(x)+a)+b|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ bên. Tìm $\max_{[-2; 4]} |f(x)|$.



A. $|f(0)|$.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

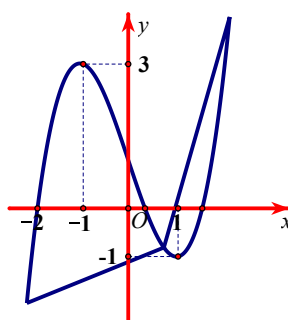
* Phương pháp tìm GTLN của hàm trị tuyệt đối:

$$\max_{[a;b]} |f(x)| = \max \left\{ \left| \max_{(a;b)} f(x) \right|; \left| \min_{[a;b]} f(x) \right| \right\}$$

Dựa vào đồ thị ta có: $\max_{[-2;4]} f(x) = 2$ khi $x = 2$ và $\min_{[-2;4]} f(x) = -3$ khi $x = -1$.

Vậy $\max_{[-2;4]} |f(x)| = 3$ khi $x = -1$.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1;1]$ lần lượt là M, m .

Tính giá trị của biểu thức $T = 673M - 2019m$.

A. $T = 2019$.

B. $T = 0$.

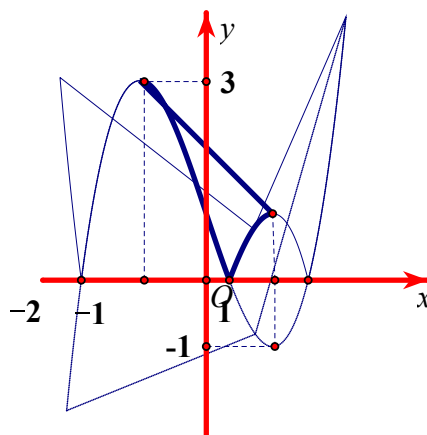
C. $T = 4038$.

D. $T = 2692$.

Lời giải

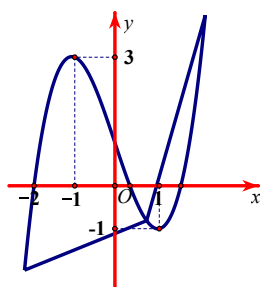
Chọn A

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.
- Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1;1]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M = 3, m = 0$ nên $T = 2019$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x+2)|$ trên đoạn $[-1; 0]$ lần lượt là M, m .

Tính giá trị của biểu thức $T = M - 3m$.

A. $T = 3$.

B. $T = 0$.

C. $T = 6$.

D. $T = 4$.

Lời giải

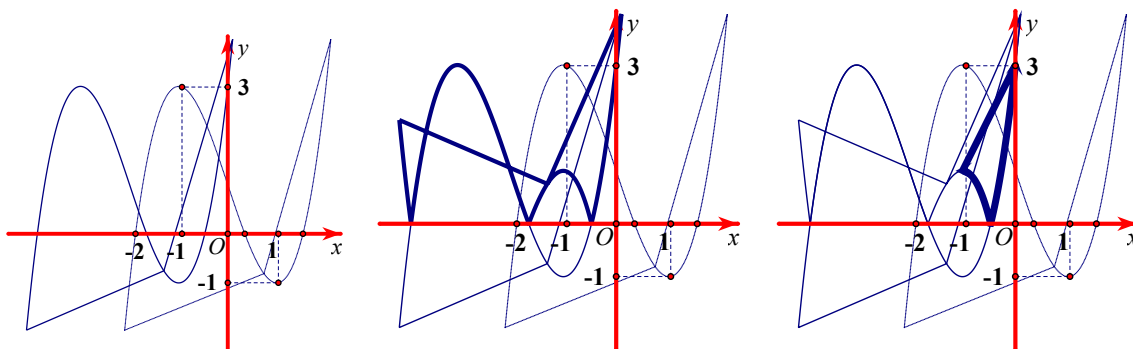
Chọn A

Cách 1:

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x+2)$

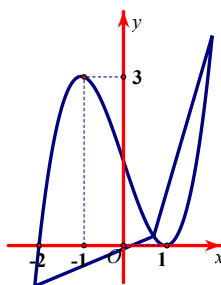
+ Vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x+2)|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x+2)$ ở phía trên trục hoành, lấy đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x+2)$ ở phía dưới trục hoành qua trục hoành, xóa bỏ phần đồ thị phía dưới trục hoành.

Từ đó suy ra phần đồ thị của hàm số $y = |f(x+2)|$ trên đoạn $[-1; 0]$



Dựa vào phần đồ thị đó, ta được $M = 3, m = 0$ nên $T = 3$.

Câu 4: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.



Gọi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x^2 + 2x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ lần lượt là M, m . Tính giá trị của biểu thức $T = M - 3m$.

A. $T = 3$.

B. $T = 0$.

C. $T = 6$.

D. $T = 4$.

Lời giải

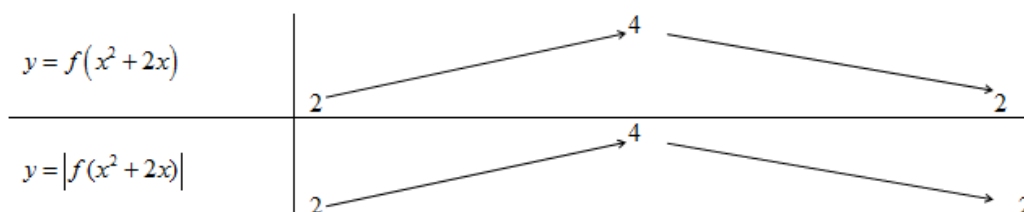
Chọn B

Xét hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow \\ x^2 + 2x = 1 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \in [-2; 0] \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \notin [-2; 0] \end{cases}$$

Cách 1: Tính $y(-2) = y(0) = f(0) = 2; y(-1) = 4$

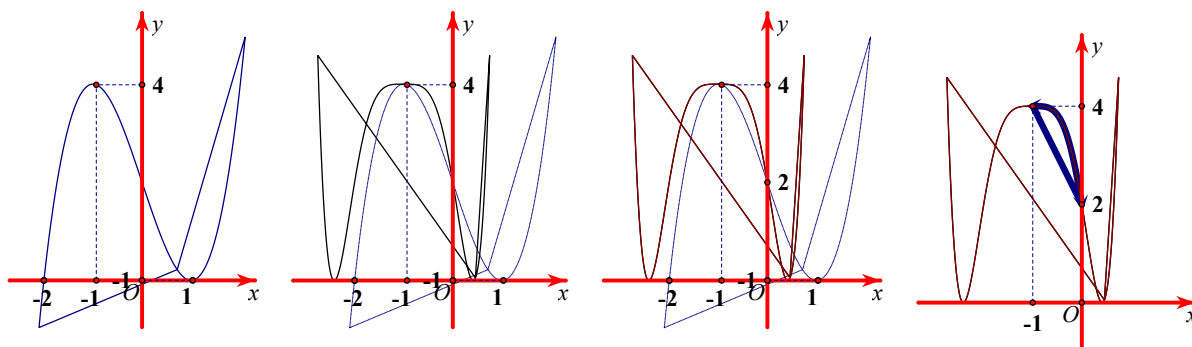


Suy ra giá trị $M = 4, m = 2$ hay $T = -2$.

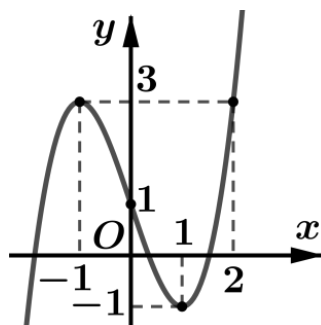
Cách 2: Lập bảng

x	-2	-1	0
$x^2 + 2x$	0	-1	0
$y = f(x^2 + 2x)$	-	0	-
$2x + 2$	-	0	+
$y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x)$	+	0	-
$y = f(x^2 + 2x)$	2	4	2
$y = f(x^2 + 2x) $	2	4	2

Vậy $M = 4, m = 2$ suy ra $T = -2$.



Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x) = |f(2x^3 + x - 1) - 13|$. Tìm $\max_{[0;1]} g(x)$.

A. -10.

B. 0.

C. 10.

D. 14.

Lời giải

Chọn D

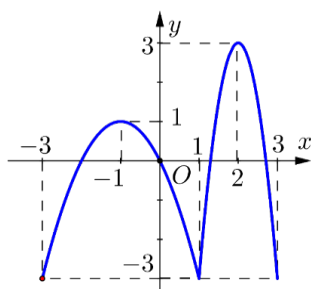
Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0;1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0;1] \longrightarrow t \in [-1;2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\begin{cases} \max_{[-1;2]} f(t) = 3 \longrightarrow \max_{[-1;2]} [f(t) - 13] = -10 \\ \min_{[-1;2]} f(t) = -1 \longrightarrow \min_{[-1;2]} [f(t) - 13] = -14 \end{cases}$

Suy ra $\max_{[0;1]} g(x) = 14$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(\sin 3x + \sin^3 x)|$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $e^{\ln M} + 2019^m$ bằng ?

A. e .

B. 4.

C. 2009^{-3} .

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin 3x + \sin^3 x = 3 \sin x$, Với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3 \sin x \in [-3; 3] \Rightarrow t \in [-3; 3]$

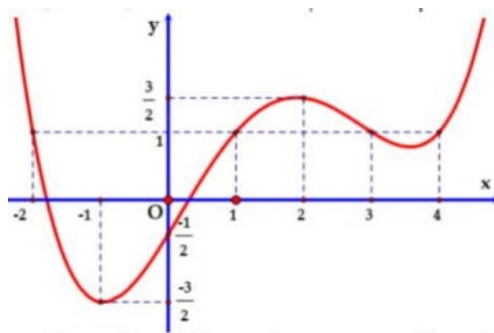
Hàm số trở thành $y = |f(t)|$

Từ đồ thị hàm $f(t)$ trên đoạn $[-3; 3]$ ta suy ra

$$\min_{[-3;3]} f(t) = -3, \max_{[-3;3]} f(x) = 3 \Rightarrow \min_{[-3;3]} |f(t)| = 0, \max_{[-3;3]} |f(x)| = 3$$

$$\text{Vậy } e^{\ln M} + 2019^m = e^{\ln 3} + 2019^0 = 4.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \left| f(\sqrt{9-x^2}) \right|$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc đoạn $[m; M]$?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $x \in [-3; 3]$. Đặt $t = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow t \in [0; 3]$ hàm số trở thành: $y = |f(t)|$

Dựa vào đồ thị hàm $f(t)$ ta có: $\min_{[0;3]} f(t) = \frac{-1}{2}, \max_{[0;3]} f(x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \min_{[0;3]} |f(t)| = 0, \max_{[0;3]} |f(x)| = \frac{3}{2}$

Vậy có duy nhất một giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.



