

TỔ HỢP XÁC SUẤT

BÀI GIẢNG QUY TẮC ĐẾM – HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm vững quy tắc cộng, quy tắc nhân.
- + Hiểu và phân biệt được các khái niệm: Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.

❖ Kỹ năng

- + Vận dụng được quy tắc cộng và nhân cho các bài toán đếm.
- + Giải được các dạng toán đếm liên quan đến tổ hợp, chỉnh hợp.
- + Giải được phương trình liên quan đến công thức tổ hợp, chỉnh hợp.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Các quy tắc đếm

a) Quy tắc cộng

Định nghĩa

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo một trong hai phương án A hoặc B . Nếu phương án A có m cách thực hiện, phương án B có n cách thực hiện và không trùng với bất kì cách nào trong phương án A thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Công thức

Nếu A, B là các tập hợp không giao nhau thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

b) Quy tắc nhân

Định nghĩa

Một công việc nào đó có thể bao gồm hai công đoạn A và B . Nếu công đoạn A có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn B thì công việc đó có $m.n$ cách thực hiện.

Công thức

Nếu A, B là các tập hữu hạn phần tử thì

$$n(A \times B) = n(A).n(B).$$

2. Hoán vị

Định nghĩa

Một tập hợp gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử theo một thứ tự được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số hoán vị của n phần tử là: $P_n = n! = 1.2.3...n$.

Hoán vị lặp

Cho k phần tử khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_k$. Mỗi cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử $a_1; n_2$ phần tử $a_2; \dots; n_k$ phần tử a_k ($n_1, n_2, \dots, n_k = n$) theo một thứ tự được gọi là một hoán vị lặp cấp n kiểu $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ của k phần tử.

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi một trong k phương án $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$. Nếu phương án A_1 có m_1 cách thực hiện, phương án A_2 có m_2 cách thực hiện, ... phương án A_k có m_k cách thực hiện và các cách thực hiện của các phương án trên không trùng nhau thì công việc đó có $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$ cách thực hiện.

Cho các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ đôi một rời nhau.

Khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Mở rộng: Một công việc được hoàn thành bởi k hành động $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ liên tiếp. Nếu hành động A_1 có m_1 cách thực hiện, hành động A_2 có m_2 cách thực hiện, ..., hành động A_k có m_k cách thực hiện thì công việc đó có $m_1.m_2.m_3...m_k$ cách hoàn thành.

Cho các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ hữu hạn phần tử.

Khi đó:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1|. |A_2| \dots |A_n|.$$

Quy ước: $0! = 1$.

$$n! = (n-1)!n.$$

$$\frac{n!}{p!} = (p+1).(p+2)...n$$

(với $n, p \in \mathbb{N}, n > p$).

$$\frac{n!}{(n-p)!} = (n-p+1).(n-p+2)...n$$

Số hoán vị lặp cấp n kiểu $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ của k phần tử là:

(với $n, p \in \mathbb{N}, n > p$).

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Hoán vị vòng quanh

Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử.

Số hoán vị vòng quanh của n phần tử là:

$$Q_n = (n-1)!.$$

3. Chỉnh hợp

Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A .

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Chỉnh hợp lặp

Cho tập A gồm n phần tử. Một dãy gồm k phần tử của A , trong đó mỗi phần tử có thể được lặp lại nhiều lần, được sắp xếp theo một thứ tự nhất định được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử của tập A .

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Công thức này đúng cho trường hợp $k=0$ hoặc $k=n$.

Khi $k=n$ thì $A_n^n = P_n = n!$.

4. Tổ hợp

Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Số tổ hợp chập k của n phần tử:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Tính chất

$$C_n^0 = C_n^n = 1;$$

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

Quy ước: $C_n^0 = 1$

Phân biệt chỉnh hợp và tổ hợp

Chỉnh hợp và tổ hợp liên hệ nhau bởi công thức:

$$A_n^k = k! C_n^k$$

+ Chỉnh hợp: có thứ tự.

+ Tổ hợp: không có thứ tự.

+ Những bài toán mà kết quả phụ thuộc vào vị trí các phần tử ta dùng chỉnh hợp. Ngược

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k;$$

$$C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1};$$

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1};$$

$$(k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-1}^{k-1}.$$

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1};$$

lại, là tổ hợp.

Cách lấy k phần tử từ tập n phần tử
($k \leq n$)

+ Không thứ tự, không hoàn lại: C_n^k .

+ Có thứ tự, không hoàn lại: A_n^k .

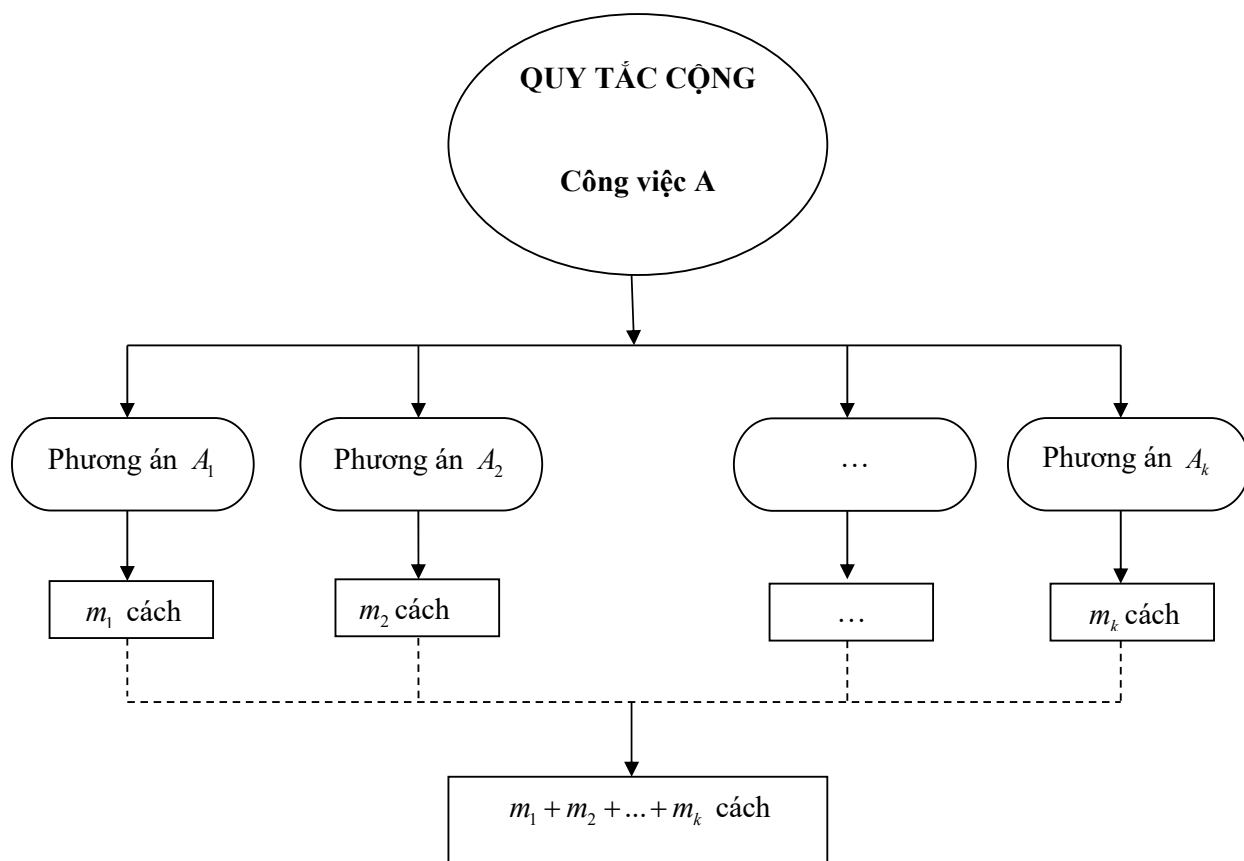
+ Có thứ tự, có hoàn lại: $\overline{A_n^k}$.

