

Chương 4

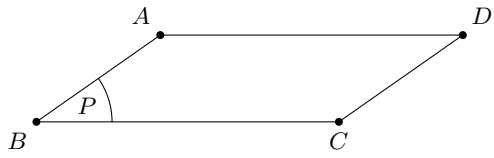
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG
KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

Bài số 1 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

A – KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng

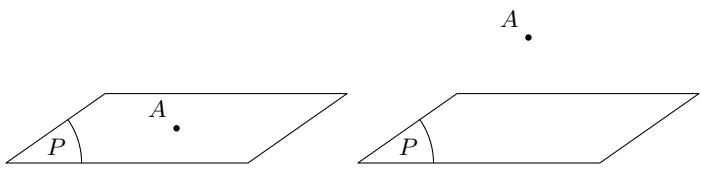
Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành và dùng các chữ cái đặt trong dấu ngoặc đơn () để đặt cho tên mặt phẳng ấy. Ví dụ: mặt phẳng (P) (hình bên), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β), ...



2. Điểm thuộc mặt phẳng

Nhận xét. Với mỗi điểm A và mặt phẳng (P), chỉ xảy ra một trong hai khả năng sau:

- Điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta kí hiệu $A \in (P)$.
- Điểm A không thuộc mặt phẳng (P) hay A nằm ngoài (P), ta kí hiệu $A \notin (P)$



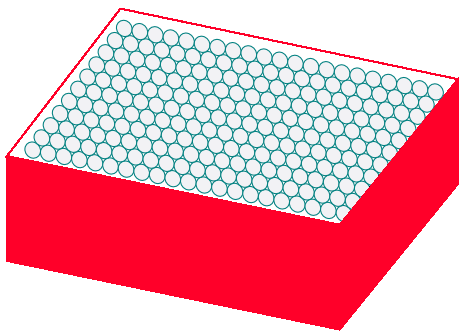
3. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

- Hình được vẽ trong mặt phẳng để giúp ta hình dung được về một hình trong không gian gọi là *hình biểu diễn* của hình không gian đó.
- Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian.
Để việc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian được thuận lợi và thống nhất, ta quy ước như sau:
 - Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng;
 - Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi đường thẳng song song (hoặc cắt nhau);
 - Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng;
 - Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

! Các quy tắc khác sẽ được đề cập sau.

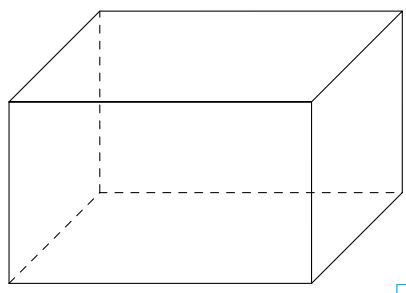
Ví dụ 1.

Dựa trên hình bên, vẽ hình biểu diễn của hộp phấn.



Lời giải.

Hình biểu diễn của hộp phấn có thể vẽ như hình bên.



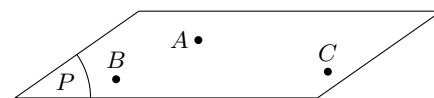
B – CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Do thực tiễn, kinh nghiệm và quan sát, người ta thừa nhận một số tính chất của hình học không gian.

Tính chất 1.1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

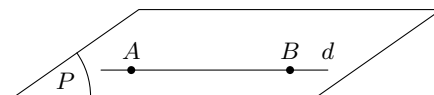
Tính chất 1.2.

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



Tính chất 1.3.

Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều nằm trong mặt phẳng đó.



Ví dụ 2.

Hình bên minh họa người thợ đang kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà. Hãy cho biết người thợ kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà bằng cách nào?



Lời giải.

Người thợ đặt thước dẹt dài lên mặt sàn nhà ở các vị trí khác nhau. Nếu thước đó luôn áp sát mặt sàn (không bị cập kênh) thì mặt sàn là phẳng. □

Tính chất 1.4. Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ví dụ 3.

Giải thích tại sao:

- Chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại địa hình mà vẫn đứng vững.
- Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh.



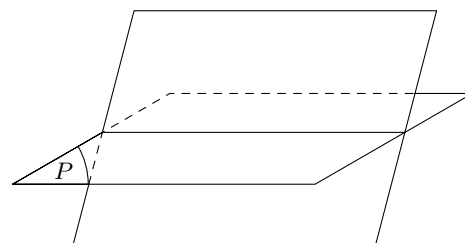
Lời giải.

- Giá đỡ ba chân của máy ảnh khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh vì theo tính chất “Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước”.
- Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh vì theo tính chất “Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng”.

□

Tính chất 1.5.

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.



Nhận xét.

- Có thể xác định giao tuyến của hai mặt phẳng bằng cách đi tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến cần tìm.
- Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) (với giả thiết a cắt (P)), ta có thể làm như sau: Chọn một đường thẳng b thích hợp trong mặt phẳng (P) và tìm giao điểm M của hai đường thẳng a và b . Khi đó M là giao điểm cần tìm.

Tính chất 1.6. Trên mỗi mặt phẳng của không gian, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

C – MỘT SỐ CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG

↻ **Định lí 1.1.** Cho điểm A không thuộc đường thẳng d . Khi đó, qua điểm A và đường thẳng d có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu $mp(A, d)$ hoặc (A, d) .

↻ **Định lí 1.2.** Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Khi đó, qua a và b có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu $mp(a, b)$.

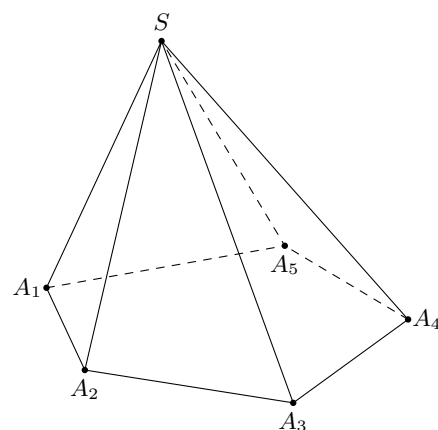
🔴 **Nhận xét.** Mặt phẳng hoàn toàn được xác định theo một trong ba cách sau:

- ☑ Đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- ☑ Đi qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài đường thẳng đó.
- ☑ Đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

D – HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Hình chóp

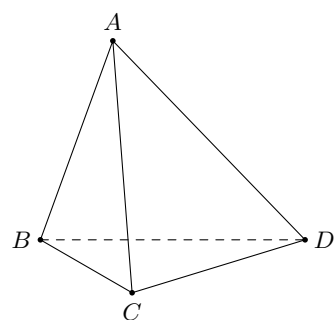
Trong mặt phẳng (P) , cho đa giác $A_1A_2 \dots A_n (n \geq 3)$. Lấy điểm S nằm ngoài (P) . Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác: $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2 \dots A_n$.



- ⚠ ☑ Trong hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$
- Điểm S gọi là **đỉnh**;
 - Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ gọi là **mặt đáy**;
 - Các cạnh của mặt đáy gọi là **cạnh đáy**, các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ gọi là các **cạnh bên**;
 - Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ gọi là các **mặt bên**.
- ☑ Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

2. Hình tứ diện

Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn là tứ diện), kí hiệu là $ABCD$.



-   Trong hình tứ diện $ABCD$.
- Các điểm A, B, C, D gọi là các đỉnh.
 - Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh. Hai cạnh không có điểm chung gọi là hai cạnh đối diện.
 - Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt.
 - Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.
-  Hình tứ diện có các mặt là tam giác đều là hình tứ diện đều.
-  Mỗi hình chóp tam giác là một hình tứ diện. Ngược lại, nếu ta quy định rõ đỉnh và mặt đáy trong một hình tứ diện thì hình tứ diện đó trở thành hình chóp tam giác.
-  **Nhận xét.** Để chứng minh ba điểm thẳng hàng, ta có thể chỉ ra ba điểm đó cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

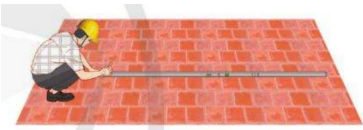
E – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

 Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

 Ví dụ mẫu

Ví dụ 4 (Cánh diều).

Hình bên minh họa người thợ đang kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà. Hãy cho biết người thợ kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà bằng cách nào?



 Lời giải.

Người thợ đặt thước dẹt dài lên mặt sàn nhà ở các vị trí khác nhau. Nếu thước đó luôn áp sát mặt sàn (không bị cập kênh) thì mặt sàn là phẳng. □

Ví dụ 5 (Cánh diều).

Giải thích tại sao:

- a) Chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại địa hình mà vẫn đứng vững.
- b) Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh.



 Lời giải.

- a) Giá đỡ ba chân của máy ảnh khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh vì theo tính chất “Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước”.
- b) Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh vì theo tính chất “Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng”.

□

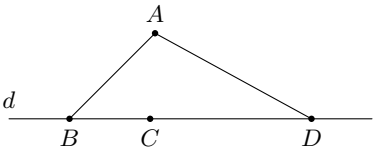
Ví dụ 6 (Cánh diều).

- a) Cho điểm A không thuộc đường thẳng d . Trên d lấy ba điểm B, C, D đôi một khác nhau. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.
- b) Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O . Đường thẳng c không đi qua O và cắt các đường thẳng a, b . Chứng minh rằng ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng.

 Lời giải.

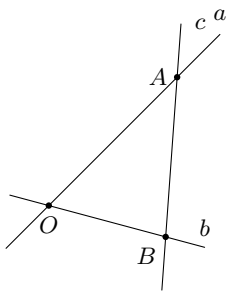
a)

Theo Định lí 1, qua điểm A và đường thẳng d có mặt phẳng (α) . Do $B, C, D \in d$ nên $B, C, D \in (\alpha)$. Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.



b)

Theo Định lí 2, qua hai đường thẳng a, b có mặt phẳng (β) . Giả sử đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b lần lượt tại các điểm A và B . Do c không đi qua O nên A khác B . Ta có $A \in a, B \in b$ nên $A, B \in (\beta)$. Suy ra c nằm trong mặt phẳng (β) . Vậy ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng.

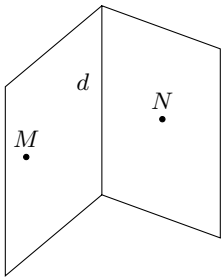


□

Ví dụ 7 (Chân trời). Với đường thẳng d và hai điểm M, N phân biệt không thuộc d , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

Lời giải.

Với đường thẳng d và điểm M không thuộc d , ta xác định được mặt phẳng thứ nhất là (M, d) . Nếu điểm N thuộc (M, d) thì ta chỉ xác định được một mặt phẳng. Nếu điểm N không thuộc (M, d) thì ta xác định được mặt phẳng thứ hai là (N, d) .



□

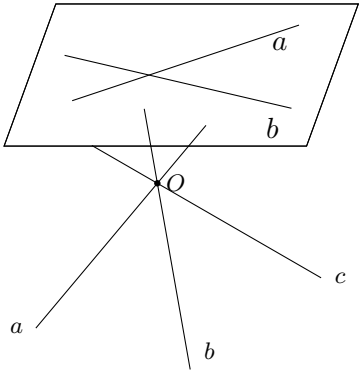
☑ Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Mặt phẳng xác định bởi điểm hai đường thẳng a, b cắt nhau kí hiệu là $mp(a, b)$.

Ví dụ 8 (Chân trời). Với ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

Lời giải.

Từ ba cặp đường thẳng cắt nhau a và b , b và c , c và a , ta xác định được ba mặt phẳng là $mp(a, b)$, $mp(b, c)$, $mp(c, a)$.



□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Trong không gian, cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P) . Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

- a) Nếu a chứa một điểm nằm trong (P) thì a nằm trong (P) .
- b) Nếu a chứa hai điểm phân biệt thuộc (P) thì a nằm trong (P) .
- c) Nếu a và b cùng nằm trong (P) thì giao điểm (nếu có) của a và b cũng nằm trong (P) .
- d) Nếu a nằm trong (P) và a cắt b thì b nằm trong (P) .

Lời giải.

- a) Khẳng định : “Nếu a chứa một điểm nằm trong (P) thì a nằm trong (P) ” là khẳng định sai.
- b) Khẳng định : “Nếu a chứa hai điểm phân biệt thuộc (P) thì a nằm trong (P) ” là khẳng định đúng.
- c) Khẳng định : “Nếu a và b cùng nằm trong (P) thì giao điểm (nếu có) của a và b cũng nằm trong (P) ” là khẳng định đúng.
- d) Khẳng định : “Nếu a nằm trong (P) và a cắt b ” thì b nằm trong (P) là khẳng định sai.

Bài 2.

Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là thước dẹt dài (hình bên). Công dụng của thước dẹt này là gì? Giải thích.

**Lời giải.**

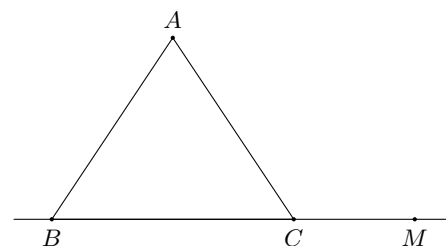
Công dụng của thước dẹt là cân phẳng vữa trên bề mặt tường.

Khi trát tường, người thợ dùng thước dẹt dài di chuyển (cán) trên bề mặt tường làm cho mặt tường phẳng (trùng với mặt phẳng thước).

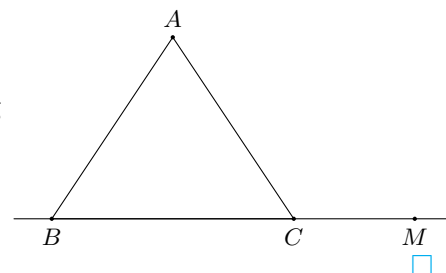
Bài 3.

Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc đường thẳng BC .

- Điểm M có thuộc mặt phẳng (ABC) hay không?
- Đường thẳng AM có nằm trong mặt phẳng (ABC) hay không?

**Lời giải.**

- Đường thẳng BC có hai điểm phân biệt B, C thuộc mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng BC nằm trong mặt phẳng (ABC) . Vì M thuộc đường thẳng BC nên M thuộc mặt phẳng (ABC) .
- Đường thẳng AM có hai điểm phân biệt A, M thuộc mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng AM nằm trong mặt phẳng (ABC) .



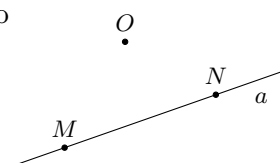
Bài 4. Cho ba điểm phân biệt M, N, P không thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong ba điểm đã cho?

Lời giải.

Do qua hai điểm phân biệt chỉ có một đường thẳng nên qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng M, N, P , ta xác định được ba đường thẳng là MN, NP và PM .

Bài 5.

Cho đường thẳng a đi qua hai điểm phân biệt M, N và điểm O không thuộc a . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O ?

**Lời giải.**

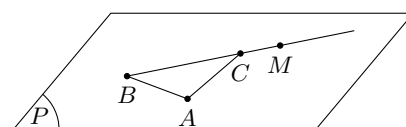
Do O không thuộc a nên ba điểm M, N, O không thẳng hàng. Do đó chỉ có một mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O .

Bài 6. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một điểm M nằm trên đường thẳng BC . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Chứng tỏ rằng $M \in (P)$.

Lời giải.

Áp dụng tính chất 2, ta có (P) là mặt phẳng duy nhất đi qua ba điểm A, B, C .

Áp dụng tính chất 3, ta có mọi điểm của đường thẳng BC đều thuộc mặt phẳng (P) . Ta lại có $M \in BC$ (giả thiết). Suy ra $M \in (P)$.



Bài 7. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong bốn điểm đã cho?

Lời giải.

Gọi A, B, C, D là bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng trong không gian (tồn tại theo tính chất 4). Ta xác định được bốn mặt phẳng phân biệt là: $(ABC), (ABD), (ACD), (BCD)$. □

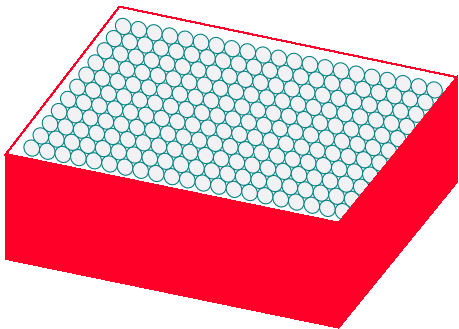
Dạng 2. Hình biểu diễn của một hình không gian

- ☑ Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng;
- ☑ Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi đường thẳng song song (hoặc cắt nhau);
- ☑ Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng;
- ☑ Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

1. Ví dụ mẫu

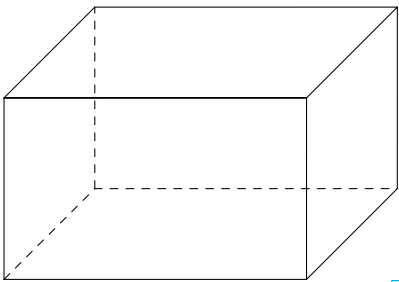
Ví dụ 9 (Cánh điều).

Dựa trên hình bên, vẽ hình biểu diễn của hộp phấn.



Lời giải.

Hình biểu diễn của hộp phấn có thể vẽ như hình bên.

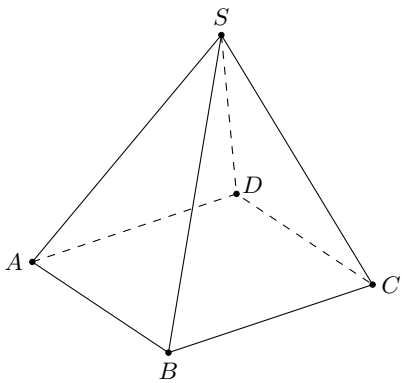


Ví dụ 10 (Chân trời). Cho hình chóp $S.ABCD$ (Hình vẽ bên). Gọi tên các mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Hình chóp $S.ABCD$ có:

- ☑ Các mặt bên: SAB, SBC, SCD, SDA ;
- ☑ Mặt đáy $ABCD$;
- ☑ Các cạnh bên: SA, SB, SC, SD ;
- ☑ Các cạnh đáy: AB, BC, CD, DA .

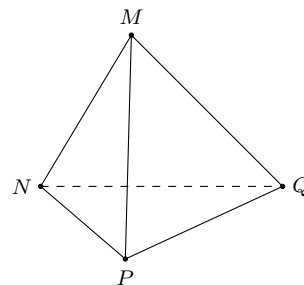


Ví dụ 11 (Chân trời). Gọi tên các mặt, các cặp cạnh đối diện của tứ diện $MNPQ$.

Lời giải.

Tứ diện $MNPQ$ có:

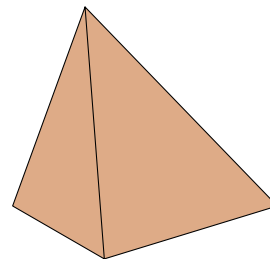
- ☑ Các mặt: MNP, MPQ, MQN, NPQ .
- ☑ Các cặp cạnh đối diện: MN và PQ, MP và NQ, MQ và NP .



2. Bài tập rèn luyện

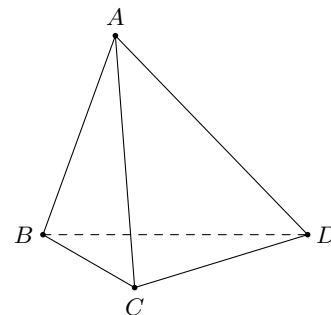
Bài 8.

Hình bên là hình ảnh của chặn giấy bằng gỗ có bốn mặt phân biệt là các tam giác. Vẽ hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ đó.



Lời giải.

Hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ như hình bên.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong không gian, qua ba điểm không thẳng hàng xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

- (A) 1. (B) 4. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

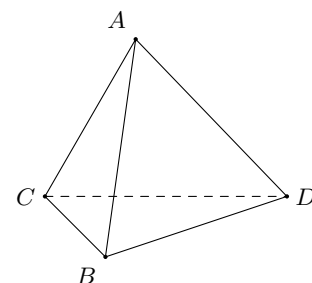
Qua 3 điểm không thẳng hàng xác định được một mặt phẳng.

Chọn đáp án (A)

Câu 2.

Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng (tham khảo hình vẽ bên). Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- (A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 6.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có 4 mặt phẳng là $(ABC), (ABD), (ADC)$ và (BCD) .

Chọn đáp án (B)

Câu 3. Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng, có thể xác định nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đó?

- (A) 4. (B) 2. (C) 6. (D) 3.

Lời giải.

Cách 1: Vì 4 điểm đã cho là không đồng phẳng nên tạo thành 1 tứ diện.

Mà tứ diện có 4 mặt phẳng.

Cách 2: Vì 4 điểm đã cho là không đồng phẳng nên chọn 3 điểm bất kì cho ta 1 mặt phẳng.

Do đó số mặt phẳng được xác định từ 4 điểm đã cho là $C_4^3 = 4$

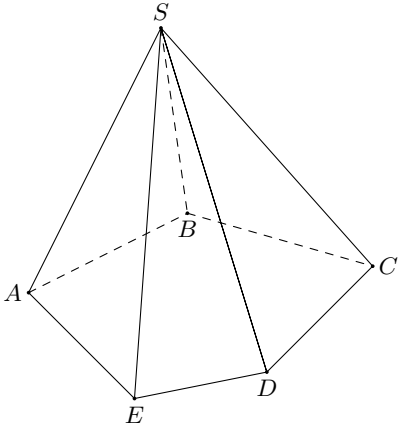
Chọn đáp án (A)



Câu 4. Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là

- (A) 6 mặt, 5 cạnh. (B) 6 mặt, 10 cạnh. (C) 5 mặt, 10 cạnh. (D) 5 mặt, 5 cạnh.

Lời giải.



Hình chóp ngũ giác có 5 mặt bên và 1 mặt đáy, 5 cạnh bên và 5 cạnh đáy.

Chọn đáp án (B)



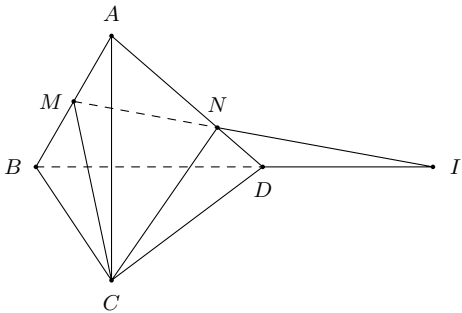
Câu 5. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Trên AB, AD lần lượt lấy các điểm M và N sao cho MN cắt BD tại I . Điểm I không thuộc mặt phẳng nào sau đây?

- (A) (CMN) . (B) (BCD) . (C) (ABD) . (D) (ACD) .

Lời giải.

Do $D \in (ACD)$ nên nếu $I \in (ACD)$ thì đường thẳng ID thuộc mặt phẳng (ACD) suy ra $B \in (ACD)$ hay A, B, C, D đồng phẳng (trái với giả thiết).

Vậy $I \notin (ACD)$.



Chọn đáp án (D)

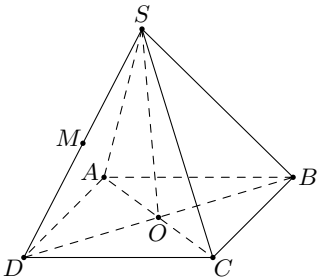


Câu 6.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm của SD .

Khi đó SO cắt đường thẳng nào sau đây?

- (A) BM . (B) AD . (C) AB . (D) BC .



Lời giải.

Vì SO và BM là hai đường trung tuyến của tam giác SBD nên SO cắt BM .

SO vào AB chéo nhau; SO vào AD chéo nhau; SO vào BC chéo nhau.

Chọn đáp án (A)



Câu 7. Cho mặt phẳng (P) và ba điểm A, B, C phân biệt không thẳng hàng và không thuộc mặt phẳng (P) . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AB, BC, CA với (P) . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- (A) $\triangle MNP = \triangle ABC$. (B) M, N, P thẳng hàng.
(C) 4 điểm M, N, P, C không đồng phẳng. (D) 4 điểm A, B, C, M không đồng phẳng.

Lời giải.

Theo lí thuyết, ta có M, N, P thẳng hàng.

Chọn đáp án (B)

Câu 8. Trong không gian, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- (A) Có duy nhất một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
- (B) Tồn tại duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.
- (C) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt.
- (D) Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng.

Chọn đáp án (C)

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- (B) Nếu ba điểm phân biệt M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
- (C) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.
- (D) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất" là sai vì hai mặt phẳng có thể trùng nhau.

Chọn đáp án (A)

Câu 10. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

- (A) Nếu ba điểm phân biệt M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
- (B) Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- (C) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- (D) Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

Lời giải.

Đáp án "Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất" **sai** vì hai mặt phẳng trùng nhau có vô số điểm chung, không nhất thiết phải là đường thẳng chung duy nhất.

Chọn đáp án (C)

Câu 11. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$, lấy điểm I trên cạnh AC kéo dài. Chọn khẳng định **sai**.

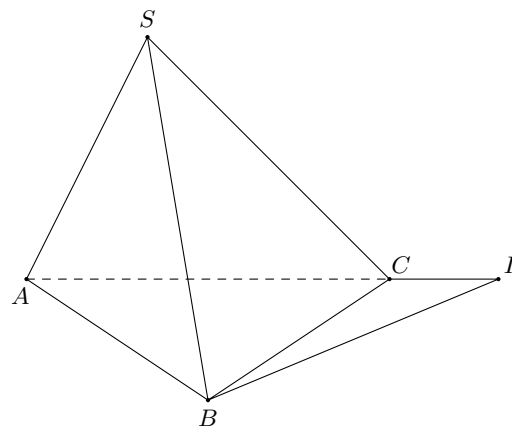
- (A) $BI \not\subset (ABC)$.
- (B) $I \in (ABC)$.
- (C) $(ABC) \equiv (IBC)$.
- (D) $S \in (SAB)$.

Lời giải.

Rõ ràng $S \in (SAB)$.

Do $I \in AC$ nên $I \in (ABC)$. Suy ra $BI \subset (ABC)$ và $(ABC) \equiv (IBC)$.

Bởi vậy, khẳng định **sai** là $BI \not\subset (ABC)$.



Chọn đáp án (A)

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD \parallel BC, AD > BC$). Gọi I là giao điểm của AB và DC ; M là trung điểm của SC và DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J . Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) Đường thẳng SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- (B) Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB) .

- (C) Ba điểm S, I, J thẳng hàng.
 (D) Đường thẳng DM thuộc mặt phẳng (SCI) .