Chuyên đề:

**CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN
LIÊN QUAN ĐẾN GTLN, GTNN
CỦA HÀM SỐ**

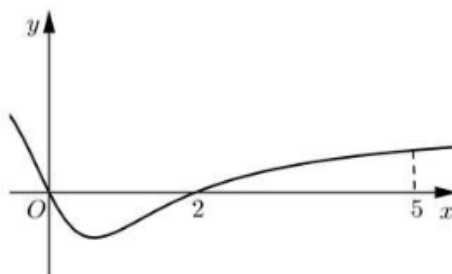
CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM ẨN LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN GTLN GTNN CỦA HÀM SỐ

PHẦN II: Xác định GTLN, NN hoặc so sánh các giá trị của hàm số thông qua tích phân hoặc so sánh diện tích hình phẳng.

1. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, đoạn.
2. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|)$ trên khoảng, đoạn.
3. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên khoảng, đoạn.
4. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.
5. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)+b|$ trên khoảng, đoạn.
6. Các dạng khác.

Dạng 7: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



A. $f(0), f(5)$.

B. $f(2), f(0)$.

C. $f(1), f(5)$.

D. $f(2), f(5)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	5	$+\infty$	
f'		0	-	0	+	
f		$f(0)$	$f(5)$	$f(2)$		

Dựa vào đồ bảng biến thiên, ta có $\min_{[2;5]} f(x) = f(2)$

Và $\max_{[0;5]} f(x) = \max \{f(0), f(5)\}$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2; 5]$ nên

$$f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

Do đó $f(5) > f(0)$, vậy $\max_{[0;5]} f(x) = \max \{f(0), f(5)\} = f(5)$

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y = f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$$S_1 = \int_0^2 |f'(x)| dx = \int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2) \text{ và } S_2 = \int_2^5 |f'(x)| dx = \int_2^5 f'(x) dx = f(2) - f(5)$$

Theo giả thiết, ta có:

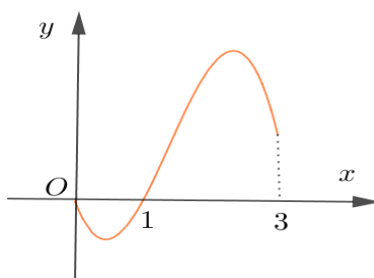
$$f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$$

$$\text{Suy ra } S_2 = \int_2^5 |f'(x)| dx > \int_3^5 |f'(x)| dx = f(5) - f(3) = S_1.$$

$$\text{Suy ra } S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(5) > f(0) > f(2).$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;5]} f(x) = f(2), \max_{[0;5]} f(x) = f(5).$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$.

A. $f(1), f(0)$.

B. $f(2), f(0)$.

C. $f(1), f(3)$.

D. $f(0), f(3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	0	1	3
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$

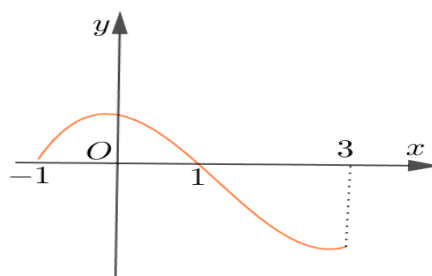
$$\text{Khi đó: } \min_{[0;3]} f(x) = f(1).$$

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$-\int_0^1 f'(x) dx < \int_1^3 f'(x) dx \Leftrightarrow f(0) - f(1) < f(3) - f(1) \Leftrightarrow f(0) < f(3).$$

Vậy $\max_{[0;3]} f(x) = f(3)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới.



Biết $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$.

- A. $f(1), f(0)$. B. $f(2), f(1)$. C. $f(1), f(-1)$. D. $f(1), f(3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	-1		1		3
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$f(-1)$		$f(1)$		$f(3)$

Vậy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(1)$

Từ bảng biến thiên ta có $f(0) < f(1), f(2) < f(1)$ vậy $f(0) + f(2) < 2f(1)$

Khi đó $f(-1) + f(0) - 2f(1) = f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(0) + f(2) - 2f(1) = f(3) - f(-1)$

Vậy $f(3) - f(-1) > 0 \Rightarrow f(3) > f(-1)$

Khi đó $\min_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đặt $M = \max_{[-2; 6]} f(x), m = \min_{[-2; 6]} f(x), T = M + m$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $T = f(0) + f(2)$

B. $T = f(5) + f(-2)$.

C. $T = f(5) + f(6)$

D. $T = f(0) + f(-2)$

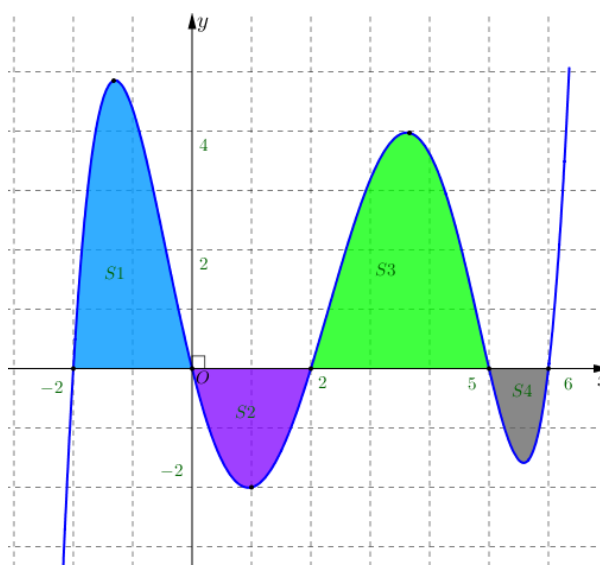
Lời giải

Chọn B

+) Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-2; 0; 2; 5; 6$ nên phương trình $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt là $x_1 = -2; x_2 = 0; x_3 = 2; x_4 = 5; x_5 = 6$. Hơn nữa $f'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0) \cup (2; 5)$ và ngược lại $f'(x) < 0, \forall x \in (0; 2) \cup (5; 6)$. Ta lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$.

x	$-\infty$	-2	0	2	5	6	$+\infty$
$f'(x)$		0	-	0	+	0	+
$f(x)$							

Diagram showing the variation of $f(x)$ between critical points: $f(-2)$ is a local minimum, $f(0)$ is a local maximum, $f(2)$ is a local minimum, $f(5)$ is a local maximum, and $f(6)$ is a local minimum.



+) Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích của các hình phẳng $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$, (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x), y = 0, x = -2, x = 0$.

(H_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

(H_3) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$.

(H_4) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 5$, $x = 6$

$$\text{Ta có } S_1 > S_2 \Leftrightarrow \int_{-2}^0 f'(x)dx > \int_0^2 -f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(-2) > f(0) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) < f(2) \quad (1).$$

$$\text{Ta có } S_2 < S_3 \Leftrightarrow \int_0^2 -f'(x)dx < \int_2^5 f'(x)dx \Leftrightarrow f(0) - f(2) < f(5) - f(2) \Leftrightarrow f(0) < f(5) \quad (2).$$

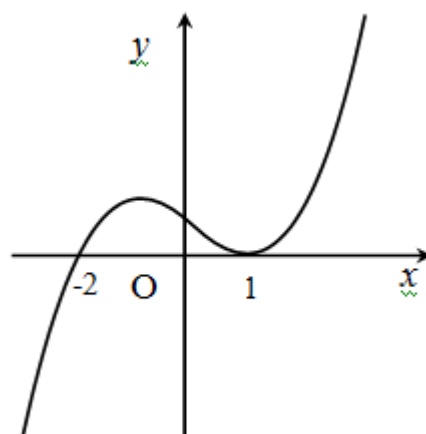
Ta có:

$$S_3 > S_4 \Leftrightarrow \int_2^5 f'(x)dx > \int_5^6 -f'(x)dx \Leftrightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(6) \Leftrightarrow f(2) < f(6) \quad (3).$$

+) Từ bảng biến thiên và (1), (2), (3) ta có:

$$M = \max_{[-2; 6]} f(x) = f(5), m = \min_{[-2; 6]} f(x) = f(-2) \text{ và } T = M + m = f(5) + f(-2) ..$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ và diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành bằng 27. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 3]$. Tính $S = M - m$.



A. 75.

B. 27.

C. 36.

D. 48

Lời giải

Chọn A

Do hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 $\Rightarrow$ hàm số $y = f'(x)$ là hàm đa thức bậc 3. Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) = a(x+2)(x-1)^2$; $a > 0$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành là:

$$a \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = 27 \Leftrightarrow \frac{27a}{4} = 27 \Leftrightarrow a = 7 \Rightarrow f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + c.$$

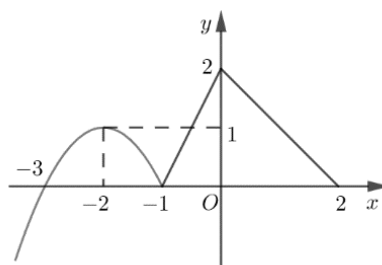
Xét hàm số $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x + c$ liên tục trên $[-3; 3]$ ta có:

$$f'(x) = 4(x+2)(x-1)^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f(-3) = 3 + c; f(-2) = -24 + c; f(1) = 3 + c; f(3) = 51 + c$$

$$\Rightarrow M = 51 + c; m = -24 + c \Rightarrow M - m = 75.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ trên $[-3; 2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(1) = 0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $m + M$.

A. $\frac{10}{3}$.

B. $-\frac{10}{3}$.

C. $-\frac{5}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

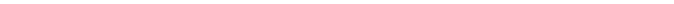
Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ giả thiết có } f'(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 3 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ 2x + 2 & \text{khi } -1 < x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + C_1 & \text{khi } -3 \leq x \leq -1 \\ x^2 + 2x + C_2 & \text{khi } -1 < x \leq 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_3 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Từ đồ thị của $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y = f(x)$

x	-3		-1		2
$f'(x)$	0	+	0	+	0
$f(x)$	$f(-3)$  $f(2)$				

$$\text{Vậy } \min_{[-3; 2]} f(x) = f(-3), \max_{[-3; 2]} f(x) = f(2). \text{ Do đó } m + M = f(-3) + f(2) = 2 + C_1 + C_3.$$

+ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -1$ nên $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) \Leftrightarrow \frac{4}{3} + C_1 = -1 + C_2$ (1)

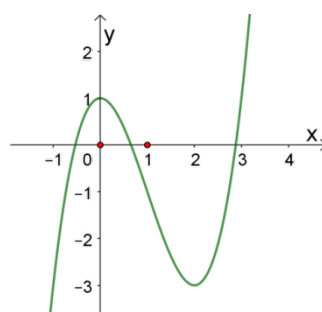
+ Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow C_2 = C_3$ (2)

+ Có $f(1) = 0 \Leftrightarrow C_3 = -\frac{3}{2}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $C_2 = C_3 = -\frac{3}{2}, C_1 = -\frac{23}{6}$

Vậy nên $m + M = 2 + C_1 + C_3 = -\frac{10}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là

A. $f(-1)$.

B. $f(3)$.

C. $f(0)$.

D. $f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$, ta có: $x \in [-1; a]$.

Với $a \in (0; 1)$ hàm số đồng biến và $x \in [a; 3]$ hàm số nghịch biến.

