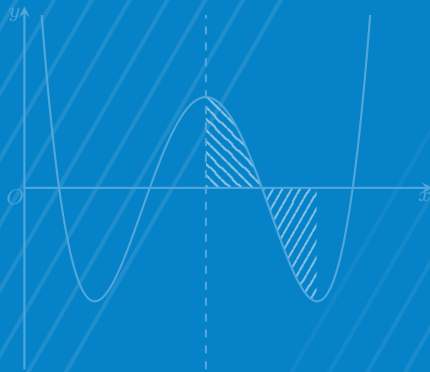


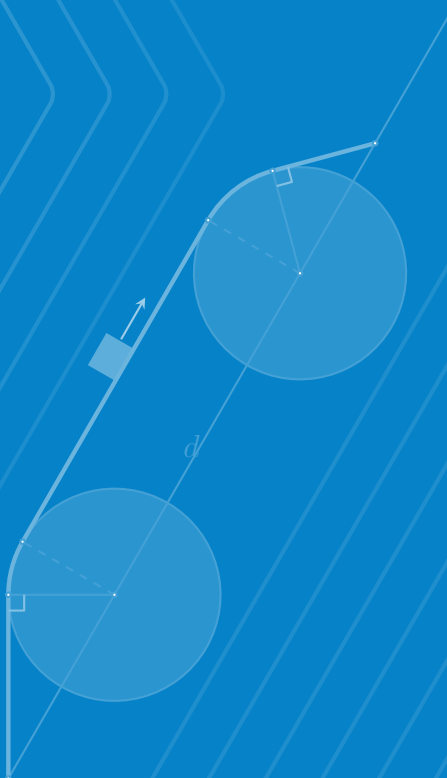
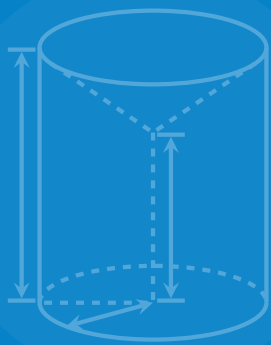


CHUYÊN ĐỀ

TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

LỚP TOÁN THẦY CƯỜNG

Liên hệ 0967453602



Chuyên đề 1: HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU

Phần I

Kiến thức cần nhớ

Tính đơn điệu của hàm số là cách gọi chung của tính đồng biến hoặc nghịch biến.

1 Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_1, x_2 \in (a; b)$.

- Nếu $x_1 < x_2$ sao cho $f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $x_1 < x_2$ sao cho $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$.

2 Định lý 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$.

3 Định lý 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$.

4 Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số

1. Tìm tập xác định.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 và không xác định.
3. Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
4. Kết luận các khoảng đồng biến ($f'(x)$ mang dấu "+") và các khoảng nghịch biến ($f'(x)$ mang dấu "-").

Phần II

CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

Loại 1. Khi biết công thức hàm số

Phương pháp giải

Bước 1: Tìm tập xác định.

Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 và không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Kết luận các khoảng đồng biến ($f'(x)$ mang dấu "+") và các khoảng nghịch biến ($f'(x)$ mang dấu "-").

Chú ý: Chỉ viết hàm số đơn điệu trên khoảng và nếu có 2 khoảng trở lên thì ta dùng từ "và" để nối giữa 2 khoảng.

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 2}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x-2}{x+1}$. B. $y = x^4 + 3x^2$. C. $y = 3x^3 + 3x - 2$. D. $y = 2x^3 - 5x + 1$.

Câu 2. Hàm số nào trong các hàm số sau nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = x^4 + 2x^2 + 2$.
C. $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$. D. $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in R$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 4. Hàm số $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 6. Hàm số $f(x) = \sqrt{2022x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(1010; 2022)$. B. $(2022; +\infty)$. C. $(0; 1011)$. D. $(1; 2022)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(1; 3)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 9. Hỏi hàm số $f(x) = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-\infty; -\frac{1}{2})$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\frac{1}{2}; +\infty)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Số mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau là:

- (1). Hàm số nghịch biến mỗi khoảng xác định.
(2). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
(3). Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
(4). Hàm số nghịch biến trên khoảng $R \setminus \{1\}$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Loại 2. Khi biết bảng biến thiên của hàm số**Phương pháp giải**

- Nếu hàm số $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ hay $f'(x)$ mang dấu "+" trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu hàm số $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ hay $f'(x)$ mang dấu "-" trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$.

Minh họa:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)$		$f(b)$		$f(c)$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ mang dấu "+" trên khoảng $(a; b)$ và $(c; +\infty)$ và $f'(x)$ mang dấu "-" trên khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; c)$.

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ và $(c; +\infty)$ và hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; c)$.

Chú ý: Chỉ quan tâm đến dòng $f'(x)$ để xác định $f'(x)$ mang dấu gì.

a. Ví dụ minh họa**Ví dụ 1**

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			3			0		$+\infty$

A. $(-\infty; -2)$.B. $(-1; 0)$.C. $(-1; 1)$.D. $(0; 2)$.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-1		2	3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1		2	-1		$+\infty$

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(-1; 3)$.

D. $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải.

.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		1		3		1		$+\infty$

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-2; 0)$.