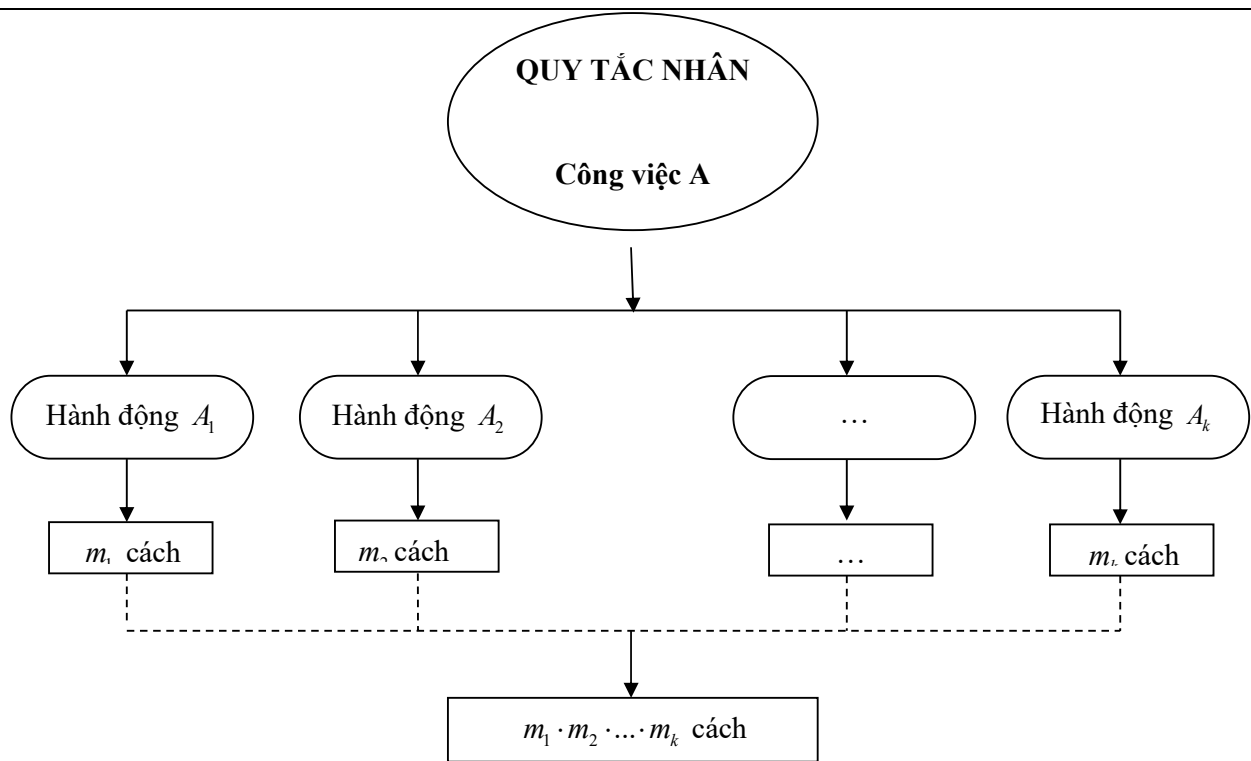
Tổ hợp lặp

Cho tập $A = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ và số tự nhiên k bất kì. Một tổ hợp lặp chập k của n phần tử là một tập hợp gồm k phần tử, trong đó mỗi phần tử là một trong n phần tử của A .

Số tổ hợp lặp chập k của n phần tử: $\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA





II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Quy tắc đếm

Phương pháp giải

Để đếm số cách lựa chọn thực hiện một công việc A bằng quy tắc cộng, ta thực hiện các bước:

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành bằng một trong các phương án $A_1; A_2; \dots; A_k$)

Bước 2: Đếm số cách chọn $x_1; x_2; \dots; x_k$ trong các phương án $A_1; A_2; \dots; A_k$

Bước 3: Dùng quy tắc cộng, ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_k.$$

Để đếm số cách lựa chọn để thực hiện công việc A bằng quy tắc nhân, ta thực hiện các bước:

Ví dụ 1. Một trường THPT cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A hoặc lớp 12B. Biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn?

Hướng dẫn giải

Nhà trường có thể chọn học sinh tiên tiến của lớp 11A hoặc lớp 12B.

Chọn một học sinh tiên tiến lớp 11A có 31 cách chọn. Chọn một học sinh tiên tiến lớp 12B có 22 cách chọn.

Theo quy tắc cộng, số cách cử một học sinh đi dự trại hè là: $31 + 22 = 53$ (cách).

Ví dụ 2. Một bó hoa có 5 bông hoa hồng trắng, 6 bông hoa hồng đỏ và 7 bông hoa hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy ba bông hoa có đủ cả ba màu?

Bước 1: Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi các công đoạn $A_1; A_2; \dots; A_k$ hoàn thành). Bước 2: Đếm số cách chọn $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ trong các công đoạn $A_1; A_2; \dots; A_k$ Bước 3: Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$.	Hướng dẫn giải Để lấy được ba bông hoa có đủ ba màu thì ta sẽ lấy mỗi loại một bông. Số cách lấy bông hoa hồng trắng là 5 cách. Số cách lấy bông hoa hồng đỏ là 6 cách. Số cách lấy bông hoa hồng vàng là 7 cách. Theo quy tắc nhân ta có số cách lấy ba bông có đủ cả ba màu là: $5.6.7 = 210$.
---	--

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Một người có 4 cái quần khác nhau, 6 cái áo khác nhau, 3 chiếc cà vạt khác nhau.

a) Để chọn một cái quần hoặc một cái áo hoặc một cái cà vạt thì số cách chọn là

- A. 13. B. 72.
C. 12. D. 30.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn một cái quần là 5 cách.

Số cách chọn một cái áo là 6 cách.

Số cách chọn một cái cà vạt là 3 cách.

Theo quy tắc cộng ta có số cách chọn là: $4 + 6 + 3 = 13$ (cách).

Chọn A.

b) Số cách chọn một bộ gồm một quần, một áo và một cà vạt là

- A. 13. B. 72.
C. 12. D. 30.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn một cái quần là 4 cách.

Số cách chọn một cái áo là 6 cách.

Số cách chọn một cái cà vạt là 3 cách.

Theo quy tắc nhân ta có số cách chọn là: $4.6.3 = 72$ (cách).

Chọn B.

Ví dụ 2. Trên giá sách có 10 quyển sách Văn khác nhau, 8 quyển sách Toán khác nhau và 6 quyển sách Tiếng Anh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn hai quyển sách khác môn?

Hướng dẫn giải

Theo quy tắc nhân, ta có:

Có $10.8 = 80$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Toán khác nhau.

$10.6 = 60$ cách chọn một quyển sách Văn và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

$8.6 = 48$ cách chọn một quyển sách Toán và một quyển sách Tiếng Anh khác nhau.

Theo quy tắc cộng ta có số cách chọn hai quyển sách khác môn là

$$80 + 60 + 48 = 188 \text{ (cách).}$$

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Trên bàn có 8 cây bút chì khác nhau, 6 cây bút bi khác nhau và 10 cuốn tập khác nhau. Một học sinh muốn chọn một đồ vật duy nhất hoặc một cây bút chì hoặc một cây bút bi hoặc một cuốn tập thì số cách chọn khác nhau là

- A. 480. B. 24. C. 48. D. 60.

Câu 2: An muốn qua nhà Bình để cùng Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường đi, từ nhà Bình tới nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn đường đi đến nhà Cường?

- A. 6. B. 4. C. 10. D. 24.

Câu 3: Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình vẽ. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần?



- A. 9. B. 10. C. 18. D. 24.

Câu 4: Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

- A. 60. B. 10. C. 15. D. 720.

Câu 5: Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả của cuộc thi là việc chọn ra các giải nhất, nhì, ba thì có bao nhiêu kết quả có thể?

- A. 2730. B. 2703. C. 2073. D. 2370.

Dạng 2: Các bài toán hoán vị, chỉnh hợp tổ hợp

Phương pháp giải

Hoán vị: Một tập hợp gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp xếp n phần tử theo một thứ tự được gọi là một hoán vị của n phần tử.

Chỉnh hợp: Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp xếp k phần tử của tập A ($1 \leq k \leq n$) theo một thứ tự được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của tập A .

Tổ hợp: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi tập con gồm k ($1 \leq k \leq n$) phần tử của tập A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

Hướng dẫn giải

Mỗi cách sắp xếp thứ tự bốn chữ số 1, 2, 3, 4 ta được một số tự nhiên theo yêu cầu đề bài.

Do đó số các số tự nhiên có bốn chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4 là: $4! = 24$.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh trong đó có An và Bình vào một hàng ghế dài gồm 7 ghế sao cho An và Bình ngồi ở hai ghế đầu?

Hướng dẫn giải

An và Bình chỉ ngồi đầu và ngồi cuối, hoán đổi cho nhau nên có $2!$ cách xếp.

Xếp vị trí cho các bạn còn lại, ta có $5!$ cách xếp.

Vậy ta có $2! \cdot 5! = 240$ cách xếp.

Ví dụ 3. Có 6 học sinh và 2 thầy giáo được xếp thành hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho hai thầy giáo không đứng cạnh nhau?

Hướng dẫn giải

Có $8!$ cách xếp 8 người.

Có $2!$ cách xếp hai giáo viên đứng cạnh nhau.

Khi đó có $2! \cdot 7!$ cách xếp 8 người sao cho hai giáo viên đứng cạnh nhau.

Mà hai giáo viên không đứng cạnh nhau nên số cách xếp là $8! - 2! \cdot 7! = 30240$ cách xếp.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $1, 2, \dots, 9$?

A. 15120.

B. 9^5 .

C. 5^9 .

D. 126.

Hướng dẫn giải

Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số $1, 2, \dots, 9$ là số cách sắp xếp thứ tự 5 chữ số khác nhau từ 9 chữ số đã cho.

Do đó số các số thỏa mãn là: $A_9^5 = 15120$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh ngồi xung quanh một bàn tròn có 8 ghế?

Hướng dẫn giải

Xếp 8 học sinh theo hình tròn nên ta phải cố định vị trí một bạn, sau đó xếp vị trí cho 7 bạn còn lại có $7!$ cách.

Vậy có $7! = 5040$ cách.