Ta có bảng biến thiên như sau:

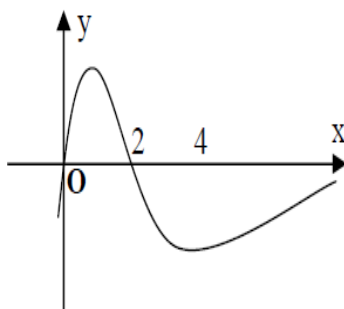
x	$-\infty$	-1	a	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$			$f(a)$		
		$f(-1)$		$f(3)$	

Mặt khác ta có $\int_{-1}^3 f'(x) dx = \int_{-1}^a f'(x) dx + \int_a^3 f'(x) dx < 0$.

Suy ra $f(3) < f(-1)$.

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $f(3)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$. Hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$.

A. $m = f(4); M = f(2)$.

B. $m = f(4); M = f(1)$.

C. $m = f(0); M = f(2)$.

D. $m = f(1); M = f(2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên trên $[0; 4]$

x	0	1	2	3	4
y'	0	+	0	+	
y	$f(0)$		$f(2)$		$f(4)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = f(2); m = \min\{f(0); f(4)\}$.

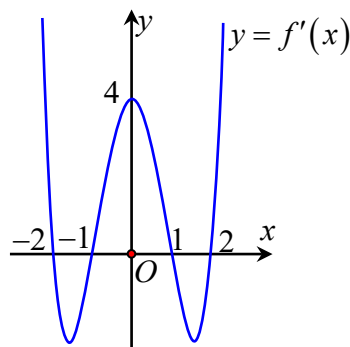
Mặt khác có $f(1) < f(2); f(3) < f(2) \Rightarrow f(1) + f(3) < 2f(2) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) > 0$.

Mà

$$f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3) \Leftrightarrow 2f(2) - f(1) - f(3) = f(0) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(4)$$

Do vậy $m = f(4)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex$ ($b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$.
Tính $M + m$.

A. $\frac{250}{3}$.

B. $\frac{38}{3}$.

C. $\frac{196}{3}$.

D. $\frac{272}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt $-2; -1; 1; 2$ nên

$$\text{Ta có } f'(x) = 5x^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 5(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 5(x^4 - 5x^2 + 4)$$

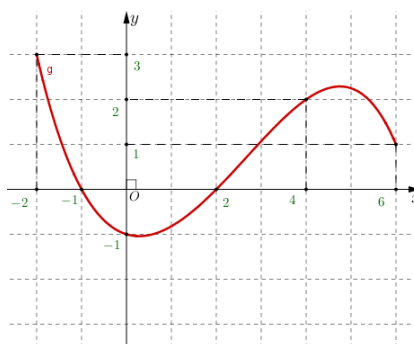
$$\text{Suy ra } f(x) = x^5 - \frac{25}{3}x^3 + 20x.$$

Xét hàm số $f(x) = x^5 - \frac{25}{3}x^3 + 20x$ trên $[-1; 3]$. Ta có

$$f(-1) = -\frac{38}{3}; f(1) = \frac{38}{3}; f(2) = \frac{16}{3}; f(3) = 78.$$

$$\text{Vậy } M = 78, m = -\frac{38}{3} \Rightarrow M + m = \frac{196}{3}.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

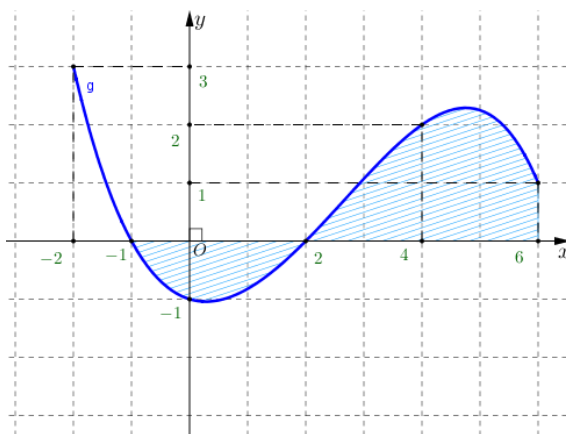
A. $\max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(-2)$. B. $\max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(2)$. C. $\max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(6)$. D. $\max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau:

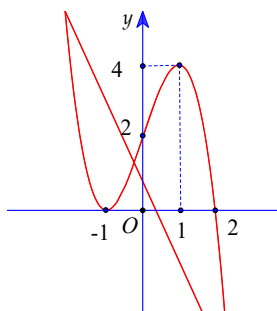
x	-2	-1	2	6		
y'		+	0	-	0	+
y			$f(-1)$			$f(6)$



Ta có

$$f(6) - f(-1) = \int_{-1}^6 f'(x) dx = \int_{-1}^2 f'(x) dx + \int_2^6 f'(x) dx = S_2 - S_1 > 0 \Rightarrow f(6) > f(-1).$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1) = \frac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{1573}{64}$.

B. 198.

C. $\frac{37}{4}$.

D. $\frac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và giả thiết $f(-1) = \frac{13}{4}$, $f(2) = 6$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$:

x	-1		2
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$		

Ta có $g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) - 3f'(x)$.

Xét trên đoạn $[-1; 2]$.

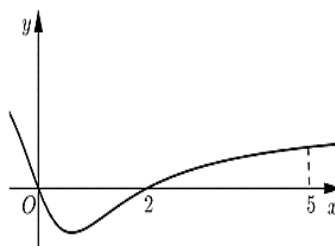
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-1		2
$g'(x)$	0	+	0
$g(x)$		↗	

$$\Rightarrow \min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \frac{1573}{64}.$$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.



A. $m = f(0), M = f(5)$.

B. $m = f(2), M = f(0)$.

C. $m = f(1), M = f(5)$.

D. $m = f(2), M = f(5)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên

x	0		2		3		5
y''	0	-	0	+		+	
y	$f(0)$		$f(2)$		$f(3)$		$f(5)$

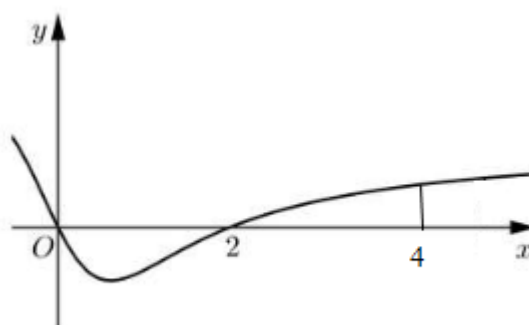
Ta có:

$$\min_{[0;5]} f(x) = f(2) \text{ và } f(3) > f(2).$$

$$\text{Mà } f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(0) - f(5) = f(2) - f(3) < 0 \Rightarrow f(0) < f(5)$$

$$\Rightarrow \max_{[0;5]} f(x) = f(5).$$

Câu 13 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(4)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ lần lượt là



A. $f(0), f(4)$.

B. $f(2), f(0)$.

C. $f(1), f(4)$.

D. $f(2), f(4)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ lập bảng biến thiên, ta có $\min_{[2;4]} f(x) = f(2)$

$$\text{Và } \max_{[0;4]} f(x) = \max \{f(0), f(4)\}.$$

Vì $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[2;4]$ nên

$$f(3) > f(2) \Rightarrow f(4) - f(2) > f(4) - f(3) = f(0) - f(2).$$

Do đó $f(4) > f(0)$, vậy $\max_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0), f(4)\} = f(4)$.

Cách 2:

Căn cứ đồ thị của $y = f'(x)$ và ứng dụng tích phân, ta có:

$$S_1 = \int_0^2 |f'(x)| dx = \int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2) \text{ và } S_2 = \int_2^4 |f'(x)| dx = \int_2^4 f'(x) dx = f(2) - f(4).$$

Theo giả thiết, ta có:

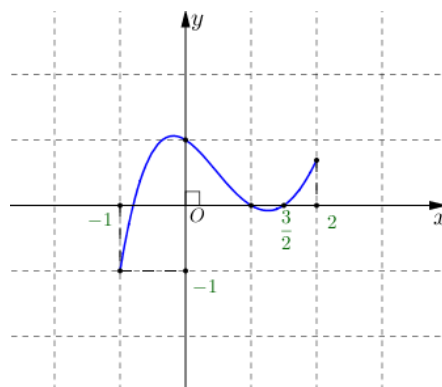
$$f(0) + f(3) = f(2) + f(4) \Rightarrow f(4) - f(3) = f(0) - f(2).$$

$$\text{Suy ra } S_2 = \int_2^4 |f'(x)| dx > \int_3^4 |f'(x)| dx = f(4) - f(3) = S_1.$$

$$\text{Suy ra } S_2 > S_1 > 0 \Rightarrow f(4) > f(0) > f(2).$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;5]} f(x) = f(2), \max_{[0;5]} f(x) = f(4).$$

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.



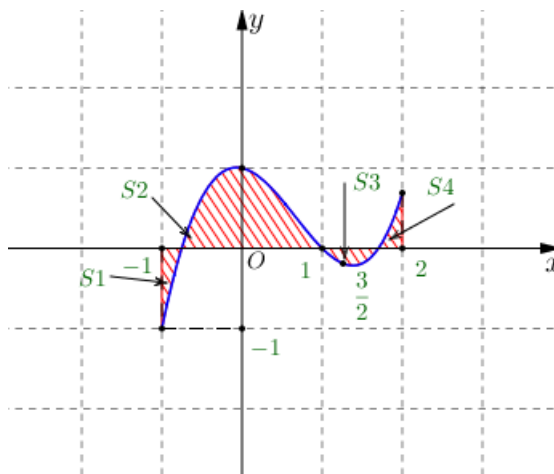
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(-1)$. B. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2)$. C. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(1)$. D. $\max_{[-1;2]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right)$

Lời giải

Chọn B

x	-1	a	1	$\frac{3}{2}$	2
y'	-	0	+	0	+
y	$f(-1)$	$f(a)$	$f(1)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$f(2)$



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = -1; x = a, y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = a; x = 1; y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = 1; x = \frac{3}{2}; y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $x = \frac{3}{2}; x = 2; y = 0$ và đồ thị $y = f'(x)$.