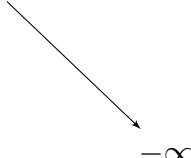
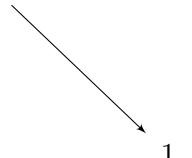
D. $(0; 2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		1		4		$-\infty$

A. $(-\infty; -2)$.B. $(-2; +\infty)$.C. $(-2; 3)$.D. $(-\infty; 2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	1 	$+\infty$ 	1

A. $(-\infty; -2)$.B. $(-2; +\infty)$.C. $(-2; 3)$.D. $(-\infty; 2)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$	

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

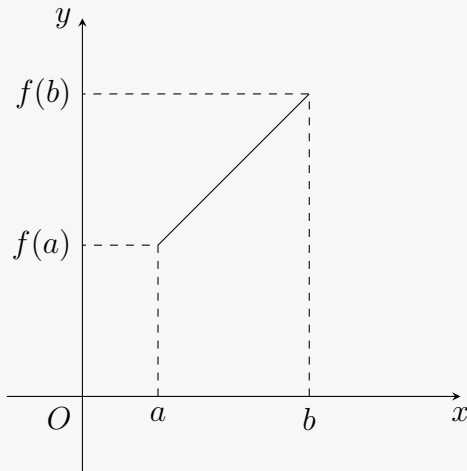
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$	

A. $(-1; 1)$.B. $(0; 1)$.C. $(4; +\infty)$.D. $(-\infty; 2)$.

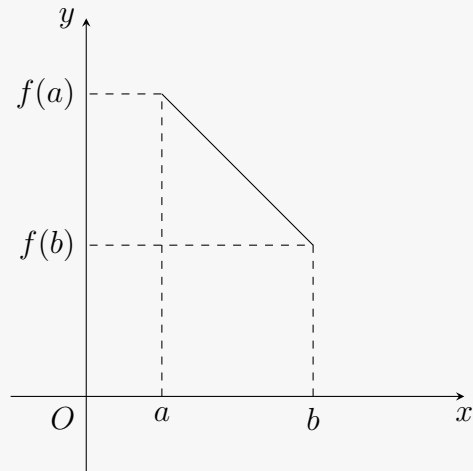
Loại 3. Khi biết đồ thị của hàm số

Phương pháp giải

- Nếu đồ thị của hàm số $f(x)$ **đi lên** từ trái qua phải trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$ (Hình 1).
- Nếu đồ thị của hàm số $f(x)$ **đi xuống** từ trái qua phải trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$ (Hình 2).



Hình 1



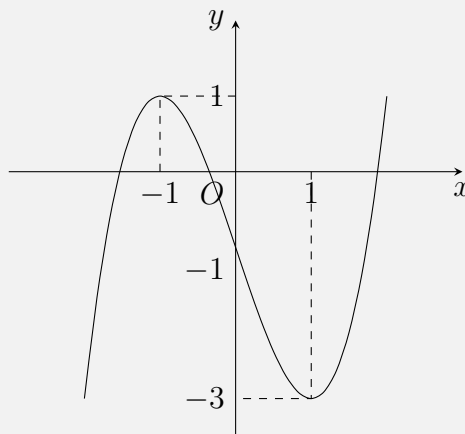
Hình 2

Chú ý: Chỉ quan tâm đến hướng đi lên hay đi xuống của đồ thị.

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(-1; 1)$.

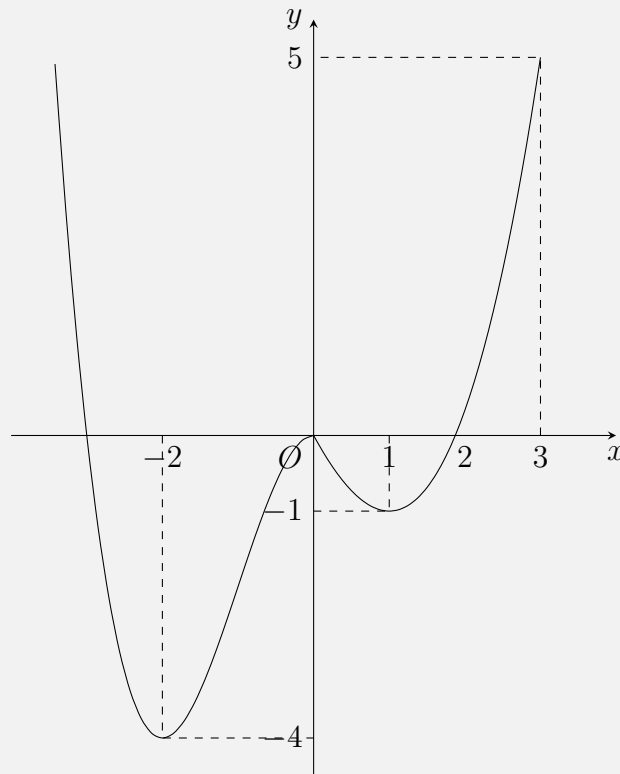
D. $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

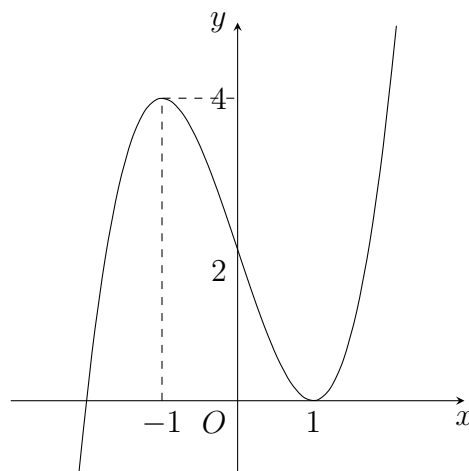
A. $(-1; 0)$.B. $(-2; 1)$.C. $(0; 1)$.D. $(1; 3)$.

Hướng dẫn giải.