Lời giải.

Ta có: $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

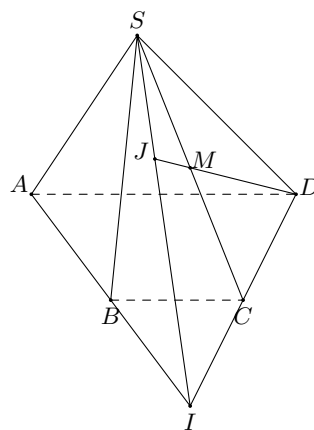
$$\begin{cases} I \in AB, AB \subset (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD).$$

Nên $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

$M \notin (SAB)$ nên $JM \not\subset (SAB)$. Vậy khẳng định “Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB) ” sai.

Ta có: S, I, J thẳng hàng vì ba điểm cùng thuộc hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

$M \in SC \Rightarrow M \in (SCI)$ nên $DM \subset (SCI)$.



Chọn đáp án (B)

Dạng 3. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

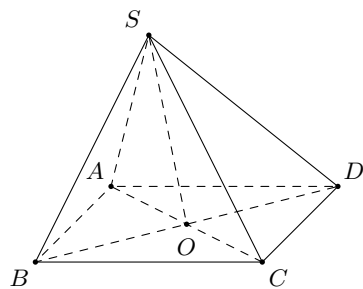
Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm cùng thuộc cả hai mặt phẳng đó.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 12. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng hình bình hành $ABCD$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có S và O là hai điểm chung của (SAC) và (SBD) nên:
 $(SAC) \cap (SBD) = SO$.



Ví dụ 13. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với mặt phẳng (BCD) .

Lời giải.

Ta thấy $D \in (DMN) \cap (BCD)$. (1)

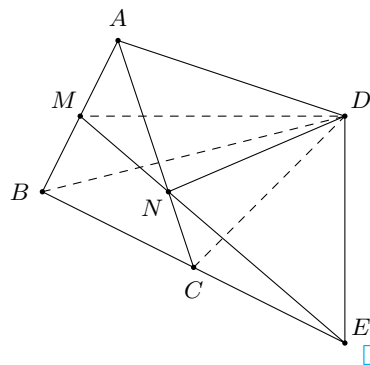
Trong mặt phẳng (ABC) gọi $E = MN \cap BC$.

Ta có: $E \in MN$ mà $MN \subset (DMN) \Rightarrow E \in (DMN)$;

$E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$.

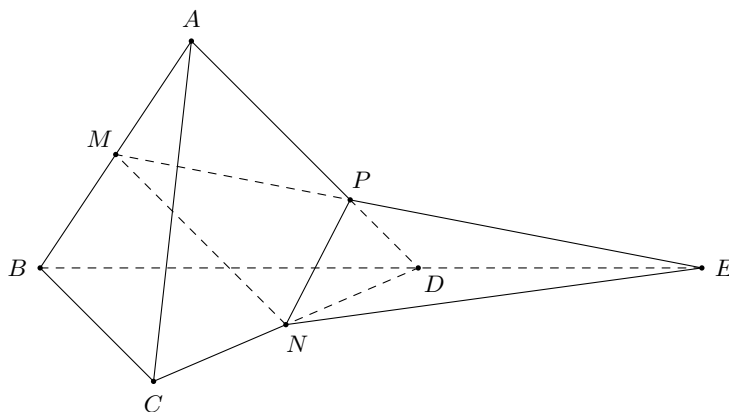
$\Rightarrow E \in (DMN) \cap (BCD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(DMN) \cap (BCD) = DE$.



Ví dụ 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD , trên cạnh AD lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD . Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD)

Lời giải.



$$\text{Ta có: } \begin{cases} N \in (PMN) \\ N \in CD \subset (BCD) \Rightarrow N \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow N \in (PMN) \cap (BCD). \quad (1)$$

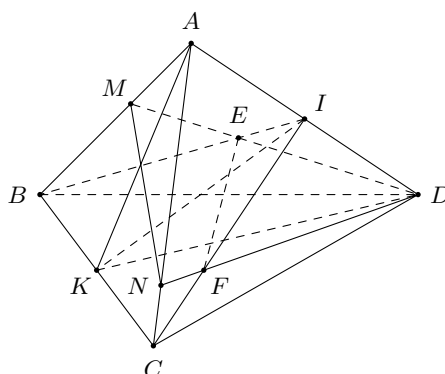
$$\begin{cases} E \in MP \subset (PMN) \Rightarrow E \in (PMN) \\ E \in BD \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (PMN) \cap (BCD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(PMN) \cap (BCD) = NE$.

Ví dụ 15. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC .

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD) .
- b) Gọi M, N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn thẳng AB và AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) .

 **Lời giải.**



a) Ta có: $\begin{cases} I \in (IBC') \\ I \in AD \subset (KAD) \Rightarrow I \in (KAD) \end{cases} \Rightarrow I \in (IBC) \cap (KAD). \quad (1)$

$$\begin{cases} K \in BC \subset (IBC) \\ K \in (KAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (IBC) \Rightarrow K \in (IBC) \cap (KAD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(IBC) \cap (KAD) = IK$.

- b) Gọi $E = IB \cap DM$ và $F = IC \cap DN$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} E \in IB \subset (IBC) \Rightarrow E \in (IBC) \\ E \in DM \subset (DMN) \Rightarrow E \in (DMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (IBC) \cap (DMN). \quad (3)$$

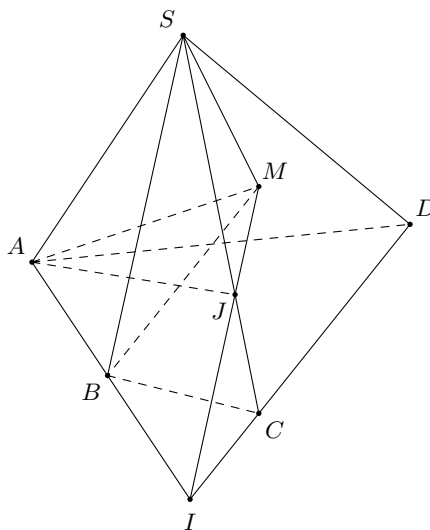
$$\begin{cases} F \in IC \subset (IBC) \Rightarrow F \in (IBC) \\ F \in DN \subset (DMN) \Rightarrow F \in (DMN) \end{cases} \Rightarrow F \in (IBC) \cap (DMN). \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $(IBC) \cap (DMN) = EF$.

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là tứ giác $ABCD$ có hai cạnh đối diện AB và CD không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong của tam giác SCD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- a) (SBM) và (SCD) ;
 b) (ABM) và (SCD) ;
 c) (ABM) và (SAC) .

Lời giải.



- a) $(SBM) \cap (SCD) = ?$
 Dễ thấy S, M là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SBM) và (SCD) nên $(SBM) \cap (SCD) = SM$.
- b) $(ABM) \cap (SCD) = ?$
 Ta thấy $M \in (ABM) \cap (SCD)$.
 Gọi $I = AB \cap CD$. Khi đó $I \in AB \Rightarrow I \in (ABM)$. Mặt khác $I \in CD \Rightarrow I \in (SCD)$.
 Nên $(ABM) \cap (SCD) = IM$.
- c) $(ABM) \cap (SAC) = ?$
 Ta thấy $A \in (ABM) \cap (SAC)$.
 Gọi $J = IM \cap SC$. Khi đó $J \in IM$ mà $IM \cap (ABM) \Rightarrow J \in (ABM)$. Mặt khác $J \in AC \Rightarrow J \in (SAC)$.
 Vậy $(ABM) \cap (SAC) = AJ$.

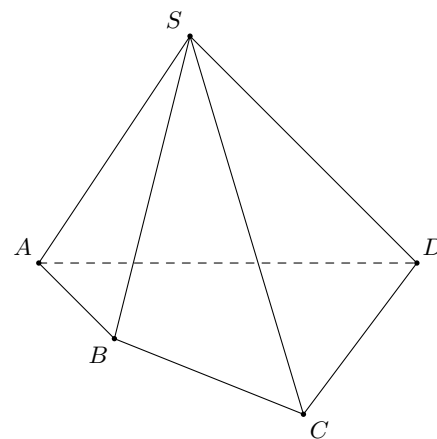
□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 9.

Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

- a) Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD) .
 b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD) .
 c) Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC) .



Lời giải.

a) Gọi H là giao điểm của AC với BD .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} H \in AC \\ H \in BD \end{cases} \Rightarrow H \in (SAC) \cap (SBD). \quad (1)$$

$$\text{Dễ thấy } S \in (SAC) \cap (SBD). \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } SH = (SBD) \cap (SAC).$$

b) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng CD và AB .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} K \in AB \\ K \in CD \end{cases} \Rightarrow K \in (SAB) \cap (SCD). \quad (3)$$

$$\text{Dễ thấy } S \in (SAB) \cap (SCD). \quad (4)$$

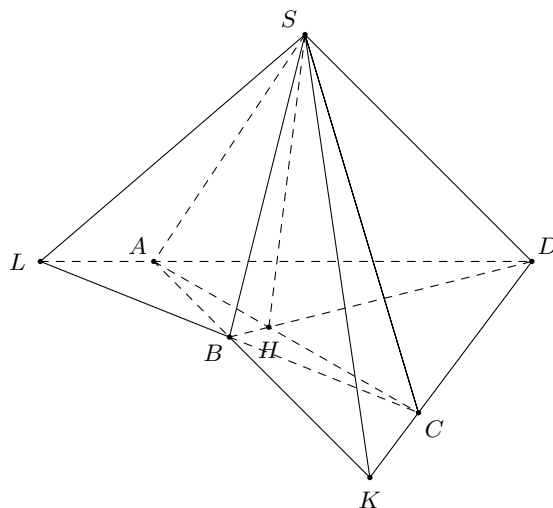
$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } SK = (SAB) \cap (SCD).$$

c) Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} L \in AD \\ L \in BC \end{cases} \Rightarrow L \in (SAD) \cap (SBC). \quad (5)$$

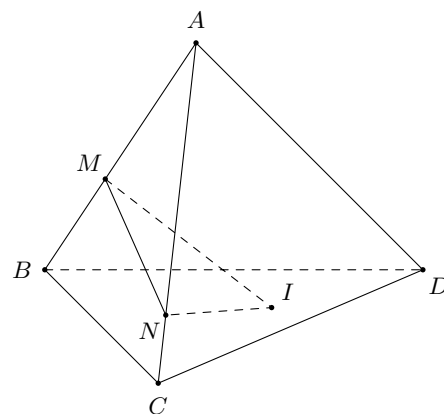
$$\text{Mặt khác } S \in (SAD) \cap (SBC). \quad (6)$$

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra } SL = (SAD) \cap (SBC).$$



Bài 10.

Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC . Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt phẳng (ABC) , (BCD) , (ABD) , (ACD) .



Lời giải.

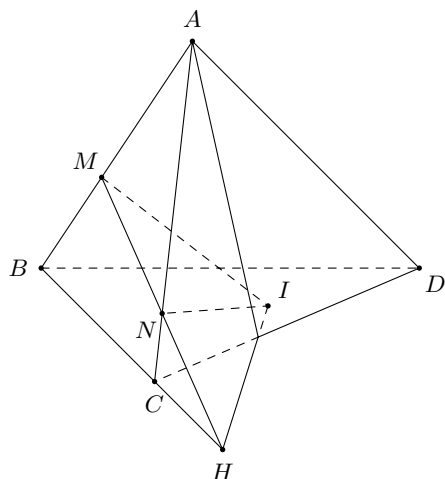
a) Dễ thấy $(MNI) \cap (ABC) = MN$.

b) Tìm $(MNI) \cap (BCD)$.

☑ Gọi H là giao điểm của MN và BC .
Suy ra $H \in (MNI) \cap (BCD)$. (1)

☑ Do I là điểm trong $\triangle BCD$ nên $I \in (MNI) \cap (BCD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IH = (MNI) \cap (BCD)$.



c) Tìm $(MNI) \cap (ABD)$.

☑ Gọi $E = IH \cap BD$. Ta có $\begin{cases} E \in BD \\ E \in IH \end{cases} \Rightarrow E \in (MNI) \cap (ABD)$. (3)

☑ Dễ thấy $M \in (ABD) \cap (MNI)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $ME = (ABD) \cap (MNI)$.

d) Tìm $(MNI) \cap (BCD)$.

☑ Gọi $F = IH \cap CD$. Ta có $\begin{cases} F \in CD \\ F \in IH \end{cases} \Rightarrow F \in (MNI) \cap (ACD)$. (5)

☑ Mặt khác: $N \in AC$ nên $N \in (ACD)$.

Suy ra $N \in (MNI) \cap (ACD)$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $NF = (ACD) \cap (MNI)$.

□

Bài 11. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD , N là một điểm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) (AMN) và (BCD) .

b) (DMN) và (ABC) .

☑ **Lời giải.**

a) Tìm $(AMN) \cap (BCD)$.

Trong (ABD) , gọi $E = AM \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} E \in AM \subset (AMN) \\ E \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (BCD)$. (1)

Trong (ACD) , gọi $F = AN \cap CD$.

Ta có $\begin{cases} F \in AN \subset (AMN) \\ F \in CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (BCD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (BCD) = EF$.

b) Tìm $(DMN) \cap (ABC)$.

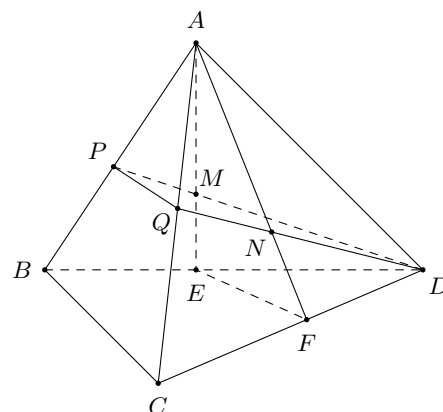
Trong (ABD) , gọi $P = DM \cap AB$.

Ta có $\begin{cases} P \in DM \subset (DMN) \\ P \in AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (DMN) \cap (ABC)$. (3)

Trong (ACD) , gọi $Q = DN \cap AC$.

Ta có $\begin{cases} Q \in DN \subset (DMN) \\ Q \in AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow Q \in (DMN) \cap (ABC)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(DMN) \cap (ABC) = PQ$.



□

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CD, SA . Tìm giao tuyến của

a) (MNP) và (SAB) .

b) (MNP) và (SBC) .

Lời giải.

a) Tìm $(MNP) \cap (SAB)$.

☑ Ta có $P \in (MNP) \cap (SAB)$. (1)

☑ Gọi $F = MN \cap AB$ thì $\begin{cases} F \in MN \subset (MNP) \\ F \in AB \subset (SAB). \end{cases}$
nên $F \in (MNP) \cap (SAB)$. (2)

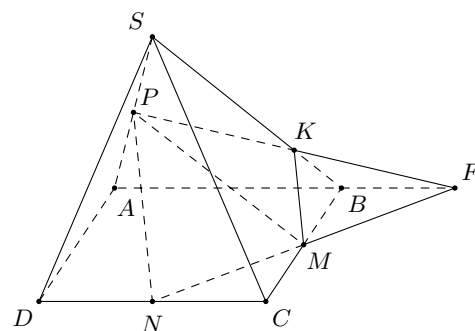
Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \cap (SAB) = PF$.

b) Tìm $(MNP) \cap (SBC)$.

☑ Ta có $M \in (MNP) \cap (SBC)$. (3).

☑ Gọi $K = PF \cap SB$ thì $\begin{cases} K \in PF \subset (MNP) \\ K \in SB \subset (SBC). \end{cases}$
nên $K \in (MNP) \cap (SBC)$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(MNP) \cap (SBC) = MK$.



Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang. Biết cạnh AD song song và có độ dài gấp hai lần cạnh BC . Gọi M là trung điểm của SA . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC) .

Lời giải.

Dễ thấy $C \in (MCD) \cap (SBC)$. (1)

Gọi $N = AB \cap CD$.

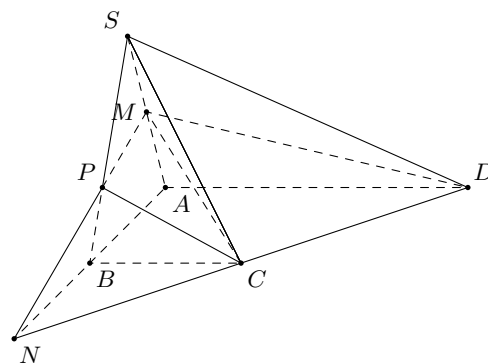
Khi đó $N \in CD \Rightarrow N \in (MCD) \Rightarrow MN \subset (MCD)$.

Gọi $P = SB \cap MN$.

Khi đó $P \in MN \Rightarrow P \in (MCD)$;

Mặt khác $P \in SB \Rightarrow P \in (SAB) \Rightarrow P \in (MCD) \cap (SBC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(MCD) \cap (SBC) = CP$.



3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) là

(A) BC .

(B) AB .

(C) CD .

(D) AD .

Lời giải.

$(ABC) \cap (BCD) = BC$.

Chọn đáp án (A)

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBC) là

(A) SB .

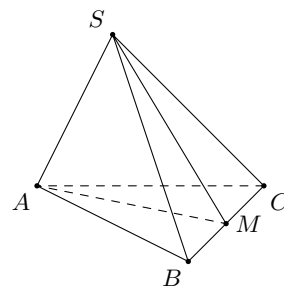
(B) SM .

(C) SC .

(D) BC .

Lời giải.

Để thấy $(SAM) \cap (SBC) = SM$.



Chọn đáp án (B)

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SBO) và (SCD) là

(A) SA .

(B) SO .

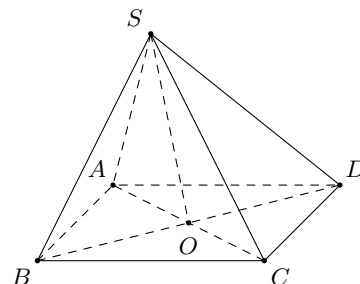
(C) SB .

(D) SD .

Lời giải.

Để thấy $S \in (SBO) \cap (SCD)$.

và $D \in (SBO) \cap (SCD)$ nên $(SBO) \cap (SCD) = SD$.



Chọn đáp án (D)

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

(A) SD .

(B) SO (O là tâm của hình bình hành $ABCD$).

(C) SE (E là trung điểm của AB).

(D) SF (F là trung điểm của CD).

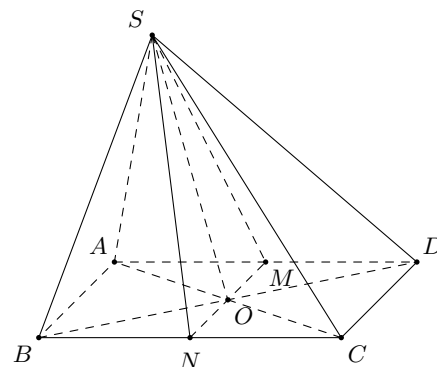
Lời giải.

Để thấy $S \in (SMN) \cap (SAC)$.

Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$ khi đó $O = AC \cap MN$.

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in MN \subset (SMN) \\ O \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow O \in (SMN) \cap (SAC).$$

Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO$ với O là tâm của hình bình hành $ABCD$.



Chọn đáp án (B)

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Giao tuyến của mặt phẳng (BG_1G_2) và mặt phẳng (ACD) là

(A) G_1G_2 .

(B) AG_1 .

(C) AG_2 .

(D) CG_1 .

Lời giải.

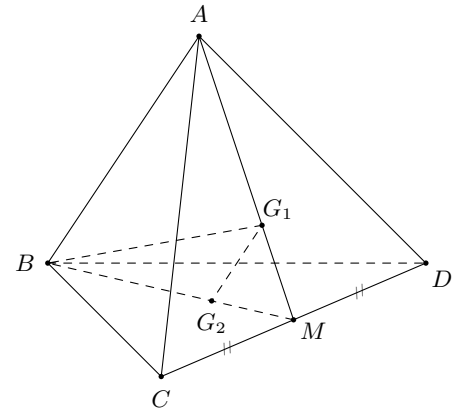
Để thấy $G_1 \in (BG_1G_2) \cap (ACD)$. (1)

Gọi M là trung điểm CD , khi đó $M \in BG_2$ hay $M \in (BG_1G_2)$.

Từ đó suy ra $MG_1 \subset (BG_1G_2)$ mà $A \in (MG_1) \Rightarrow A \in (BG_1G_2)$.

Do đó $A \in (ACD) \cap (BG_1G_2)$. (2)

Vậy AG_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng (BG_1G_2) và (ACD) .



Chọn đáp án (B)

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và M là điểm bất kỳ trên cạnh SD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (MAC) là

(A) SO với O là giao điểm của AC và BD .

(B) OM với O là giao điểm của MC và BD .

(C) OM với O là giao điểm của AC và BD .

(D) OM với O là giao điểm của SB và AC .

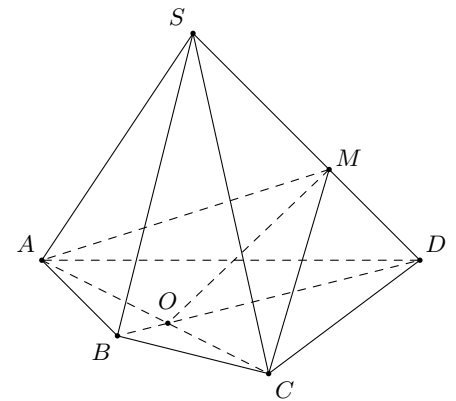
🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} M \in SD \Rightarrow M \in (SBD) \\ M \in (MAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SBD) \cap (MAC)$. (1)

Gọi $O \in AC \cap BD$.

Khi đó $\begin{cases} O \in BD \Rightarrow O \in (SBD) \\ O \in AC \Rightarrow O \in (MAC) \end{cases} \Rightarrow O \in (SBD) \cap (MAC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra OM là giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (MAC) .



Chọn đáp án (C)

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) Hình chóp $S.ABCD$ có bốn mặt bên.

(B) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO , với O là giao điểm của AC và BD .

(C) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI , với I là giao điểm của AD và BC .

(D) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

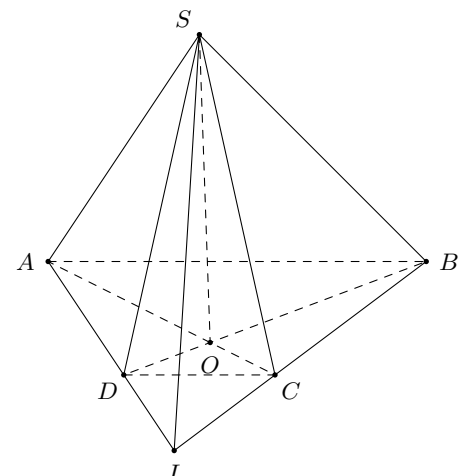
🗨️ **Lời giải.**

☑ Hình chóp $S.ABCD$ có bốn mặt bên: (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SAD) . Do đó đáp án A đúng.

☑ Do $O = AC \cap BD$ nên $(SAC) \cap (SBD) = SO$ nên đáp án B đúng.

☑ Do $I = AD \cap BC$ nên $(SAD) \cap (SBC) = SI$ nên đáp án C đúng.

☑ Vậy D là đáp án sai.



Chọn đáp án (D)

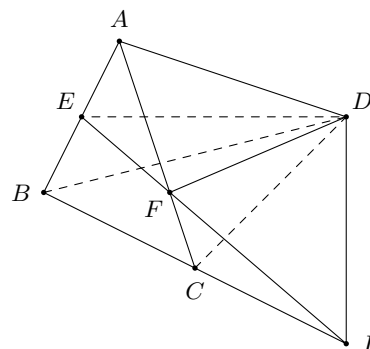
Câu 20. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD . Gọi E, F lần lượt là các điểm nằm trên cạnh AB và AC . Khi EF và BC cắt nhau tại I thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

- (A) (BCD) và (DEF) . (B) (BCD) và (ABC) . (C) (BCD) và (AEF) . (D) (BCD) và (ABD) .

Lời giải.

$$\text{Do } I = EF \cap BC \text{ mà } \begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (BCD) \cap (DEF) \\ I \in (BCD) \cap (ABC) \\ I \in (BCD) \cap (AEF). \end{cases}$$

Vậy $I \notin (BCD) \cap (ABD)$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là

- (A) đường thẳng MN .
(B) đường thẳng AM .
(C) đường thẳng BG (G là trọng tâm của tam giác ACD).
(D) đường thẳng AH (H là trực tâm của tam giác ACD).

Lời giải.

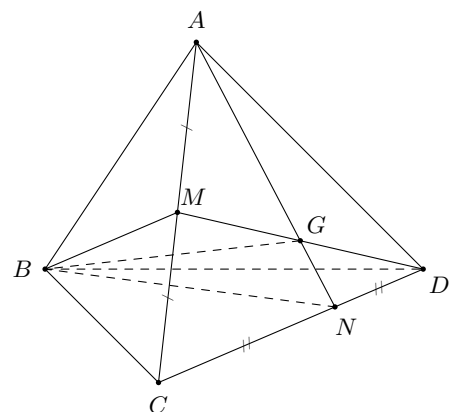
Để thấy $B \in (MBD) \cap (ABN)$.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC và CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD .

Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD suy ra $G = AN \cap DM$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow G \in (ABN) \cap (MBD).$$

Vậy $(MBD) \cap (ABN) = BG$, với G là trọng tâm của tam giác ACD .



Chọn đáp án (C) □

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SD và BC . Giao tuyến của mặt phẳng (DMN) và (SAB) là.

- (A) SI với I là giao điểm của AB và DN . (B) SI với I là giao điểm của SB và MN .
(C) SD . (D) SI với I là giao điểm của DN và SB .

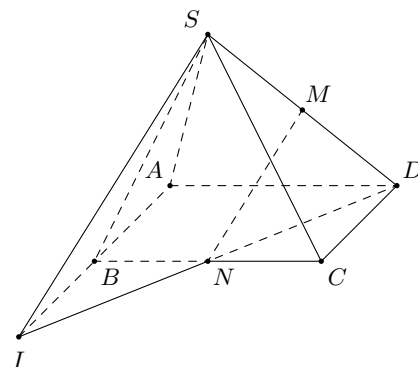
Lời giải.