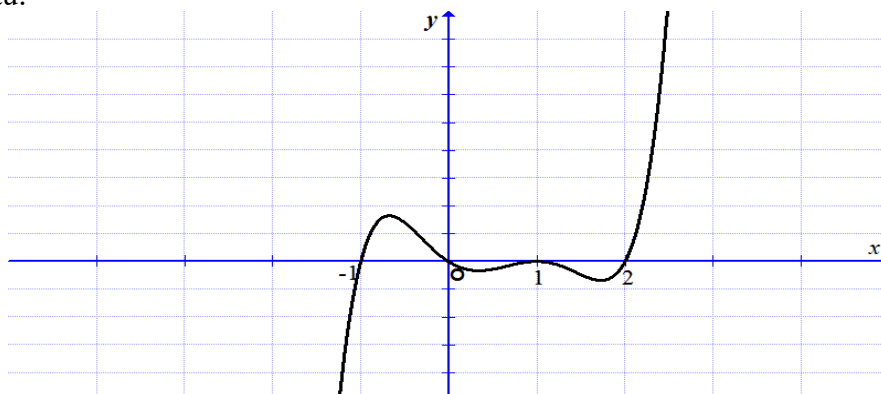
$$\text{Ta có: } f(1) - f(-1) = \int_{-1}^1 f'(x) dx = \int_{-1}^a f'(x) dx + \int_a^1 f'(x) dx = S_2 - S_1 > 0 \Rightarrow f(1) > f(-1)$$

$$f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(x) dx = \int_1^{\frac{3}{2}} f'(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 f'(x) dx = S_4 - S_3 > 0 \Rightarrow f(2) > f(1).$$

$$\text{Suy ra } f(2) > f(1) > f(-1) > f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Dạng 8: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x|)$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như sau:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-4; 3]$. Tính giá trị của $M - m$.

- A. $f(4) + f(2)$. B. $f(4) + f(0)$. C. $f(3) - f(0)$. D. $f(3) + f(2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Mặt khác hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f(|x|)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$y = f(x)$	$+\infty$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$+\infty$

x	-4	-2	0	2	3
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
$y = f(x)$	$f(4)$	$f(2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$

Từ hình vẽ của đồ thị $y = f'(x)$ ta có

$$\int_0^2 |f'(x)| dx < \int_2^3 |f'(x)| dx.$$

Suy ra:

$$-[f(2) - f(0)] < f(3) - f(2) \Leftrightarrow f(3) - f(2) > 0 \Leftrightarrow f(0) < f(3).$$

$$\int_2^3 |f'(x)| dx < \int_2^4 |f'(x)| dx$$

Suy ra:

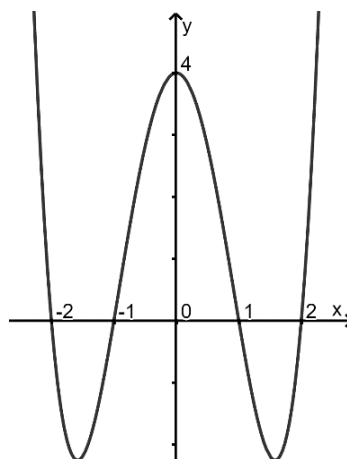
$$f(3) - f(2) < f(4) - f(2) \Leftrightarrow f(3) - f(2) > 0 \Leftrightarrow f(3) < f(4)$$

$$\text{Vậy: } f(0) < f(3) < f(4).$$

Mặt khác từ bảng biến thiên hàm số $y = f(|x|)$ ta có: $\min_{[-4;3]} f(|x|) = f(0)$.

$$\Rightarrow \max_{[-4;3]} f(|x|) = f(-4) = f(4) = M \Rightarrow M + m = f(4) + f(2).$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(|x|)$ trên đoạn $[-2; 1]$. Tính $M + m$.

A. $f(1) + f(0)$

B. $f(1) + f(-2)$

C. $f(-2) + f(-1)$

D. $f(-1) + f(0)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

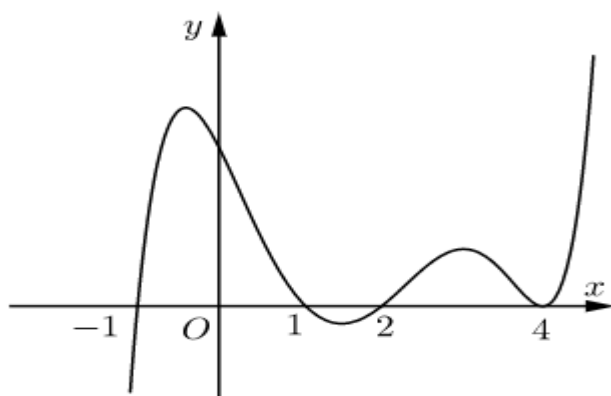
x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$	$+\infty$

Với $x \in [-2; 1]$ thì $|x| \in [0; 2]$, từ bảng biến thiên suy ra $M = f(1)$ và $m = \min\{f(0), f(2)\}$.

Do $\int_0^1 f'(x) dx > -\int_1^2 f'(x) dx \Leftrightarrow f(1) - f(0) > f(1) - f(2) \Leftrightarrow f(2) > f(0)$, nên $m = f(0)$.

Vậy $M + m = f(1) + f(0)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$?



A. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.

B. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.

C. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$.

D. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên $[-1; 4]$:

x	-1	1	2	4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(4)$	

Từ bảng biến thiên $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$:

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$f(4)$		$f(1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(4)$

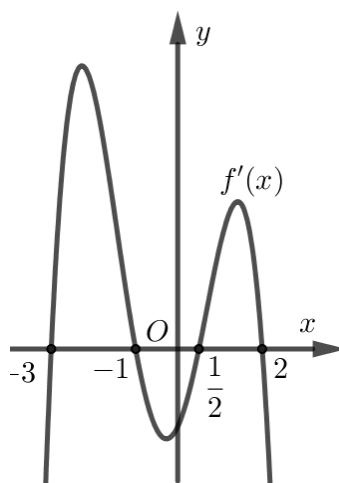
Từ hình vẽ ta có:

$$\int_0^1 |f'(x)| dx > \int_1^2 |f'(x)| dx \Leftrightarrow f(1) - f(0) > f(1) - f(2) \Rightarrow f(2) > f(0).$$

$$\int_2^4 |f'(x)| dx > \int_1^2 |f'(x)| dx \Leftrightarrow f(4) - f(2) > f(1) - f(2) \Rightarrow f(4) > f(1).$$

Vậy $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0).$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + n$ ($a, b, c, d, e, n \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên (đồ thị cắt Ox tại 4 điểm có hoành độ $-3; -1; \frac{1}{2}$ và 2). Đặt $M = \max_{[-3;2]} f(|x|); m = \min_{[-3;2]} f(|x|)$ và $T = M + m$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $T = f(-3) + f(2).$ **B.** $T = f(-3) + f(0).$ **C.** $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2).$ **D.** $T = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0).$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e = 5a(x+3)(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)$ (Vì phương trình $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm $-3; -1; \frac{1}{2}$ và 2).

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-3		-1		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			$f(-1)$				$f(2)$		$-\infty$
		$f(-3)$			$f(\frac{1}{2})$					

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow a < 0$.

Suy ra bảng biến thiên của $f(|x|)$

x	-3	-2		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$f(-2)$				$f(0)$				$f(2)$	
	$f(-3)$		$f(-\frac{1}{2})$				$f(\frac{1}{2})$				$-\infty$

Vì hàm số $f(|x|)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = f(2); f(-3) = f(3) \\ f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) \end{cases}$.

$$+) f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^3 f'(x) dx = 5a \int_{\frac{1}{2}}^3 (x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) dx = \frac{11125a}{128} < 0$$

$$\Rightarrow f(-3) = f(3) < f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

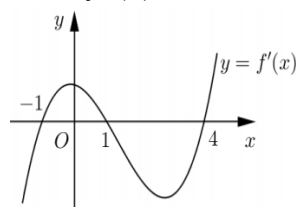
$$+) f(2) - f(0) = \int_0^2 f'(x) dx = 5a \int_0^2 (x+3)(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) dx = -23a > 0$$

$$\Rightarrow f(-2) = f(2) > f(0) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow M = \max_{[-3;2]} f(|x|) = f(-2) = f(2); m = \min_{[-3;2]} f(|x|) = f(-3).$$

$$\text{Vậy } T = M + m = f(-3) + f(2).$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình bên



Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$.

A. $f(-1)$.

B. $f(1)$.

C. $f(0)$.

D. $f(4)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$

x	-1		1		4
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	$f(-1)$		$f(1)$		$f(4)$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$

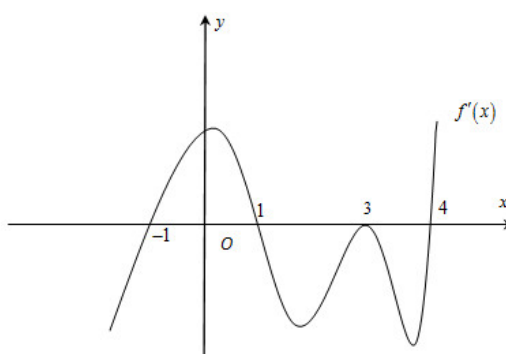
x	-1		0		1		4
$f'(x)$	0	-		+	0	-	0
$f(x)$	$f(1)$		$f(0)$		$f(1)$		$f(4)$

Từ đồ thị ta có $\int_0^1 f'(x) dx < -\int_1^4 f'(x) dx \Leftrightarrow f(x)|_0^1 < -f(x)|_1^4 \Leftrightarrow f(1) - f(0) < f(1) - f(4)$
 $\Leftrightarrow f(0) > f(4)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$ là $f(4)$.

Dạng 9: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(1) < 0$. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[1; 4]$.

A. $M = f(4), m = f(1)$.

B. $M = f(3), m = f(1)$.

C. $M = |f(4)|, m = |f(1)|$.

D. $M = |f(1)|, m = |f(4)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	1	3	4
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	$f(1)$  $f(4)$		

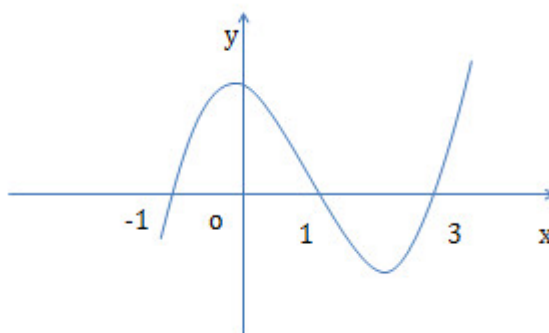
Do $f(1) < 0$ nên ta có $f(4) < f(1) < 0 \Rightarrow |f(4)| > |f(1)|$

Ta có bảng biến thiên:

$f'(x)$	0	-	0	-	0
$f(x)$	$f(1)$  $f(4)$				
$g(x) = f(x) $	$ f(1) $  $ f(4) $				

Vậy $M = |f(4)|; m = |f(1)|$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1; 1]$.

Khi đó $M; m$ là

A. $M = f(-1), m = f(1)$.

B. $M = |f(1)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(1)|$.

D. $M = f(-1), m = |f(1)|$.

Lời giải

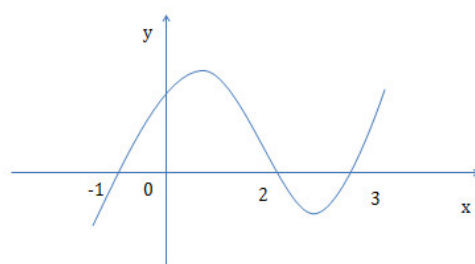
Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1; 1]$ nên $f(-1) < f(1) < 0, \forall x \in [-1; 1]$.