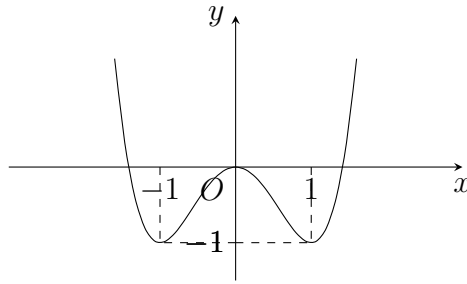
.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

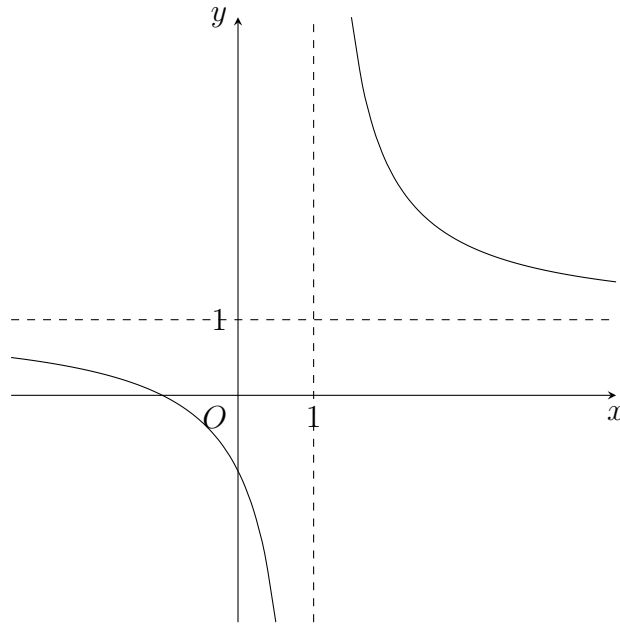
A. $(-\infty; 0)$.B. $(-1; 0)$.C. $(-1; 1)$.D. $(2; +\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



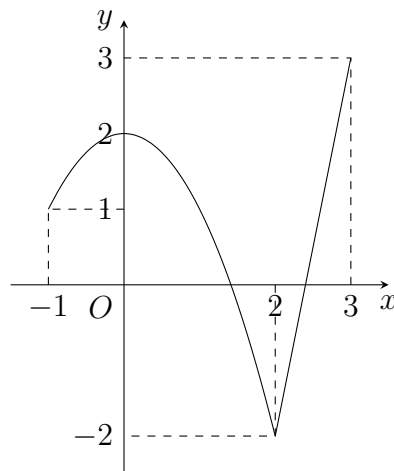
- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



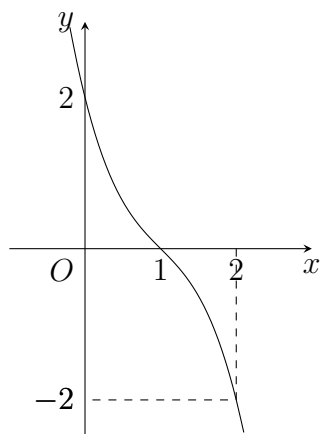
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



- A. $(1; 2)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 3)$. D. $(-2; 3)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn mệnh đề đúng?



- A. Hàm số đồng biến trên khoảng R .
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng R .
- C. Hàm số đồng biến trên $R \setminus \{1\}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $R \setminus \{1\}$.

Loại 4. Khi biết đồ thị của đạo hàm

Phương pháp giải

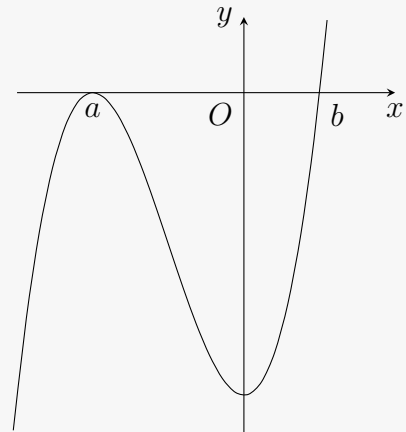
• Nếu đồ thị của hàm số $f'(x)$ **nằm trên** trục Ox trên khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ nên hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a; b)$.

• Nếu đồ thị của hàm số $f'(x)$ **nằm dưới** trục Ox trên khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ nên hàm số $f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a; b)$.

Từ đồ thị ta thấy đồ thị $f'(x)$ nằm dưới trục Ox trên khoảng $(-\infty; b)$ nên $f'(x) < 0$ trên khoảng $(-\infty; b)$ và đồ thị $f'(x)$ nằm trên trục Ox trên khoảng $(b; +\infty)$ nên $f'(x) > 0$ trên khoảng $(b; +\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(b; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; b)$.

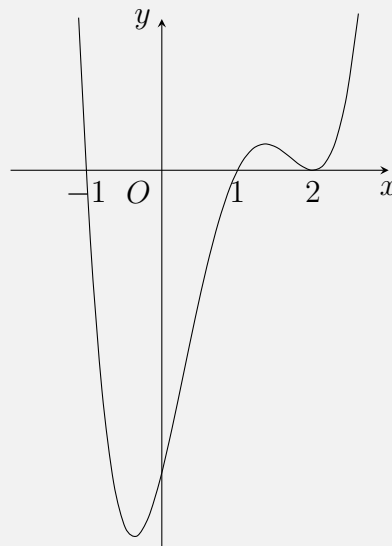
Chú ý: Chỉ quan tâm đến giao điểm của đồ thị $f'(x)$ với trục Ox rồi xác định đồ thị $f'(x)$ nằm trên hay nằm dưới trục Ox trên khoảng đó.



a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(0; 1)$.

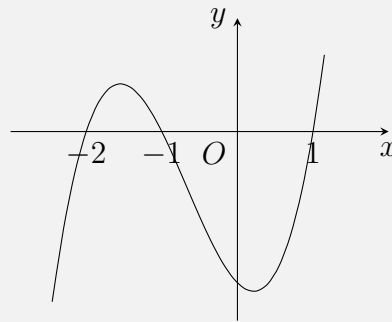
D. $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; -1)$.B. $(-1; 1)$.C. $(0; 1)$.D. $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

.....