Ta có $S \in DM \Rightarrow S \in (DMN), \Rightarrow S \in (DMN) \cap (SAB)$. (1)

Gọi I là giao điểm của DN và AB , khi đó do $I \in DM$ nên $I \in (DMN)$.

Tương tự ta có $I \in (SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (SAB) .



Chọn đáp án (A)



Dạng 4. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) , ta tìm giao điểm của d với một đường thẳng a nằm trong (P) . Xét hai khả năng:

① Nếu đường thẳng a dễ thấy, nghĩa là thấy sẵn $a \subset (P)$ và a cắt được d . Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$, khi đó $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng a khó thấy, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và dễ tìm giao tuyến với (P) ;
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC sao cho $MA = 2MS$, $NS = 2NC$.

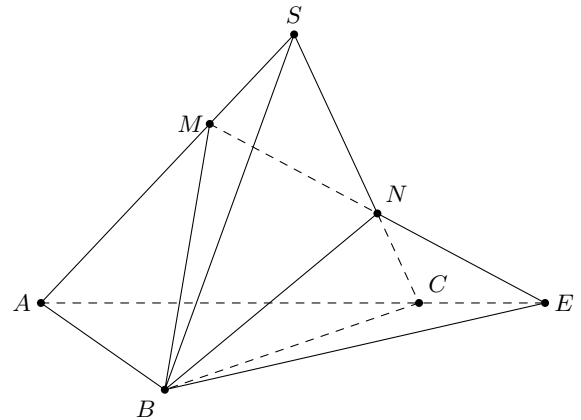
- Xác định giao điểm của MN với mặt phẳng (ABC) .
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (BMN) với mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

- Trong (SAC) , gọi $E = MN \cap AC$.

Ta có $\begin{cases} E \in MN \\ E \in AC, AC \subset (ABC) \end{cases}$
suy ra $E = MN \cap (ABC)$.

- Ta có $\begin{cases} B \in (BMN) \cap (ABC) \\ E \in (BMN) \cap (ABC) \end{cases}$
suy ra $BE = (BMN) \cap (ABC)$.



Ví dụ 18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy không là hình thang. Gọi M là trung điểm của SA .

- Xác định giao điểm của CD với mặt phẳng (SAB) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MCD) và (SBC) .

Lời giải.

a) Trong $(ABCD)$, gọi $P = CD \cap AB$.

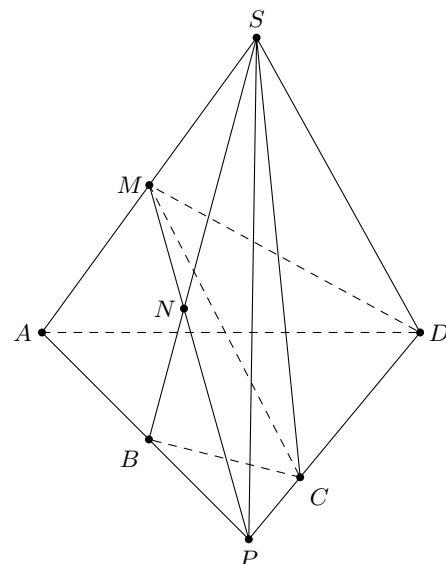
Ta có $\begin{cases} P \in CD \\ P \in AB, AB \subset (SAB) \end{cases}$
suy ra $P = CD \cap (SAB)$.

b) Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ P \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases}$
suy ra $SP = (SAB) \cap (SCD)$.

c) Trong (SAB) , gọi $N = MP \cap SB$.

Ta có $\begin{cases} N \in MP, MP \subset (MCD) \\ N \in SB, SB \subset (SBC) \end{cases}$
suy ra $N \in (SAB) \cap (SCD)$.

Mà $C \in (SAB) \cap (SCD)$. Nên $CN = (SAB) \cap (SCD)$.



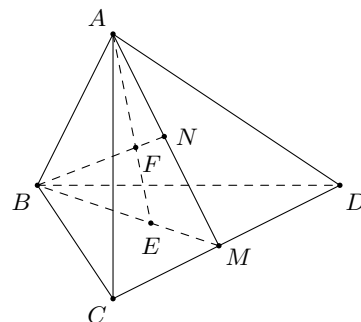
Ví dụ 19. Cho tứ diện $ABCD$ và E là một điểm nằm trong tam giác BCD . Gọi F là một điểm nằm giữa A và E . Xác định giao điểm của đường thẳng BF và mặt phẳng ACD .

Lời giải.

☑ Trong mặt phẳng (BCD) , gọi $M = BE \cap CD$; Trong mặt phẳng (ABM) gọi $N = BF \cap AM$.

☑ Khi đó $N \in BF$ và $N \in AM$.

☑ Do $AM \subset (ACD)$ nên $N \in (ACD)$ suy ra $BF \cap (ACD) = N$.



Ví dụ 20. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của SA . Tìm giao tuyến của đường thẳng SG và mặt phẳng (MBC) .

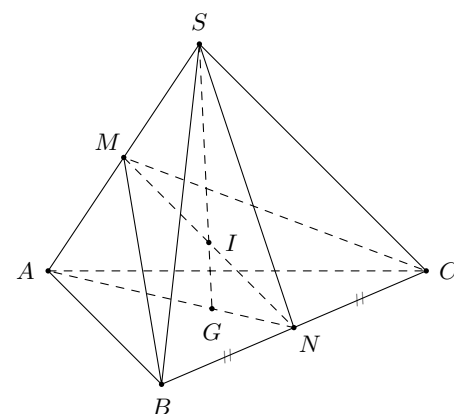
Lời giải.

☑ Gọi N là trung điểm của BC .

☑ Dễ thấy $(SAN) \cap (MBC) = MN$.

☑ Trong mặt phẳng (SAN) , gọi $I = SG \cap MN$.

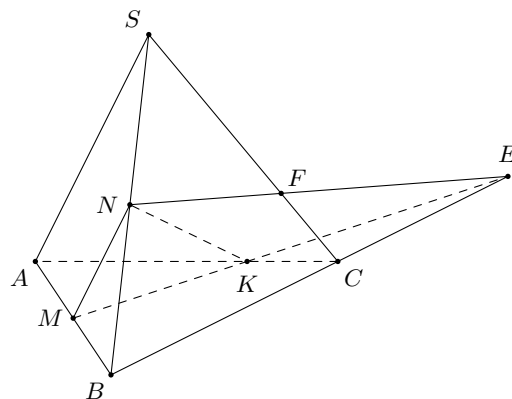
☑ Khi đó $\begin{cases} I \in SG \\ I \in MN \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow I = SG \cap (MBC)$.



Ví dụ 21. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SB . K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK > KC$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng MNK .

Lời giải.

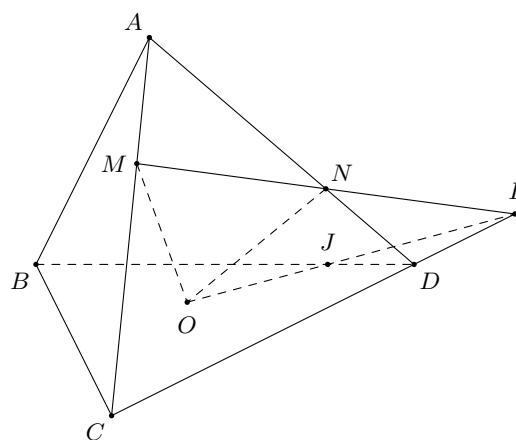
- Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = MK \cap BC$; Trong mặt phẳng (SBC) , gọi $F = SC \cap NE$.
- Khi đó $E \in MK \subset (MNK) \Rightarrow E \in (MNK)$. Do đó $NE \subset (MNK)$, mà $F \in NE \Rightarrow F \in (MNK)$.
- Mặt khác $F \in SC$ nên $F = SC \cap (MNK)$.



Ví dụ 22. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AC , AD lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $AC = 3AM$, $3AN = 2AD$. Gọi O là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Tìm giao điểm của BD và mặt phẳng OMN .

Lời giải.

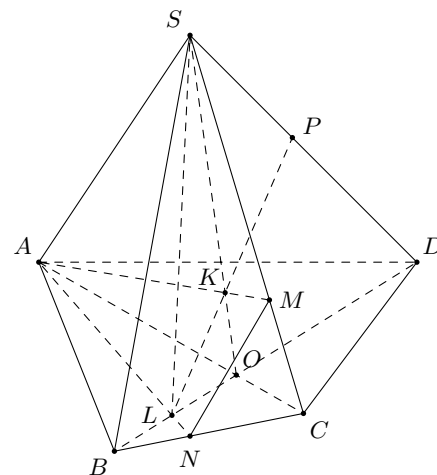
- Trong mặt phẳng (ACD) , gọi $I = MN \cap CD$.
- Khi đó $\begin{cases} I \in CD \subset (BCD) \Rightarrow OI \subset (BCD) \\ I \in MN \subset (OMN) \Rightarrow OI \subset (OMN). \end{cases}$
- Trong mặt phẳng (BCD) , gọi $J = BD \cap OI$.
- Khi đó $\begin{cases} J \in BD \\ J \in OI \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow BD \cap (OMN) = J$.



Ví dụ 23. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M , N tương ứng là các điểm thuộc các cạnh SC và BC . Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN) .

Lời giải.

- Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $\begin{cases} O = AC \cap (BD) \\ L = AN \cap BD. \end{cases}$
- Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $K = AM \cap (SO)$.
- Khi đó $\begin{cases} L \in AN \subset (AMN) \\ K \in AM \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow LK \subset (AMN). \quad (1)$
- Mặt khác $\begin{cases} L \in BD \subset (SBD) \\ K \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow LK \subset (SBD). \quad (2)$
- Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (SBD) = LK$.
- Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $P = SD \cap LK$.
- Khi đó $\begin{cases} P \in SD \\ P \in LK \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow SD \cap (AMN) = P$.

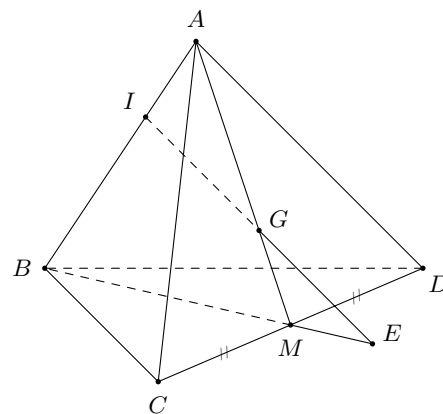


2. Bài tập tự luận

Bài 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh AB sao cho $AI = \frac{1}{3}AB$ và G là trọng tâm của tam giác ACD . Tìm giao điểm của đường thẳng IG với mặt phẳng BCD .

Lời giải.

- ☑ Gọi M là trung điểm của CD .
- ☑ Trong mặt phẳng ABM , gọi $E = IG \cap BM$.
- ☑ Khi đó $\begin{cases} E \in IG \\ E \in BM \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow IG \cap (BCD) = E$.

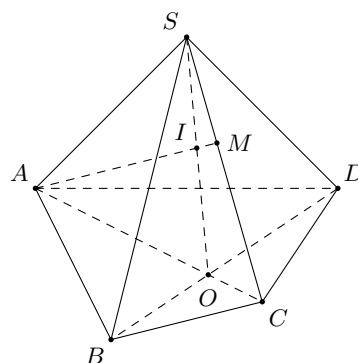


□

Bài 15. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. M là một điểm trên cạnh SC . Tìm giao điểm của AM và (SBD) .

Lời giải.

- ☑ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $I = AM \cap SO$.
- ☑ Khi đó $\begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD)$.
- ☑ Vậy $AM \cap (SBD) = I$.

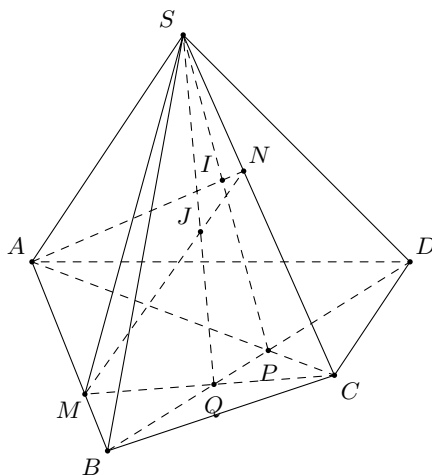


□

Bài 16. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn AB lấy một điểm M , trên đoạn SC lấy một điểm N (M, N không trùng với các đầu mút).

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD) .
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD) .

Lời giải.



a) $AN \cap (SBD) = ?$

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset AN$.
Ta tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
Trong $(ABCD)$ gọi $P = AC \cap BD$.
Suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SP$.

- ☑ Trong (SAC) gọi $I = AN \cap SP$.

$$\begin{cases} I \in AN \\ I \in SP, SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AN \cap (SBD).$$

b) $MN \cap (SBD) = ?$

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ $(SMC) \supset MN$.
 Ta tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD) .
 Trong $(ABCD)$ gọi $Q = MC \cap BD$.
 Suy ra $(SMC) \cap (SBD) = SQ$.
- ☑ Trong (SMC) gọi $J = MN \cap SQ$.

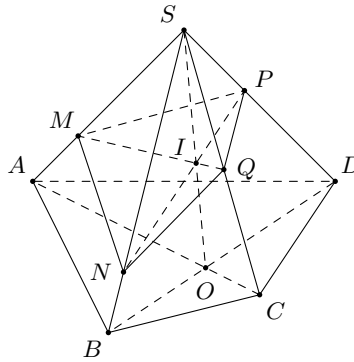
$$\begin{cases} J \in MN \\ J \in SQ, SQ \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SBD).$$

□

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . M, N, P lần lượt là các điểm trên SA, SB, SD .

- a) Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP) .
 b) Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP) .

💬 **Lời giải.**



- a) Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP) .

Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $I = SO \cap NP$, có
$$\begin{cases} I \in SO \\ I \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNP).$$

- b) Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP) .

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ $(SAC) \supset SC$.
 ☑ Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP) .

Ta có
$$\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in SA, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (SAC). \quad (1)$$

Và
$$\begin{cases} I \in SP, SP \subset (MNP) \\ I \in SO, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (MNP) \cap (SAC). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có $(MNP) \cap (SAC) = MI$.

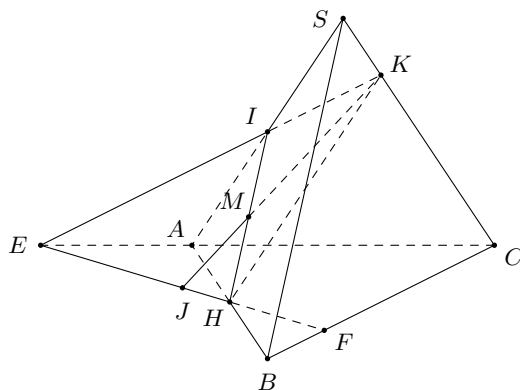
- ☑ Trong mặt phẳng (SAC) gọi $Q = SC \cap MI$, có
$$\begin{cases} Q \in SC \\ Q \in MI, MI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (MNP).$$

□

Bài 18. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên cạnh SC lấy điểm K sao cho $CK = 3SK$.

- a) Tìm giao điểm F của BC với mặt phẳng (IHK) .
- b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng IH . Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.



- a) Tìm giao điểm F của BC với mặt phẳng (IHK) .

- ☑ Ta tìm giao tuyến của (ABC) và (IHK)
 Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $E = AC \cap KI$. Khi đó:

$$\begin{cases} E \in AC, AC \subset (ABC) \\ E \in KI, KI \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow E \in (ABC) \cap (IHK). \quad (1)$$

$$\begin{cases} H \in (IHK) \\ H \in AB, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABC) \cap (IHK). \quad (2)$$

 Từ (1) và (2) suy ra $EH = (ABC) \cap (IHK)$.

- ☑ Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $F = EH \cap BC$.
 Khi đó:
$$\begin{cases} F \in BC \\ F \in EH, EH \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow F = BC \cap (IHK).$$

- b) Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC) .
 Ta có $KM \subset (IHK)$. Gọi $J = KM \cap EH$ ($EH, KM \subset (IHK)$).
 Ta có
$$\begin{cases} J \in KM \\ J \in EH, EH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow J = KM \cap (ABC).$$

□

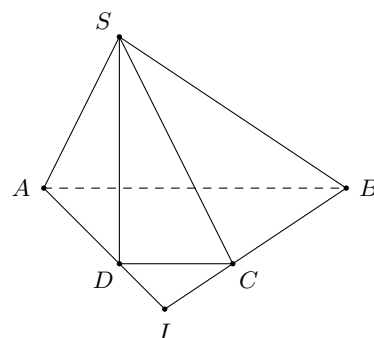
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Khi đó giao điểm của BC và (SAD) là

- (A) giao điểm của BC với SA .
 (B) giao điểm của BC với SD .
 (C) giao điểm của BC với AD .
 (D) giao điểm của AC với BD .

Lời giải.

- ☑ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I = AD \cap BC$.
- ☑ Khi đó
$$\begin{cases} I \in BC \\ I \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \cap (SAD) = I.$$



Chọn đáp án (C)

□

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Khi đó giao điểm I của AM và (SBD) là

(A) trọng tâm của tam giác SAC .

(B) trung điểm của AM .

(C) trung điểm của SO .

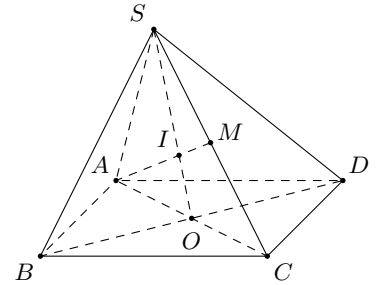
(D) trọng tâm của tam giác SCD .

Lời giải.

☑ Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $I = AM \cap SO$.

☑ Khi đó $\begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow AM \cap (SBD) = I$.

☑ Trong tam giác SAC do AM và SO là các đường trung tuyến nên I là trọng tâm của tam giác SAC .



Chọn đáp án (A)

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB và N là điểm trên cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Khi đó giao điểm E của MN và (BCD) là

(A) điểm đối xứng với B qua D .

(B) điểm đối xứng với B qua C .

(C) điểm đối xứng với D qua B .

(D) điểm đối xứng với C qua B .

Lời giải.

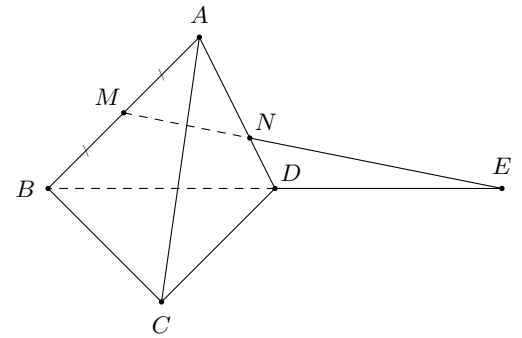
☑ Trong mặt phẳng (ABD) , gọi $E = MN \cap BD$.

☑ Khi đó $\begin{cases} E \in MN \\ E \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow MN \cap (BCD) = E$.

☑ Dễ thấy trong tam giác ABE có EM và AD là các đường trung tuyến nên N là trọng tâm của tam giác ABE suy ra D là trung điểm của AE .

☑ Do đó E là điểm đối xứng với B qua D .

Chọn đáp án (A)



Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

(A) Giao điểm của đường thẳng EG và CD .

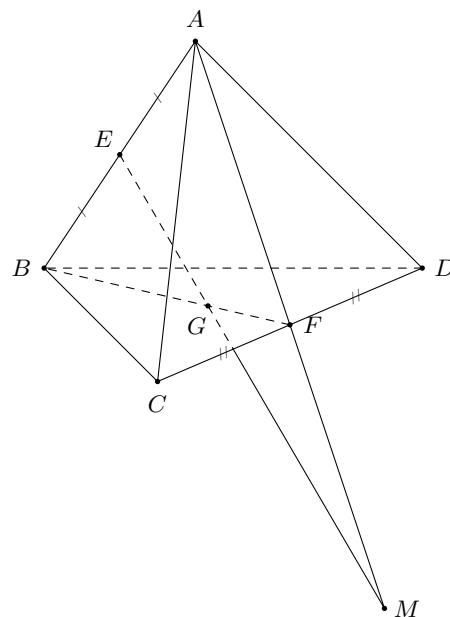
(B) Giao điểm của đường thẳng EG và AC .

(C) Giao điểm của đường thẳng EG và AF .

(D) Điểm F .

Lời giải.

- ✔ Vì G là trọng tâm tam giác BCD và F là trung điểm của CD nên suy ra $G \in (ABF)$.
- ✔ Ta có E là trung điểm của $AB \Rightarrow E \in (ABF)$.
- ✔ Gọi M là giao điểm của EG và AF mà $AF \subset (ACD)$ suy ra $M \in (ACD)$.
- ✔ Vậy giao điểm của EG và (ACD) là $M = EG \cap AF$.



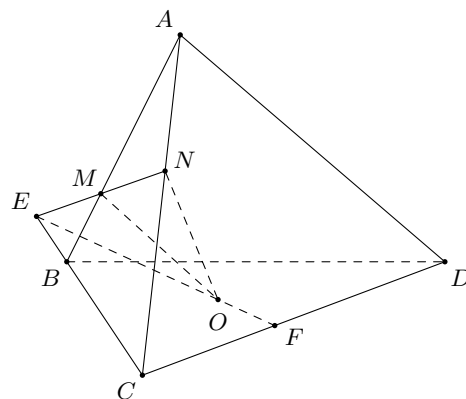
Chọn đáp án (C) □

Câu 27. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB, AC lấy các điểm M, N sao cho MN cắt BC tại E ; Gọi O là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) Giao điểm của BC và (OMN) là điểm E .
- (B) Giao điểm của BD và (OMN) là giao điểm của BD và OE .
- (C) Giao điểm của CD và (OMN) là giao điểm của CD và ON .
- (D) Giao điểm của CD và (OMN) là giao điểm của CD và OE .

🗨 **Lời giải.**

- ✔ Trong mặt phẳng (BCD) , gọi $F = CD \cap OE$.
- ✔ Khi đó $\begin{cases} F \in CD \\ F \in OE \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow CD \cap (OMN) = F$.
- ✔ Vậy giao điểm của CD và (OMN) là giao điểm của CD và OE .



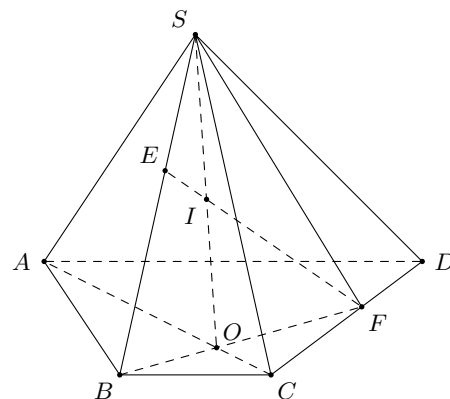
Chọn đáp án (C) □

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AD . Gọi E, F lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh SB và CD . Khi đó giao điểm của EF và (SAC) là

- (A) giao điểm của EF và SO , với $O = AC \cap BF$.
- (B) giao điểm của EF và SO , với $O = AC \cap BD$.
- (C) giao điểm của EF và SO , với $O = AB \cap CD$.
- (D) giao điểm của EF và SO , với $O = AF \cap BD$.

🗨 **Lời giải.**

- ☑ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BF$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SBF) , gọi $I = SO \cap EF$.
- ☑ Khi đó $\begin{cases} I \in EF \\ I \in SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow EF \cap (SAC) = I$.



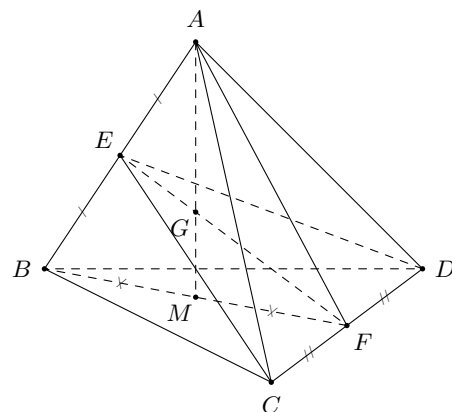
Chọn đáp án **(A)**

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD ; Gọi M là trung điểm của BF và G là giao điểm của AM và (ECD) . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A)** G là trọng tâm của tam giác ECD .
- (B)** G là trọng tâm của tam giác ABC .
- (C)** G là trọng tâm của tam giác ABD .
- (D)** G là trọng tâm của tam giác ABF .

🗨 **Lời giải.**

- ☑ Trong mặt phẳng (ABF) , gọi $G = AM \cap EF$.
- ☑ Khi đó $\begin{cases} G \in AM \\ G \in EF \subset (ECD) \end{cases} \Rightarrow AM \cap (ECD) = G$.
- ☑ Vì AM và EF là đường trung bình của tam giác ABF nên suy ra G là trọng tâm của tam giác ABF .



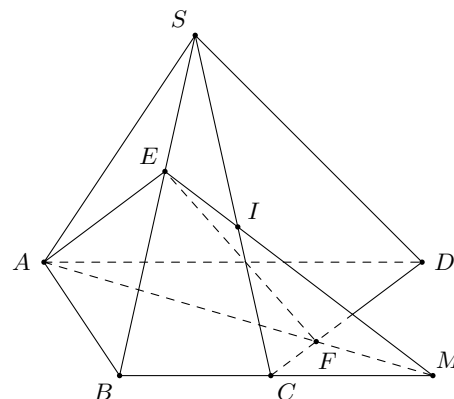
Chọn đáp án **(D)**

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AD . Gọi E, F lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh SB và CD . Khi đó giao điểm của SC và (AEF) là

- (A)** giao điểm của SC và EM , với $M = BF \cap AD$.
- (B)** giao điểm của SC và EM , với $M = AF \cap BC$.
- (C)** giao điểm của SC và EM , với $M = AC \cap BD$.
- (D)** giao điểm của SC và EM , với $E = BF \cap AC$.