Do đó $|f(-1)| > |f(1)|, \forall x \in [-1; 1]$ nên

$$\max_{[-1; 1]} g(x) = |f(-1)|; \min_{[-1; 1]} g(x) = |f(1)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(1)|.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) < 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1; 3]$.

Khi đó $M; m$ là

A. $M = f(-1), m = f(3)$.

B. $M = |f(3)|, m = |f(-1)|$.

C. $M = |f(-1)|, m = |f(2)|$.

D. $M = |f(-1)|, m = |f(3)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $[-1; 2]$ và nghịch biến trên $[2; 3]$ nên $f(-1) < f(2) < 0, \forall x \in [-1; 2]$ và $f(3) < f(2) < 0, \forall x \in [2; 3]$.

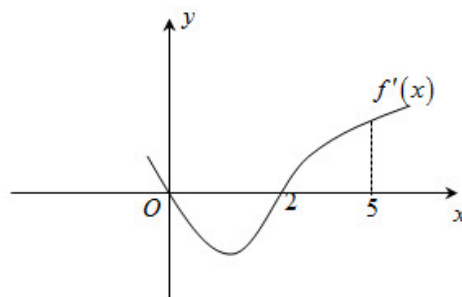
Mặt khác ta có

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx > \int_2^3 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_{-1}^2 > -f(x) \Big|_2^3 \Rightarrow f(2) - f(-1) > -f(3) + f(2) \Rightarrow f(-1) < f(3)$$

$$\text{Do đó ta có } f(-1) < f(3) < f(2) < 0, \forall x \in [-1; 3] \Rightarrow |f(-1)| > |f(3)| > |f(2)|$$

$$\max_{[-1;3]} g(x) = |f(-1)|; \min_{[-1;3]} g(x) = |f(2)| \Rightarrow M = |f(-1)|, m = |f(2)|.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;5]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[0;5]$ như hình vẽ.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$ và $f(5) < 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên đoạn $[0;5]$.

- A. $|f(3)|, |f(5)|$. B. $|f(2)|, |f(0)|$. C. $|f(2)|, |f(5)|$. D. $|f(0)|, |f(5)|$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	-	0	+		+	
$f(x)$	$f(0)$		$f(2)$		$f(3)$		$f(5)$

Theo giả thiết ta có $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Leftrightarrow f(5) - f(0) = f(3) - f(2)$ mà $f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) > f(0)$

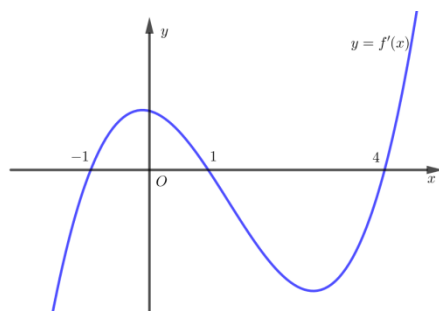
Cũng theo giả thiết ta có $f(5) < 0$ nên $f(2) < f(0) < f(5) < 0 \Rightarrow |f(2)| > |f(0)| > |f(5)|$

Do đó ta suy ra bảng biến thiên sau

x	0		2		3		5
$f'(x)$	0	-	0	+		+	
$f(x)$	$f(0)$		$f(2)$		$f(3)$		$f(5)$
$g(x) = f(x) $	$ f(0) $		$ f(2) $				$ f(5) $

Vậy $\max_{[0;5]} g(x) = |f(2)|$; $\min_{[0;5]} g(x) = |f(5)|$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây và $f(1) < 0$.



Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 4]$ bằng

A. $|f(0)|$.

B. $|f(1)|$.

C. $|f(-1)|$.

D. $|f(4)|$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x)$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1	1			4	
$f'(x)$		+	0	-		
$f(x)$		$f(-1)$ $f(1)$ $f(4)$				

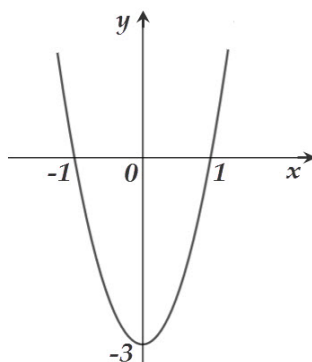
Từ đồ thị hàm số, suy ra $\int_{-1}^1 |f'(x)| dx < \int_1^4 |f'(x)| dx \Rightarrow \int_{-1}^1 f'(x) dx < -\int_1^4 f'(x) dx$

$$\Rightarrow f(x) \Big|_{-1}^1 < -f(x) \Big|_1^4 \Rightarrow f(-1) > f(4).$$

Ta có $f(4) < f(-1) < f(1) < 0 \Rightarrow |f(4)| > |f(-1)| > |f(1)| \Rightarrow \max_{[-1,4]} |f(x)| = |f(4)|$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng

$y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[0; 3]$ bằng

A. 20.

B. 60.

C. 22.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$ và $x = 1$ nên $f'(x) = k(x-1)(x+1)$ với k là số thực khác 0.

Vì đồ thị hàm $f'(x)$ đi qua điểm $(0; -3)$ nên ta có $-3 = -k \Leftrightarrow k = 3$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$. Mà $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ nên ta có được $a = 1, b = 0, c = -3$.

Từ đó $f(x) = x^3 - 3x + d$.

Do đồ thị $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm nên ta có

$$\begin{cases} x^3 - 3x + d = 4 \\ 3x^2 - 3 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \text{ có nghiệm. Suy ra } \begin{cases} x = -1 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Do đó $f(x) = x^3 - 3x + 2$ và $y = |f(x)| = |x^3 - 3x + 2|$ với $x \in [0; 3]$.

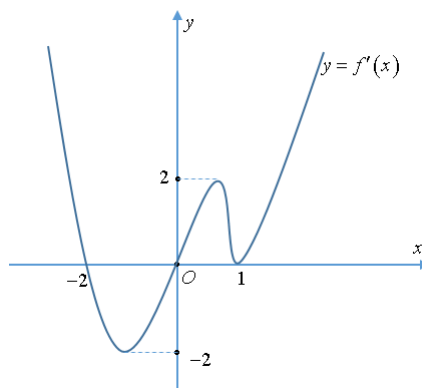
Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ và $f(0) = 2; f(1) = 0; f(3) = 20$.

Suy ra $m = \min_{[0;3]} f(x) = 0$ và $M = \max_{[0;3]} f(x) = 20$.

Vậy $\max_{[0;3]} |f(x)| = \max \{|m|; |M|\} = 20$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ được cho như

hình bên dưới và $f(-2) = 3, f(0) = -5, f(1) = 0$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x)| + 1$ trên $[-2; 1]$. Khi đó $M^2 + m^2$ bằng



A. 8.

B. 25.

C. 37.

D. 34.

Lời giải

Chọn C

Quan sát đồ thị $f'(x)$ ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên:

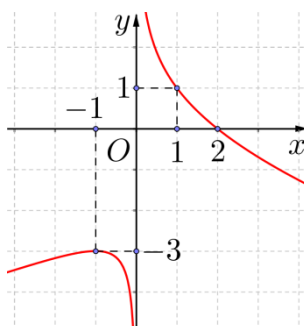
x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		3		0	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta có: $x \in [-2; 1]$ thì $f(x) \in [-5; 3] \Rightarrow |f(x)| + 1 \in [1; 6]$.

Suy ra $M = 6$ và $m = 1$.

Vậy $M^2 + m^2 = 37$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng về cả hai phía như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 3]$, biết rằng $f(1) = \frac{2}{5}$ và

$$f(-1) + f(0) + f(1) = 0.$$

A. $|f(0)|.$

B. $|f(-1)|.$

C. $|f(2)|.$

D. $|f(3)|.$

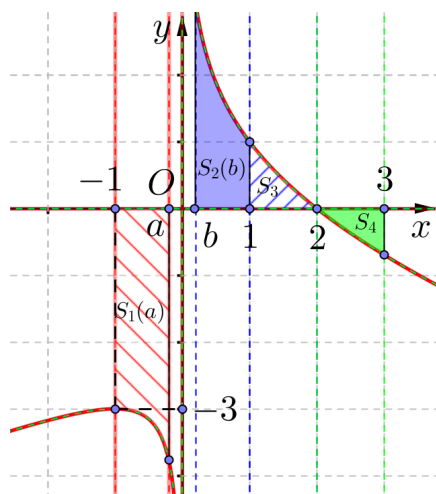
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$.

Do $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên bảng biến thiên của $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là:

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	-		+	0	-
$f(x)$	$f(-1)$	$f(0)$	$\frac{2}{5}$	$f(2)$	$f(3)$



Vì $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Gọi $S_1(a)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = a$ với $a \in (-1; 0)$ (Hình vẽ).

$$\text{Ta có } f(-1) - f(0) = \lim_{a \rightarrow 0^-} [f(-1) - f(a)] = \lim_{a \rightarrow 0^-} \left(\int_a^{-1} f'(x) dx \right) = \lim_{a \rightarrow 0^-} S_1(a) > 3$$

$$\text{Suy ra } f(0) < f(-1) - 3 \quad (*)$$

Gọi $S_2(b)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = b$, $x = 1$ với $b \in (0; 1)$.

$$\text{Khi đó } f(1) - f(0) = \lim_{b \rightarrow 0^+} [f(1) - f(b)] = \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\int_b^1 f'(x) dx \right) = \lim_{b \rightarrow 0^+} S_2(b) > 1$$

$$\text{Suy ra } f(0) < f(1) - 1 \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra } 2f(0) < f(-1) + f(1) - 4$$

$$\Rightarrow 3f(0) < f(0) + f(-1) + f(1) - 4 = -4 \Rightarrow f(0) < -\frac{4}{3} \Rightarrow |f(0)| > \frac{4}{3} \quad (1)$$

Từ bảng biến thiên ta có $f(-1) > f(0)$.

$$\text{Lại có } f(0) = -[f(1) + f(-1)] \Rightarrow |f(0)| = f(1) + f(-1) = \frac{2}{5} + f(-1) > f(-1)$$

$$\text{Do đó ta có } f(0) < f(-1) < |f(0)| \Rightarrow |f(0)| > |f(-1)| \quad (2)$$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 1, x = 2$.

$$\text{Ta có } f(2) > f(1) = \frac{2}{5} > 0 \text{ và } f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(x) dx = S_3 < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < f(2) < \frac{1}{2} + f(1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

$$\text{Do đó } |f(0)| > \frac{4}{3} > \frac{9}{10} > f(2) = |f(2)| \quad (3)$$

Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f'(x)$, $y = 0$, $x = 2, x = 3$.

$$\text{Ta có } f(2) - f(3) = \int_3^2 f'(x) dx = S_4 < 1 \Rightarrow f(3) > f(2) - 1 > f(1) - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Kết hợp với } f(3) < f(2) < \frac{9}{10} \text{ nên } |f(3)| < \frac{9}{10}, \text{ suy ra } |f(3)| < |f(0)| \quad (4)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3), (4) suy ra } \max_{x \in [-1; 3]} |f(x)| = |f(0)|.$$

Chú thích của tác giả: Sáng tác dựa trên hàm số $f(x) = -\frac{3}{5}(x-5)\sqrt[3]{x^2} - 2$.