Hoán vị vòng quanh: Cho tập A gồm n phần tử. Một cách sắp xếp n phần tử của tập A thành một dãy kín được gọi là một hoán vị vòng quanh của n phần tử. Số các hoán vị vòng quanh của n phần tử là

$$Q_n = (n-1)!.$$

Ví dụ 6. Trong một túi đựng 10 viên bi đỏ, 20 viên bi xanh, 15 viên bi vàng.

Các viên bi khác nhau có cùng kích cỡ. Tính số cách lấy ra 5 viên bi và sắp xếp chúng vào 5 ô sao cho 5 ô bi đó có ít nhất một viên bi đỏ.

Hướng dẫn giải

Số cách chọn ra 5 viên bi bất kì là C_{45}^5 cách.

Bước 1: Chọn bi

Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó không có viên bi đỏ nào là C_{35}^5 cách.

Số cách chọn ra 5 viên bi trong đó có ít nhất một viên bi đỏ là

$C_{45}^5 - C_{35}^5$ cách.

Số cách xếp 5 viên bi vào 5 ô là $5!$.

Bước 2: Sắp xếp các viên bi.

Theo quy tắc nhân ta có $5! \cdot (C_{45}^5 - C_{35}^5) = 107655240$ (cách).

Ví dụ 7. Một thầy giáo có 10 cuốn sách khác nhau trong đó có 4 cuốn sách Toán, 3 cuốn sách Lí, 3 cuốn sách Hóa. Thầy muốn lấy ra 5 cuốn và tặng cho 5 em học sinh A, B, C, D, E mỗi em một cuốn. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách tặng cho các em học sinh sao cho số sách còn lại có đủ cả ba loại?

Hướng dẫn giải

Trường hợp 1: Tặng hết 4 cuốn sách Toán.

Số cách chọn 4 cuốn sách Toán là 1 cách.

Số cách chọn 1 cuốn trong 6 cuốn còn lại là 6 cách.

Vậy có 6 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $6 \cdot 120 = 720$ cách.

Trường hợp 2: Tặng hết 3 cuốn sách Lí.

Số cách chọn 3 cuốn sách Lí là 1 cách.

Số cách chọn 2 cuốn trong 7 cuốn còn lại là C_7^2 cách.

Vậy có 21 cách chọn sách.

Số cách tặng 5 cuốn sách đó cho 5 em học sinh là $A_5^5 = 120$ cách.

Vậy có $21 \cdot 120 = 2520$ cách.

Trường hợp 3: Tặng hết 3 cuốn sách Hóa: Tương tự trường hợp 2 thì có 2520 cách.

Số cách chọn 5 cuốn bất kì trong 10 cuốn và tặng cho 5 em là

$C_{10}^5 \cdot A_5^5 = 30240$ cách.

Vậy số cách chọn sao cho sau khi tặng xong, mỗi loại sách trên đều còn lại ít nhất một cuốn là $30240 - 720 - 2520 - 2520 = 24480$ (cách).

Ví dụ 8. Có bao nhiêu cách xếp 5 người vào 7 toa tàu sao cho còn trống đúng 3 toa?

Hướng dẫn giải

Tìm bài toán đối đó là tìm số cách sao cho sau khi tặng sách xong có 1 môn hết sách.

Ta thực hiện các bước sau:

Chọn 4 toa trong 7 toa để sắp xếp người, ta có C_7^4 cách chọn.

Chọn 1 toa và chọn 2 người cùng lên một toa đó có $C_5^2.C_4^1$ cách chọn.

Xếp 3 người vào 3 toa còn lại đã chọn, có $3!$ cách chọn.

Vậy số cách xếp thỏa mãn đầu bài là: $C_7^4.C_5^2.C_4^1.3! = 8400$ (cách).

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tập A có n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$), khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Số hoán vị của $(n+1)$ phần tử là $P_n = 1.2.3... (n-2)(n-1)n$.

B. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $k \leq n, k \in \mathbb{N}^*$.

C. Số tổ hợp chập k của n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ với $k \leq n, k \in \mathbb{N}$.

D. Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử. Vì vậy $P_n = A_n^n$.

Câu 2: Một tổ gồm có 5 bạn học sinh nam và 4 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 4 bạn sao cho trong đó luôn có bạn nam và nữ?

A. 120 (cách). B. 126 (cách). C. 6 (cách). D. 60 (cách).

Câu 3: Một đội văn nghệ có 20 người gồm 10 nam và 10 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một nhóm 5 người sao cho có ít nhất 2 nam và có ít nhất 1 nữ?

A. 12900 (cách). B. 450 (cách). C. 633600 (cách). D. 15494 (cách).

Câu 4: Có bao nhiêu cách xếp 3 bạn nam, 2 bạn nữ và 1 cô giáo ngồi vào một bàn tròn có 6 chỗ sao cho cô giáo ngồi giữa 2 bạn nữ?

A. 2 (cách). B. 72 (cách). C. 12 (cách). D. 36 (cách).

Câu 5: Một trường cấp 3 có 8 giáo viên toán gồm 3 nữ và 5 nam, giáo viên vật lý thì có 4 giáo viên nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một đoàn thanh tra có 3 người trong đó có đủ hai môn toán lý và có đủ giáo viên nam và giáo viên nữ?

A. 90 (cách). B. 60 (cách). C. 12960 (cách). D. 120 (cách).

Câu 6: Một hộp chứa 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 tới 10 và 20 quả cầu xanh được đánh số từ 11 tới 30. Lấy hai quả bất kì trong hộp. Có bao nhiêu cách lấy được hai quả cầu có số chẵn?

A. 210 (cách). B. 55 (cách). C. 50 (cách). D. 105 (cách).

Câu 7: Cho hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 5 quả cầu xanh, 3 quả cầu đỏ. Hộp thứ hai có chứa 7 quả cầu xanh, 6 quả cầu vàng. Lấy mỗi hộp 2 quả cầu. Có bao nhiêu cách lấy được tổng cộng 4 quả mà có đủ 3 màu?

A. 981 (cách). B. 2184 (cách). C. 1944 (cách). D. 630 (cách).

Câu 8: Có bao nhiêu cách chia 9 món quà khác nhau cho 3 người sao cho một người có 2 món quà, một người 3 món quà, một người có 4 món quà?

A. 381024 (cách). B. 30240 (cách).

C. 5040 (cách). D. 7560 (cách).

Câu 9: Có hai học sinh lớp A , ba học sinh lớp B và bốn học sinh lớp C xếp thành một hàng ngang sao cho giữa hai học sinh lớp A không có học sinh nào lớp B . Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng như vậy?

A. 80640 (cách).

B. 108864 (cách).

C. 145152 (cách).

D. 217728 (cách).

Câu 10: Một bộ đề ôn tập môn Toán được chia thành 3 loại dễ, trung bình và khó. Số câu dễ là 10 câu, số câu trung bình là 15 câu và số câu khó là 5 câu. Thầy giáo chọn 5 câu bất kì để làm thành một đề thi. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

A. C_5^{30} (cách chọn).

B. C_{30}^5 (cách chọn).

C. $C_{10}^5 \cdot C_{15}^5 \cdot C_5^5$ (cách chọn).

D. $C_{10}^5 + C_{15}^5 + C_5^5$ (cách chọn).

Dạng 3. Phương trình, bất phương trình chứa công thức tổ hợp

Phương pháp giải

Chú ý các công thức:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!};$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{Tính chất: } C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^k = C_n^{n-k}; \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k; \quad C_n^k = \frac{n-k+1}{k} C_n^{k-1};$$

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}; \quad \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}; \quad (k-1)kC_n^k = (n-1)nC_{n-1}^{k-1}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Có bao nhiêu số tự nhiên x thỏa mãn $3A_x^2 - A_{2x}^2 + 42 = 0$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$.

$$3A_x^2 - A_{2x}^2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x!}{(x-2)!} - \frac{(2x)!}{(2x-2)!} + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x(x-1) - 2x(2x-1) + 42 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow x = 6.$$

Vậy $x = 6$ thỏa mãn đề bài.

Chọn D.

Ví dụ 2. Tính tích P của tất cả các giá trị x thỏa mãn

$$C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1}.$$

A. $P = 4$.

B. $P = 12$.

C. $P = -32$.

D. $P = 32$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 12$.

$$C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1} \Leftrightarrow \frac{14!}{x!(14-x)!} + \frac{14!}{(x+2)!(12-x)!} = 2 \frac{14!}{(x+1)!(13-x)!}$$

Rút gọn cả hai vế đại lượng $\frac{14!}{x!(12-x)!}$ ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(14-x)(13-x)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} &= \frac{2}{(x+1)(13-x)} \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+2) + (14-x)(13-x) &= 2(14-x)(x+2) \\ \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Vậy tích các giá trị của x là 32.

Chọn D.

Ví dụ 3. Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $3 \leq x \in \mathbb{N}$.