🗨 **Lời giải.**

- ☑ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $M = AF \cap BC$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SBC) , gọi $I = SC \cap EM$.
- ☑ Khi đó $\begin{cases} I \in SC \\ I \in EM \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow SC \cap (AEF) = I$



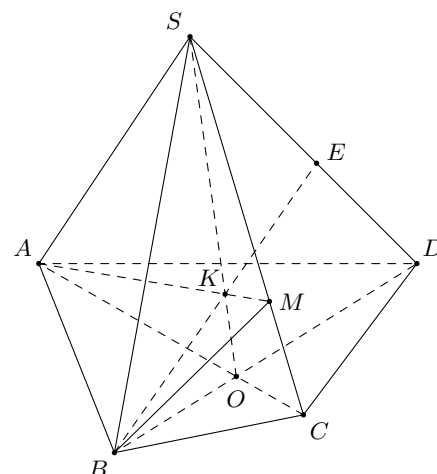
Chọn đáp án **(B)**

Câu 31. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên cạnh SC lấy điểm M không trùng với S và C . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

- (A)** giao điểm của SD và AB .
- (B)** giao điểm của SD và AM .
- (C)** giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).
- (D)** giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

Lời giải.

- ☑ Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $K = SO \cap AM$.
- ☑ Khi đó $K \in SO \subset (SBD) \Rightarrow BK \subset (SBD)$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $E = SD \cap BK$.
- ☑ Khi đó $\begin{cases} E \in SD \\ E \in BK \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow SD \cap (ABM) = E$.



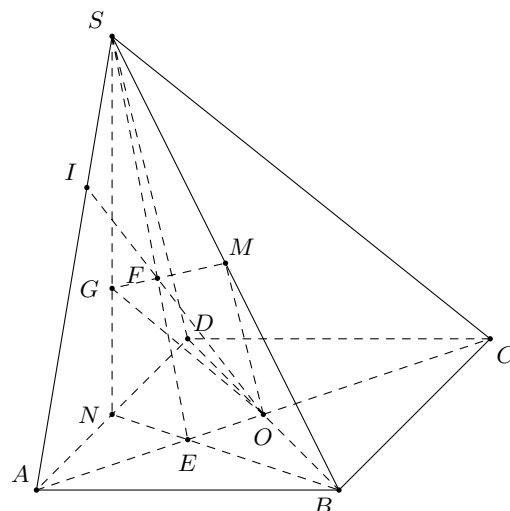
Chọn đáp án **(C)**

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và AD ; Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD . Giao điểm của mặt phẳng (OMG) và đường thẳng SA là điểm I . Khi đó

- (A)** $I = SA \cap OF$ với $E = AC \cap BN$ và $F = SE \cap MG$.
- (B)** $I = SA \cap OF$ với $E = BD \cap CN$ và $F = SE \cap MG$.
- (C)** $I = SA \cap MG$.
- (D)** $I = SA \cap OG$.

Lời giải.

- ☑ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AC \cap BN$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SBN) , gọi $F = SE \cap MG$.
- ☑ Khi đó $F \in MG \subset (OMG) \Rightarrow OF \subset (OMG)$.
- ☑ Ta có: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ F \in SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow OF \subset (SAC)$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $I = SA \cap OF$ suy ra $(OMG) \cap SA = I$.



Chọn đáp án **(A)**

Dạng 5. Tìm thiết diện của hình $(\mathcal{H})$ khi cắt bởi mặt phẳng (P)

Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 24. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các đoạn CA, CB, BD cho lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB . Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M, N, P . Dựng thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Ta có $M, N, P \in (\alpha) \Rightarrow (\alpha) \equiv (MNP)$.

☑ Ta có $(MNP) \cap (BCD) = MP$ (1)

☑ Tương tự $(MNP) \cap (ABC) = MN$ (2)

☑ Xét (MNP) và (ACD) :

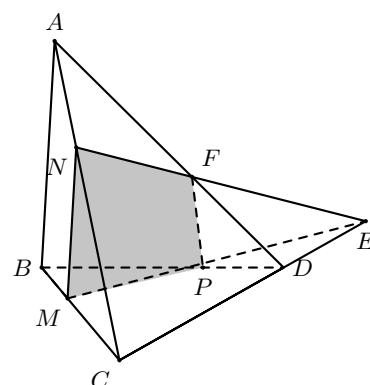
$$\begin{cases} N \in AC, AC \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD) \\ N \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow N \in (ACD) \cap (MNP).$$

Trong (BCD) , gọi $E = MP \cap CD$, ta có

$$\begin{cases} E \in MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP) \\ E \in CD, CD \subset (ACD) \Rightarrow E \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (ACD).$$

Suy ra $(MNP) \cap (ACD) = NP$

(3)



☑ Trong (ACD) , gọi $F = NE \cap AD$. Suy ra $(MNP) \cap (ACD) = NF$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$ là tứ giác $MNEP$.

□

Ví dụ 25. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy M, N sao cho MN không song song với AB . Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC . Xác định thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng (MNP) .

💬 **Lời giải.**

Ta có $MN = (MNP) \cap (SAB)$

(1)

Trong mp (SAB) : gọi $Q = MN \cap AB$.

Trong mp $(ABCD)$ kéo dài QP cắt CB, CA lần lượt tại R, T .

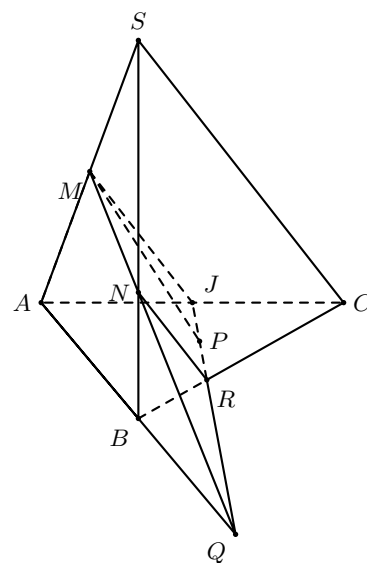
Khi đó

$$NR = (MNP) \cap (SBC) \quad (2)$$

$$RJ = (MNP) \cap (ABC) \quad (3)$$

$$TM = (MNP) \cap (SAC) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có thiết diện là tứ giác $MNRJ$.



□

Ví dụ 26. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K, N lần lượt là trung điểm SA, BC và M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.

a) Tìm thiết diện của (KMN) và hình chóp.

b) Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I . Đặt $IA = kIB$. Tìm k .

💬 **Lời giải.**

a) Tìm thiết diện của (KMN) và hình chóp.

$$MN = (KMN) \cap (SBC) \quad (1)$$

$$MK = (KMN) \cap (SAC) \quad (2)$$

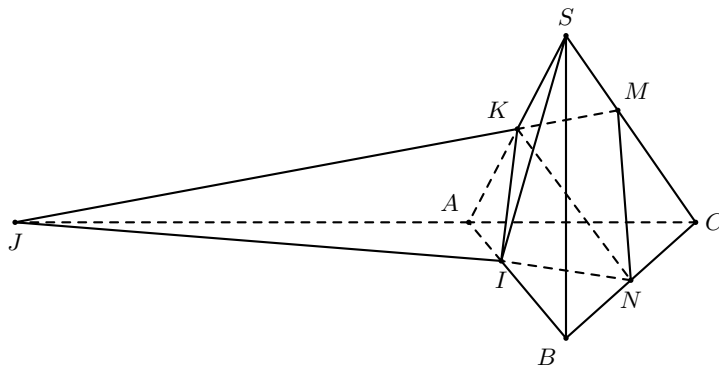
Trong mp (SAC) gọi $J = MK \cap AC$.

Trong mp (ABC) gọi $I = JN \cap AB$. Khi đó

$$KI = (KMN) \cap (SAB) \quad (3)$$

$$IN = (KMN) \cap (ABC) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có thiết diện là tứ giác $MNIK$.



b) Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I . Đặt $IA = kIB$. Tìm k .

$$\text{Ta có } 3SM = 2MC \Rightarrow SM = \frac{2}{3}MC = \frac{2}{3}(SC - SM) \Rightarrow \frac{5}{3} \Rightarrow SM = \frac{2}{5}SC.$$

$$\text{Theo định lí Meneleus trong tam giác } SAC: \frac{MS}{SC} \cdot \frac{KS}{SA} \cdot \frac{JC}{CA} = 1 \Rightarrow \frac{JA}{AC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Theo định lí Meneleus trong } \triangle ABC: \frac{NC}{CB} \cdot \frac{IB}{BA} \cdot \frac{JA}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{IB}{BA} = \frac{3}{2} \Rightarrow IA = \frac{2}{3}IB \Rightarrow k = \frac{2}{3}.$$

□

Ví dụ 27. Cho hình chóp $ABCD$. Trên cạnh AB lấy điểm M , điểm N trên BC thỏa $BN = 2NC$, P là trung điểm CD . Xác định thiết diện khi cắt hình chóp bởi mặt phẳng (MNP) .

Lời giải.

$$\text{Ta có } MN = (MNP) \cap (ABC) \quad (1)$$

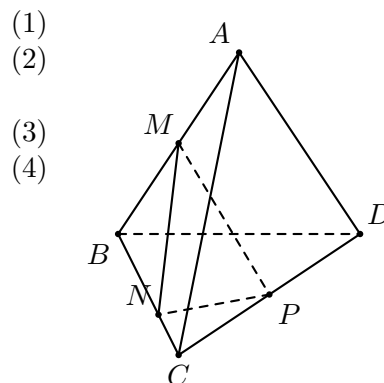
$$NP = (MNP) \cap (BCD) \quad (2)$$

Trong mặt phẳng (BCD) : gọi $I = NP \cap BD$.

Trong mặt phẳng (ABD) : gọi $J = MI \cap AD \Rightarrow MJ = (MNP) \cap (ABD) \quad (3)$

$$JP = (MNP) \cap (ACD) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có thiết diện là tứ giác $MNPJ$.



□

Ví dụ 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AD . Lấy điểm M trên cạnh SB . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMD) và hình chóp.

Lời giải.

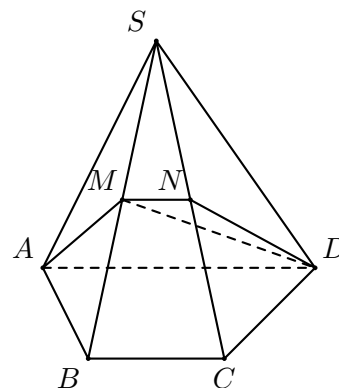
$$\text{Ta có } AM = (AMD) \cap (SAB) \quad (1)$$

$$AD = (AMD) \cap (ABCD) \quad (2)$$

Trong mặt phẳng (SBC) , dựng đường thẳng qua M song song BC và cắt SC tại N

$$\Rightarrow MN = (AMD) \cap (SAB), ND = (AMD) \cap (SAB) \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có thiết diện là hình thang $ADNM$ (vì $MN \parallel BC \parallel AD$).



□

2. Bài tập tự luận

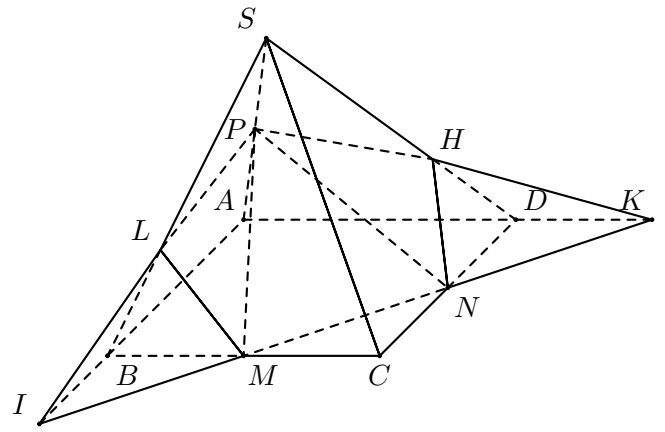
Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh CB, CD, SA . Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $MN \cap AD = K$, $MN \cap AB = I \Rightarrow K, I \in (MNP)$.

Trong mặt phẳng (SAD) , kẻ $KP \cap SD = H \Rightarrow H \in (MNP)$.

Trong mặt phẳng (SAB) , kẻ $IP \cap SB = L \Rightarrow L \in (MNP)$.



Khi đó ta có

$$MN = (MNP) \cap (ABCD) \quad (1)$$

$$NH = (MNP) \cap (SCD) \quad (2)$$

$$HP = (MNP) \cap (SAD) \quad (3)$$

$$PL = (MNP) \cap (SAB) \quad (4)$$

$$LM = (MNP) \cap (SBC) \quad (5)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5) ta có thiết diện là ngũ giác $MNHPL$. □

Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AD . Gọi H, K là trung điểm SB và AB , M là điểm lấy trong hình thang $ABCD$ sao cho đường thẳng KM cắt đường thẳng AD , cạnh CD . Tìm thiết diện của hình chóp với (HKM) .

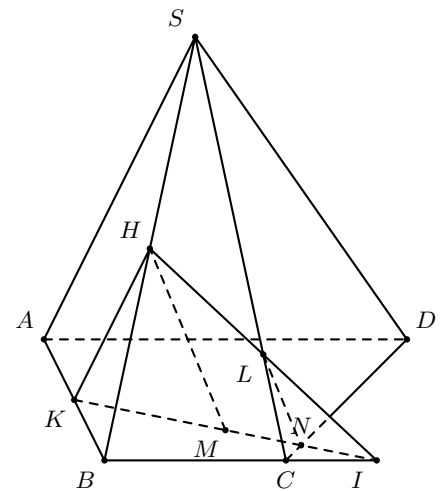
Lời giải.

Ta có $HK = (HKM) \cap (SAB) \quad (1)$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi N, I lần lượt là giao điểm KM với $CD, BC \Rightarrow KN = (HKM) \cap (ABCD) \quad (2)$

Trong (SCD) , gọi $L = HI \cap SC \Rightarrow NL = (HKM) \cap (SCD), LH = (HKM) \cap (SBC) \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) ta có thiết diện là hình thang $KNLH$.



Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm SB và SC .

- Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) .
- Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) .

Lời giải.

- Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC) .

$$S \in (SAD) \cap (SBC)$$

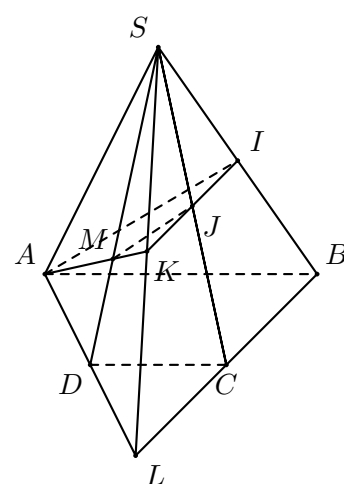
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $N = AD \cap BC$

$$\Rightarrow L \in (SAD) \cap (SBC)$$

Từ (1), (2) ta có $SL = (SAD) \cap (SBC)$.

(1)

(2)



b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) .

Trong mặt phẳng (SBC) , gọi $K = SL \cap IJ$.

Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $M = SD \cap AK \Rightarrow M \in SD \cap (AIJ)$.

c) Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) .

Ta có $AM = (AIJ) \cap (SAD)$; $MJ = (AIJ) \cap (SCD)$; $IJ = (AIJ) \cap (SBC)$; $IA = (AIJ) \cap (SAB)$.

Vậy thiết diện là tứ giác $AMJI$.

□

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC . Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD .

a) Tìm giao điểm của MN với (SAC) .

b) Tìm giao điểm của SC với (AMN) .

c) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) .

Lời giải.

a) Tìm giao điểm của MN với (SAC) .

Gọi E là giao điểm của đường thẳng SM và cạnh BC , F là giao điểm của đường thẳng SN và cạnh CD và gọi O là giao điểm của EF và AC .

☑ Chọn mặt phẳng phụ chứa MN là (SEF) .

☑ $(SAC) \cap (SEF) = SO$.

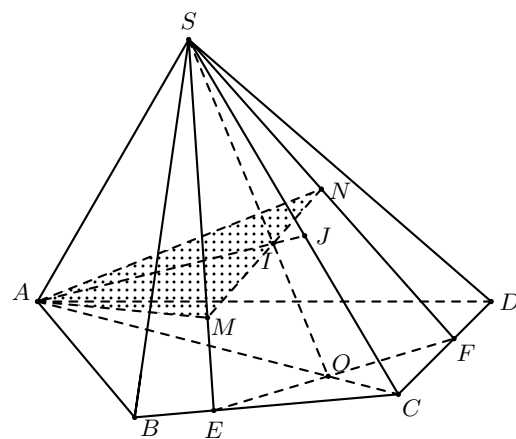
☑ Trong mặt phẳng (SEF) hai đường thẳng MN và SO phải cắt nhau, gọi giao điểm này là I thì I chính là giao điểm của MN với (SAC) .

b) Tìm giao điểm của SC với (AMN) .

☑ Chọn mặt phẳng phụ chứa SC là (AMN) .

☑ $(SAC) \cap (AMN) = AI$.

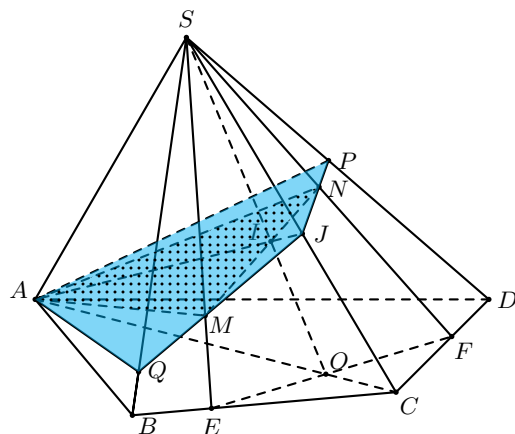
☑ Trong mặt phẳng (SAC) hai đường thẳng AI và SC phải cắt nhau, gọi giao điểm này là J thì J chính là giao điểm của SC với (AMN) .



c) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) .

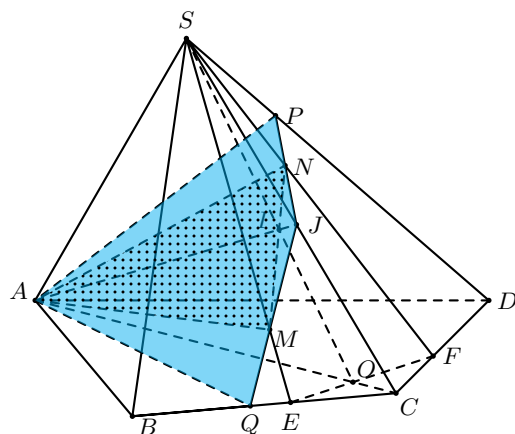
Trường hợp 1: Đường thẳng MJ cắt cạnh SB tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh SD tại P .

Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



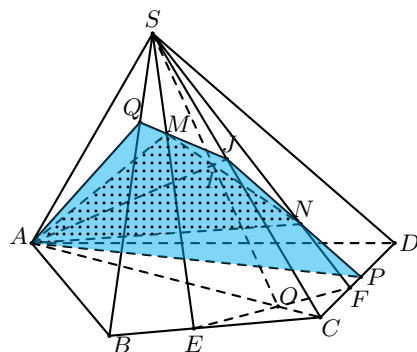
Trường hợp 2: Đường thẳng MJ cắt cạnh BC tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh SD tại P .

Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



Trường hợp 3: Đường thẳng MJ cắt cạnh SB tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh CD tại P .

Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



Bài 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB , G là trọng tâm tam giác SAD .

- Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh $IC = 2ID$.
- Tìm giao điểm J của (OMG) với AD . Đặt $JA = k \cdot JD$. Tìm k .
- Tìm giao điểm K của (OMG) với SA . Đặt $KA = p \cdot KS$. Tìm p .
- Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

a) Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh $IC = 2ID$.
Gọi N là trung điểm của AD .

☑ Chọn mặt phẳng phụ chứa MG là (SBN) .

☑ $(SBN) \cap (ABCD) = BN$.

— MG và BN đồng phẳng.

— $\frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \neq \frac{SG}{GN} = \frac{2}{3}$.

Suy ra hai đường thẳng MG và BN phải cắt nhau. Đó chính là giao điểm I của MG với $(ABCD)$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SBN với ba điểm thẳng hàng M, G, I ta có

$$\frac{SM}{MB} \cdot \frac{BI}{IN} \cdot \frac{NG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \frac{BI}{IN} = 2 \Leftrightarrow BI = 2BN$$

Suy ra N là trung điểm của BE .

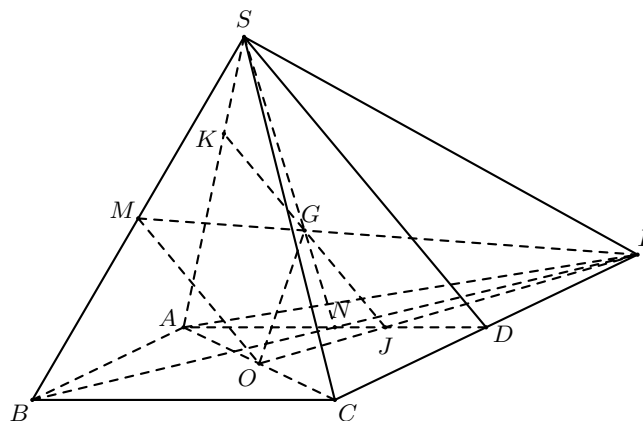
Gọi E là điểm đối xứng với C qua D thì $EC = 2ED$ đồng thời N là trung điểm của BE .

Do đó, hai điểm I và E trùng nhau. Vậy ta có $IC = 2ID$.

b) Tìm giao điểm J của (OMG) với AD .

Đặt $JA = k \cdot JD$. Tìm k .

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ chứa AD là $(ABCD)$.
- ☑ $(ABCD) \cap (OMG) = OI$.
- ☑ Trong mặt phẳng $(ABCD)$ hai đoạn thẳng AD và OI phải cắt nhau, đó là giao điểm J của AD với (OMG) .
- ☑ Tam giác ACI có IO và AD là hai đường trung tuyến, J là giao điểm của hai đoạn thẳng này nên J là trọng tâm. Suy ra $JA = 2JD$, hay $k = 2$.



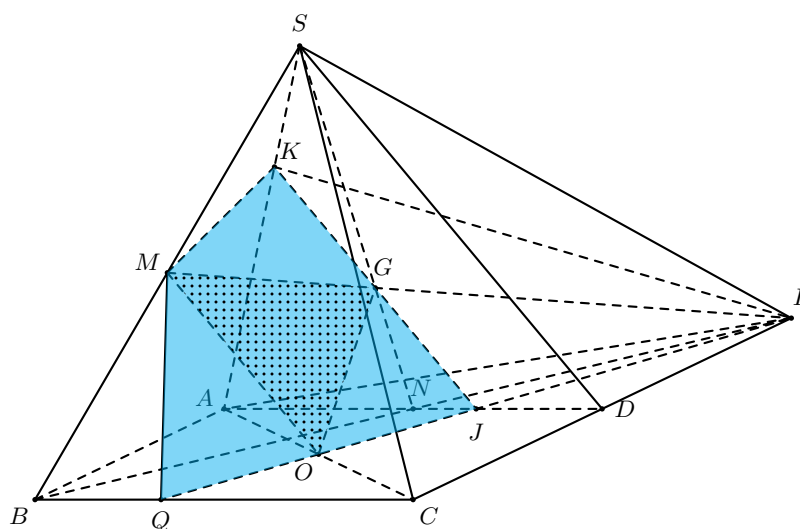
c) Tìm giao điểm K của (OMG) với SA . Đặt $KA = p \cdot KS$. Tìm p .

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ chứa SA là (SAD) .
- ☑ $(SAD) \cap (OMG) = GJ$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SAD) hai đường thẳng SA và GJ phải cắt nhau, đó là giao điểm K của SA với (OMG) .
- ☑ Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SAN với ba điểm thẳng hàng K, G, J ta có

$$\frac{SK}{KA} \cdot \frac{AJ}{JN} \cdot \frac{NG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SK}{KA} = \frac{1}{2}.$$

c) Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng OI và cạnh BC . Thiết diện mà mặt phẳng (OMG) cắt hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $QMKJ$



Bài 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC .

- a) Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) và $(ABCD)$.
- b) Tìm giao điểm của SA và (MNP) .

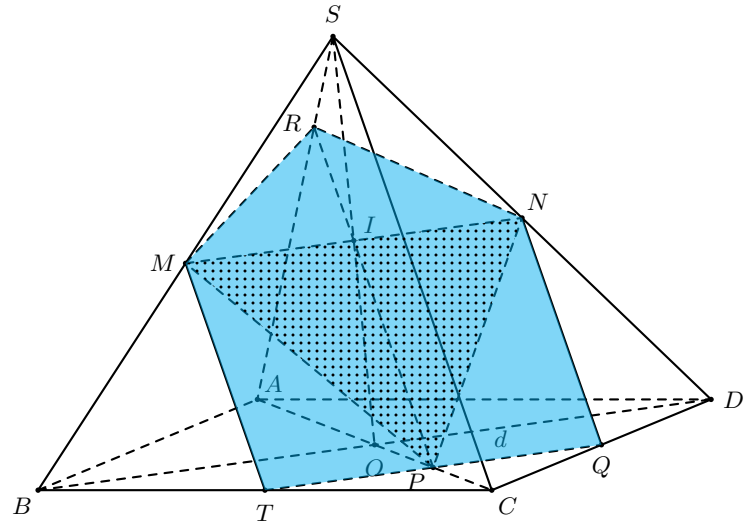
c) Xác định thiết diện của hình chóp với (MNP) . Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA , BC và CD .

Lời giải.

a) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAC) .

- ☑ P là điểm chung thứ nhất của (MNP) và (SAC) .
- ☑ Trong tam giác SAC , hai đoạn thẳng MN và SO phải cắt nhau. Gọi giao điểm này là I thì I là điểm chung thứ hai của (MNP) và (SAC) .

Vậy $(MNP) \cap (SAC) = PI$.



* Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$

- ☑ MN là đường trung bình của tam giác SBD nên $MN \parallel BD$.
- ☑ Hai mặt phẳng (MNP) , $(ABCD)$ phân biệt, có điểm chung P và lần lượt chứa hai đường thẳng song song MN , BD nên chúng cắt nhau theo một giao tuyến d qua P và d song song với BD .

b) Tìm giao điểm của SA và (MNP) .

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ chứa SA là (SAC) .
- ☑ $(SAC) \cap (MNP) = PI$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SAC) hai đường thẳng PI và SA phải cắt nhau, gọi giao điểm này là R thì R chính là giao điểm của SA với (MNP) .

c) Xác định thiết diện của hình chóp với (MNP) . Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA , BC và CD .