Dạng 10: Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(|x+a|+b)$ trên khoảng, đoạn.

1. Lý thuyết:

$$+) g'(x) = \frac{x+a}{|x+a|} \cdot f'(|x+a|+b).$$

+) Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f'(x)$ giải phương trình $g'(x) = 0$ và tìm các giá trị của x trên khoảng, đoạn đã cho mà tại đó $g'(x)$ không xác định. Từ đó lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$, dựa vào bảng biến thiên để kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

+) Một số bài toán cần tìm ra công thức của hàm số $y = f(x)$. Khi đó, dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $f'(x)$ và các giả thiết khác để thiết lập công thức của hàm số $f'(x)$, từ đó tìm công thức $y = f(x)$ bằng phép toán nguyên hàm.

+) Một số bài toán cho đồ thị của hàm số $f'(x)$, để tìm GTLN, NN của hàm số $f(|x+a|+b)$ cần dùng đến phép toán tích phân. Đặc biệt ý nghĩa của tích phân về diện tích hình phẳng.

+) Nếu biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$, bằng phép biến đổi đồ thị thì chúng ta có thể suy ra được đồ thị $y = g(x) = f(|x+a|+b)$.

+) Một số bài toán tìm GTLN, NN của hàm số $y = g(x) = f(|x+a|+b)$ trên đoạn $[c;d]$, bằng cách đặt $t = |x+a|+b$, với $x \in [c;d]$ thì $t \in [m;n]$. Khi đó ta chuyển về tìm GTLN, NN của hàm số $f(t)$ trên $[m;n]$.

2. Bài tập:

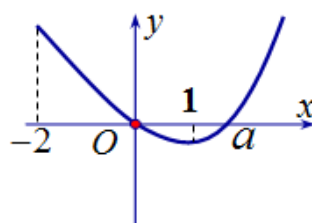
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ). Khi đó hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất là M, m trên đoạn $[0;1]$. Khẳng định đúng là:

A. $M - m = f(-1) - f(0)$.

B. $M + 2m = f(0) + 2f(-1)$.

C. $2M - m = 2f(a) - f(0)$.

D. $m - M = f(-1) - f(0)$



Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x	-2	0		a
$f'(x)$		+	0	- 0 +
$y = f(x)$		↗ $f(0)$ ↘		↗ $f(a)$

Xét hàm $h(x) = f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y = f(x)$ sang trái 1 đơn vị. Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x	-1		$a-1$
$h(x) = f(x+1)$	↗ $f(0)$ ↘		↗ $f(a)$

Hàm $p(x) = f(|x+1|)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

+ Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x \geq -1$).

+ Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

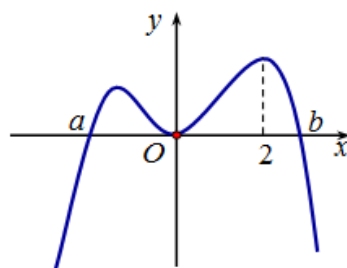
x	$-a-1$	-1	$a-1$
$p(x) = f(x+1)$	$f(a)$	$f(0)$	$f(a)$

Hàm số $g(x) = f(|x+1|-2)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 2 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x	$-a+1$	1	$a+1$
$g(x) = f(x+1 -2)$	$f(a)$	$f(0)$	$f(a)$

Vì $a > 1$ nên $-a+1 < 0$ nên trên đoạn $[0;1]$ có $M = \max_{[0;1]} g(x) = f(0)$, $m = \min_{[0;1]} g(x) = f(-1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ (như hình vẽ). Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(|x+1|-3)$ trên đoạn $[1;4]$. Phát biểu nào sau đây đúng?



A. $M = g(4)$, $m = g(2)$.

B. $M = g(2)$, $m = g(4)$.

C. $M = g(a)$, $m = g(b)$.

C. $m = g(a)$, $M = g(b)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên:

x	a		0		b		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$y = f(x)$	$f(a)$		$f(0)$		$f(b)$		

Xét hàm số $h(x) = f(x+1)$ có đồ thị được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $y = f(x)$ sang trái 1 đơn vị. Khi đó, ta được bảng biến thiên:

x	$a-1$		-1		$b-1$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$f(a)$		$f(0)$		$f(b)$		

Hàm $p(x) = f(|x+1|)$ có đồ thị được suy ra từ đồ thị hàm $h(x)$ bằng cách:

+ Giữ nguyên phần bên phải Oy (với $x \geq -1$).

+ Lấy đối xứng phần bên phải Oy qua trục tung.

Ta được bảng biến thiên:

x	$-b-1$	-1	$b-1$
$p(x)$	$f(b)$	$f(0)$	$f(b)$

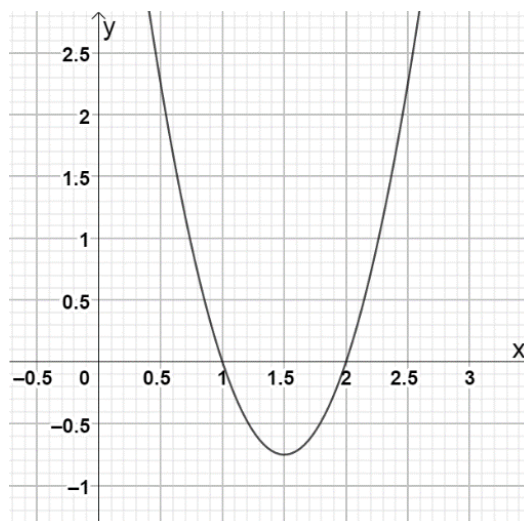
Hàm số $g(x) = f(|x+1|-3)$ có đồ thị được tạo thành bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm $p(x)$ sang phải 3 đơn vị. Ta được bảng biến thiên:

x	$-b+2$	2	$b+2$
$g(x)$	$f(b)$	$f(0)$	$f(b)$

Vì $b > 2$ nên $b+2 > 4$. Đồ thị hàm $g(x)$ đối xứng qua đường thẳng $x=2$ nên ta có $g(1) = g(3)$ và $g(3) < g(4) < g(b+2)$.

Vậy $M = \max_{[1;4]} g(x) = g(4)$, $m = \min_{[1;4]} g(x) = g(2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $\min_{\mathbb{R}} f'(x) = -\frac{3}{4}$, $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x-2|+1)$ trên đoạn $[1;3]$ có dạng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ và phân số đó tối giản. Tính $m^2 + n^2$.

A. 85.

B. 74.

C. 61.

D. 58.

Lời giải

Chọn C

Vì $f'(x)$ là hàm số bậc hai nên nó có dạng: $f'(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ và giả thiết ta có

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = -\frac{3}{4} \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^2 - 3x + 2$$

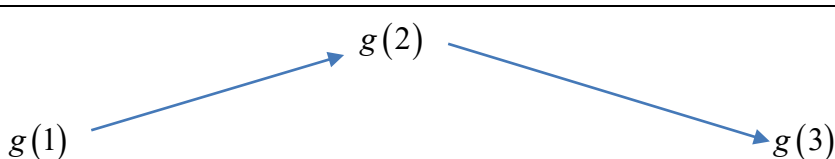
$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C.$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \text{ nên } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{x-2}{|x-2|} f'(|x-2|+1) \text{ với } x \neq 2.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x-2|+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-2|+1 = 1 \text{ (VN do } x \neq 2) \\ |x-2|+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên

x	1	2	3		
$g'(x)$	0	+		-	0
$g(x)$					

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có } \max_{[1;2]} g(x) = g(2) = f(1) = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Do đó } m = 5, n = 6 \Rightarrow m^2 + n^2 = 61.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = f'(-2018) = 0$, và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(|x-1|-2018)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1009; 2)$.

B. $(-2015; 1)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(-\infty; -2015)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f'(x)$					

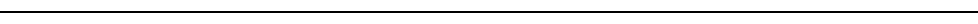
Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-2018	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

$$y = f(|x-1|-2018) \Rightarrow y' = \frac{x-1}{|x-1|} f'(|x-1|-2018) \text{ với } x \neq 1.$$

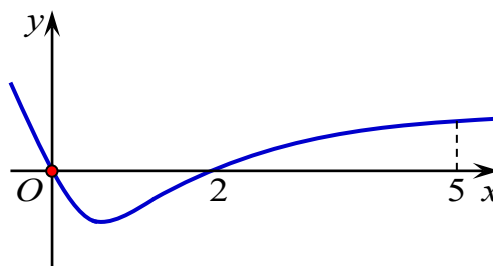
$$y' = 0 \Leftrightarrow f'(|x-1|-2018) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|-2018 = 2 \\ |x-1|-2018 = -2018 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2021 \\ x = -2019 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(|x-1|-2018)$

x	$-\infty$	-2019	1	2021	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$
$g(x)$							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min_{\mathbb{R}} g(x) = g(1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên.



Biết $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $y = f(|x+3|-2)$ trên đoạn $[-1;4]$ lần lượt là

- A. $f(0), f(5)$. B. $f(2), f(5)$. C. $f(0), f(2)$. D. $f(-1), f(4)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	0	2	5
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	CT		

Suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$.

Từ giả thiết, ta có: $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;5]$.

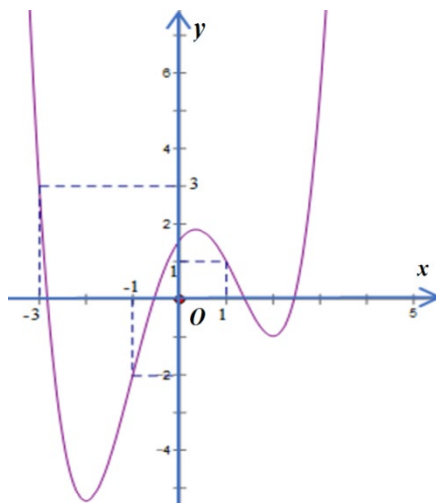
$\Rightarrow f(3) > f(2) \Rightarrow f(5) - f(2) > f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$ nên $f(5) > f(0)$.

Suy ra, $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

Đặt $t = |x+3|-2$, với $x \in [-1;4]$ thì $t \in [0;5]$. Khi đó giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = f(|x+3|-2)$ trên đoạn $[-1;4]$ cũng chính là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0;5]$.

Do đó $\min_{[-1;4]} f(|x+3|-2) = \min_{[0;5]} f(x) = f(2)$; $\max_{[-1;4]} f(|x+3|-2) = \max_{[0;5]} f(x) = f(5)$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

B. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(1)$.