Ta có $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-1)!} + 6 \frac{x!}{2! \cdot (x-2)!} + 6 \frac{x!}{3! \cdot (x-3)!} &= 9x^2 - 14x \\ \Leftrightarrow x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x &= 9x^2 - 14x \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 9x + 14) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \Rightarrow x = 7 \text{ (do } x \geq 3) \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = 7$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 4. Tính tích P của tất cả các giá trị n thỏa mãn

$$P_n A_n^2 + 71 = 6(A_n^2 + 2P_n).$$

A. $P = 12$.

B. $P = 5$.

C. $P = 10$.

D. $P = 6$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$$\begin{aligned} P_n A_n^2 + 72 = 6(A_n^2 + 2P_n) &\Leftrightarrow (P_n - 6)(A_n^2 - 12) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} P_n - 6 = 0 \\ A_n^2 - 12 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 4 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)} \end{aligned}$$

Vậy $P = 3 \cdot 4 = 12$.

Chọn A.

Ví dụ 5. Tìm n thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}^*$.

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!} - \frac{(n+3)!}{3!n!} = 7(n+3).$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{3!} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} = 7(n+3).$$

$$\Leftrightarrow (n+4)(n+2) - (n+2)(n+1) = 42$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 6n + 8 - n^2 - 3n - 2 - 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3n - 36 = 0 \Leftrightarrow n = 12 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $n = 12$

Ví dụ 6. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$$2C_{n+1}^2 + 3A_n^2 < 30 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 3 \cdot \frac{n!}{(n-2)!} - 30 < 0$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) + 3n(n-1) - 30 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 - 2n - 30 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < n < 3.$$

Mà $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ nên $n = 2$.

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Các giá trị của x thỏa mãn $\frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6}$ với $x \in \mathbb{N}^*$ là

A. $x \in \{1; 3\}$.

B. $x \in \{2; 3\}$.

C. $x \in \{3\}$.

D. $x \in \{2\}$.

Câu 2: Nếu $A_n^2 = n!$ thì n bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. 3.

C. $\{2; 3\}$.

D. $\emptyset$.

Câu 3: Tìm n thỏa mãn $A_n^2 C_n^{n-1} = 48$.

A. $n = 4$.

B. $n = 0$.

C. $n = \frac{1 \pm \sqrt{193}}{2}$.

D. $\emptyset$.

Câu 4: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5$.

A. $n = 3$.

B. $n = 5$.

C. $n = 4$.

D. $n = 6$.

Câu 5: Tìm k sao cho k thỏa mãn: $C_{14}^k + C_{14}^{k+2} = 2C_{14}^{k+1}$

A. $k = 4, k = 8$.

B. $k = 8$.

C. $k = 4$.

D. Không có giá trị nào của k .

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $A_x^3 + 5A_x^2 \leq 21x$ là

A. $S = \{3; 4\}$.

B. $S = \{2; 4\}$.

C. $S = \{2; 3; 4\}$.

D. $S = \{4\}$.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị của n thỏa mãn phương trình: $2P_n + 6A_n^2 = 12 + P_n A_n^2$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 8: Bất phương trình $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10$ có tập nghiệm là

A. $S = [3; 5]$.

B. $S = [3; 4]$.

C. $S = \{3; 4\}$.

D. $S = \{3; 4\}$.

Câu 9: Tìm tập hợp các số âm trong dãy số $x_1; x_2; \dots; x_n$ với $x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n}$.

A. $H = \left\{ \frac{-54}{5}; \frac{-23}{8} \right\}$.

B. $H = \{1; 2\}$.

C. $H = \left\{ \frac{-63}{4}; \frac{-23}{8} \right\}$.

D. $H \in \emptyset$.

Câu 10: Cho phương trình $A_x^3 + 2C_{x+1}^{x-1} - 3C_{x-1}^{x-3} = 3x^2 + P_6 + 159$.

Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình trên thì

A. $x_0 \in (10; 13)$.

B. $x_0 \in (12; 14)$.

C. $x_0 \in (10; 12)$.

D. $x_0 \in (14; 16)$.

Câu 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2.A_x^y + C_x^y = 50 \\ 5.A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$ ta được nghiệm $(x; y)$ là

A. $(5; 2)$.

B. $(3; 4)$.

C. $(4; 3)$.

D. $(2; 5)$.

Câu 12: Giải bất phương trình $C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0$ với $n \in \mathbb{Z}$ ta được

A. $n \in \{6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

B. $n \in \{7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

C. $n \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

D. $n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Dạng 4: Các bài toán liên quan đến chọn số

Phương pháp giải

- Chú ý cấu tạo số và các dấu hiệu chia hết.
- Khi lập một số tự nhiên $x = \overline{a_1 \dots a_n}$ ta cần lưu ý: $a_i \in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ và $a_1 \neq 0$.

Một số dấu hiệu chia hết:

- +) x chia hết cho 2 $\Leftrightarrow a_n$ là số chẵn. Khi giải bài toán tìm số chẵn nếu bài toán chứa chữ số 0 thì ta nên chia hai trường hợp: $a_n = 0, a_n \neq 0$.
- +) x là số lẻ $\Leftrightarrow a_n$ là số lẻ.
- +) x chia hết cho 3 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho 3.
- +) x chia hết cho 4 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 4.

+) x chia hết cho 5 $\Leftrightarrow a_n \in \{0, 5\}$.

+) x chia hết cho 6 $\Leftrightarrow x$ là số chẵn và chia hết cho 3.

+) x chia hết cho 8 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 8.

+) x chia hết cho 9 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho 9.

+) x chia hết cho 11 $\Leftrightarrow$ tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.

+) x chia hết cho 25 $\Leftrightarrow$ Hai chữ số tận cùng là 00, 25, 50, 75.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 9?

A. 16.

B. 18.

C. 20.

D. 14.

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abc}$ với $a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Vì $\overline{abc} : 9$ nên tổng các chữ số $(a + b + c) : 9$.

Khi đó $a, b, c \in \{(0; 4; 5), (2; 3; 4), (1; 3; 5)\}$.

Trường hợp 1. Với $a, b, c \in \{0; 4; 5\}$. Do $a \neq 0$ nên a có 2 cách chọn.

Suy ra có $2 \cdot 2 = 4$ số thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 2. Với $a, b, c \in \{2; 3; 4\}$, có $3! = 6$ số thỏa mãn yêu cầu.

Trường hợp 3. Với $a, b, c \in \{1; 3; 5\}$, có $3! = 6$ số thỏa mãn yêu cầu.

Vậy có thể lập được 16 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Chọn A.

Ví dụ 2. Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau và lớn hơn 5000?

A. 1232.

B. 1120.

C. 1250.

D. 1288.

Hướng dẫn giải

Giả sử số cần tìm có dạng $x = \overline{a_1a_2a_3a_4}$, $a_i \neq a_j$; $i, j = \overline{1, 4}$.

Vì $x > 5000$ và x là số chẵn nên $\begin{cases} a_1 \in \{5; 6; 7; 8; 9\} \\ a_4 \in \{0; 2; 4; 6; 8\} \end{cases}$

Trường hợp 1: Nếu $a_1 \in \{5; 7; 9\}$ thì a_1 có 3 cách chọn. Khi đó a_4 có 5 cách chọn. Các số còn lại có A_8^2 cách chọn. Do đó có $3 \cdot 5 \cdot A_8^2 = 840$ số (1).

Trường hợp 2: Nếu $a_1 \in \{6; 8\}$ thì a_1 có 2 cách chọn và a_4 có 4 cách chọn. Các số còn lại có A_8^2 cách chọn.

Tất cả có $2.4.A_8^2 = 448$ số (2).

Từ (1) và (2) ta có $840 + 448 = 1288$ số.

Chọn D.

Ví dụ 3. Cho ba số 1, 2, 3. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số sao cho 2 chữ số giống nhau không đứng kề nhau?

A. 72.

B. 66.

C. 30.

D. 32.

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}$.

Chọn a có 3 cách.

Chọn $b \neq a$ có 2 cách.

Chọn $c \neq b$ có 2 cách.

Chọn $d \neq c$ có 2 cách.

Chọn $e \neq d$ có 2 cách.

Chọn $f \neq e$ có 2 cách.

Vậy số cách chọn thỏa mãn là $3.2^5 = 66$ cách.

Chọn B.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu số có 5 chữ số tận cùng là 1 và chia hết cho 7?

A. 12855.

B. 12856.

C. 1285.

D. 1286.

Hướng dẫn giải

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{abcd1}$.

Ta có $\overline{abcd1} = 10.\overline{abcd} + 1 = 3.\overline{abcd} + 7.\overline{abcd} + 1$.

Vì $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 nên $3.\overline{abcd} + 1$ chia hết cho 7 hay

$$3.\overline{abcd} + 1 = 7k \Leftrightarrow \overline{abcd} = 2k + \frac{k-1}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có $\overline{abcd}$ là số nguyên khi $k = 3l + 1, l \in \mathbb{N}$. Suy ra $\overline{abcd} = 7l + 2$.

$$\text{Do đó } 1000 \leq 7l + 2 \leq 9999 \Leftrightarrow \frac{998}{7} \leq l \leq \frac{9997}{7}.$$

Suy ra có 1286 giá trị của l .

Vậy có 1286 số thỏa mãn bài toán.

Chọn D.

Ví dụ 5. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; 2018\}$ và các số $a, b, c \in A$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có dạng $\overline{abc}$ sao cho $a < b < c$ và $a + b + c = 2016$?