- ☑ Gọi $T = d \cap BC$, $Q = d \cap CD$. Ta thấy, thiết diện mà mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MTQNR$.
- ☑ Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SAO với ba điểm thẳng hàng R, I, P ta có

$$\frac{SR}{RA} \cdot \frac{AP}{PO} \cdot \frac{OI}{IS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SR}{RA} = \frac{1}{3}.$$

- ☑ $\begin{cases} d \parallel BD \\ P \text{ là trung điểm của } OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \text{ là trung điểm của } CB \\ Q \text{ là trung điểm của } CD \end{cases} \Rightarrow \frac{CT}{TB} = \frac{CQ}{QD} = 1.$

Vậy các tỉ số cần tìm là $\frac{SR}{RA} = \frac{1}{3}$, $\frac{CT}{TB} = \frac{CQ}{QD} = 1$.

□

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC và I , J lần lượt là trung điểm của CD và SD .

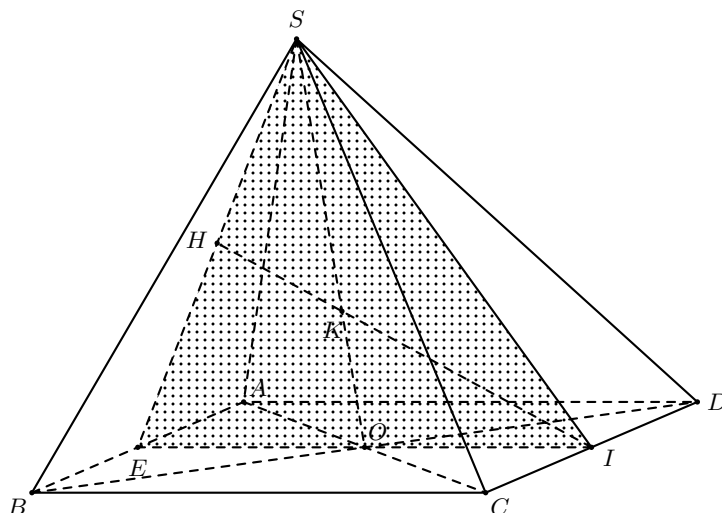
a) Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB) .

b) Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IJK) với hình chóp.

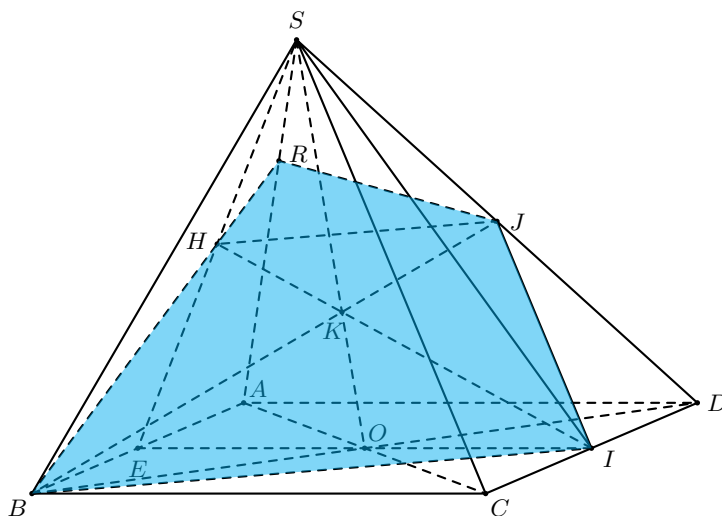
Lời giải.

a) Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB) .

- ☑ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Chọn mặt phẳng phụ chứa IK là (SOI) .
- ☑ Gọi E là trung điểm của AB thì $(ABCD) \cap (OMG) = OI$.
- ☑ Trong mặt phẳng (SOI) hai đường thẳng IK và SE phải cắt nhau, đó là giao điểm H của IK với (SAB) .



- ☑ Đoạn SO là đường trung tuyến tam giác SAC và của tam giác SBD nên K cũng là trọng tâm của tam giác SAD . Suy ra ba điểm B, K, J thẳng hàng.
- ☑ Trong mặt phẳng (SAB) , hai đường thẳng hai đường thẳng BH và SA phải cắt nhau, gọi R là giao điểm.
- ☑ Thiết diện cần tìm là tứ giác $BIJR$.



□

Bài 26. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) .
- b) Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) .
- c) Gọi N là trung điểm của AD . Tìm thiết diện tạo bởi (MNP) và hình chóp.

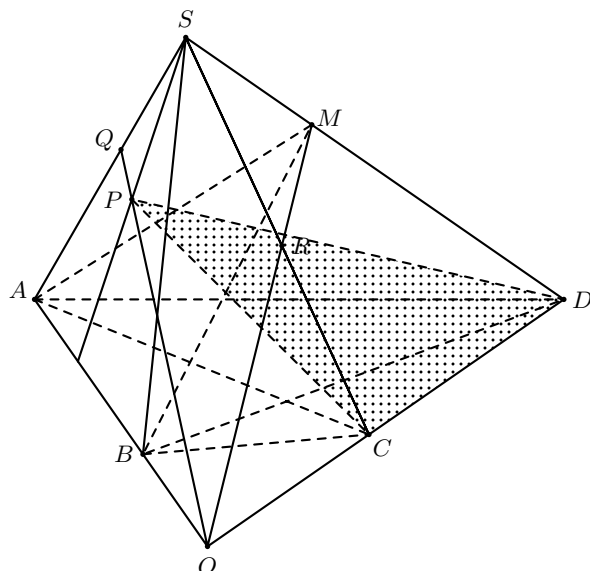
💬 **Lời giải.**

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) .

- ☑ P là điểm chung thứ nhất của (SAB) và (PCD) .
- ☑ Theo giả thiết, tứ giác $ABCD$ không phải là hình thang nên hai đường thẳng AB và CD cắt nhau. Gọi O là giao điểm của AB và CD thì O là điểm chung thứ hai của (SAB) và (PCD) .
- ☑ Vậy $(SAB) \cap (PCD) = PO$.

b) Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) .

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ chứa SC là (SCD) .
- ☑ $(SCD) \cap (ABM) = OM$.
- ☑ Trong tam giác SCD , hai đoạn thẳng OM và SC phải cắt nhau, gọi giao điểm là R thì đó là giao điểm của SC và (ABM) .



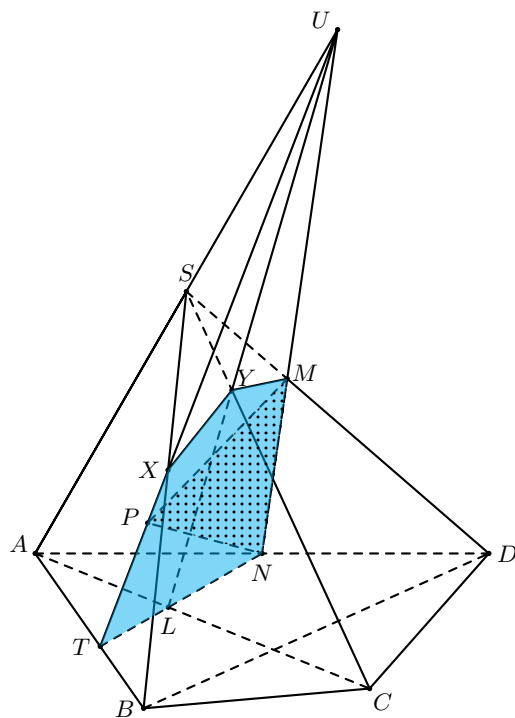
c) Gọi N là trung điểm của AD . Tìm thiết diện tạo bởi (MNP) và hình chóp.

- ☑ Trong mặt phẳng SAD , ta có

$$\frac{MD}{MS} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = \frac{DN}{DA}$$

nên hai đường thẳng MN và SA cắt nhau, gọi U là giao điểm.

- ☑ Trong mặt phẳng (SAB) , đường thẳng UP phải cắt hai đoạn thẳng SB và AB . Gọi các giao điểm theo thứ tự là X, T .
- ☑ Cuối cùng, ta cần tìm giao điểm của (MNP) và cạnh SC .
 - Chọn mặt phẳng phụ chứa SC là (SAC) .
 - Gọi $L = AC \cap TN$ thì $(SAC) \cap (AMN) = UL$.
 - Trong tam giác SAC , hai đoạn thẳng UL và SC phải cắt nhau, gọi giao điểm là Y thì đó là giao điểm của SC và (AMN) .
- ☑ Vậy thiết diện mà mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MNTXY$.



Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M và N thỏa $SB = 3SM$ và $3SN = 2SD$.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .
- b) Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.
- c) Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

🗨️ **Lời giải.**

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .

- ☑ N là điểm chung thứ nhất của (AMN) và (SCD) .
- ☑ Gọi $P = MN \cap SO$, $I = AP \cap SC$, thì I là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng này.

Vậy $(AMN) \cap (SCD) = NI$.

b) Tìm thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$. Từ câu (a), ta có thiết diện mà mặt phẳng (AMN) cắt hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AMIN$.

c) Gọi K là giao điểm của IN và CD . Tính tỉ số $\frac{KC}{KD}$.

- ☑ Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SBD với ba điểm thẳng hàng M, N, Q ta có

$$\frac{SM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QD} \cdot \frac{DN}{NS} = 1 \Leftrightarrow \frac{BQ}{QD} = \frac{1}{4}.$$

- ☑ Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SOD với ba điểm thẳng hàng P, N, Q ta có

$$\frac{SP}{PO} \cdot \frac{OQ}{QD} \cdot \frac{DN}{NS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SP}{PO} = \frac{4}{5}.$$

- ☑ Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SCO với ba điểm thẳng hàng I, P, A ta có

$$\frac{SI}{IC} \cdot \frac{CA}{AO} \cdot \frac{OP}{PS} = 1 \Leftrightarrow \frac{SI}{IC} = \frac{2}{5}.$$

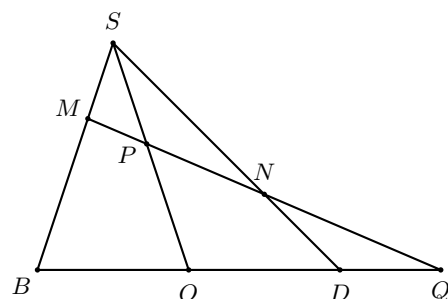
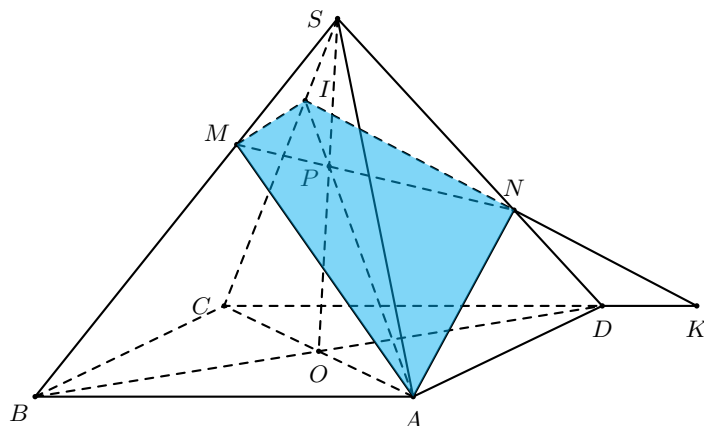
- ☑ Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SCD với ba điểm thẳng hàng I, N, K ta có

$$\frac{SI}{IC} \cdot \frac{CK}{KD} \cdot \frac{DN}{NS} = 1 \Leftrightarrow \frac{CK}{KD} = 5.$$

□

Bài 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AD , J là điểm đối xứng với D qua C , K là điểm đối xứng với D qua B . Xác định thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) và tính diện tích của thiết diện này.

☑ **Lời giải.**



- ☑ Gọi M là giao điểm của IK và AB , N là giao điểm của IJ và AC .
- ☑ Thiết diện mà mặt phẳng IJK cắt tứ diện là tam giác IMN .
- ☑ Vì M, N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác AKD, ADJ nên $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$ và $MN = \frac{2a}{3}$.
- ☑ Vì $AB = AC = a$ nên $AM = AN = \frac{2a}{3}$.
- ☑ Áp dụng Định lý côsin cho tam giác AMI ta được

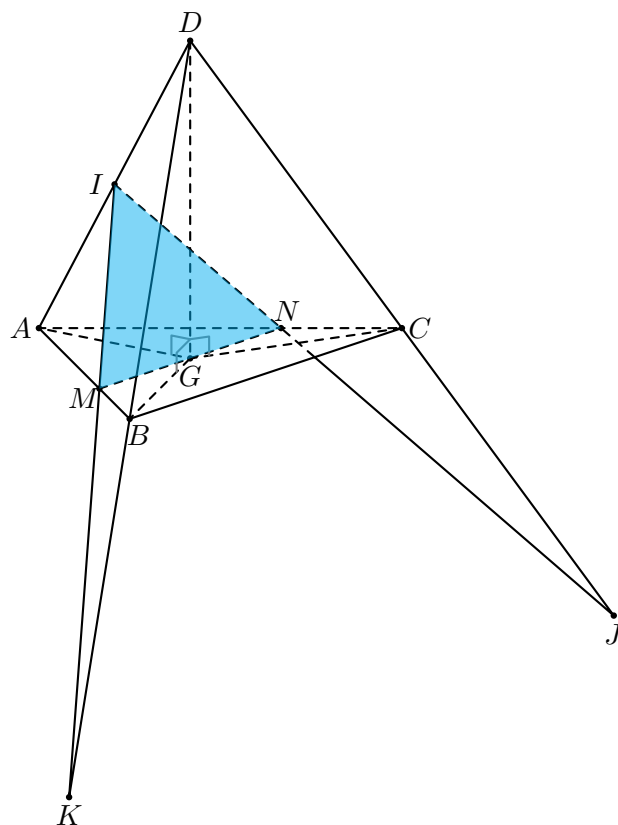
$$IM^2 = AM^2 + AI^2 - 2AM \cdot AI \cdot \cos \widehat{AMI} = \frac{13a^2}{36}.$$

$$\text{Suy ra } IM = IN = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

$$\text{☑ } p = \frac{IM + IN + MN}{2} = \frac{a\sqrt{13}}{6} + \frac{a}{3}.$$

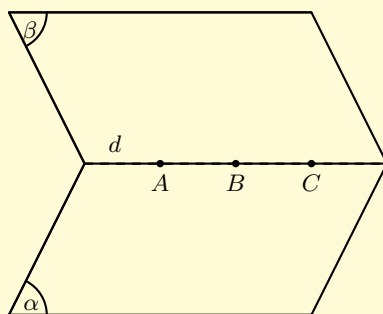
- ☑ Áp dụng công thức Hê-rông, ta có diện tích tam giác IMN là

$$S = \sqrt{p(p-IM)(p-IN)(p-MN)} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6} + \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \left(\frac{a\sqrt{13}}{6} - \frac{a}{3}\right)} = \frac{a^2}{6}.$$



Dạng 6. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

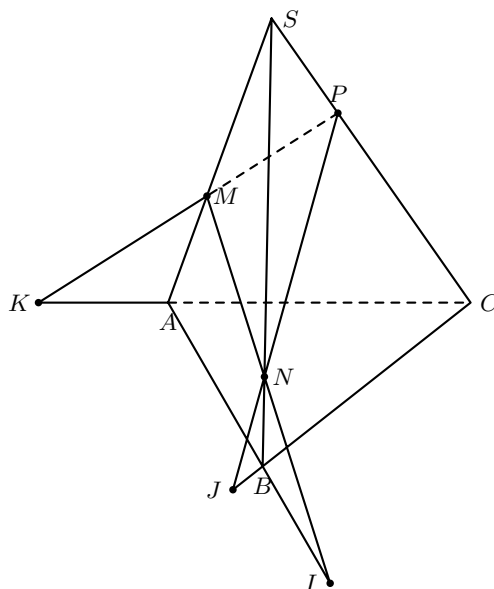
Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta cần chứng minh ba điểm này lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) . Nghĩa là chúng cùng thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.



1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 29. Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K . Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

☞ **Lời giải.**



Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABC) .

$$\text{Ta có } K = MP \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow K \in (MNP) \\ K \in AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow K \in d \quad (1)$$

Tương tự:

$$I = MN \cap AB \Rightarrow \begin{cases} I \in MN, MN \subset (MNP) \Rightarrow I \in (MNP) \\ I \in AB, AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$$

$$J = NP \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in NP, NP \subset (MNP) \Rightarrow J \in (MNP) \\ J \in BC, BC \subset (ABC) \Rightarrow J \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (3)$$

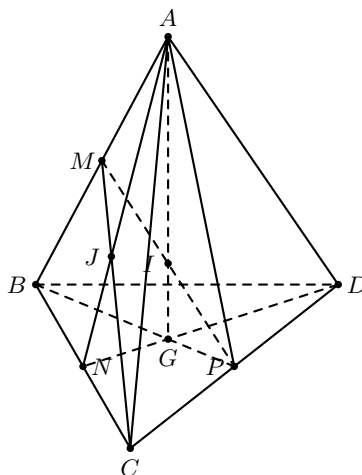
Từ (1),(2),(3), suy ra I, J, K cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm I, J, K thẳng hàng (đpcm). □

Ví dụ 30. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD .

a) Xác định giao tuyến của (ADN) và (ABP) .

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} A \in (ADN) \\ A \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow A \in (ADN) \cap (ABP) \quad (1)$
Tương tự

$$G = BP \cap DN \Rightarrow \begin{cases} G \in DN, DN \subset (ADN) \Rightarrow G \in (ADN) \\ G \in BP, BP \subset (ABP) \Rightarrow G \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP) \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(ADN) \cap (ABP) = AG$.

b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DCM) và (ADN) .

Ta có $\begin{cases} D \in (DCM) \\ D \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow D \in d \quad (1)$

Tương tự:

$$I = AG \cap MP \Rightarrow \begin{cases} I \in AG, AG \subset (ADN) \Rightarrow I \in (ADN) \\ I \in MP, MP \subset (DCM) \Rightarrow I \in (DCM) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$$

$$J = CM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} J \in CM, CM \subset (DCM) \Rightarrow J \in (DCM) \\ J \in AN, AN \subset (ADN) \Rightarrow J \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (3)$$

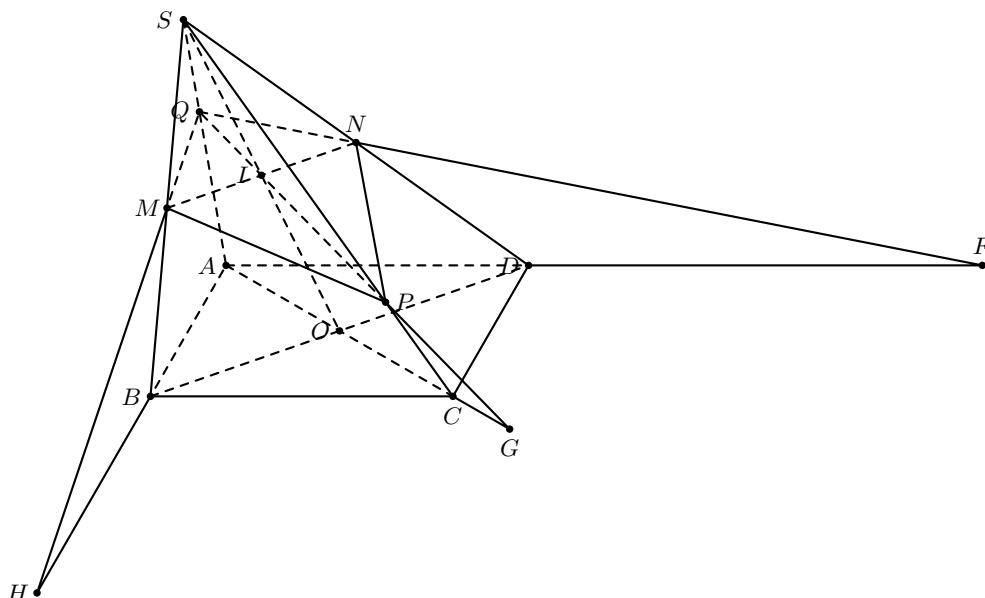
Từ (1),(2),(3), suy ra D, I, J cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm D, I, J thẳng hàng (đpcm).

□

Ví dụ 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD , điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC .

- Tìm giao điểm của SO với (MNP) .
- Tìm giao điểm Q của SA với mặt phẳng (MNP) .
- Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB , QP và AC , QN và AD . Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

Lời giải.



- a) Trong (SBD) ta có $\begin{cases} SO \cap MN = \{I\} \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SO \cap (MNP) = \{I\}.$
- b) Chọn mp(SAC) chứa SA . Ta có $(SAC) \cap (MNP) = PI$. Kẻ $PI \cap SA = \{Q\}$.
Suy ra $SA \cap (MNP) = \{Q\}.$
- c) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$.
Ta có

$$F = QM \cap AB \Rightarrow \begin{cases} F \in QM, QM \subset (MNPQ) \Rightarrow F \in (MNPQ) \\ F \in AB, AB \subset (ABCD) \Rightarrow F \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow F \in d \quad (1)$$

$$G = PQ \cap AC \Rightarrow \begin{cases} G \in PQ, PQ \subset (MNPQ) \Rightarrow G \in (MNPQ) \\ G \in AC, AC \subset (ABCD) \Rightarrow G \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow G \in d \quad (2)$$

$$H = NQ \cap AD \Rightarrow \begin{cases} H \in NQ, NQ \subset (MNPQ) \Rightarrow H \in (MNPQ) \\ H \in AD, AD \subset (ABCD) \Rightarrow H \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow H \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3), suy ra F, G, H cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm F, G, H thẳng hàng (đpcm).

□

Ví dụ 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD .

- a) Tìm giao điểm N của SC với (ADM) .
- b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Lời giải.

- a) Chọn mp(SBC) chứa SC . Gọi $H = AD \cap BC$.
Ta có $(SBC) \cap (ADM) = MH$. Kẻ $MH \cap SC = N$. Suy ra $SC \cap (ADM) = N$.

- b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

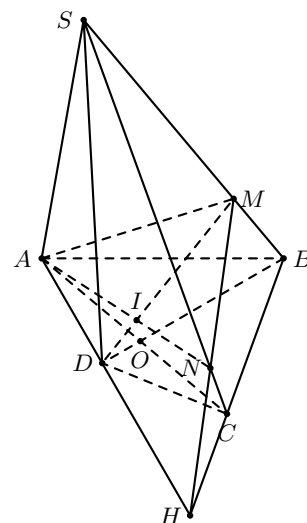
$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in d \quad (1).$$

Tương tự

$$I = AN \cap SO \Rightarrow \begin{cases} I \in AN, AN \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \\ I \in SO, SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$$

$$O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3), suy ra S, I, O cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm S, I, O thẳng hàng (đpcm).

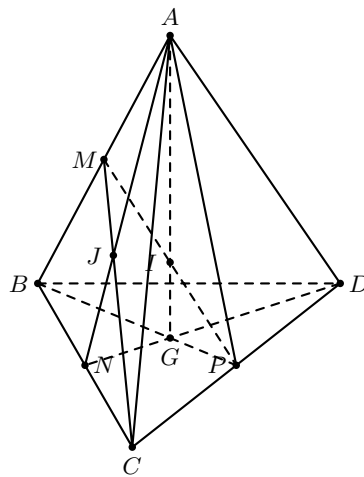


□

Ví dụ 33. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD .

- a) Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP) .
- b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $\begin{cases} A \in (ADN) \\ A \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow A \in (ADN) \cap (ABP) \quad (1).$

Tương tự

$$G = BP \cap DN \Rightarrow \begin{cases} G \in BP, BP \subset (ABP) \Rightarrow G \in (ABP) \\ G \in DN, DN \subset (ADN) \Rightarrow G \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP) \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (ADN) \cap (ABP) = AG$.

b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMC) và (ADN) .

Ta có $\begin{cases} D \in (DMC) \\ D \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow D \in d \quad (1).$

Tương tự

$$I = AG \cap MP \Rightarrow \begin{cases} I \in AG, AG \subset (ADN) \Rightarrow I \in (ADN) \\ I \in MP, MP \subset (DMC) \Rightarrow I \in (DMC) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$$

$$J = CM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} J \in CM, CM \subset (DMC) \Rightarrow J \in (DMC) \\ J \in AN, AN \subset (ADN) \Rightarrow J \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3), suy ra D, I, J cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm D, I, J thẳng hàng (đpcm).

□

Ví dụ 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O và AB cắt CD tại P . Điểm M thuộc cạnh SA (M khác S , M khác A). Gọi N là giao điểm của MP và SB , I là giao điểm của MC và DN . Chứng minh rằng S, O, I thẳng hàng.

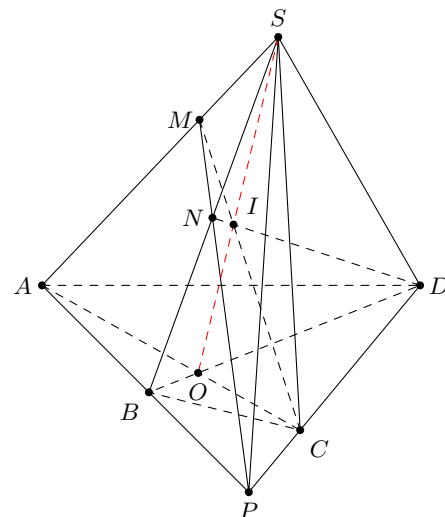
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SDB) \\ O \in (SAC) \cap (SDB) \end{cases}$ suy ra $SO = (SAC) \cap (SDB)$.

Xét (MPD) , $I \in MC \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in MC, MC \subset (SAC) \\ I \in DN, DN \subset (SBD) \end{cases}$

suy ra $I \in (SAC) \cap (SDB)$ hay $I \in SO$.

Vậy S, O, I thẳng hàng.

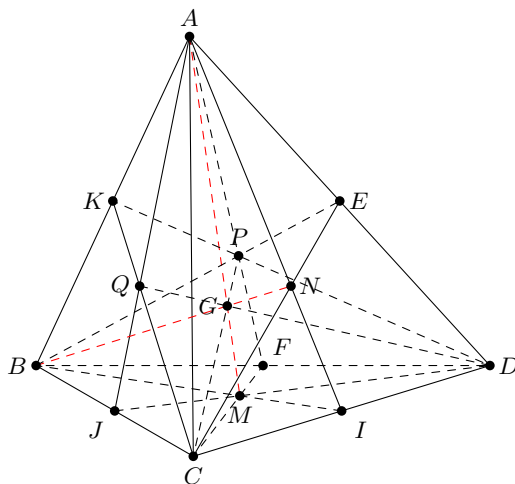


□

Ví dụ 35. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA .

- Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI) .
- Gọi G là giao điểm của AM và BN . Chứng minh rằng: $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.
- Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC . Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{1}{3}$.

Lời giải.



- Xét tam giác BCD có BI là đường trung tuyến và M là trọng tâm nên $M \in BI$. (1)

- Xét tam giác CDA có AI là đường trung tuyến và N là trọng tâm nên $N \in AI$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $M, N \in (ABI)$.

- Xét tam giác ABI có $\frac{IN}{IA} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{3}$ (vì M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA) suy ra $MN \parallel AB$ (định lý Ta-let đảo).

Do đó $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$ (định lý Ta-let).

- Xét tam giác AJD có $\frac{JQ}{JA} = \frac{JM}{JD} = \frac{1}{3}$ (vì Q, M lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD) suy ra $QM \parallel AD$ (định lý Ta-let đảo).

Xét (AJD) , gọi $G' = AM \cap DQ$. Ta có $\frac{G'M}{G'A} = \frac{QM}{AD} = \frac{JM}{JD} = \frac{1}{3}$ suy ra $G' \equiv G$.

Do đó DQ đi qua G . (3)

Xét tam giác EBC có $\frac{EP}{EB} = \frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$ (vì P, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ACD) suy ra $PN \parallel BC$ (định lý Ta-let đảo).

Xét (EBC) , gọi $G'' = CP \cap BN$. Ta có $\frac{G''N}{G''B} = \frac{PN}{BC} = \frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$ suy ra $G'' \equiv G$.

Do đó CP đi qua G . (4)

Từ (3) và (4) suy ra CP, DQ cùng đi qua điểm G .

Xét tam giác KCD có $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{PQ}{CD} = \frac{KQ}{KD} = \frac{1}{3}$ (vì P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ABC).

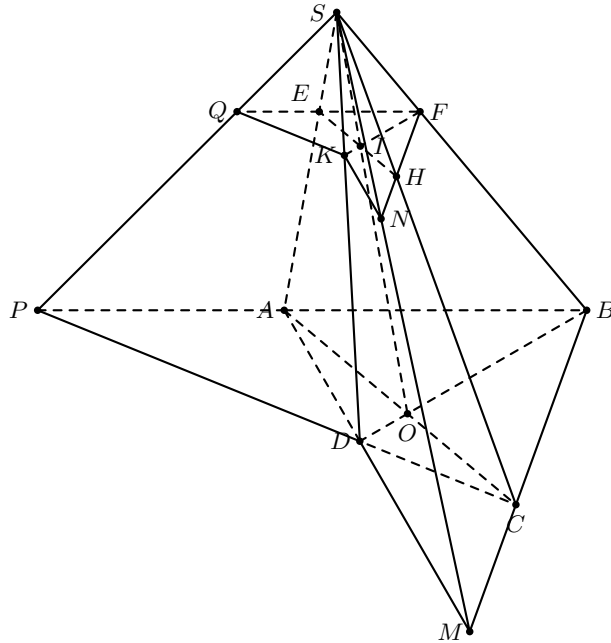
□

2. Bài tập tự luận

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC .

- Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.
- Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = EH \cap FK$. Chứng minh: S, I, O thẳng hàng.
- Gọi $M = AD \cap BC$ và $N = EK \cap FH$. Chứng minh: S, M, N thẳng hàng.
- Gọi $P = AB \cap CD$ và $Q = EF \cap HK$. Chứng minh: S, P, Q thẳng hàng.

Lời giải.



- Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap EF$. Chọn (SBD) chứa SD .

Ta có

$$\begin{cases} F \in (EFH) \\ F \in SB, SB \subset (SBD) \Rightarrow F \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (SBD) \cap (EFH) \quad (1)$$

$$I = SO \cap EH \Rightarrow \begin{cases} I \in SO, SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD) \\ I \in EH, EH \subset (EFH) \Rightarrow I \in (EFH) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD) \cap (EFH) \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $(SBD) \cap (EFH) = IF$. Kẻ $IF \cap SD = K$ suy ra $SD \cap (EFH) = K$.

- Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in d \quad (1).$$

Tương tự

$$O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in d \quad (2)$$

$$I = EH \cap FK \Rightarrow \begin{cases} I \in EH, EH \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \\ I \in FK, FK \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3), suy ra S, O, I cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm S, O, I thẳng hàng (đpcm).

c) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAD) \\ S \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow S \in d \quad (1).$$

Tương tự

$$M = AD \cap BC \Rightarrow \begin{cases} M \in AD, AD \subset (SAD) \Rightarrow M \in (SAD) \\ M \in BC, BC \subset (SBC) \Rightarrow M \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in d \quad (2)$$

$$N = EK \cap FH \Rightarrow \begin{cases} N \in EK, EK \subset (SAD) \Rightarrow N \in (SAD) \\ N \in FH, FH \subset (SBC) \Rightarrow N \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow N \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3), suy ra S, M, N cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm S, M, N thẳng hàng (đpcm).

d) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SDC) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SDC) \end{cases} \Rightarrow S \in d \quad (1).$$

Tương tự

$$P = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} P \in AB, AB \subset (SAB) \Rightarrow P \in (SAB) \\ P \in CD, CD \subset (SDC) \Rightarrow P \in (SDC) \end{cases} \Rightarrow P \in d \quad (2)$$

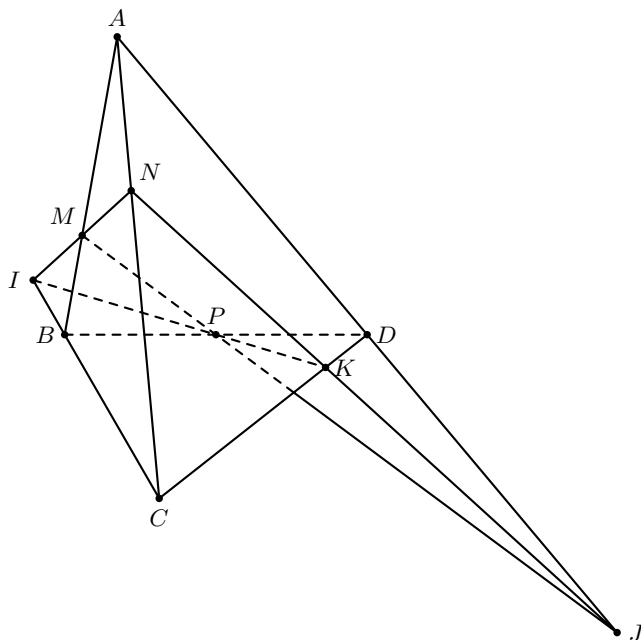
$$Q = EF \cap HK \Rightarrow \begin{cases} Q \in EF, EF \subset (SAB) \Rightarrow Q \in (SAB) \\ Q \in HK, HK \subset (SDC) \Rightarrow Q \in (SDC) \end{cases} \Rightarrow Q \in d \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3), suy ra S, P, Q cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm S, P, Q thẳng hàng (đpcm).

□

Bài 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD và $MN \cap BC = I, MP \cap AD = J, NJ \cap IP = K$. Chứng minh C, D, K thẳng hàng.

Lời giải.



Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (BCD) và (ADC) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} C \in (BCD) \\ C \in (ADC) \end{cases} \Rightarrow C \in d \quad (1), \quad \begin{cases} D \in (BCD) \\ D \in (ADC) \end{cases} \Rightarrow D \in d. \quad (2)$$

Tương tự

$$K = NJ \cap PI \Rightarrow \begin{cases} K \in NJ, NJ \subset (ADC) \Rightarrow K \in (ADC) \\ K \in PI, PI \subset (BCD) \Rightarrow K \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow K \in d. \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3), suy ra C, D, K cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm C, D, K thẳng hàng (đpcm).

□

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I và J là hai điểm trên hai cạnh AD, SB .

- Tìm giao tuyến của (SBI) và (SAC) . Tìm giao điểm K của IJ và (SAC) .
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC) . Tìm giao điểm L của DJ và (SAC) .
- Gọi $O = AD \cap BC$, $M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: A, K, L, M thẳng hàng.

 **Lời giải.**

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} S \in (SBI) \\ S \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SBI) \cap (SAC) = S \quad (1)$$

$$\text{Goi } H = BI \cap AC \Rightarrow \begin{cases} H \in BI \subset (SBI) \Rightarrow H \in (SBI) \\ H \in AC \subset (SAC) \Rightarrow H \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SBI) \cap (SAC) \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra $(SBI) \cap (SAC) = SH$.

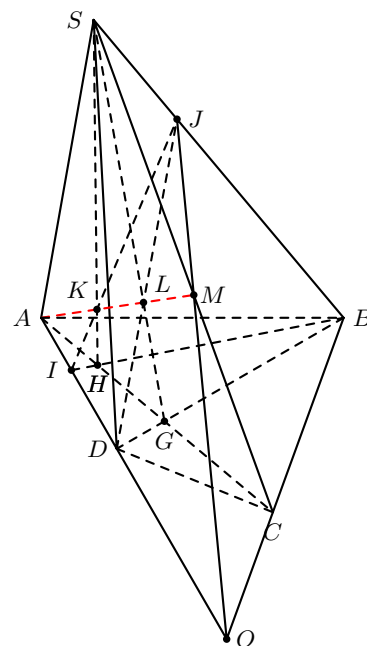
Chọn (SBI) chứa IJ , $(SBI) \cap (SAC) = SH$. Gọi $K = IJ \cap SH$ suy ra $IJ \cap (SAC) = K$.

$$\text{b) Ta có } \begin{cases} S \in (SBD) \\ S \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow (SBD) \cap (SAC) = S \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Goi } G = BD \cap AC &\Rightarrow \begin{cases} G \in BD \subset (SBD) \Rightarrow G \in (SBD) \\ G \in AC \subset (SAC) \Rightarrow G \in (SAC) \end{cases} \\ &\Rightarrow G \in (SBD) \cap (SAC) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1),(2) suy ra $(SBD) \cap (SAC) = SG$.

Chọn (SBD) chứa DJ , $(SBD) \cap (SAC) = SG$. Gọi $L = DJ \cap SG$ suy ra $DJ \cap (SAC) = L$.



- c) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (AJO) .

Ta có $\begin{cases} A \in (SAC) \\ A \in (AJO) \end{cases} \Rightarrow A \in d \quad (1).$

Tương tự

$$K = IJ \cap SH \Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \subset (AJO) \Rightarrow K \in (AJO) \\ K \in SH \subset (SAC) \Rightarrow K \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow K \in d \quad (2)$$

$$L = DJ \cap SG \Rightarrow \begin{cases} L \in DJ \subset (AJO) \Rightarrow L \in (AJO) \\ L \in SG \subset (SAC) \Rightarrow L \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow L \in d \quad (3)$$

$$M = OJ \cap SC \Rightarrow \begin{cases} M \in OJ \subset (AJO) \Rightarrow M \in (AJO) \\ M \in SC \subset (SAC) \Rightarrow M \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in d \quad (4)$$

Từ (1),(2),(3),(4) suy ra A, K, L, M cùng thuộc $d \Rightarrow$ bốn điểm A, K, L, M thẳng hàng (đpcm).

3

Bài 32. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối đôi một không song song và điểm $S \notin (ABCD)$. Lấy điểm I thuộc cạnh AD , lấy điểm J thuộc cạnh SB .

- a) Tìm $K = IJ \cap (SAC)$ b) Tìm $L = DJ \cap (SAC)$
c) Gọi $O = AD \cap BC$, $M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng: K, L, M thẳng hàng.

 **Lời giải.**

- a) Chọn (SBI) chứa IJ . Gọi $H = AC \cap BI$
 $\Rightarrow (SBI) \cap (SAC) = SH$.
 Gọi $IJ \cap SG = K$ suy ra $IJ \cap (SAC) = K$.
- b) Chọn (SBD) chứa DJ . Gọi $G = AC \cap BD$
 $\Rightarrow (SBD) \cap (SAC) = SG$.
 Gọi $DJ \cap SH = L$ suy ra $DJ \cap (SAC) = L$.
- c) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (OMD) .
 Ta có

$$K = IJ \cap (SAC) \Rightarrow \begin{cases} K \in IJ \subset (OMD) \Rightarrow K \in (OMD) \\ K \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow K \in d \quad (1)$$

$$L = DJ \cap (SAC) \Rightarrow \begin{cases} L \in DJ \subset (OMD) \Rightarrow L \in (OMD) \\ L \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow L \in d \quad (2)$$

$$M = OJ \cap SC \Rightarrow \begin{cases} M \in OJ \subset (OMD) \Rightarrow M \in (OMD) \\ M \in SC \subset (SAC) \Rightarrow M \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in d. \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra K, L, M cùng thuộc d nên chúng thẳng hàng (đpcm). □

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC .

- a) Tìm giao tuyến của (BMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SBC) .
- b) Tìm $I = SO \cap (BMN)$ và $K = SD \cap (BMN)$
- c) Tìm $E = AD \cap (BMN)$ và $F = CD \cap (BMN)$
- d) Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng.

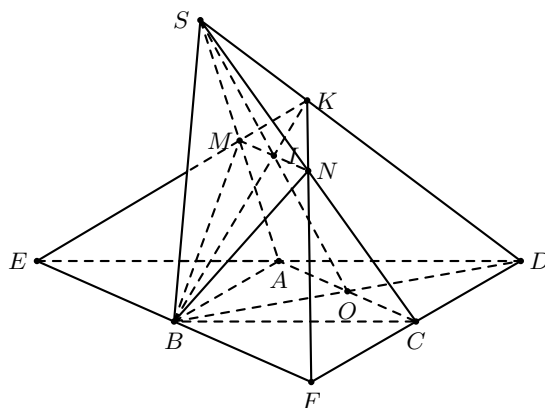
Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{cases} B \in (BMN) \\ B \in (SAB) \end{cases} \Rightarrow B \in (BMN) \cap (SAB) \quad (1)$$

$$\begin{cases} M \in (BMN) \\ M \in SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow M \in (BMN) \cap (SAB) \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra $(BMN) \cap (SAB) = BM$.



Ta có

$$\begin{cases} B \in (BMN) \\ B \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow B \in (BMN) \cap (SBC). \quad (1)$$

$$\begin{cases} N \in (BMN) \\ N \in SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow N \in (BMN) \cap (SBC). \quad (2)$$

Từ (1),(2) suy ra $(BMN) \cap (SBC) = BN$.

b) Trong (SAC) gọi $I = SO \cap MN$ mà $MN \subset (BMN)$, suy ra $I = SO \cap (BMN)$.

Chọn (SBD) chứa SD , ta có $(SBD) \cap (BMN) = BI$. Kẻ $BI \cap SD = K$. Suy ra $K = SD \cap (BMN)$.

b) Trong (SAD) gọi $E = KM \cap AD$ mà $KM \subset (BMN)$, suy ra $E = AD \cap (BMN)$.

Trong (SCD) gọi $F = CD \cap KN$ mà $KN \subset (BMN)$, suy ra $F = CD \cap (BMN)$.

b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (KEF) và (DEF) .

Ta có

$$\begin{cases} E \in (KEF) \\ E \in (DEF) \end{cases} \Rightarrow E \in d \quad (1)$$

$$\begin{cases} F \in (KEF) \\ F \in (DEF) \end{cases} \Rightarrow F \in d \quad (2)$$

$$B = BD \cap BK \Rightarrow \begin{cases} B \in BD \subset (DEF) \Rightarrow B \in (DEF) \\ B \in BK \subset (KEF) \Rightarrow B \in (KEF) \end{cases} \Rightarrow B \in d \quad (3)$$

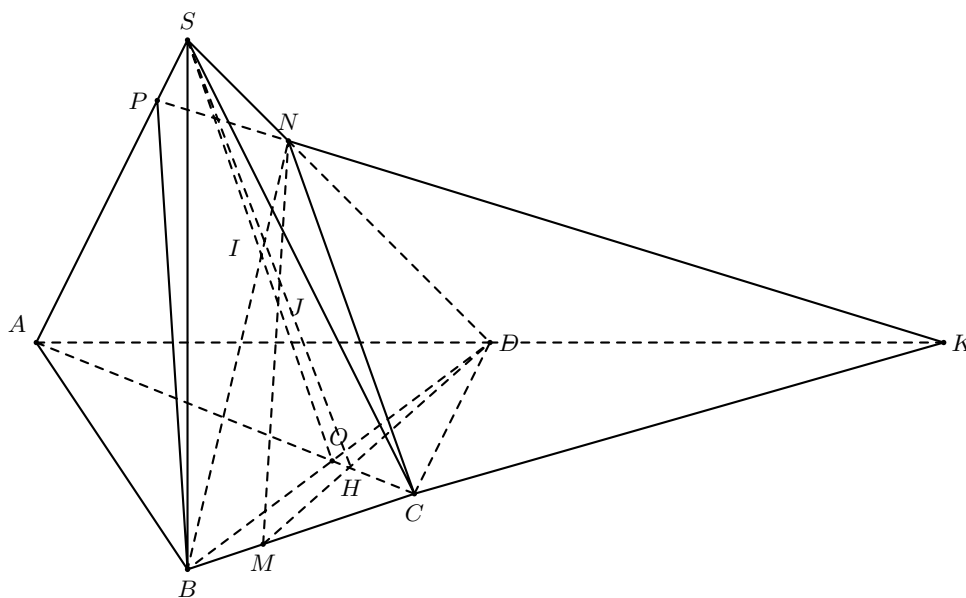
Từ (1),(2),(3) suy ra B, E, F , cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm B, E, F thẳng hàng (đpcm).

□

Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh BC và SD .

- Tìm giao điểm I của BN và (SAC) .
- Tìm giao điểm J của MN và (SAC) .
- Chứng minh I, J, C thẳng hàng.
- Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

Lời giải.



- Tìm giao điểm I của BN và (SAC) .

☑ $S \in (SAC) \cap (SBD)$.

☑ Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD).$$

$$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD).$$

☑ Trong (SBD) , gọi $I = BN \cap SO \Rightarrow I \in SO \subset (SAC)$.

Vậy $I = BN \cap (SAC)$.

b) Tìm giao điểm J của MN và (SAC) .

☑ $S \in (SMD) \cap (SAC)$.

☑ Trong $(ABCD)$, gọi $H = MD \cap AC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} H \in MD \subset (SMD) \\ H \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow H \in (SMD) \cap (SAC). \\ \Rightarrow SH = (SMD) \cap (SAC).$$

☑ Trong (SMD) , gọi $J = SH \cap MN \Rightarrow J \in SH \subset (SAC)$.

Vậy $J = MN \cap (SAC)$.

c) Chứng minh I, J, C thẳng hàng.

☑ $\begin{cases} I \in (SAC) \\ I \in BN \subset (BCN) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (BCN).$

☑ $\begin{cases} J \in (SAC) \\ J \in MN \subset (BCN) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAC) \cap (BCN).$

☑ $\begin{cases} C \in (SAC) \\ C \in (BCN) \end{cases} \Rightarrow C \in (SAC) \cap (BCN).$

$\Rightarrow I, J, C \in (SAC) \cap (BCN).$

Vậy I, J, C thẳng hàng.

d) Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

☑ $N \in (BCN) \cap (SAD).$

☑ Trong $(ABCD)$, gọi $K = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} K \in BC \subset (BCN) \\ K \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (BCN) \cap (SAD). \\ \Rightarrow NK = (BCN) \cap (SAD).$

☑ Trong (SAD) , gọi $P = NK \cap SA \Rightarrow P = SA \cap (BCN).$

Vậy thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $BCNP$.

□

Bài 35. Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB . Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC$ và $JB = 3JD$.

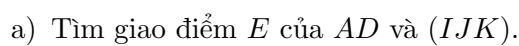
a) Tìm giao điểm E của AD và (IJK) .

b) Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD) .

c) Gọi O là giao điểm của d với CD . Chứng minh I, O, E thẳng hàng.

d) Tính các tỉ số $\frac{OI}{OE}$ và $\frac{OC}{OD}$.

💬 **Lời giải.**



👉 Trong (ABD) , gọi E là giao điểm của KJ và AD .
 $\Rightarrow \begin{cases} E \in KJ \subset (IJK) \\ E \in AD \end{cases}$

b) Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD) .

❖ $\frac{AK}{AB} \neq \frac{AI}{AC} \Rightarrow KI$ không song song BC .
 Trong (ABC) , gọi $F = IK \cap BC$.
 $\Rightarrow \begin{cases} F \in IK \subset (IJK) \\ F \in BC \subset (BCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow F \in (IJK) \cap (BCD)$.

c) Gọi O là giao điểm của d với CD . Chứng minh I, O, E thẳng hàng.

$$\heartsuit \left\{ \begin{array}{l} E \in KJ \subset (IJK) \\ E \in AD \subset (ACD) \end{array} \right. \Rightarrow E \in (IJK) \cap (ACD).$$

Vậy I, O, E thẳng hàng.

d) Tính các tỉ số $\frac{OI}{OE}$ và $\frac{OC}{OD}$.

☑ Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác ABC với ba điểm thẳng hàng K, I, F ta có:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CI}{IA} = 1 \Rightarrow \frac{BF}{FC} = 2.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác DBC với ba điểm thẳng hàng J, O, F ta có:

$$\frac{DJ}{JB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CO}{OD} = 1 \Rightarrow \frac{CO}{OD} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{OC}{OD} = \frac{3}{2}.$$

☑ Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác ABD với ba điểm thẳng hàng K, J, E ta có:

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AE}{ED} \cdot \frac{DJ}{JB} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{ED} = 3.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác AIE với ba điểm thẳng hàng C, O, D ta có:

$$\frac{ED}{DA} \cdot \frac{AC}{CI} \cdot \frac{IO}{OE} = 1 \Rightarrow \frac{IO}{OE} = \frac{2}{3}.$$

□

Bài 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC ; O là giao điểm của AC và BD .

a) Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD) .

b) Tìm giao điểm P của DN và (SAB) .

c) Gọi K là giao điểm của AN và DM . Chứng minh S, K, O thẳng hàng. Đặt $KS = k \cdot KO$. Tìm k .

🗨️ **Lời giải.**

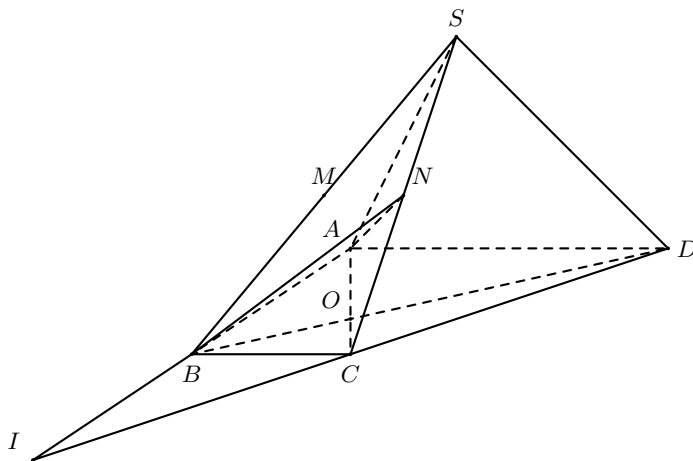
a) Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD) .

Ta có: $N \in (ABN) \cap (SCD)$ (1).

Trong $(ABCD)$, gọi $I = AB \cap CD$.

$\Rightarrow I \in (ABN) \cap (SCD)$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $IN = (ABN) \cap (SCD)$.

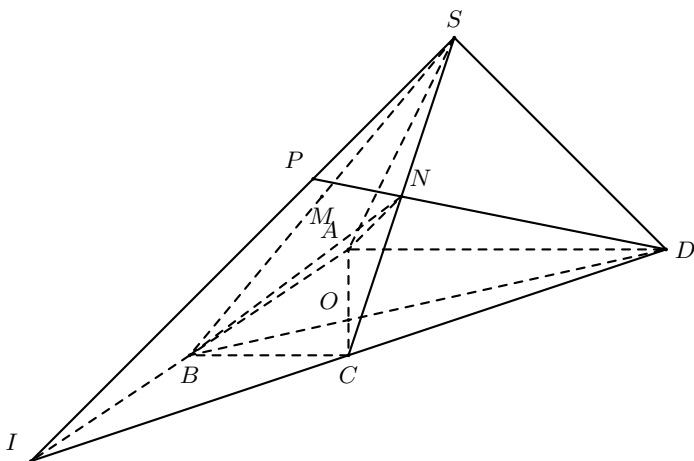


b) Tìm giao điểm P của DN và (SAB) .

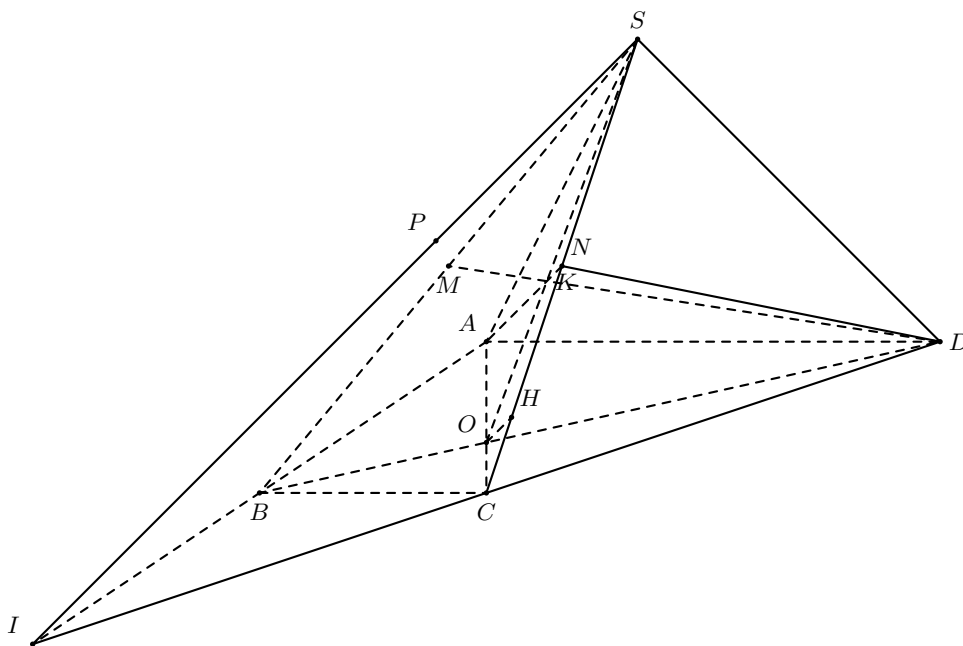
Trong (SCD) , gọi $P = DN \cap SI$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \in DN \\ I \in SI \subset (SAB) \end{cases}$$

Vậy $P = DN \cap (SAB)$.



c) Gọi K là giao điểm của AN và DM . Chứng minh S, K, O thẳng hàng. Đặt $KS = k.KO$. Tìm k .