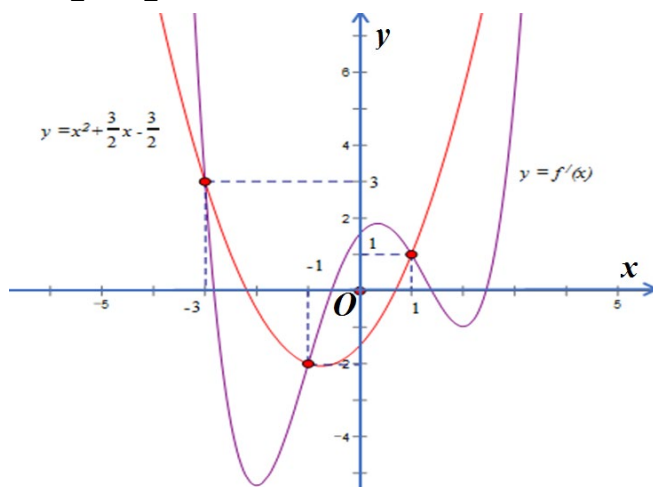
C. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-3)$.

D. $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$



$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập Bảng biến thiên

x	-3	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(1)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

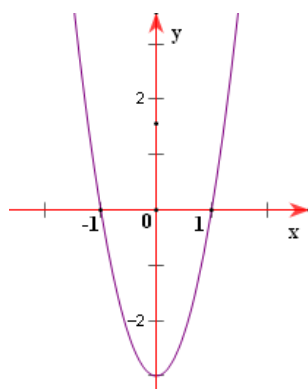
Đặt $t = |x+3|-4$ với $x \in [-2;2]$ thì $t \in [-3;1]$.

Khi đó $\min_{[-2;2]} g(|x+3|-4) = \min_{[-3;1]} g(t) = g(-1)$.

Dạng 11. Cho đồ thị, BBT của hàm số $y = f'(x)$, tìm GTLN, GTNN của hàm số

$y = |f(x) + b|$ trên khoảng, đoạn.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(1) = -5$; $f(3) = 15$.



Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của tập S có giá trị bằng

A. -10.

B. -8.

C. 8.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x) = f(x) + m$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

Ta có: $h'(x) = f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Khi đó $h(1) = m - 5$; $h(3) = m + 15$.

Để hàm số $y = |h(x)|$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1;3]$ bằng 3 thì đồ thị hàm số $y = h(x)$ phải nằm hoàn toàn phía dưới hoặc phía trên trục hoành (tức không cắt trục hoành) trên $[1;3]$.

Trường hợp 1: $m + 15 < 0 \Leftrightarrow m < -15$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = |m + 15| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -18 \text{ (tm)} \\ m = -12 \text{ (l)} \end{cases}$.

Trường hợp 2: $m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$ thì $\min_{[1;3]} |f(x) + m| = m - 5 = 3 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (tm)}$.

Vậy $S = \{-18; 8\}$. Do đó chọn phương án A.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-4	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$

Biết $f(-4) = f(4) = -7$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + 5|$ trên đoạn $[-4; 4]$ đạt được tại điểm nào?

A. $x = -4$.

B. $x = -1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 4$.

Lời giải

Chọn C

Xét $g(x) = f(x) + 5 \Rightarrow g'(x) = f'(x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4$.

Bảng biến thiên

x	-4	-1	2	4		
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2					-2

Diagram illustrating the function $g(x)$ and its derivative $g'(x)$ over the interval $[-4, 4]$.

The derivative $g'(x)$ is zero at $x = -1$ and $x = 2$. The function $g(x)$ has local extrema at these points: a local minimum at $x = -1$ and a local maximum at $x = 2$.

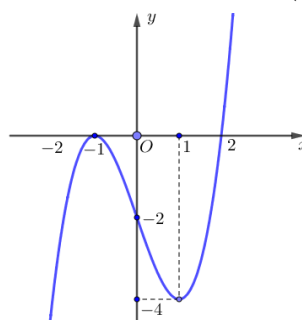
The function values at the endpoints and critical points are:

- $g(-4) = -2$
- $g(-1) = -2$ (Local Minimum)
- $g(2) = -2$ (Local Maximum)
- $g(4) = -2$

The diagram shows the function $g(x)$ as a curve connecting these points, with arrows indicating the direction of the curve.

Từ bảng biến thiên ta thấy $y = |f(x) + 5|$ đạt GTLN tại $x = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới.



Biết $f(2) = -4, f(-2) = -5, f(0) = -1$. Xét hàm số $y = g(x) = |f(x^2 - 2) + 3|$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ bằng 2.

B. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ đạt được tại $x = 0$ hoặc $x = 2$.

C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 2]$ bằng 1.

D. Có hai giá trị của x để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-2; 2]$.

Lời giải

Chọn C

$g'(x) = 2x.f'(x^2 - 2)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x.f'(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

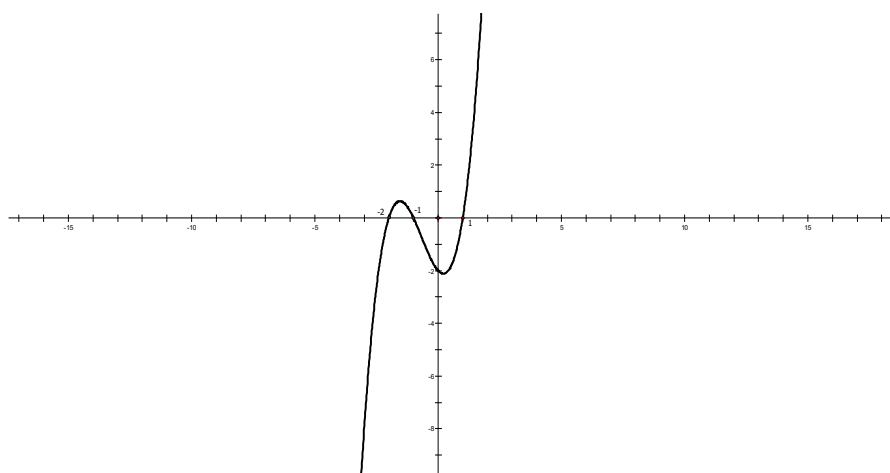
$$f'(x^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 2 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$2x$	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x^2-2)$	+	0	-	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	+	0	+
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên, ta thấy đáp án C là sai.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau và $f(-1) < -2$



Khi đó gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + 2|$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là M, m . Tổng $M + m$ bằng

A. $g(-2) + g(1)$.

B. $g(-2) + g(-1)$.

C. $|f(-1) + 2| + |f(1) + 2|$.

D. $|f(-1) + f(1) + 4|$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ ta có BBT của hàm $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$y = f(x)$	$+\infty$		$f(-1)$		$+\infty$		
		$f(-2)$		$f(1)$			

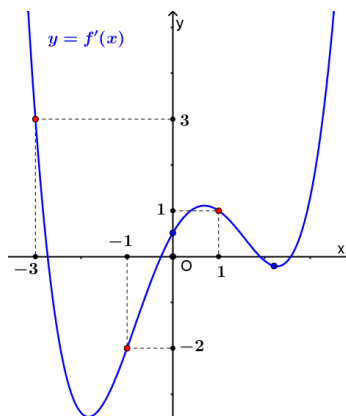
Ngoài ra ta có: $\int_{-2}^{-1} |f'(x)| dx < \int_{-1}^1 |f'(x)| dx \Rightarrow f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(1)$.

$$\Rightarrow f(-2) > f(1) \Rightarrow -2 > f(-1) > f(-2) > f(1).$$

Từ đó $f(1) + 2 < f(-2) + 2 < f(-1) + 2 < 0$ hay $g(1) > g(-2) > g(-1)$.

Dạng 12. Các dạng khác.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2019$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

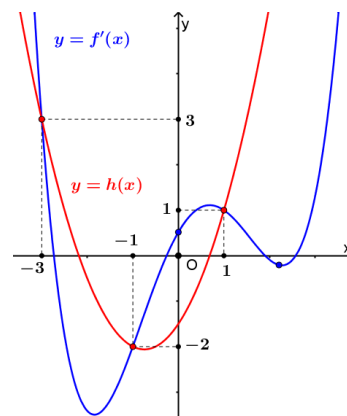
D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

Lời giải

Chọn C

• Ta có: $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$



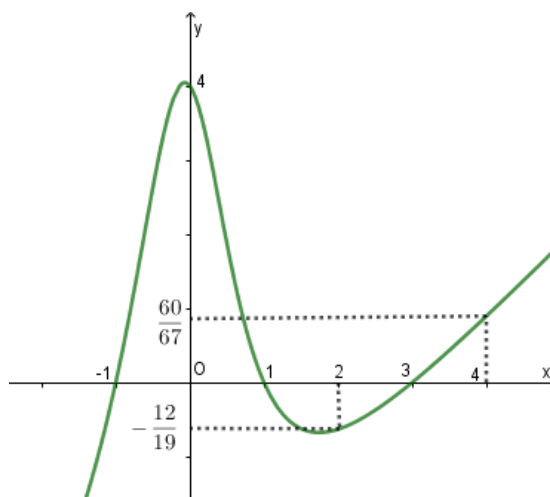
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3		-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$		$g(-3)$		$g(-1)$		$g(1)$	

• Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \frac{1}{2}f(2x-1) + \frac{11}{19}(2x-1)^2 - 4x$ trên khoảng $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ bằng

A. $\frac{1}{2}f(1) + \frac{11}{19}$.

B. $\frac{1}{2}f(4) - \frac{14}{19}$.

C. $\frac{1}{2}f(0) - 2$.

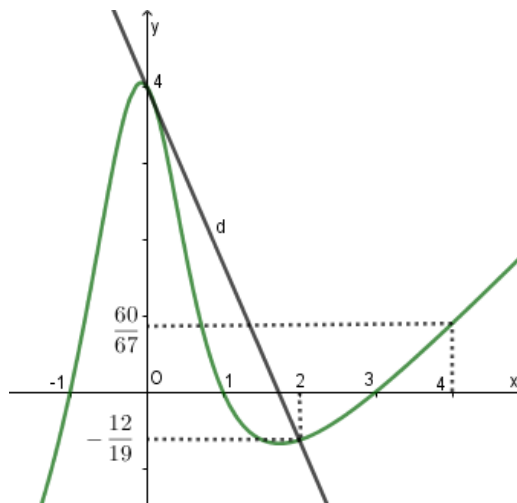
D. $\frac{1}{2}f(2) - \frac{70}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(2x-1) + \frac{44}{19}(2x-1) - 4 = 0 \Leftrightarrow f'(2x-1) = -\frac{44}{19}(2x-1) + 4$.

Đặt $t = 2x-1 \Rightarrow f'(t) = -\frac{44}{19}t + 4$ với $0 \leq x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow -1 \leq t \leq 4$.