A. 337681.

B. 2027080.

C. 2027090.

D. 337690.

Hướng dẫn giải

Nhận xét $2016 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$ gồm 2015 dấu $+$.

Chọn 2 dấu $+$ trong 2015 dấu $+$ để hình thành các số a, b, c có C_{2015}^2 cách.

Suy ra có C_{2015}^2 cách chọn 3 số có tổng bằng 2016 (tính cả các hoán vị).

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1 : $a = b = c = 672$, có 1 số.

Trường hợp 2: có 2 trong 3 số bằng nhau, chẳng hạn $a = b \neq c \Rightarrow 2a + c = 2016$.

Khi đó c chẵn do $c = 2(1008 - a)$.

Vì $a \geq 1$ nên $c \leq 2014$. Do đó $c \in \{2; 4; 6; \dots; 2014\} \setminus \{672\}$.

Vậy có 1006 cách chọn c .

Bộ $\{a; a; c\}$ có 3 hoán vị.

Vậy số cách chọn ở trường hợp 2 là $1006 \cdot 3 = 3018$ cách.

Vậy có $C_{2015}^2 - 1 - 3018 = 2026086$ số $\overline{abc}$ thỏa mãn $\begin{cases} a \neq b \neq c \\ a + b + c = 2016 \end{cases}$.

Mỗi bộ số $\{a; b; c\}$ được lập có $3! = 6$ cách hoán đổi vị trí.

Do đó số cách lập bộ số $\{a; b; c\}$ thỏa yêu cầu $a < b < c$ là

$$\frac{2026086}{6} = 337681.$$

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 4

Câu 1: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

- A. 72. B. 120. C. 54. D. 69.

Câu 2: Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 5 đứng liền giữa chữ số 1 và 4?

- A. 249. B. 1500. C. 3204. D. 2942.

Câu 3: Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 1000 được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4?

- A. 125. B. 120. C. 100. D. 69.

Câu 4: Lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau chọn từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ sao cho mỗi số lập được luôn có mặt chữ số 3?

- A. 72. B. 36. C. 32. D. 48.

Câu 5: Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 2?

- A. 1230. B. 2880. C. 1260. D. 8232.

Câu 6: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau từng đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

- A. 3204 số. B. 249 số. C. 2942 số. D. 7440 số.

Câu 7: Có bao nhiêu số có 4 chữ số được viết từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 sao cho số đó chia hết cho 15?

- A. 234. B. 243. C. 132. D. 432.

Câu 8: Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có sáu chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và chữ số hàng nghìn lớn hơn 2?

- A. 720 số. B. 360 số. C. 288 số. D. 240 số.

Câu 9: Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số 5; 6; 7; 8; 9. Tính tổng tất cả các số thuộc tập S .

- A. 9333420. B. 46666200. C. 9333240. D. 46666240.

Câu 10: Từ các chữ số 2, 3, 4 lập được bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 2 lần, chữ số 3 có mặt 3 lần, chữ số 4 có mặt 4 lần?

- A. 1260. B. 40320. C. 120. D. 1728.

Dạng 5. Các bài toán liên quan đến hình học

Phương pháp giải

Một số kết quả thường gặp

• Cho n điểm trong không gian, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng.

+ Số đường thẳng đi qua 2 điểm: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

+ Số vector nối hai điểm bất kì: n^2 .

+ Số vector khác $\vec{0}$ nối hai điểm bất kì: $A_n^2 = n(n-1)$.

+ Số tam giác tạo thành: $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

+ Nếu trong n điểm không có 4 điểm nào đồng phẳng thì số tứ diện được tạo thành: C_n^4 .

• Cho đa giác lồi n đỉnh:

+ Số đường chéo của đa giác: $C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

+ Số đường chéo cùng đi qua 1 đỉnh của đa giác: $n-3$.

+ Nếu không có 3 đường chéo nào đồng quy thì số giao điểm giữa các đường chéo là

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

+ Số tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác: $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

+ Số tam giác có đúng 1 cạnh của đa giác và 2 cạnh còn lại là đường chéo: $nC_{n-4}^1 = n(n-4)$.

+ Số tam giác có 2 cạnh của đa giác và 1 cạnh còn lại là đường chéo: n .

+ Số tam giác có cạnh đều là các đường chéo của đa giác: $C_n^3 - n - n(n-4) = \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6}$.

+ Số tam giác vuông:

Khi n chẵn: số tam giác vuông là $n.C_{\frac{n}{2}}^2$.

Khi n lẻ: số tam giác vuông là 0.

+ Số tam giác tù:

Khi n chẵn: số tam giác tù là $n.C_{\frac{n-2}{2}}^2$.

Khi n lẻ: số tam giác tù là $n.C_{\frac{n-1}{2}}^2$.

+ Số tam giác nhọn = số tam giác - (số tam giác vuông + số tam giác tù)

Khi n chẵn: số tam giác nhọn là $C_n^3 - n \cdot \left(C_{\frac{n}{2}}^2 + C_{\frac{n-2}{2}}^2 \right)$.

Khi n lẻ: số tam giác nhọn là $C_n^3 - n.C_{\frac{n-1}{2}}^2$.

Cho đa giác đều $2n$ đỉnh $n \geq 2$:

+ Số đường chéo xuyên qua tâm = n số hình chữ nhật: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

+ Số tam giác vuông: $(2n-2)n$.

MỘT SỐ KẾT QUẢ HAY GẶP VỀ TAM GIÁC

Số đỉnh của đa giác đều	Số tam giác đều	Số tam giác cân	Số tam giác cân nhưng không đều
$6n$	$2n$	$6n(3n-1) - 2.2n$	$6n(3n-1) - 3.2n$
$6n+1$	0	$(6n+1)3n$	$(6n+1)3n$
$6n+2$	0	$(6n+2)3n$	$(6n+2)3n$
$6n+3$	$2n+1$	$(6n+3)(3n+1) - 2.(2n+1)$	$(6n+3)(3n+1) - 3.(2n+1)$
$6n+4$	0	$(6n+4)(3n+1)$	$(6n+4)(3n+1)$
$6n+5$	0	$(6n+5)(3n+2)$	$(6n+5)(3n+2)$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên đường thẳng d_1 lấy 10 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà ba đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm nói trên?

Hướng dẫn giải

Số tam giác lập được thuộc một trong hai loại sau:

Loại 1: Hai đỉnh thuộc d_1 và một đỉnh thuộc vào d_2 .

Số cách chọn bộ hai điểm trong 10 điểm thuộc d_1 là C_{10}^2 .

Số cách chọn một điểm trong 15 điểm thuộc d_2 là C_{15}^1 .

Loại 1 có $C_{10}^2.C_{15}^1$ tam giác.

Loại 2: Một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2

Số cách chọn một điểm trong 10 điểm thuộc d_1 là C_{10}^1 .

Số cách chọn bộ hai điểm trong 15 điểm thuộc d_2 là C_{15}^2 .

Loại 2 có: $C_{10}^1.C_{15}^2$ tam giác.

Vậy có tất cả: $C_{10}^2.C_{15}^1 + C_{10}^1.C_{15}^2$ tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Một đa giác đều có số đường chéo gấp đôi số cạnh. Hỏi đa giác đó có bao nhiêu cạnh?

Hướng dẫn giải

Đa giác có n cạnh ($n \in \mathbb{N}, n \geq 3$).

Số đường chéo trong đa giác là: $C_n^2 - n$

$$\text{Ta có: } C_n^2 - n = 2n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} = 3n \Leftrightarrow n(n-1) = 6n \Leftrightarrow \begin{cases} n=7 \\ n=0 \end{cases} \Leftrightarrow n=7 \text{ (vì } n \geq 3 \text{)}.$$

Vậy đa giác có 7 cạnh.

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 1725 tam giác có các đỉnh là ba trong số các điểm thuộc d_1 và d_2 nói trên. Tìm n

Hướng dẫn giải

Để tạo thành một tam giác có hai khả năng: Lấy 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc d_2 hoặc lấy 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc d_2 .

Tổng số tam giác được tạo thành là: $S = C_{10}^1.C_n^2 + C_{10}^2.C_n^1$.

Theo giả thiết có $S = 1725$.

$$\text{Ta có phương trình } C_{10}^1.C_n^2 + C_{10}^2.C_n^1 = 1725 \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + 45 \cdot \frac{n!}{(n-1)!} = 1725$$

$$\Leftrightarrow 5n(n-1) + 45n = 1725 \Leftrightarrow 5n^2 + 40n - 1725 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=15 \\ n=-23 \end{cases} \Rightarrow n=15 \text{ (vì } n \geq 2 \text{)}.$$

Vậy $n = 15$.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng có 2017 đường thẳng song song với nhau và 2018 đường thẳng song song khác cùng cắt nhóm 2017 đường thẳng đó. Tính số hình bình hành nhiều nhất được tạo thành có đỉnh là các giao điểm nói trên.

Hướng dẫn giải

Mỗi hình bình hành tạo thành từ hai cặp cạnh song song nhau. Vì vậy số hình bình hành tạo thành chính là số cách chọn 2 cặp đường thẳng song song trong hai nhóm đường thẳng trên.