☑ $S \in (SAC) \cap (SBD)$.

☑ $\begin{cases} K \in AN \subset (SAC) \\ K \in DM \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$.

☑ $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in DB \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$.

Vậy S, K, O thẳng hàng.

☑ $ABCD$ là hình thang có $AD = 2BC \Rightarrow \frac{BC}{AD} = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$.

Trong $\triangle SAC$, kẻ $OH \parallel AN \Rightarrow \frac{CH}{CN} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{SN}{SH} = \frac{3}{5}$.

Vậy $k = \frac{3}{5}$.

□

Bài 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B .

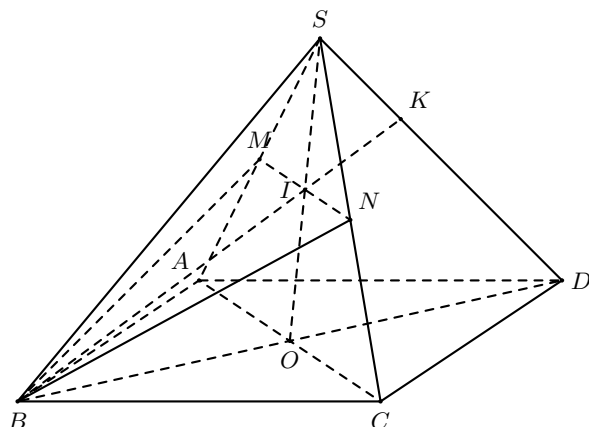
a) Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$.

b) Tìm $E = DA \cap (P), F = DC \cap (P)$.

c) Chứng tỏ rằng E, F, B thẳng hàng.

Lời giải.

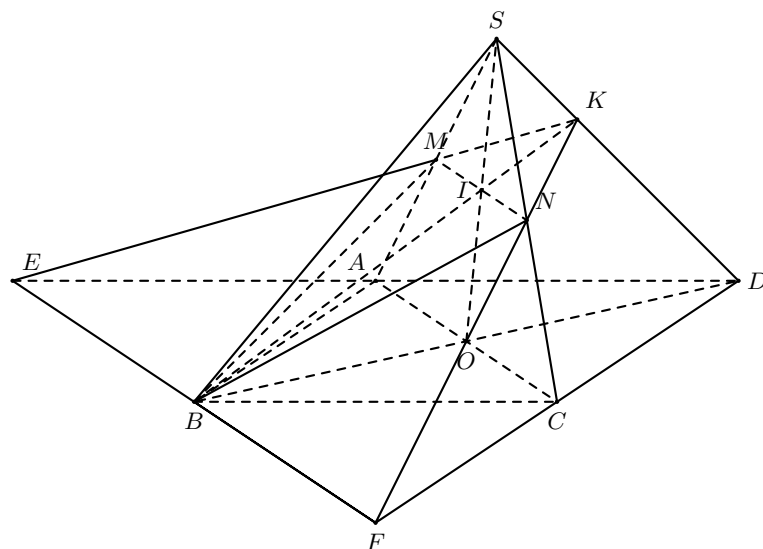
a) Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$.



- ☑ $MB = (P) \cap (SAB)$.
- ☑ $NB = (P) \cap (SBC)$.
- ☑ Tìm giao tuyến của (P) và (SCD) .
 - $N \in (P) \cap (SCD)$.
 - Trong (SAC) , gọi $I = SO \cap MN$; $K = BI \cap SD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in BI \subset (P) \\ K \in SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (P) \cap (SCD).$$
- Vậy $NK = (MNB) \cap (SCD)$.
- ☑ Tìm giao tuyến của (P) và (SAD) .
 - $M \in (P) \cap (SAD)$.
 - $K \in (P) \cap (SAD)$.
 - Vậy $MK = (P) \cap (SAD)$.

b) Tìm $E = DA \cap (P), F = DC \cap (P)$.



- ☑ Gọi $E = MK \cap AD \Rightarrow E = AD \cap (P)$.
- ☑ Gọi $F = NK \cap CD \Rightarrow F = CD \cap (P)$.

c) Chứng tỏ rằng E, F, B thẳng hàng.

- ☑ $E \in (P) \cap (ABCD).$
- ☑ $F \in (P) \cap (ABCD).$
- ☑ $B \in (P) \cap (ABCD).$

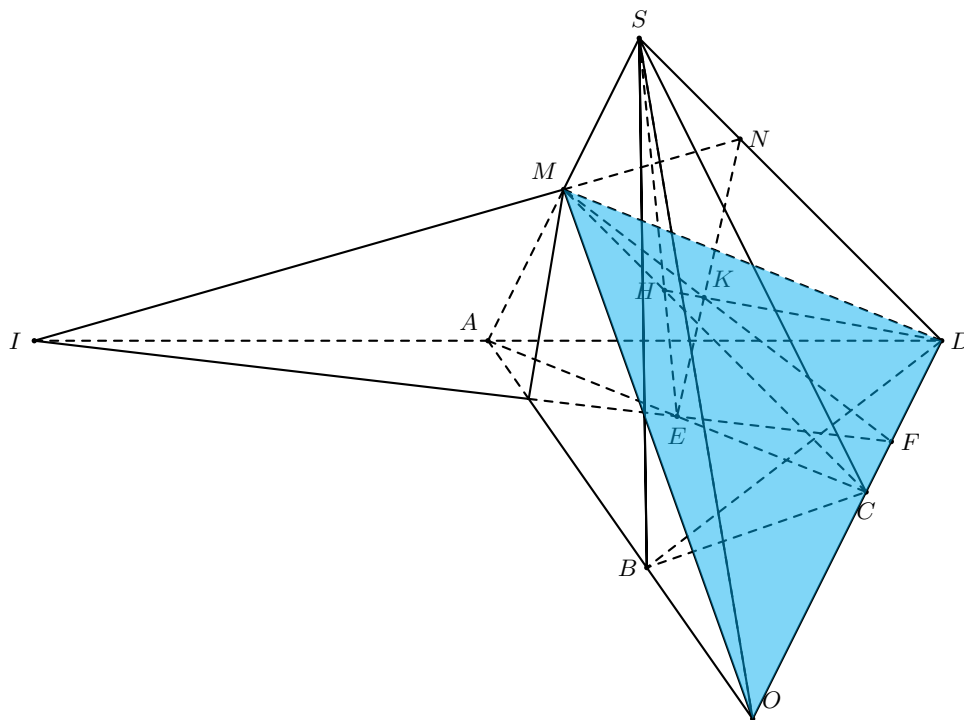
Vậy E, F, B thẳng hàng.

□

Bài 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song nhau. Gọi M, E lần lượt là trung điểm của SA, AC và $F \in CD$ sao cho $CD = 3CF$.

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm N của SD và (MEF) . Đặt $NS = k \cdot ND$. Tìm k .
- Gọi $H = SE \cap CM$ và $K = MF \cap NE$. Chứng minh D, H, K thẳng hàng.
- Tính các tỉ số $\frac{HM}{HC}; \frac{HS}{HE}; \frac{KM}{KF}; \frac{KN}{KE}; \frac{KH}{KD}$.

🗨️ **Lời giải.**



- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
 $S \in (SAB) \cap (SCD).$

Trong $(ABCD)$, gọi $O = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} O \in AB \subset (SAB) \\ S \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAB) \cap (SCD).$

Vậy $SO = (SAB) \cap (SCD).$

- Tìm giao điểm N của SD và (MEF) . Đặt $NS = k \cdot ND$. Tìm k .

Ta có : $\frac{CE}{CA} \neq \frac{CF}{CD} \Rightarrow EF$ không song song với AD .

Gọi $I = EF \cap AD \Rightarrow I \in (SAD) \cap (MEF).$

Mặt khác, $M \in (SAD) \cap (MEF).$

$\Rightarrow IM = (SAD) \cap (MEF).$

Gọi $N = IM \cap SD \Rightarrow \begin{cases} N \in IM \subset (MEF) \\ N \in SD \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (MEF).$

c) Gọi $H = SE \cap CM$ và $K = MF \cap NE$. Chứng minh D, H, K thẳng hàng.

- ☑ $H = SE \cap CM \Rightarrow \begin{cases} H \in SE \subset (SED) \\ H \in CM \subset (CDM) \end{cases} \Rightarrow H \in (SED) \cap (CDM).$
- ☑ $K = MF \cap NE \Rightarrow \begin{cases} K \in MF \subset (CDM) \\ K \in NE \subset (SED) \end{cases} \Rightarrow K \in (CDM) \cap (SED).$
- ☑ $H \in (CDM) \cap (SED).$

Vậy D, H, K thẳng hàng.

d) Tính các tỉ số $\frac{HM}{HC}; \frac{HS}{HE}; \frac{KM}{KF}; \frac{KN}{KE}; \frac{KH}{KD}.$

- ☑ Xét tam giác SAC có CM và SE là hai đường trung tuyến cắt nhau tại điểm H .
 $\Rightarrow H$ là trọng tâm của $\triangle SAC$.
 $\Rightarrow \frac{HM}{HC} = \frac{1}{2}; \frac{HS}{HE} = \frac{1}{2}.$
- ☑ Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle IND$ với ba điểm thẳng hàng M, A, S ta có:
 $\frac{IA}{AD} \cdot \frac{DS}{SN} \cdot \frac{NM}{MI} = 1 \Rightarrow \frac{NM}{MI} = \frac{1}{3}.$
 Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle IFD$ với ba điểm thẳng hàng C, A, E ta có:
 $\frac{IA}{AD} \cdot \frac{DC}{CF} \cdot \frac{FE}{EI} = 1 \Rightarrow \frac{FE}{EI} = \frac{1}{3}.$
 Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle NIE$ với ba điểm thẳng hàng M, H, F ta có:
 $\frac{NM}{MI} \cdot \frac{IF}{FE} \cdot \frac{EK}{KN} = 1 \Rightarrow \frac{EK}{KN} = \frac{3}{4}.$
 Vậy $\frac{KN}{KE} = \frac{4}{3}.$
- ☑ Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle IFM$ với ba điểm thẳng hàng E, K, N ta có:
 $\frac{FE}{EI} \cdot \frac{IN}{NM} \cdot \frac{MK}{KF} = 1 \Rightarrow \frac{MK}{KF} = \frac{3}{4}.$
 Vậy $\frac{KM}{KF} = \frac{3}{4}.$
- ☑ Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle SHD$ với ba điểm thẳng hàng E, K, N ta có:
 $\frac{DN}{NS} \cdot \frac{SE}{EH} \cdot \frac{HK}{KD} = 1 \Rightarrow \frac{HK}{KD} = \frac{1}{6}.$

□

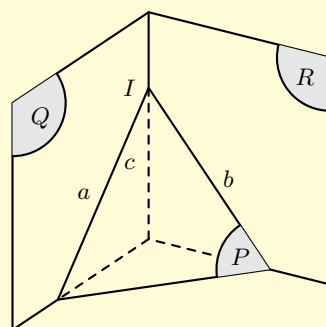
Dạng 7. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Để chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy ta làm theo các bước sau:

- ☑ Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b .
- ☑ Tìm mặt phẳng (Q) chứa a và (R) chứa b sao cho $(Q) \cap (R) = c \Rightarrow I \in c$.

Suy ra: a, b, c đồng quy tại I .

$$\text{Nghĩa là: } \begin{cases} a \subset (P), b \subset (P), I = a \cap b \\ a = (P) \cap (Q) \\ b = (P) \cap (R) \\ c = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow a, b, c \text{ đồng quy tại } I.$$



1. Ví dụ mẫu

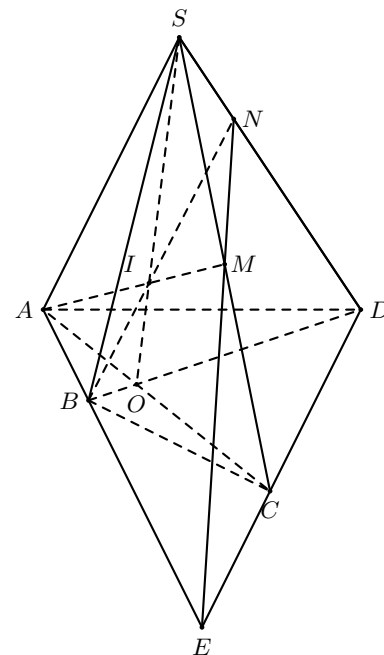
Ví dụ 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD . Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD .

- Tìm giao điểm N của SD với (MAB) .
- Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

🗨️ Lời giải.

- Tìm giao điểm N của SD với (MAB) .

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ (SCD) chứa SD .
Xét (SCD) và (MAB) :
- ☑ Trong $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.
Ta có: $\begin{cases} E \in AB, AB \subset (ABM) \Rightarrow E \in (ABM) \\ E \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow E \in (ABM) \cap (SCD)$ (1)
- ☑ Mà $\begin{cases} M \in (ABM) \\ M \in SC, SC \subset (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow M \in (ABM) \cap (SCD)$. (2)
Từ (1), (2) $\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = EM$.
- ☑ Trong (SCD) , gọi $N = SD \cap EM$.
Khi đó: $\begin{cases} N \in SD \\ N \in EM, EM \subset (ABM) \end{cases}$
 $\Rightarrow N = SD \cap (ABM)$.



- Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

🔴 **Nhận xét.** $AM \subset (SAC), BN \subset (SBD)$ nên ta quan tâm đến hai mặt phẳng này.

Xét (SAC) và (SBD) có:

- ☑ $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)
- ☑ Ta có: $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4)
Từ (3), (4) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.
- ☑ Mặt khác, trong (ABM) , gọi $I = AM \cap BN$.
 $\begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO$.

Do đó SO, AM, BN đồng quy. □

Ví dụ 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC . Gọi N là giao điểm của SB và (ADM) . Gọi O là giao điểm AC và BD . Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.

🗨️ Lời giải.

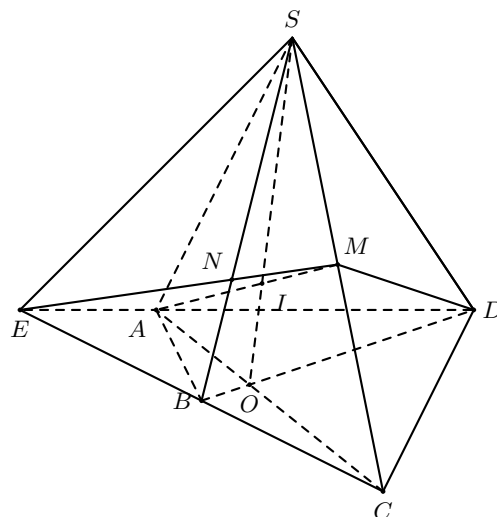
- ☑ Tìm N là giao điểm của SB và (ADM) .

- Chọn mặt phẳng phụ (SBC) chứa SB .
Xét (SBC) và (ADM) :

- Trong $(ABCD)$, gọi $E = AD \cap BC$.
Ta có: $\begin{cases} E \in BC, BC \subset (SBC) \Rightarrow E \in (SBC) \\ E \in AD, AD \subset (ADM) \Rightarrow E \in (ADM) \end{cases}$
 $\Rightarrow E \in (SBC) \cap (ADM)$ (1)

- Mà $\begin{cases} M \in (ADM) \\ M \in SC, SC \subset (SBC) \Rightarrow M \in (SBC) \end{cases}$
 $\Rightarrow M \in (SBC) \cap (ADM)$. (2)
Từ (1), (2) $\Rightarrow (SBC) \cap (ADM) = EM$.

- Trong (SBC) , gọi $N = SB \cap EM$.
Khi đó: $\begin{cases} N \in SB \\ N \in EM, EM \subset (ADM) \end{cases}$
 $\Rightarrow N = SB \cap (ADM)$.



- ☑ Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.

🔴 **Nhận xét.** $AM \subset (SAC), DN \subset (SBD)$ nên ta quan tâm đến hai mặt phẳng này.

Xét (SAC) và (SBD) có:

- $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)
- Ta có: $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4)
Từ (3), (4) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.
- Mặt khác, trong (ADM) , gọi $I = AM \cap DN$.
 $\begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in DN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO$.

Do đó SO, AM, DN đồng quy.

□

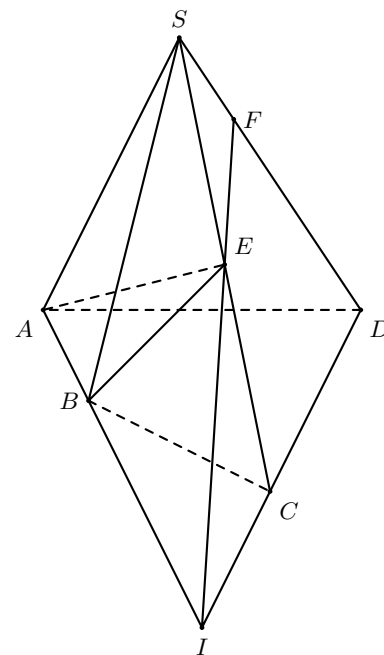
Ví dụ 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác mà AB không song song với CD . Trên cạnh SC lấy E không trùng với S và C .

- Tìm giao điểm F của SD và (ABE) .
- Chứng minh ba điểm AB, CD, EF đồng quy.

💬 **Lời giải.**

- Tìm giao điểm F của SD và (ABE) .

- ☑ Chọn mặt phẳng phụ (SCD) chứa SD .
Xét (SCD) và (ABE) :
- ☑ Trong $(ABCD)$, gọi $I = AB \cap CD$.
Ta có: $\begin{cases} I \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD) \\ I \in AB, AB \subset (ABE) \Rightarrow I \in (ABE) \end{cases}$
 $\Rightarrow I \in (SCD) \cap (ABE)$ (1)
- ☑ Mà $\begin{cases} E \in (ABE) \\ E \in SC, SC \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow E \in (SCD) \cap (ABE)$. (2)
Từ (1), (2) $\Rightarrow (SCD) \cap (ABE) = EI$.
- ☑ Trong (SCD) , gọi $F = SD \cap EI$.
Khi đó: $\begin{cases} F \in SD \\ F \in EI, EI \subset (ABE) \end{cases}$
 $\Rightarrow F = SD \cap (ABE)$.



- b) Chứng minh ba điểm AB, CD, EF đồng quy.
Theo cách tìm giao điểm F ở trên thì đường thẳng AB, CD, EF đồng quy tại điểm I .

□

Ví dụ 39. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I , MP cắt AD tại J . Chứng minh: PI, NJ, CD đồng quy.

☑ **Lời giải.**

Ta có

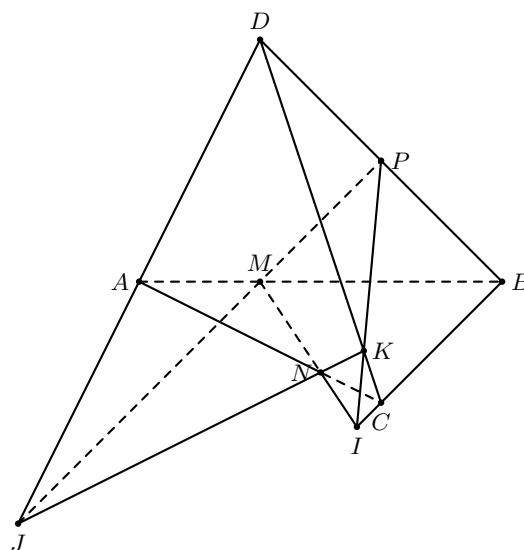
- ☑ Trong (BCD) , gọi $K = CD \cap IP$.
Khi đó: $\begin{cases} K \in CD \subset (ACD) \\ K \in PI \subset (MNP) \end{cases}$
 $\Rightarrow K \in (ACD) \cap (MNP)$ (1).
- ☑ Lại có $\begin{cases} N \in AC \subset (ACD) \\ N \in (MNP) \end{cases}$
 $\Rightarrow K \in (ACD) \cap (MNP)$ (2).
- ☑ $\begin{cases} J \in AD \subset (ACD) \\ J \in MP \subset (MNP) \end{cases}$
 $\Rightarrow J \in (ACD) \cap (MNP)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra J, N, K thẳng hàng hay ba đường thẳng PI, NJ, CD đồng quy.

□

Ví dụ 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC .

- a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .
- b) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD) .
- c) Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP) .
- d) Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh: S, H, E thẳng hàng.
- e) Chứng minh: SK, QM, NP đồng quy.



Lời giải.

a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD) .

☑ Có $S \in (SBD) \cap (SAC)$ (1)

☑ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I = AC \cap BD$
 $\Rightarrow \begin{cases} I \in BD \subset (SBD) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases}$
 $\Rightarrow I \in (SBD) \cap (SAC)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SBD) \cap (SAC) = SI$

b) Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD) .

☑ Có $N \in (SBD) \cap (MNP)$ (3)

☑ Trong mặt phẳng (SAC) gọi $J = MP \cap SI$
 $\Rightarrow \begin{cases} J \in MP \subset (MNP) \\ J \in SI \subset (SBD) \end{cases}$
 $\Rightarrow J \in (MNP) \cap (SBD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(SBD) \cap (MNP) = NJ$.

c) Tìm giao điểm của SD và (MNP) .

☑ Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $Q = SD \cap NJ$
 $\Rightarrow \begin{cases} Q \in SD \\ Q \in NJ \subset (MNP) \end{cases}$
 $\Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$.

d) Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh: S, H, E thẳng hàng.

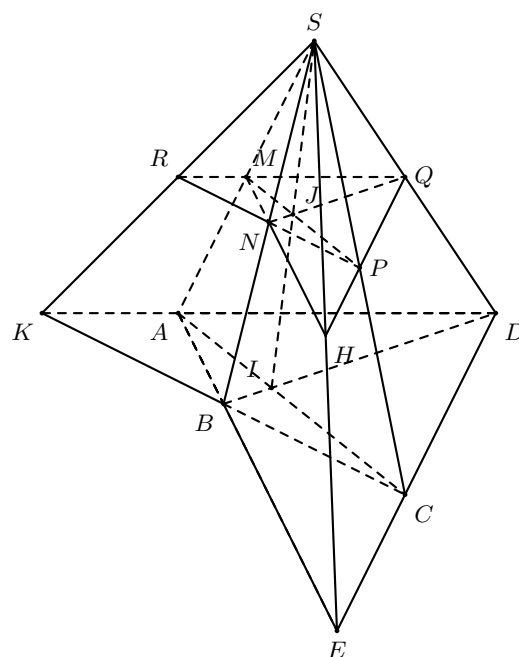
☑ Có $SE = (SAB) \cap (SCD)$
 ☑ Theo giả thuyết có $H = MN \cap PQ$
 $\Rightarrow \begin{cases} H \in MN \subset (SAB) \\ H \in PQ \subset (SCD) \end{cases}$
 $\Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow H \in SE$

Suy ra ba điểm S, H, E thẳng hàng.

e) Chứng minh: SK, QM, NP đồng quy.

☑ Có $SK = (SAD) \cap (SBC)$
 ☑ Theo giả thuyết có $R = MQ \cap NP$
 $\Rightarrow \begin{cases} R \in MQ \subset (SAD) \\ R \in NP \subset (SBC) \end{cases}$
 $\Rightarrow R \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow R \in SK$

Suy ra ba đường thẳng SK, MQ, NP đồng quy tại điểm R .



2. Bài tập tự luận

Bài 39. Cho tứ diện $SABC$ với I trung điểm của SA , J là trung điểm của BC . Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC .

a) Xác định giao điểm P của MC và (SAB) .

- b) Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC) .
- c) Tìm giao điểm E của MN và (ABC) .
- d) Gọi $F = IN \cap AC$. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

Lời giải.

- a) Xác định giao điểm P của MC và (SAB) .
Chọn mặt phẳng (BCI) chứa MC .

☑ Có $IB = (SAB) \cap (BCI)$

☑ Trong mặt phẳng (BCI) , gọi $P = CM \cap BI$.

$$\Rightarrow \begin{cases} P \in CM \\ P \in BI \subset (SAB) \end{cases} \\ \Rightarrow P = CM \cap (SAB).$$

- b) Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC) .

☑ Có $\begin{cases} C \in (ABC) \\ C \in PM \subset (SMP) \end{cases} \\ \Rightarrow C \in (ABC) \cap (SMP) \quad (1).$

☑ Trong mặt phẳng (SAB) gọi $H = SP \cap AB$
 $\Rightarrow \begin{cases} H \in SP \subset (SMP) \\ H \in AB \subset (ABC) \end{cases} \\ \Rightarrow H \in (ABC) \cap (SMP) \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(ABC) \cap (SMP) = CH$.

- c) Tìm giao điểm E của MN và (ABC) .

☑ Trong mặt phẳng (SHC) , gọi $E = MN \cap CH$
 $\Rightarrow \begin{cases} E \in MN \\ E \in CH \subset (ABC) \end{cases} \\ \Rightarrow E = MN \cap (ABC).$

- d) Gọi $F = IN \cap AC$. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

☑ Có $F = IN \cap AC$
 $\Rightarrow \begin{cases} F \in IN \subset (IJN) \\ F \in AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJN) \cap (ABC) \quad (3)$

☑ Có $E = MN \cap CH$
 $\Rightarrow \begin{cases} E \in MN \subset (IJN) \\ E \in CH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJN) \cap (ABC). \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $(IJN) \cap (ABC) = EF$.

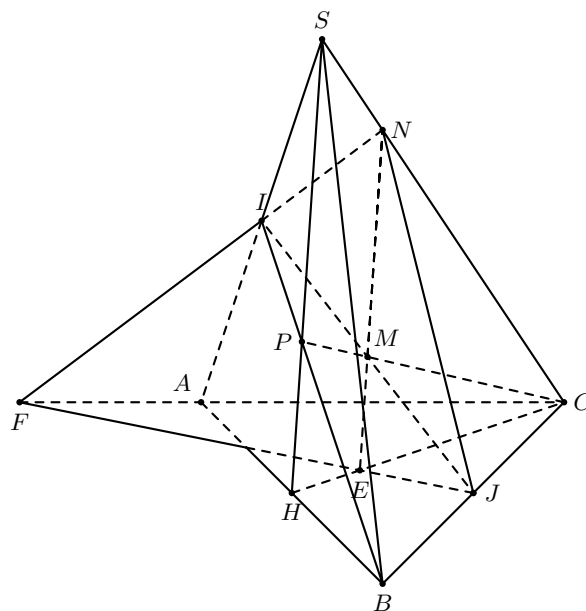
Ngoài ra có $J \in (IJN) \cap (ABC)$ hay $J \in EF$.