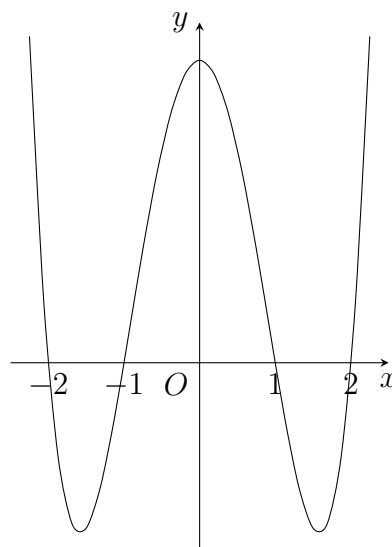
.....

.....

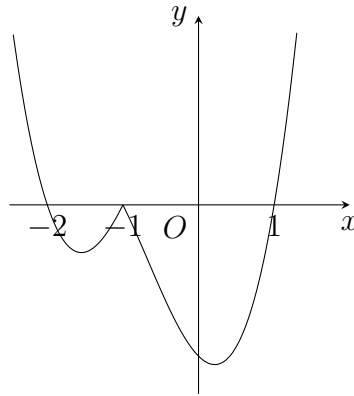
.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

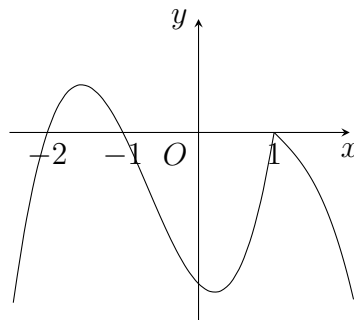
A. $(1; 2)$.B. $(-2; 1)$.C. $(0; 1)$.D. $(-1; 2)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



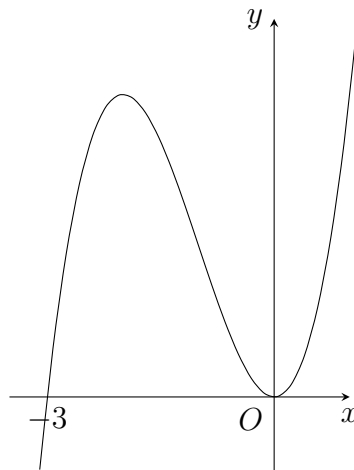
- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



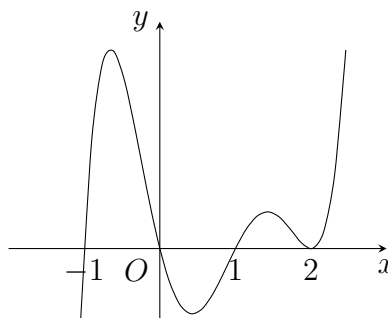
- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-2; -1)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-3; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-5; -4)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



- A. $(-\infty; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên khoảng cho trước

Loại 1. Hàm số bậc ba

Phương pháp giải

Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$.

- Hàm số **đồng biến** trên R hoặc trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$
- Hàm số **nghịch biến** trên R hoặc trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Chứng minh công thức:

Tập xác định $D = R$.

Có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số đồng biến trên $R \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in R$

Nên $3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 0 \\ (2b)^2 - 4.3a.c \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

Tương tự khi hỏi **nghịch biến**.

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. Không tồn tại m . B. $m \neq 1$.
C. $m = 1$. D. Vô số.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 0.

Câu 3. Cho hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m^2 - m)x + 2$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $m \leq \frac{4}{3}$ và $m \neq 0$. B. $m \geq \frac{4}{3}$ hoặc $m = 0$. C. $m \leq \frac{4}{3}$. D. $m \geq \frac{4}{3}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = (m - 1)x^3 - 3(m - 1)x^2 + 3x + 2$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $1 < m \leq 2$. B. $1 < m < 2$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $1 \leq m < 2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Loại 2. Hàm phân thức bậc nhất trên bậc nhất**Phương pháp giải**

Xét hàm số bậc ba $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$).

- Hàm số **đồng biến** trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow ad-bc > 0$
- Hàm số **nghịch biến** trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow ad-bc < 0$
- Hàm số **đồng biến** trên khoảng $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases}$
- Hàm số **nghịch biến** trên khoảng $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases}$

Chứng minh công thức:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

Có $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

- Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad-bc > 0$

Tương tự khi hỏi nghịch biến.

- Hàm số đồng biến nghịch biến trên khoảng $(\alpha; \beta) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$

Do đó $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in D \\ (\alpha; \beta) \subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta) \end{cases}$

Tương tự khi hỏi nghịch biến.

Chú ý: Khi hàm số có dạng $y = \frac{ag(x)+b}{cg(x)+d}$ **đồng biến** trên khoảng $(\alpha; \beta)$ thì ta đặt

$t = g(x) \Rightarrow \alpha < x < \beta \Leftrightarrow g(\alpha) < g(x) < g(\beta) \Leftrightarrow t \in (g(\alpha); g(\beta))$ và xét 2 trường hợp sau:

TH1: Nếu $t' = g'(x) > 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$ thì hàm số $g(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(\alpha; \beta)$. Khi đó $y = \frac{at+b}{ct+d}$ **đồng biến** trên khoảng $(g(\alpha); g(\beta))$.

TH2: Nếu $t' = g'(x) < 0, \forall x \in (\alpha; \beta)$ thì hàm số $g(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(\alpha; \beta)$. Khi đó $y = \frac{at+b}{ct+d}$ **nghịch biến** trên khoảng $(g(\alpha); g(\beta))$.