Chọn 2 đường thẳng song song từ 2017 đường thẳng song song có C_{2017}^2 (cách).

Chọn 2 đường thẳng song song từ 2018 đường thẳng song song có C_{2018}^2 (cách).

Vậy có $C_{2017}^2 \cdot C_{2018}^2$ (hình bình hành).

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Đa giác lồi 20 đỉnh có tất cả bao nhiêu đường chéo?

- A. 40. B. 360. C. 190. D. 170.

Câu 2: Trong mặt phẳng có 30 điểm, trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Có bao nhiêu vector khác vector - không mà điểm đầu và điểm cuối được lấy từ 30 điểm trên?

- A. 870. B. 435. C. 30^2 . D. 2^{30} .

Câu 3: Tính số giao điểm tối đa của 10 đường thẳng phân biệt khi không có ba đường nào đồng quy và hai đường nào song song?

- A. 90. B. 35. C. 45. D. 19.

Câu 4: Cho hai đường thẳng song song d, d' . Trên d lấy 10 điểm phân biệt, trên d' lấy 15 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà đỉnh của nó được chọn từ 25 đỉnh nói trên?

- A. 1050. B. 675. C. 1725. D. 708750.

Câu 5: Từ các điểm A, B, C, D, E không thẳng hàng, ta có thể lập được bao nhiêu tam giác?

- A. $C_5^3 = 10$ (tam giác). B. $A_5^3 = 60$ (tam giác).
C. $P_5 = 120$ (tam giác). D. $P_3 = 6$ (tam giác).

Câu 6: Trong mặt phẳng cho 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng khác cũng song song với nhau và cắt 6 đường đã cho. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên từ 14 đường thẳng đã cho?

- A. $C_6^2 \cdot C_8^2$ (hình). B. $A_6^2 \cdot A_8^2$ (hình).
C. C_{14}^4 (hình). D. A_{14}^4 (hình).

Câu 7: Cho đa giác đều có n đỉnh $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$. Giá trị của n bằng bao nhiêu biết rằng đa giác đó có 90 đường chéo?

- A. 15. B. -12 và 15. C. 18. D. $\emptyset$.

Câu 8: Trong mặt phẳng cho 2010 điểm phân biệt sao cho ba điểm bất kì không thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu vector khác vector - không có điểm đầu và điểm cuối thuộc 2010 điểm đã cho?

- A. 4039137. B. 4038090. C. 4167114. D. 167541284.

Câu 9: Cho 20 đường thẳng thì có nhiều nhất bao nhiêu giao điểm?

A. 40.

B. 380.

C. 190.

D. 144.

Câu 10: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết có 2800 tam giác có đỉnh là các điểm nói trên. Giá trị n bằng

A. 20.

B. 21.

C. 30.

D. 32.

Câu 11: Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 song song với nhau. Trên d_1 có 10 điểm phân biệt, trên d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 1725 tam giác có các đỉnh là ba trong số các điểm thuộc d_1 và d_2 nói trên. Giá trị n bằng

A. 13.

B. 15.

C. 14.

D. 16.

Câu 12: Cho đa giác đều 2018 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 100° ?

A. $2018.C_{897}^3$.B. C_{1009}^3 .C. $2018.C_{895}^3$.D. $2018.C_{896}^3$.

ĐÁP ÁN

BÀI 1. QUY TẮC ĐẾM – HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

Dạng 1. Quy tắc đếm

1 – B	2 – D	3 – D	4 – A	5 – A					
-------	-------	-------	-------	-------	--	--	--	--	--

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Theo quy tắc cộng, ta có số cách chọn khác nhau là: $8 + 6 + 10 = 24$ (cách).

Câu 2.

Theo quy tắc nhân ta có số cách chọn đường đi từ An đến nhà Cường là $4.6 = 24$ (cách).

Câu 3.

Theo quy tắc nhân, số cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần là $4.2.3 = 24$ (cách).

Câu 4.

Theo quy tắc nhân ta có số cách cắm 3 bông hoa vào 5 lọ khác nhau là $5.4.3 = 60$ (cách).

Câu 5.

Có 15 cách chọn giải nhất, 14 cách chọn giải nhì, 13 cách chọn giải ba.

Theo quy tắc nhân, số cách cách chọn ra các giải nhất, nhì, ba là $15.14.13 = 2730$ (cách).

Dạng 2. Các bài toán hoán vị, chỉnh hợp tổ hợp

1 – A	2 – A	3 – A	4 – C	5 – A	6 – D	7 – A	8 – D	9 – C	10 – B
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Số các hoán vị của $(n+1)$ phần tử là $P_{n+1} = 1.2.3 \dots (n-2)(n-1)n(n+1)$ nên A sai.

Câu 2.

Có C_9^4 cách chọn 4 bạn bất kì trong 9 bạn.

Có C_5^4 cách chọn 4 bạn nam.

Có C_4^4 cách chọn 4 bạn nữ.

Vậy ta có số cách chọn 4 bạn luôn có cả bạn nam và nữ là: $C_9^4 - C_5^4 - C_4^4 = 120$ (cách).

Câu 3.

+ Chọn 2 nam, 3 nữ có: $C_{10}^2.C_{10}^3$ cách.

+ Chọn 3 nam, 2 nữ có: $C_{10}^3.C_{10}^2$ cách.

+ Chọn 4 nam, 1 nữ có: $C_{10}^4.C_{10}^1$ cách.

Áp dụng quy tắc cộng ta có $C_{10}^2.C_{10}^3 + C_{10}^3.C_{10}^2 + C_{10}^4.C_{10}^1 = 12900$ (cách).

Câu 4.

Chọn vị trí cho cô giáo trên bàn tròn, có 1 cách chọn.

2 bạn nữ ngồi hai bên cô giáo là hoán vị của 2, vậy có $2!$ cách xếp.

Còn lại 3 bạn nam xếp vào 3 chỗ còn lại, vậy có $3!$ cách.

Áp dụng quy tắc nhân ta có $1.2!.3! = 12$ cách xếp.

Câu 5.

+ Chọn 1 nam toán, 1 nữ toán, 1 nam lý có $C_5^1.C_3^1.C_4^1$ cách

+ Chọn 1 nữ toán, 2 nam lý: $C_3^1.C_4^2$ cách.

+ Chọn 2 nữ toán, 1 nam lý: $C_3^2.C_4^1$ cách.

Áp dụng quy tắc cộng ta có $C_5^1.C_3^1.C_4^1 + C_3^1.C_4^2 + C_3^2.C_4^1 = 90$ (cách chọn).

Câu 6.

Trong 30 quả cầu ta có 15 quả cầu có số chẵn. Do đó chọn 2 quả bất kì trong 15 quả sẽ là tổ hợp chập 2 của 15, ta có $C_{15}^2 = 105$ cách chọn.

Câu 7.

+ Ở hộp thứ nhất chọn 2 quả đỏ, hộp thứ hai chọn 1 quả xanh, 1 quả vàng:

có $C_3^2.C_7^1.C_6^1$ cách chọn.

+ Ở hộp thứ nhất chọn 1 quả xanh, 1 quả đỏ và hộp thứ hai chọn 1 quả xanh, 1 quả vàng:

có $C_5^1.C_3^1.C_7^1.C_6^1$ cách chọn.

+ Ở hộp thứ nhất chọn 1 quả xanh, 1 quả đỏ và hộp thứ hai chọn 2 quả vàng:

có $C_5^1.C_3^1.C_6^2$ cách chọn.

Áp dụng quy tắc cộng, ta có $C_3^2.C_7^1.C_6^1 + C_5^1.C_3^1.C_7^1.C_6^1 + C_5^1.C_3^1.C_6^2 = 981$ (cách chọn).

Câu 8.

Số cách chọn ra 2 trong 9 món quà là: C_9^2 cách. Chọn 1 trong 3 người để nhận quà có C_3^1 cách.

Do đó có $C_9^2.C_3^1 = 108$ cách chia một người nhận 2 món quà.

Chọn 3 món quà trong 7 món quà còn lại có C_7^3 cách. Chọn 1 trong 2 người còn lại để nhận quà có 2 cách. Do đó có $C_7^3.2 = 70$ cách chia một người nhận 3 món quà.

Còn lại 4 món quà và 1 người nên chỉ có 1 cách chọn.

Vậy số cách chia thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $108.70.1 = 7560$ cách.

Câu 9.

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hai học sinh lớp A đứng cạnh nhau có $2!.8!$ cách.

Trường hợp 2: Giữa hai học sinh lớp A có một học sinh lớp C có $2!.4.7!$ cách.

Trường hợp 3: Giữa hai học sinh lớp A có hai học sinh lớp C có $2!.A_4^2.6!$ cách.

Trường hợp 4: Giữa hai học sinh lớp A có ba học sinh lớp C có $2!.A_4^3.5!$ cách.

Trường hợp 5: Giữa hai học sinh lớp A có bốn học sinh lớp C có $2!.A_4^4.4!$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng có $2!(8! + A_4^1 7! + A_4^2 6! + A_4^3 5! + A_4^4 4!) = 145152$ (cách).

Câu 10.