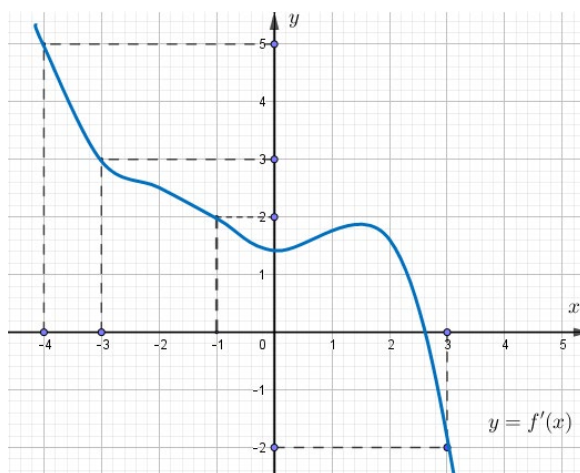


Từ đồ thị ta có $f'(t) = -\frac{44}{19}t + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên hàm số $g(t)$ Giá trị nhỏ nhất hàm số đạt được khi $t = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

suy ra $(g(x))_{\min} = \frac{1}{2}f(2) - \frac{70}{19}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.



Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x_0 = -3$.

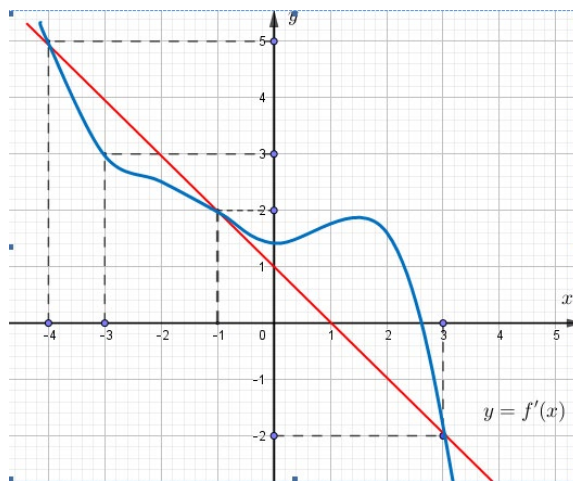
B. $x_0 = -4$.

C. $x_0 = -1$.

D. $x_0 = 3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có

$$g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2(1-x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x.$$

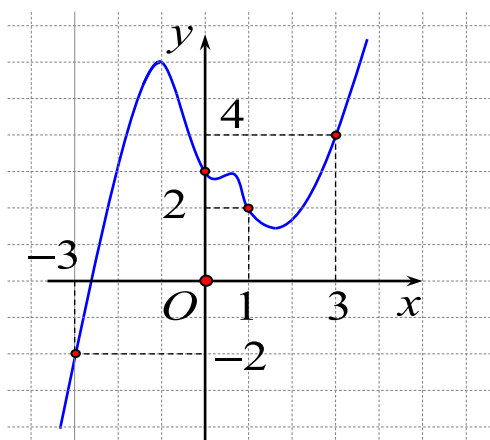
Dựa vào hình vẽ ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Và ta có bảng biến thiên

x	-4	-1	3
g'	$-$	0	$+$
g		$\searrow$	$\nearrow$

Suy ra hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x_0 = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

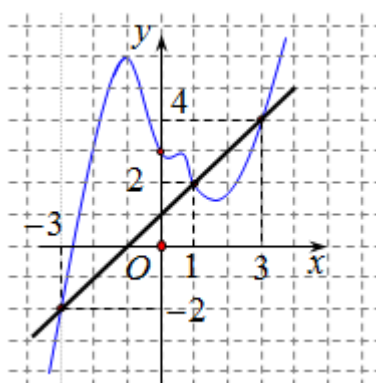
C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Lời giải

Chọn B

$$g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 (*)$$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy đường thẳng $y = x+1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại

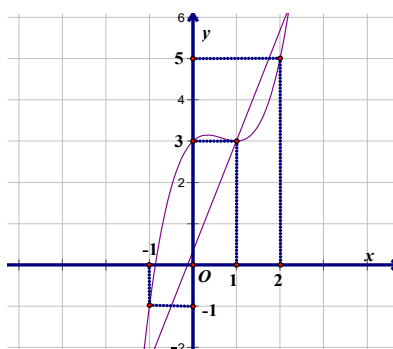
ba điểm lần lượt có hoành độ là: $-3; 1; 3$. Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

t	-3		1		3
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-3)$	$g(1)$			$g(3)$

Vậy $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như dưới đây.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $g(-1) > g(1) > g(2)$.

B. $g(-1) > g(2) > g(1)$.

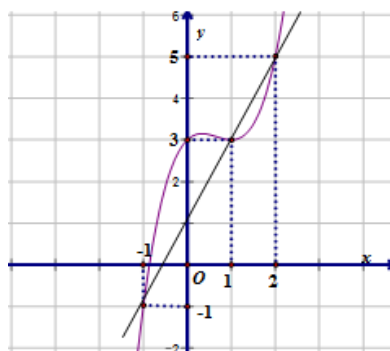
C. $g(1) > g(2) > g(-1)$.

D. $g(1) > g(2) > g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 (*)$.



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$

tại ba điểm lần lượt có hoành độ là $-1; 1; 2$. Do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

t	-1		1		2
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$	$g(-1)$	↗		↘	
			$g(1)$		$g(2)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-1;2]} = g(1)$.

Đồ thị hàm số $y = g'(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 ($-1 < x_0 < 0$).

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = g'(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = x_0$

$$S_1 = -\int_{-1}^{x_0} g'(x) dx = g(-1) - g(x_0).$$

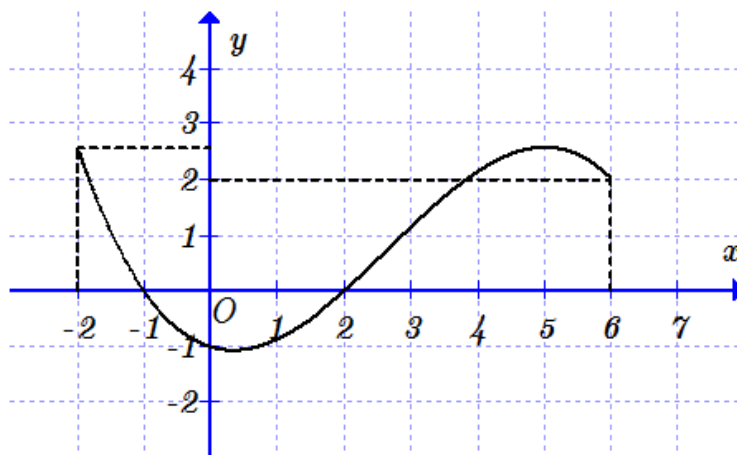
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = g'(x)$, $y = 0$, $x = x_0$, $x = 2$

$$S_2 = \int_{x_0}^2 g'(x) dx = g(2) - g(x_0).$$

$$S_1 < S_2 \Rightarrow g(-1) - g(x_0) < g(2) - g(x_0) \Leftrightarrow g(-1) < g(2).$$

$$\text{Vậy } g(1) > g(2) > g(-1).$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



A. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-2).$

B. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(2).$

C. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(6).$

D. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-1).$

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 6]$

x	-2	-1	2	6
y'		+	0	-
y				

Do đó hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục Ox .

$$\Rightarrow S_1 = \int_{-1}^2 [-f'(x)] dx = f(-1) - f(2).$$

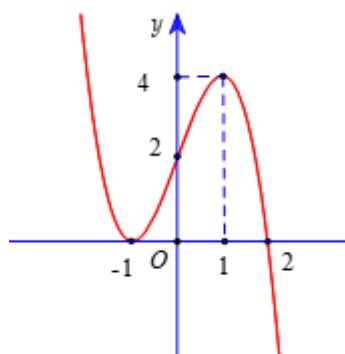
Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 2; x = 6$.

$$\Rightarrow S_2 = \int_2^6 f'(x)dx = f(6) - f(2).$$

$$\text{Ta có } S_2 > S_1 \Rightarrow f(6) - f(2) > f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(6) > f(-1).$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(6).$$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1) = \frac{13}{4}$, $f(2) = 6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{1573}{64}$

B. 198.

C. $\frac{37}{4}$.

D. $\frac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	-1		2
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$		
			6

$$\text{Ta có } g'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) - 3f'(x).$$

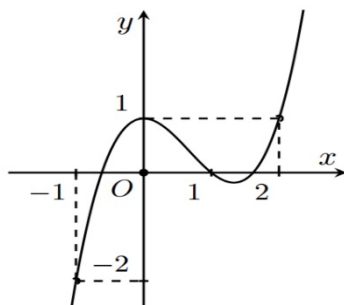
$$\text{Xét trên đoạn } [-1; 2] \text{ ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f^2(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$g(-1) = \frac{1573}{64}, g(2) = 198.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \max_{[-1;2]} g(x) = 198, \min_{[-1;2]} g(x) = \frac{1573}{64}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;2]} g(x) + \min_{[-1;2]} g(x) = \frac{14245}{64}.$$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét hàm số $y = g(x)$ thỏa mãn $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\max_{[0;2]} g(x) = g(1).$

B. $\max_{[0;2]} g(x) = g(2)..$

C. $\max_{[0;2]} g(x) = g(0).$

D. $\max_{[0;2]} g(x) = \frac{g(0) + g(2)}{2}..$

Lời giải

Chọn A

+) Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

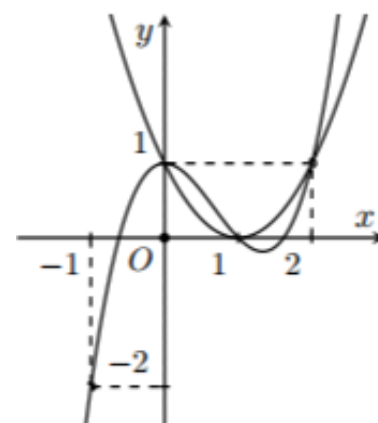
$$g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1 = f'(x) - (x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x-1)^2, x \in \mathbb{R}.$$

+) Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị của parabol

$y = (x-1)^2$ ta thấy chúng cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần

lượt là $x = 0, x = 1, x = 2$.



Ngoài ra trên miền $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị của parabol $y = (x-1)^2$ nên $f'(x) < (x-1)^2, \forall x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$ và trên miền $x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đồ thị của parabol $y = (x-1)^2$ nên $f'(x) > (x-1)^2, \forall x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$g'(x)$		1	$+$	0	$-$	1	$+$
$g(x)$							

The diagram shows four arrows indicating the behavior of the function $g(x)$ on the intervals defined by the critical points 0 , 1 , and 2 . From $-\infty$ to 0 , the arrow points down (decreasing). From 0 to 1 , the arrow points up (increasing). From 1 to 2 , the arrow points down (decreasing). From 2 to $+\infty$, the arrow points up (increasing).

+) Từ bảng biến thiên, ta có $\max_{[0; 2]} g(x) = g(1)$.