Tương tự: Khi hàm số có dạng $y = \frac{ag(x)+b}{cg(x)+d}$ **nghịch biến** trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

a. Ví dụ minh họa**Ví dụ 1**

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-m}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

- A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
C. $1 \leq m < 2$.

- B. $m \leq 0$.
D. $m \geq 2$.

Hướng dẫn giải.

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

- A. 0. B. 3. C. 6. D. Vô số.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ đồng biến trên các khoảng xác định?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ nghịch biến trên các khoảng xác định?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Câu 5. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$?

- A. $m > 2$.
C. $m < 2$.
B. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$.
D. $m \leq 2$.

Câu 6. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(\frac{\pi}{2}; \pi)$?

- A. $0 \leq m < 3$ hoặc $m \leq -1$.
C. $m \leq 3$.
B. $0 < m < 3$ hoặc $m < -1$.
D. $m < 3$.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}}{\sqrt{6-x}+m}$ đồng biến trên khoảng $(-8; 5)$?

- A. 14. B. 13. C. 12. D. 15.

Loại 3. Cô lập được tham số m **Phương pháp giải**

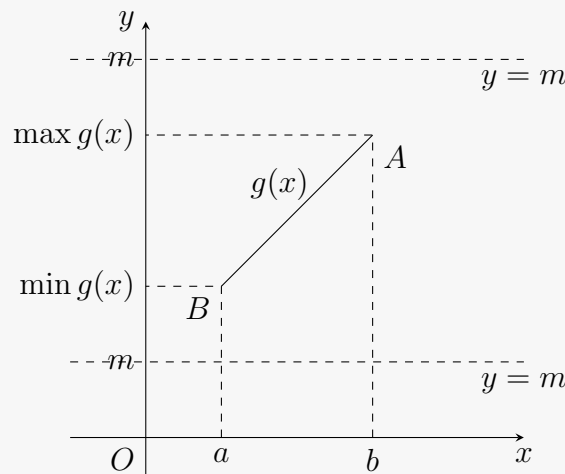
Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$ (1)

Ta biến đổi (1) về một trong hai dạng sau:

- $m \geq g(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \geq \max_{(a; b)} g(x)$
- $m \leq g(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \leq \min_{(a; b)} g(x)$

Tương tự khi hỏi nghịch biến.

Chứng minh công thức:



Ta thấy để $m \geq g(x), \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow m \geq \max_{(a; b)} g(x)$, tức là đường thẳng $y = m$ nằm trên hoặc đi qua điểm A (là điểm cao nhất của đồ thị $g(x)$ trên khoảng $(a; b)$).

Tương tự khi hỏi $m \leq g(x), \forall x \in (a; b)$.

Chú ý: Để tìm max và min của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(a; b)$ ta chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tạm gọi là Giải tay

1. Tính $g'(x)$
2. Giải phương trình $g'(x) = 0$ trên khoảng $(a; b)$
3. Sắp xếp các nghiệm từ nhỏ đến lớn và lập bảng biến thiên
4. Kết luận giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất trên khoảng $(a; b)$.

Cách 2: Tạm gọi là Giải máy

1. Bấm MODE 8 (với casio 580) hoặc MODE 7 (với casio 570)
2. Nhập $g(x)$ vào máy tương ứng là $F(X)$
3. Cho start = -9, end = 9 và step = 1 (ưu tiên cho step = 0,5 trước)
4. Giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất nằm ở cột $F(X)$.

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 3(m-1)x + 1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 4)$?

- A. $(-\infty; 6]$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; 6]$.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A. $(-\infty; 2]$. B. $(-\infty; 4]$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; 4)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

- A. $m \geq 0$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2020)$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 2018. B. 2019. C. 2020. D. 2017.

Câu 4. Cho hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

- A. $(-\infty; -\frac{3}{4}]$. B. $[0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0]$. D. $[-\frac{3}{4}; +\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$. Với mọi giá trị của tham số $m \geq a\sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ thì $a - b$ bằng:

- A. 1. B. -2. C. 3. D. -5.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$?

- A. 2008. B. 2007. C. 2018. D. 2019.

Câu 7. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 2017. B. 2019. C. 2020. D. 2018.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m - 1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 9. Cho hàm số $y = x + 5 + \frac{1 - m}{x - 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $[5; +\infty)$?

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 0. B. 3. C. 4. D. 5.

Loại 4. Không cô lập được tham số m

Phương pháp giải

Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm có dạng là $f'(x) = ax^2 + bx + c$.

Khi đó nếu biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 với $x_1 < x_2$.

Xét hệ số $a > 0$ ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

• Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} (a; b) \subset (-\infty; x_1) \\ (a; b) \subset (x_2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq b \\ x_2 \leq a \end{cases}$

• Để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $(a; b) \subset (x_1; x_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq a \\ x_2 \geq b \end{cases}$

Tương tự khi xét hệ số $a < 0$.

Chú ý:

Khi hệ số b là số chẵn thì ta dùng $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \frac{b}{2}$. Khi đó nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $x_1 = \frac{b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$ và $x_2 = \frac{b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.

Nếu $\sqrt{\Delta'} = \sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, khi A \geq 0 \\ -A, khi A < 0 \end{cases}$.

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x + 2021$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

A. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

B. $m \geq \frac{1}{3}$.

C. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

D. $m \leq -1$.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. $m \leq 0$.

B. $m \leq -2$.

C. $m \geq 1$.

D. $m < 1$.

Hướng dẫn giải.

.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2 + 4m)x + 1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (m^2 - 2m)x + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

- A. $m \leq -4$. B. $m \geq 2$.
 C. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 2$. D. $-4 \leq m \leq 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(4; +\infty)$?