Chọn 5 câu bất kì trong 30 câu để làm thành 1 đề thi có C_{30}^5 cách chọn.

Dạng 3. Phương trình, bất phương trình chứa công thức tổ hợp

1 – B	2 – C	3 – A	4 – B	5 – A	6 – A	7 – B	8 – D	9 – C	10 – A
11 – A	12 – D								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

$$\frac{x! - (x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{x!}{(x+1)!} - \frac{(x-1)!}{(x+1)!} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2; 3\}$.

Câu 2.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } A_n^2 = n! \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = n! \Leftrightarrow \frac{1}{(n-2)!} = 1 \Leftrightarrow (n-2)! = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n-2 = 0 \\ n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $n = 2$ hoặc $n = 3$.

Câu 3.

Điều kiện: $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Ta có: } A_n^2 C_n^{n-1} = 48 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{n}{(n-1)!} = 48 \Leftrightarrow n(n-1)n = 48 \Leftrightarrow n^3 - n^2 - 48 = 0 \Rightarrow n = 4.$$

Vậy $n = 4$.

Câu 4.

Điều kiện: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$$A_n^2 - C_{n+1}^{n-1} = 5.$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = 5 \Leftrightarrow (n-1)n - \frac{1}{2}n(n+1) = 5 \Rightarrow n = 5.$$

Câu 5.

Điều kiện: $0 \leq k \leq 12, k \in \mathbb{Z}$.

Phương trình trở thành: $\frac{14!}{(14-k)!k!} + \frac{14!}{(12-k)!(k+2)!} = 2 \frac{14!}{(13-k)!(k+1)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(14-k)(13-k)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{(13-k)(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)(k+2) + (14-k)(13-k) = 2(14-k)(k+2)$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 - 48k + 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 \\ k = 4 \end{cases}.$$

Vậy $k \in \{4; 8\}$.

Câu 6.

Điều kiện: $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$.

Bất phương trình trở thành $\frac{x!}{(x-3)!} + 5 \frac{x!}{(x-2)!} \leq 21x \Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + 5x(x-1) \leq 21x$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + 5(x-1) \leq 21 \text{ (do } x > 0) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq 4.$$

Vì $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$ nên $x \in \{3; 4\}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{3; 4\}$.

Câu 7.

Điều kiện: $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

$$2P_n + 6A_n^2 = 12 + P_n A_n^2 \Leftrightarrow P_n(2 - A_n^2) + 6(A_n^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (A_n^2 - 2)(6 - P_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n^2 = 2 \\ P_n = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n!}{(n-2)!} = 2 \\ n! = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(n-1) = 2 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -1 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị n thỏa phương trình.

Câu 8.

Điều kiện: $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2} A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x} C_x^3 + 10 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2x!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x} \cdot \frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow x(2x-1) - x(x-1) \leq (x-1)(x-2) + 10 \Leftrightarrow 2x^2 - x - x^2 + x \leq x^2 - 3x + 2 + 10$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta có $3 \leq x \leq 4$.

Vậy $S = \{3; 4\}$ là tập nghiệm của bất phương trình.

Câu 9.

Theo đề ra ta có: $x_n < 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Khi đó } \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} < 0 \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{n!} - \frac{143}{4 \cdot n!} < 0 \Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+2)!} - \frac{143}{4} < 0.$$

$$\Leftrightarrow (n+4)(n+3) - \frac{143}{4} < 0.$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 7n - \frac{95}{4} < 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2} \Leftrightarrow n \in \{1; 2\}.$$

$$\text{Vậy } x_n \in \left\{ \frac{-63}{4}; \frac{-23}{8} \right\}.$$

Câu 10.

Điều kiện: $x \geq 3, x \in \mathbb{N}$. Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{2(x+1)!}{2!(x-1)!} - \frac{3(x-1)!}{2!(x-3)!} = 3x^2 + 6! + 159.$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) + x(x+1) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2) = 3x^2 + 879.$$

$$\Leftrightarrow x = 12.$$

Câu 11.

Điều kiện: $0 \leq y \leq x$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2.A_x^y + C_x^y = 50 \\ 5.A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_x^y = 20 \\ C_x^y = 10. \end{cases}$$

$$\text{Từ } C_x^y = \frac{A_x^y}{y!} \text{ suy ra } y! = \frac{A_x^y}{C_x^y} = 2 = 2! \Rightarrow y = 2.$$

$$\text{Từ } A_x^2 = 20 \Rightarrow x(x-1) = 20 \Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow x = 5.$$

$$\text{Vậy } x = 5; y = 2.$$

Câu 12.

Điều kiện: $n \geq 5$ và $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4}A_{n-2}^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5}{4} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} - \frac{5(n-2)(n-3)}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 22 < 0 \Leftrightarrow -2 < n < 11.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $n \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Dạng 4. Các bài toán liên quan đến chọn số

1 – A	2 – A	3 – A	4 – B	5 – D	6 – D	7 – B	8 – D	9 – C	10 – A
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Gọi số cần tìm dạng $\overline{abcd}$ với $a \neq 0$.

Số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau: $4.A_4^3 = 96$ số.

Các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5:

+ Trường hợp 1: $d = 0$ thì 4 số a, b, c có A_4^3 cách chọn. Do đó có A_4^3 số.

+ Trường hợp 2: $d = 5$ thì 4 số a, b, c có $3.A_3^2$ cách chọn. Do đó có $3.A_3^2$ số.

Vậy có $A_4^3 + 3.A_3^2 = 42$ số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5.

Vậy số các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau không chia hết cho 5 là: $96 - 42 = 54$ số.

Câu 2.

Chữ số 5 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 4 nên ta có thể có 154 hoặc 451.

Xét số $\overline{abc}$ (các chữ số khác nhau từng đôi một và a, b, c thuộc $\{0; 2; 3; 6; 7; 8; 9\}$), sau đó ta chèn thêm 154 hoặc 451 để có được số gồm 6 chữ số cần tìm.

Trường hợp 1: $a \neq 0$, số cách chọn a là 6, số cách chọn b và c là A_6^2 , sau đó chèn 154 hoặc 451 vào 4 vị trí còn lại nên có $6.A_6^2.4.2$ cách.

Trường hợp 2: $a = 0$, số cách chọn a là 1, số cách chọn b và c là A_6^2 , sau đó chèn 154 hoặc 451 vào vị trí trước a có duy nhất 1 cách nên có $A_6^2.2$ cách.

Vậy có $6.A_6^2.4.2 + A_6^2.2 = 1500$ (số).

Câu 3.

Các số tự nhiên nhỏ hơn 1000 bao gồm các số tự nhiên có 1, 2, 3 chữ số.

Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$ ($a, b, c \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$) (không nhất thiết các chữ số đầu tiên phải khác 0).

a có 5 cách chọn. b có 5 cách chọn, c có 5 cách chọn.

Vậy có $5.5.5 = 125$ số tự nhiên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4.

Gọi số tạo thành có dạng $x = \overline{abc}$ với a, b, c đôi một khác nhau và lấy từ A .

Chọn một vị trí a, b hoặc c cho số 3 có 3 cách chọn.

Chọn hai chữ số khác 3 từ A và sắp xếp vào hai vị trí còn lại của X có A_4^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $3.A_4^2 = 36$ cách.

Mỗi cách sắp xếp như trên cho ta một số thỏa yêu cầu.

Vậy có 36 số cần tìm.

Câu 5.

Gọi số có 5 chữ số cần tìm là $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in A$; $a_1 \neq 0$; $a_5 \in \{0; 2; 4; 6\}$.

Công việc thành lập số x được chia thành các bước:

Chọn chữ số a_1 có 6 lựa chọn vì a_1 khác 0.

Chọn các chữ số a_2, a_3, a_4 mỗi chữ số có 7 lựa chọn.

Chọn chữ số a_5 có 4 lựa chọn vì số tạo thành chia hết cho 2.

Số các số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $6 \cdot 7^3 \cdot 4 = 8232$ (số).

Câu 6.

Vì chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3 nên số cần lập có bộ ba số 123 hoặc 321.

Xét số $\overline{abcd}$ (các chữ số khác nhau từng đôi một và a, b, c, d thuộc $\{0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$), sau đó ta chèn thêm 123 hoặc 321 để có được số gồm 7 chữ số cần tìm.

Trường hợp 1: số cần lập có bộ ba số 123.

+) Nếu bộ ba số 123 đứng đầu thì số có dạng $\overline{123abcd}$.

Có $A_7^4 = 840$ cách chọn bốn số a, b, c, d nên có $A_7^4 = 840$ số.

+) Nếu bộ ba số 123 không đứng đầu thì có 4 vị trí đặt bộ ba số 123.

Có 6 cách chọn số đứng đầu và có $A_6^3 = 120$ cách chọn ba số b, c, d . Theo quy tắc nhân có $6 \cdot 4 \cdot A_6^3 = 2880$ số.

Theo quy tắc cộng có $840 + 2880 = 3720$ số.

Trường hợp 2: số cần lập có bộ ba số 321. Do vai trò của bộ ba số 123 và 321 như nhau nên có 3720 số.

Từ hai trường hợp, ta có $2 \cdot 3720 = 7440$ số.

Câu 7.