- A. $m \leq 3$. B. $m \geq 3$. C. $m = 3$. D. $m \neq 3$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$?

- A. $[-1; 0]$. B. $\emptyset$. C. -1 . D. 1 .

Câu 5. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $[2; +\infty)$?

- A. $[-2; \frac{3}{2}]$. B. $[-2; +\infty)$. C. $(-\infty; \frac{3}{2}]$. D. $(-2; \frac{3}{2})$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m+1)x^2 + (3m - 15)x + 2021$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$?

- A. 20. B. 10. C. 18. D. 0.

Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng k

Phương pháp giải

Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm có dạng là $f'(x) = ax^2 + bx + c$.

Khi đó nếu biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là x_1, x_2 với $x_1 < x_2$.

Xét hệ số $a > 0$ ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Để hàm số $f(x)$ **ng nghịch biến** trên khoảng có độ dài bằng $k \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = k$.

Tương tự khi hệ số $a < 0$:

Để hàm số $f(x)$ **đồng biến** trên khoảng có độ dài bằng $k \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = k$.

Chứng minh công thức:

Khi hệ số $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Khi đó độ dài của khoảng $(x_1; x_2)$ bằng $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$.

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Nên $|x_1 - x_2| = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

Tương tự khi hệ số $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$.

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 2021$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3?

A. $m = \frac{15}{4}$.

B. $m = -\frac{15}{4}$.

C. $m = \frac{15}{2}$.

D. $m = -\frac{15}{2}$.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m-3)x + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 4?

- A. $m = \{2; 3\}$. B. $m = \{-2; 3\}$. C. $m = \{-3; -2\}$. D. $m = \{2; 3\}$.

Hướng dẫn giải.

.....

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (2m-3)x - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 2?

- A. $m = \{-3; 1\}$. B. $m = \{-1; 3\}$. C. $m = \{-3; -1\}$. D. $m = \{1; 3\}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3?

- A. $m > 6$. B. $0 < m < 6$. C. $m < 0$ hoặc $m > 6$. D. $m < 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng có độ dài nhỏ hơn 1?

- A. $m < -2$. B. $-2 < m < -\frac{5}{4}$.
 C. $m < -2$ hoặc $m > -\frac{5}{4}$. D. $m > -\frac{5}{4}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = (m+1)x^3 - 3(m+1)x^2 + 2mx + 2021$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng có độ dài không nhỏ hơn 1?

- A. $m \leq -9$. B. $m > -1$ hoặc $m \leq -9$.
 C. $m > -1$. D. $m \geq -1$ hoặc $m \leq -9$.

Câu 5. Cho hàm số $y = -2x^3 + 3mx^2 - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(a; b)$ sao cho $b - a = 1$?

- A. $m = -\frac{9}{4}$. B. $m = \pm 2$. C. $m \leq 3$. D. $m = \pm 1$.

Dạng 4. Hàm hợp

Loại 1. Hàm hợp đơn

Phương pháp giải

Để tìm khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f(u(x))$ thì ta làm như sau:

Bước 1: Tính đạo hàm $g'(x) = u'(x) \cdot f'(u(x))$

Bước 2: Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'(u(x)) = 0 \end{cases}$

Bước 3: Tìm các điểm mà tại đó $f'(x) = 0$ là $x = a, b, \dots$ nên $f'(a) = f'(b) = \dots = 0$.

Khi đó: $f'(u(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = a \\ u(x) = b \\ \dots \end{cases}$

Bước 4: Sắp xếp các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ theo thứ tự từ nhỏ đến lớn rồi lập bảng xét dấu theo mẫu sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$+\infty$
$u'(x)$						
$f'(u(x))$						
$g'(x)$						

Bước 5: Xác định dấu của $g'(x)$ tại các khoảng để xác định các khoảng đơn điệu là ”+” (đồng biến) và ”-” (nghịch biến).

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(-1; 0)$.

Hướng dẫn giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

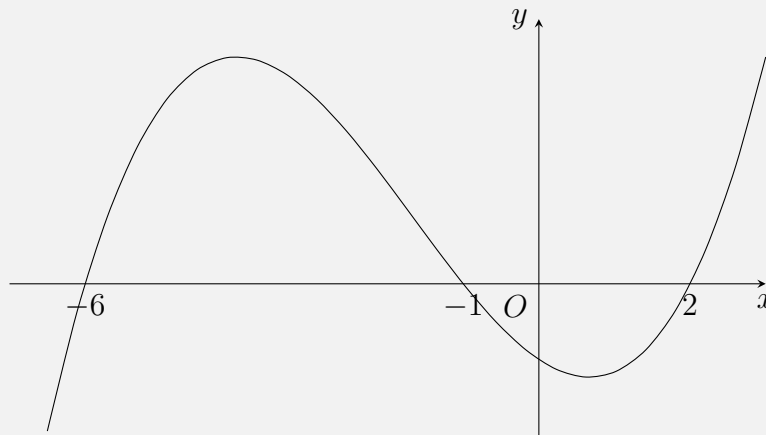
.....

.....

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(2; 3)$. D. $(-2; 1)$.

Hướng dẫn giải.

b. Bài tập vận dụng

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hàm số $g(x) = f(3 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; -1)$. B. $(2; 4)$. C. $(1; 2)$. D. $(4; +\infty)$.

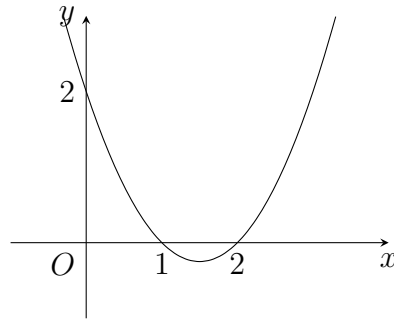
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(-4; -3)$. C. $(0; 1)$. D. $(-2; -1)$.

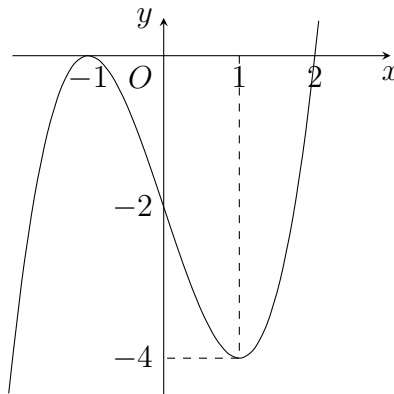
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\frac{3}{2}; +\infty)$. B. $(-\infty; \frac{3}{2})$. C. $(\frac{1}{2}; +\infty)$. D. $(-\infty; \frac{1}{2})$.

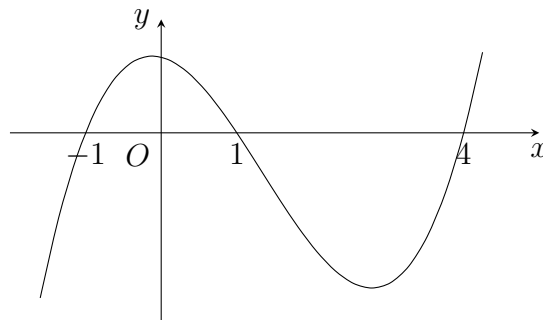
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(|x - 3|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; 6)$. B. $(-1; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; 3)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x) = x(x - 1)^2(x - 2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số

$g(x) = f(\frac{5x}{x^2 + 4})$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 4)$.

Loại 2. Hàm hợp ghép

Phương pháp giải

Xét hàm số $g(x) = f(ax + b) + u(x)$ có đạo hàm $g'(x) = a.f'(ax + b) + v'(x)$

TH1: Khi biết **bảng xét dấu** của đạo hàm $f'(x)$:

- Để hàm số $g(x)$ **đồng biến** thì $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f'(ax + b) > 0 \\ u'(x) > 0 \end{cases}$
- Để hàm số $g(x)$ **nghịch biến** thì $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f'(ax + b) < 0 \\ u'(x) < 0 \end{cases}$

Giải các hệ bất phương trình trên để tìm ra khoảng đơn điệu của hàm số $g(x)$.

TH2: Khi biết **đồ thị** của đạo hàm $f'(x)$:

Giải phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(ax + b) = -\frac{u'(x)}{a}$.

Đặt $t = ax + b$ và biến đổi $-\frac{u'(x)}{a} = v(t)$ với $v(t)$ có thể là nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc 2 hoặc hàm số bậc 3 hoặc hàm số trùng phương.

Khi đó $g'(x) = 0$ thành $g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = v(t)$ hay $g'(t) = f'(t) - v(t)$.

Vẽ đồ thị $f'(t)$ và $v(t)$ trên cùng đồ thị đã có sẵn (coi đồ thị $f'(x)$ chính là đồ thị $f'(t)$ và coi x là t khi vẽ đồ thị).

Tìm các giao điểm của $f'(t)$ và $v(t)$ rồi lập bảng xét dấu theo mẫu sau:

t	$-\infty$	t_1	t_2	$\dots$	t_n	$+\infty$
$g'(t)$		0	0		0	

Để xét dấu $g'(t)$ trên một khoảng thì ta xét xem đồ thị $f'(t)$ **nằm trên** đồ thị $v(t)$ (tức là $f'(t) > v(t)$) hay đồ thị $f'(t)$ **nằm dưới** đồ thị $v(t)$ (tức là $f'(t) < v(t)$).

Ví dụ, khi đồ thị $f'(t)$ nằm trên đồ thị $v(t)$ trên khoảng $(t_1; t_2)$ thì $f'(t) > v(t)$.

Nên $g'(t) = f'(t) - v(t) > 0$ trên khoảng $(t_1; t_2)$ hay $g'(t) > 0 \Leftrightarrow t_1 < t < t_2$.

Do $t = ax + b$ nên $g'(x) > 0 \Leftrightarrow t_1 < ax + b < t_2 \Leftrightarrow c < x < d \Leftrightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(c; d)$.

Làm tương tự, ta sẽ tìm được các khoảng đồng biến và nghịch biến khác của hàm số $g(x)$.

a. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	—	0	+	0	+	0	—	0	+

Hàm số $g(x) = 3f(x + 2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

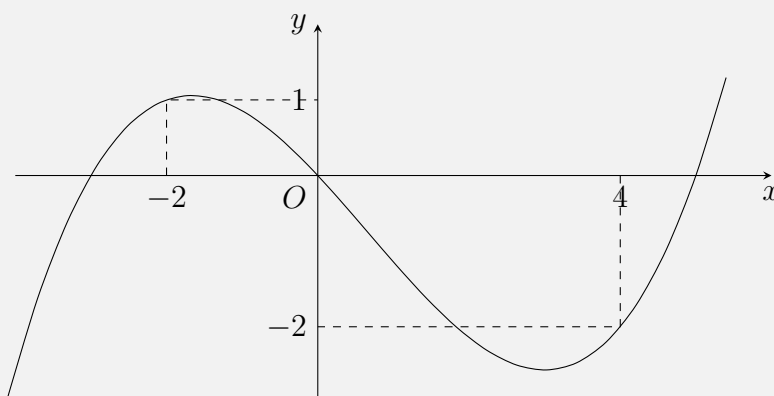
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

.....