Đặt tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Gọi số cần tìm có dạng $x = \overline{abcd}$. Ta có $x : 15 \Rightarrow \begin{cases} x : 3 \\ x : 5 \end{cases} \Rightarrow d = 5$ hay d có 1 cách chọn.

Chọn a có 9 cách ($a \in E$).

Chọn b có 9 cách ($b \in E$).

Khi đó tổng $a + b + d$ sẽ chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 1 hoặc chia 3 dư 2 nên tương ứng trong từng trường hợp c sẽ chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 2 hoặc chia 3 dư 1.

Nhận xét:

Các số chia hết cho 3 là 3; 6; 9.

Các số chia 3 dư 1 là 1; 4; 9.

Các số chia 3 dư 2 là 2; 5; 7.

Mỗi tính chất như thế đều chỉ có 3 số nên c chỉ có đúng 3 cách chọn từ một số trong các bộ trên.

Vậy có $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ số thỏa yêu cầu.

Câu 8.

Gọi số có sáu chữ số cần tìm là $n = \overline{abcdef}$, trong đó sáu chữ số khác nhau từng đôi một, $c > 2$ và f là số chẵn.

Trường hợp 1: Nếu $f = 2$ thì $n = \overline{abcde2}$.

Có 4 cách chọn c nên có $4 \cdot 4! = 96$ số.

Trường hợp 2: Nếu $f = 4$ thì $n = \overline{abcde4}$.

Có 3 cách chọn c nên có $3 \cdot 4! = 72$ số.

Trường hợp 3: Nếu $f = 6$ thì $n = \overline{abcde6}$.

Có 3 cách chọn c nên có $3 \cdot 4! = 72$ số.

Vậy số các số cần tìm là $96 + 72 + 72 = 240$ số.

Câu 9.

Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau được lập từ 5; 6; 7; 8; 9 là $5! = 120$ số.

Vì vai trò các chữ số như nhau nên mỗi chữ số 5; 6; 7; 8; 9 xuất hiện ở hàng đơn vị là $4! = 24$ lần.

Tổng các chữ số ở hàng đơn vị là $24(5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 840$.

Tương tự thì số lần xuất hiện ở các hàng chục, trăm, nghìn, chục nghìn của mỗi chữ số là 24 lần.

Vậy tổng các số thuộc tập S là $840(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 9333240$.

Câu 10.

Chọn vị trí cho 2 chữ số 2 có C_9^2 cách.

Chọn vị trí cho 3 chữ số 3 có C_7^3 cách.

Chọn vị trí cho 4 chữ số 4 có C_4^4 cách.

Vậy số các số tự nhiên thỏa yêu cầu bài toán là $C_9^2 C_7^3 C_4^4 = 1260$ số.

Dạng 5. Các bài toán liên quan đến hình học

1 – D	2 – A	3 – C	4 – C	5 – A	6 – A	7 – A	8 – B	9 – C	10 – A
11 – B	12 – D								

HƯỚNG DẪN CHI TIẾT

Câu 1.

Số cách lấy 2 điểm trong 20 điểm là $C_{20}^2 = 190$.

Lấy 2 điểm kề nhau thì ta được cạnh, 2 điểm không kề nhau ta được đường chéo. Mà đa giác 20 đỉnh có 20 cạnh.

Vậy số đường chéo là $190 - 20 = 170$

Câu 2.

Điểm thứ nhất của vector có 30 cách chọn.

Điểm thứ hai của vector có 29 cách chọn.

Vậy theo quy tắc nhân có $30 \cdot 29 = 870$ cách chọn.

Câu 3.

Đường thẳng thứ nhất giao với 9 đường còn lại nên có 9 giao điểm

Đường thẳng thứ hai giao với 8 đường còn lại nên có thêm 8 giao điểm (đã tính giao điểm với đường thẳng thứ nhất ở trên)

Đường thẳng thứ 9 giao với 1 đường còn lại nên có thêm 1 giao điểm

Vậy có $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ giao điểm.

Câu 4.

Trường hợp 1. Lấy hai điểm thuộc d , một điểm thuộc d' .

Lấy điểm thứ nhất thuộc d có 10 cách, lấy điểm thứ hai thuộc d có 9 cách.

Lấy điểm thuộc d' có 15 cách.

Vì sự thay đổi các đỉnh trong tam giác không tạo thành một tam giác mới nên hai đỉnh lấy trên d nếu đổi thứ tự lấy không tạo thành tam giác mới.

Do đó có $\frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 15 = 675$ tam giác.

Trường hợp 2: Lấy hai điểm thuộc d' một điểm thuộc d :

Tương tự có $\frac{15 \cdot 14}{2} \cdot 10 = 1050$ tam giác.

Vậy có $675 + 1050 = 1725$ tam giác.

Câu 5.

Số tam giác lập được từ các điểm A, B, C, D, E là số tổ hợp chập 3 của 5 nên ta có $C_5^3 = 10$ (tam giác).

Câu 6.

Một hình bình hành được tạo từ 2 cặp cạnh song song.

Chọn 2 đường từ 6 đường song song nhau có C_6^2 cách.

Chọn 2 đường từ 8 đường song song nhau có C_8^2 cách.

Áp dụng quy tắc nhân ta có $C_6^2 \cdot C_8^2$ hình bình hành.

Câu 7.

Tổng số cạnh và đường chéo của đa giác đã cho bằng C_n^2 .

Đa giác đều có n đỉnh thì có n cạnh nên số đường chéo của đa giác là

$$C_n^2 - n = 90 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} - n = 90 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 90$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 15 \\ n = -12 \end{cases} \Rightarrow n = 15.$$

Vậy $n = 15$.

Câu 8.

Mỗi vectơ thỏa yêu cầu bài toán ứng với một chỉnh hợp chập 2 của 2010 nên số vectơ cần tìm là:

$$A_{2010}^2 = 4038090.$$

Câu 9.

Để được nhiều giao điểm nhất thì 20 đường thẳng này phải đôi một cắt nhau tại các điểm phân biệt.

Vậy có $C_{20}^2 = 190$ giao điểm.

Câu 10.

Tam giác cần lập thuộc hai loại.

Loại 1 : Tam giác có một đỉnh thuộc d_1 và hai đỉnh thuộc d_2 . Loại này có $C_{10}^1 \cdot C_n^2$ tam giác.

Loại 2: Tam giác có một đỉnh thuộc d_2 và hai đỉnh thuộc d_1 . Loại này có $C_{10}^2 \cdot C_n^1$ tam giác.

Theo bài ra ta có: $C_{10}^1 \cdot C_n^2 + C_{10}^2 \cdot C_n^1 = 2800$.

$$\Leftrightarrow 10 \frac{n(n-1)}{2} + 45n = 2800 \Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0 \Leftrightarrow n = 20.$$

Câu 11

Để tạo thành một tam giác có hai khả năng:

Lấy 1 điểm thuộc d_1 và 2 điểm thuộc d_2 hoặc lấy 2 điểm thuộc d_1 và 1 điểm thuộc d_2 .

Tổng số tam giác được tạo thành là: $S = C_{10}^1 \cdot C_n^2 + C_{10}^2 \cdot C_n^1$

Theo giả thiết ta có $S = 1725$

$$\text{Ta có phương trình } C_{10}^1 \cdot C_n^2 + C_{10}^2 \cdot C_n^1 = 1725 \Leftrightarrow 10 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + 45 \cdot \frac{n!}{(n-1)!} = 1725$$

$$\Leftrightarrow 5n(n-1) + 45n = 1725 \Leftrightarrow 5n^2 + 40n - 1725 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 15 \\ n = -23 \end{cases} \Rightarrow n = 15.$$

Câu 12.

Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$ là các đỉnh của đa giác đều 2018 đỉnh nội tiếp đường tròn (O) .

Các đỉnh của đa giác đều chia (O) thành 2018 cung tròn bằng nhau, mỗi cung tròn có số đo bằng $\frac{360^\circ}{2018}$.

Vì tam giác cần đếm có đỉnh của đa giác nên các góc của tam giác là các góc nội tiếp (O) . Suy ra góc lớn hơn 100° sẽ chắn cung có số đo lớn hơn 200° .

Cố định một đỉnh A_i . Có 2018 cách chọn A_j .

Gọi $A_i A_j A_k$ là các đỉnh sắp thứ tự theo chiều kim đồng hồ sao cho số đo cung nhỏ $A_i A_k$ nhỏ hơn 100° thì số đo cung lớn $A_i A_k$ lớn hơn 200° .

Suy ra $\widehat{A_i A_j A_k} > 100^\circ$ và $\Delta A_i A_j A_k$ là tam giác cần đếm.

Khi đó cung $A_i A_k$ là hợp liên tiếp của nhiều nhất $\left\lfloor \frac{\frac{160}{360}}{\frac{360}{2018}} \right\rfloor = 896$ cung tròn nói trên.

896 cung tròn này có 897 đỉnh. Trừ đi đỉnh A_i thì còn 896 đỉnh. Do đó có C_{896}^2 cách chọn hai đỉnh A_j, A_k .

Vậy có tất cả $2018 \cdot C_{896}^2$ tam giác thỏa mãn.