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; \frac{3}{2})$. B. $(0; \frac{1}{2})$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải.

b. Ví dụ minh họa

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+	0	−

Hàm số $g(x) = f(x - 1) + x^3 - 12x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(3; 4)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	+	0	−	0	+

Hàm số $g(x) = 2f(1-x) + \sqrt{x^2+1} - x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-3; -2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-4	-1	2	7	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $g(x) = f(2x+1) + \frac{2}{3}x^3 - 8x + 2021$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(1; \infty)$. C. $(-1; 7)$. D. $(-1; \frac{1}{2})$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	5	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

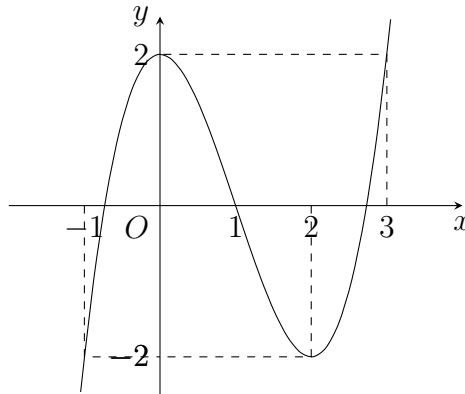
Hàm số $g(x) = 3f(2-x) + x^3 + 3x^2 - 9x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 1)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có của $f'(x) = (3-x)(10-3x)^2(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x) + \frac{1}{6}(x^2-1)^3$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty - \frac{1}{2})$.

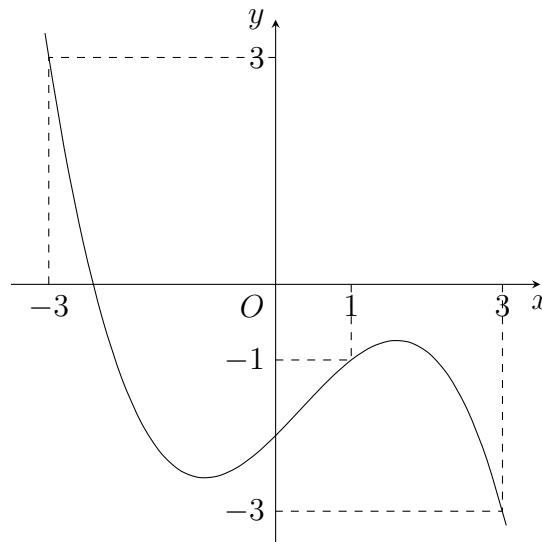
Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(3x+1) + 9x^3 + \frac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(1; +\infty)$.

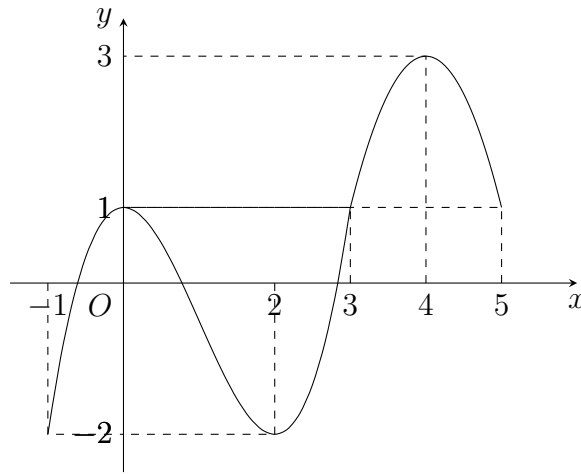
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{1}{2}x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; \frac{3}{2})$. B. $(-2; 0)$. C. $(-3; 1)$. D. $(1; 3)$.

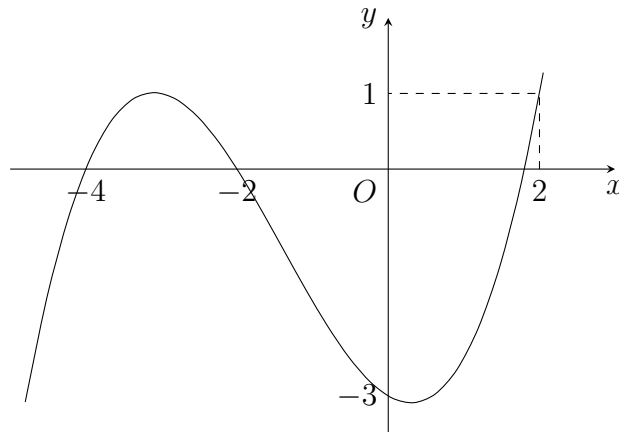
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = -2f(2-x) + x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

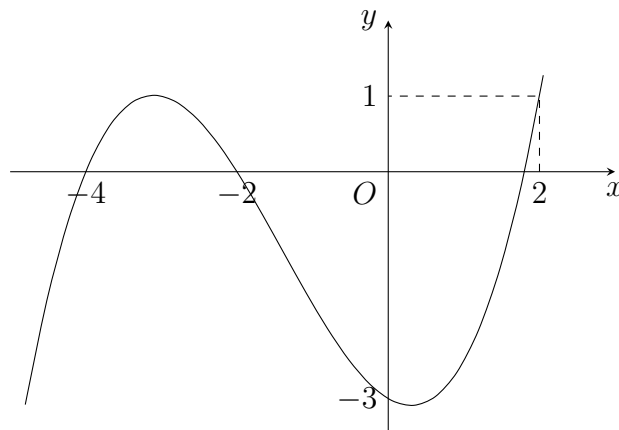
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $f'(x)$ như sau:



Hàm số $g(x) = 3f(x) + x^3 - 6x^2 + 9x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 2)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-2; 0)$.