Kết luận đường thẳng EF luôn đi qua điểm J cố định khi M, N thay đổi.

□

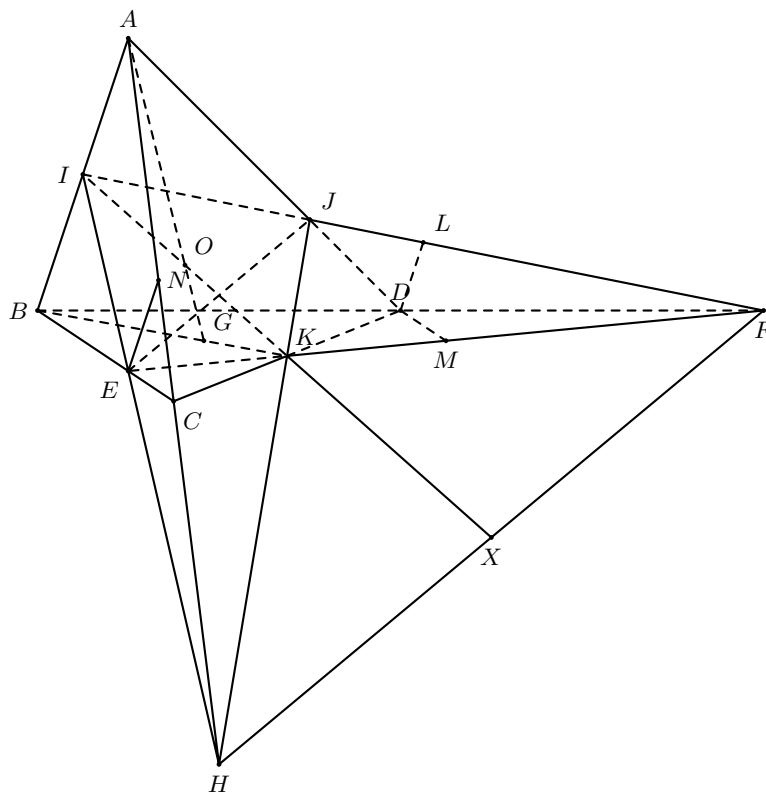
Bài 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD . Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.

- a) Tìm giao điểm F của IJ và (BCD) .
- b) Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC . Tính tỉ số: $\frac{EB}{EC}$.



- c) Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H . Tính $\frac{HC}{HA}$.
- d) Chứng minh $EJ \parallel HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF .
- e) Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng.
 Tính tỉ số: $\frac{OA}{OG}$.

Lời giải.



- a) Tìm giao điểm F của IJ và (BCD) .

- ☑ Trong mặt phẳng (ABD) , gọi $F = IJ \cap BD$ có
- $$\begin{cases} F \in IJ \\ F \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F = IJ \cap (BCD).$$

- b) Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC . Tính tỉ số: $\frac{EB}{EC}$.

- ☑ Trong mặt phẳng (BCD) , gọi $E = JK \cap BC$ có
- $$\begin{cases} E \in BC \\ E \in FK \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow E = BC \cap (IJK).$$
- ☑ Trong mặt phẳng (ABD) , dựng $DL \parallel AB, L \in IJ$, có $\triangle JAI \sim \triangle JDL$ (góc - góc)
- $$\Rightarrow \frac{AI}{DL} = \frac{JA}{JD} = 2 \Rightarrow AI = 2DL$$
- ☑ Trong $\triangle BIF$ có $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} \Rightarrow D$ trung điểm của BF .
- ☑ Trong mặt phẳng (BCD) , dựng $DM \parallel BC, M \in EF \Rightarrow BE = 2DM$.
 Ngoài ra có $\triangle KDM = \triangle KCE$ (góc - cạnh - góc).
 $\Rightarrow CE = DM$.

Vậy $\frac{EB}{EC} = 2$.

c) Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H . Tính $\frac{HC}{HA}$.

- ☑ Trong mặt phẳng (IJK) , gọi $H = JK \cap IE$, có
- $$\begin{cases} H \in IE \subset (ABC) \\ H \in JK \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABC) \cap (ACD).$$

Hay H thuộc giao tuyến AC của mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng (ACD) .

Kết luận 3 đường thẳng AC, JK và IE đồng quy tại điểm H .

- ☑ Trong mặt phẳng (ABC) , dựng $EN \parallel AB, N \in AC$.
- ☑ Trong $\triangle ABC$ có $\frac{CE}{CB} = \frac{EN}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EN}{AI} = \frac{2}{3}$.
- ☑ Trong $\triangle HAI$ có $\frac{HE}{HI} = \frac{EN}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow E$ là trọng tâm của $\triangle ABH$.

Vậy $\frac{HC}{HA} = \frac{1}{2}$.

d) Chứng minh $EJ \parallel HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF .

- ☑ Trong $\triangle IHF$ có $\frac{IJ}{IE} = \frac{IE}{IH} = \frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm) $\Rightarrow EJ \parallel FH$ (định lý đảo Thalet).
- ☑ Gọi X là giao điểm của IK và HF . Theo định lý Ce-Va ta có:

$$\frac{EI}{EH} \cdot \frac{XH}{XF} \cdot \frac{JF}{JI} = 1 \Rightarrow \frac{XH}{XF} = 1.$$

Vậy X là trung điểm của HF hay IK qua trung điểm của HF .

e) Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Tính tỉ số: $\frac{OA}{OG}$.

- ☑ Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) \quad (1). \end{aligned}$$

- ☑ Lại có: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AO}$.

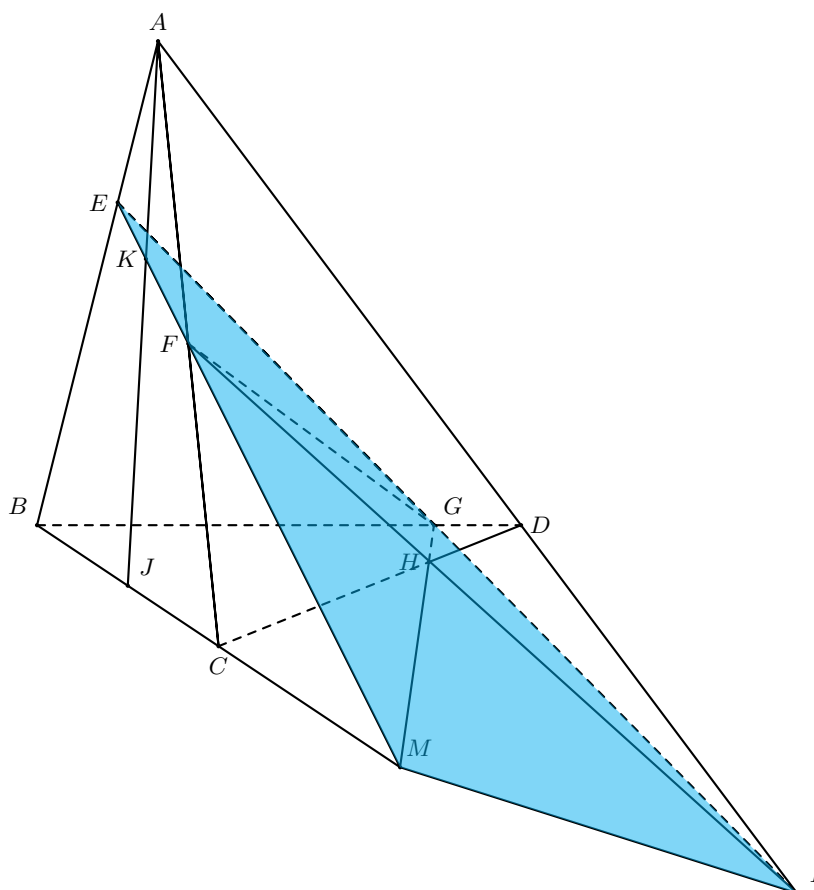
Kết luận ba điểm A, O, G thẳng hàng và $\frac{OA}{OG} = 3$.

□

Bài 41. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy ba điểm E, F, G sao cho $AB = 3AE; AC = 2AF; DB = 4DG$.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD) .
- b) Tìm giao điểm H của đường thẳng CD với (EFG) . Tính tỉ số $\frac{HC}{HD}$.
- c) Tìm giao điểm I của đường thẳng AD và (EFG) . Tính tỉ số $\frac{IA}{ID}$.
- d) Chứng minh ba đường thẳng FI, GM, CD đồng quy.
- e) Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K . Tính tỉ số $\frac{AK}{AJ}$.

 Lời giải.



a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD) .

✔ $G \in (EFG) \cap (BCD).$

☑ Ta có: $\frac{AE}{AB} \neq \frac{AF}{AC} \Rightarrow EF$ cắt BC tại $M \Rightarrow M \in (EFG) \cap (BCD)$

$$\hat{V}_y \text{ } MG = (EFG) \cap (BCD).$$

b) Tìm giao điểm H của đường thẳng CD với (EFG) . Tính tỉ số $\frac{HC}{HD}$.

☑ Trong (BCD) , gọi $H = MG \cap CD \Rightarrow H = CD \cap (EFG)$.

👉 Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle BCA$ với ba điểm thẳng hàng M, E, F ta có:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{BM}{MC} = 2.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle BCD$ với ba điểm thẳng hàng M, H, G ta có:

$$\frac{DG}{DB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CH}{HD} = 1 \Rightarrow \frac{CH}{HD} = \frac{3}{2}.$$

c) Tìm giao điểm I của đường thẳng AD và (EFG) . Tính tỉ số $\frac{IA}{ID}$.

☑ Ta có: $\frac{BE}{BA} \neq \frac{BG}{BD} \Rightarrow EG$ cắt AD tại điểm $I \Rightarrow I = AD \cap (EFG)$.

🔵 Áp dụng định lý Menelaus trong $\triangle ABD$ với ba điểm thẳng hàng E, G, I ta có:

$$\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AI}{ID} \cdot \frac{DG}{GB} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{3}{2}.$$

d) Chứng minh ba đường thẳng FI , GM , CD đồng quy.

✔ $F \in (EFG) \cap (ACD)$.

- ☑ $H \in (EFG) \cap (ACD)$.
- ☑ $I \in (EFG) \cap (ACD)$.

Suy ra ba điểm F, H, I thẳng hàng.
 Vậy ba đường thẳng FI, GM, CD đồng quy.

e) Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K . Tính tỉ số $\frac{AK}{AJ}$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABJ với ba điểm thẳng hàng E, F, M ta có:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MJ} \cdot \frac{JK}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{JK}{KA} = \frac{3}{2}.$$

 Vậy $\frac{AK}{AJ} = \frac{2}{3}.$

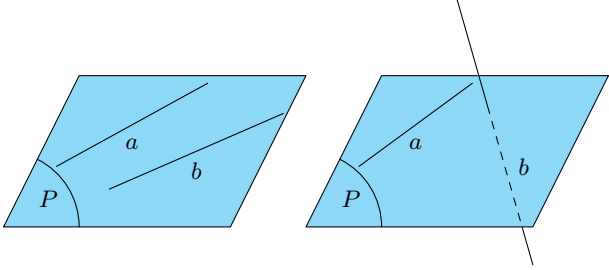


Bài số 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

A – KIẾN THỨC CẦN NẮM

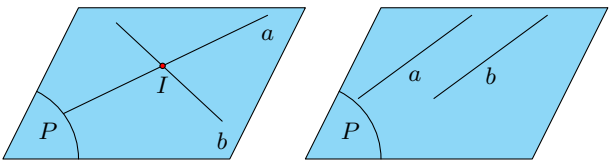
1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt trong không gian. Khi đó chỉ xảy ra một trong các trường hợp sau:
Trường hợp 1: Có một mặt phẳng chứa a và b . Khi đó ta nói a và b **đồng phẳng**.



Trường hợp 2: Không có mặt phẳng nào chứa a và b . Khi đó ta nói a và b **chéo nhau** hay a **chéo với** b .
 Khi hai đường thẳng a và b (phân biệt) đồng phẳng, ta đã biết có hai khả năng xảy ra:

- ☑ a và b có một điểm chung duy nhất I . Ta nói a và b **cắt nhau** tại I và kí hiệu là $a \cap b = \{I\}$. Ta còn có thể viết là $a \cap b = I$.



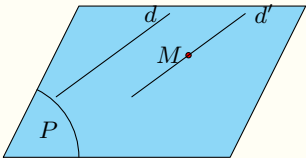
- ☑ a và b không có điểm chung. Ta nói a và b **song song** với nhau và kí hiệu là $a \parallel b$.

🔗 **Định nghĩa 2.1.** Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

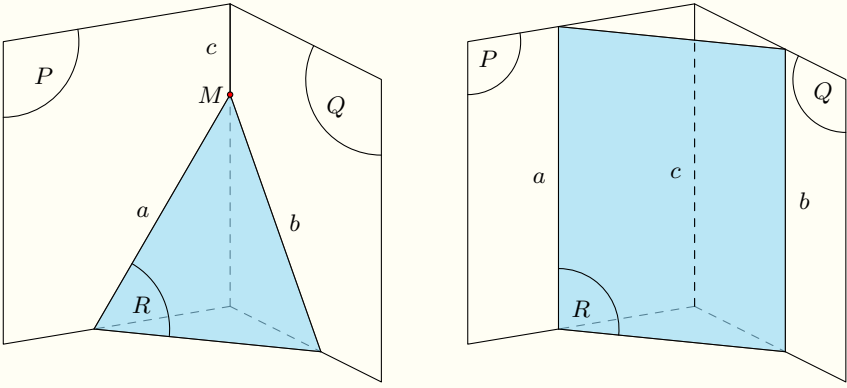
🔴 **Nhận xét.** Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu là $mp(a, b)$.

2. Tính chất

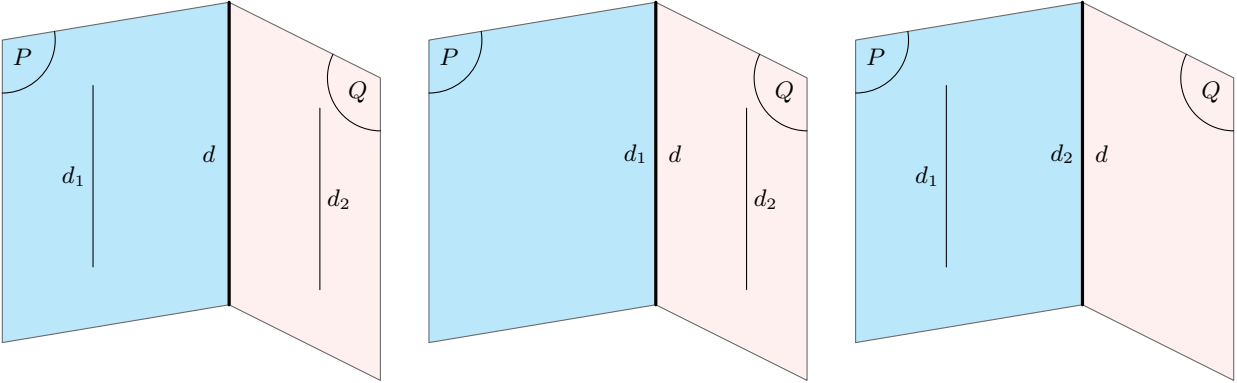
🔗 **Định lí 2.1.**
 Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



🔗 **Định lí 2.2.** Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy, hoặc đôi một song song với nhau.



⚠ Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



⚡ **Định lí 2.3.** Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Khi hai đường thẳng a và b cùng song song với đường thẳng c , ta kí hiệu $a \parallel b \parallel c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

B – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Nhận biết, chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp giải: Ta sẽ sử dụng một trong các cách sau

- ☑ Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (Đường trung bình, Định lý Ta-lét đảo,...)
- ☑ Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

$$\begin{cases} a \parallel b \\ a \parallel c \Rightarrow b \parallel c. \\ b \neq c \end{cases}$$

- ☑ Áp dụng định lý về giao tuyến song song.
- ☑ Áp dụng hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

$$\begin{cases} d' \subset (\alpha) \\ d'' \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ d' \parallel d'' \end{cases} \Rightarrow d \parallel d', d \parallel d''$$

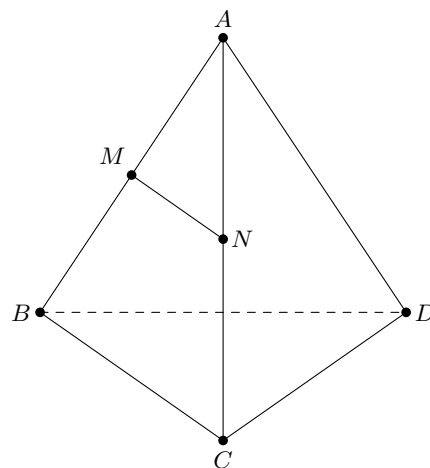
1. Các ví dụ

Ví dụ 1 (CTST). Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- a) MN và BC ; b) AN và CD ; c) MN và CD .

Lời giải.

- a) Trong mặt phẳng (ABC) , ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra $MN \parallel BC$.
- b) Trong mặt phẳng (ACD) , ta có AN cắt CD tại điểm C .
- c) Giả sử MN và CD cùng nằm trong một mặt phẳng (P) , suy ra đường thẳng NC nằm trong (P) , suy ra (P) chứa điểm A . Tương tự, ta cũng có AM nằm trong (P) , suy ra (P) chứa điểm B . Suy ra (P) chứa cả bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$. Điều này vô lý.
Vậy hai đường thẳng MN và CD không nằm trong cùng bất kỳ mặt phẳng nào, suy ra MN chéo với CD .



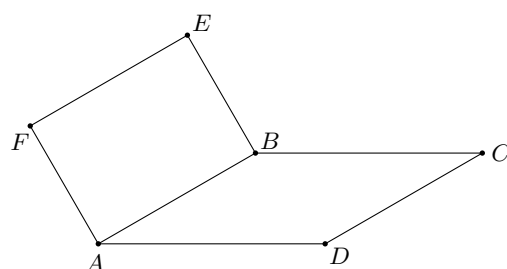
Hình 4.



Ví dụ 2.

Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

- a) Quan sát bốn đường thẳng AB, BC, CD, DA . Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau, các cặp đường thẳng song song.
- b) Trong ba đường thẳng AB, AF, BE có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?

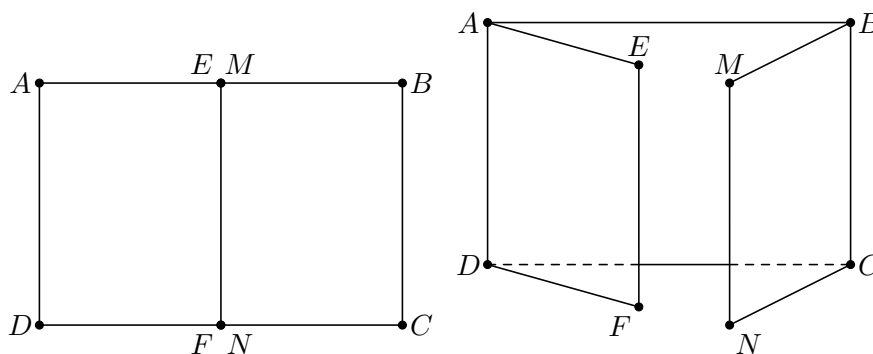


Lời giải.

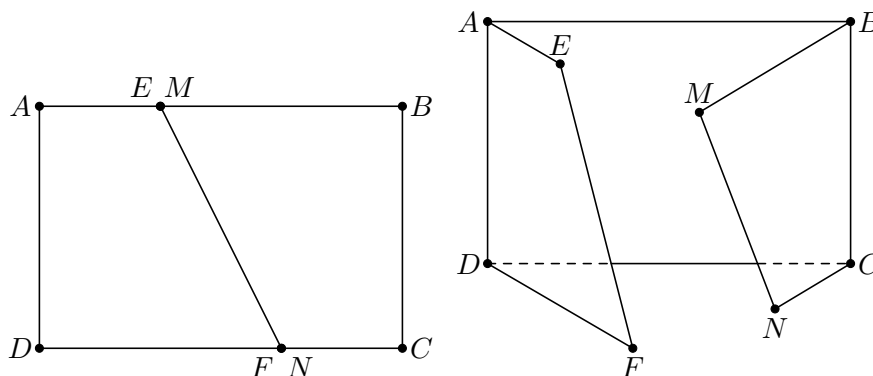
- a) Các cặp đường thẳng cắt nhau là AB và BC , AB và DA , BC và CD , CD và DA . Các cặp đường thẳng song song là AB và CD , DA và BC .
- b) Các đường thẳng AB , AF , BE cùng nằm trong mặt phẳng $(ABEF)$ nên trong ba đường thẳng đó không có hai đường thẳng nào chéo nhau.



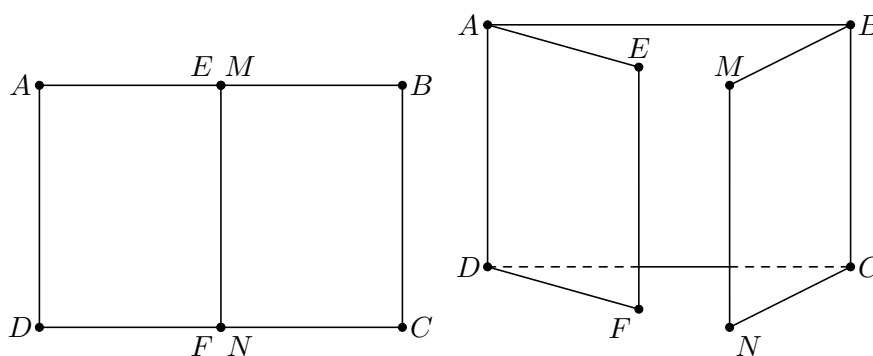
Ví dụ 3 (KNTT). Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.



Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?



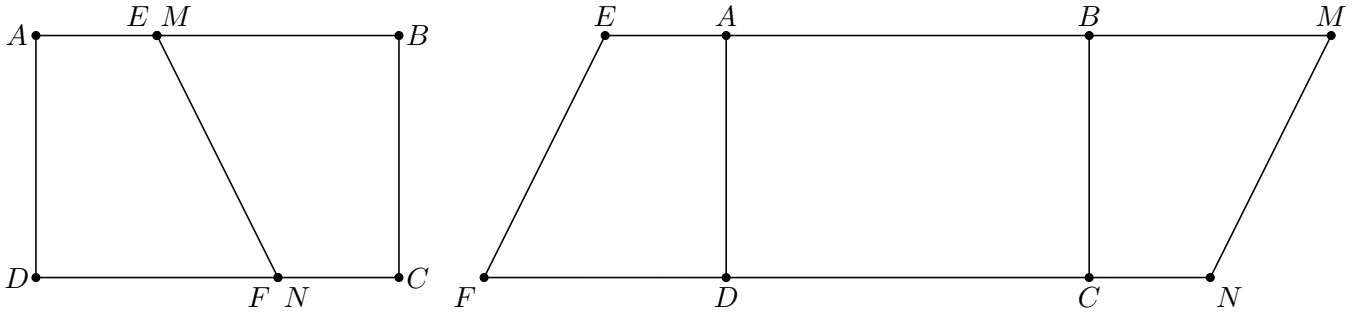
Lời giải.



Ta có hai mép ngoài của cánh cửa sổ là EF và MN , hai cạnh bản lề của cánh cửa là AD và BC . Với 4 đường thẳng phân biệt AD , EF , MN , BC ta luôn có

$$\begin{cases} EF \parallel AD \\ MN \parallel BC \Rightarrow EF \parallel MN. \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

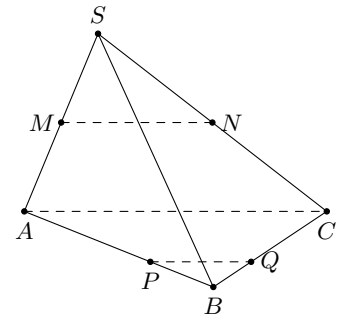
Điều này chứng tỏ hai mép ngoài của hai cánh cửa sổ hình chữ nhật luôn song song với nhau.



Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang thì có một vị trí của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau, đó là khi mặt phẳng chứa mỗi cánh cửa trùng với mặt phẳng khung cửa sổ. □

Ví dụ 4 (Cánh điều).

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC . Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC sao cho $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng MN song song với PQ .



Lời giải.

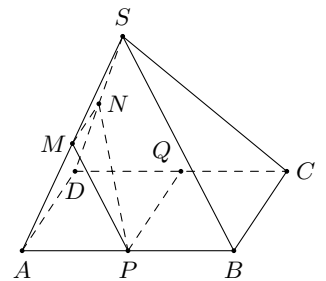
Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAC nên $MN \parallel AC$. (1)

Xét tam giác ABC có $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Theo định lí Ta-lét đảo ta có $PQ \parallel AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \parallel PQ$. □

Ví dụ 5 (Cánh điều).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD và P là một điểm nằm trên cạnh AB (P khác A và B). Đường thẳng CD cắt mặt phẳng (MNP) tại điểm Q . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ .



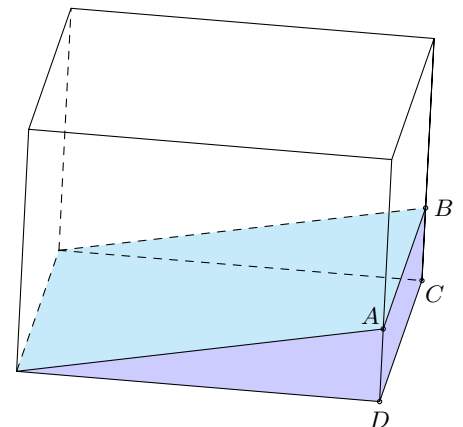
Lời giải.

Ba mặt phẳng $(SAD), (ABCD), (MNP)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến AD, MN, PQ .

Trong tam giác SAD ta có MN là đường trung bình nên $MN \parallel AD$, do đó theo định lí 2.2 ta suy ra ba đường thẳng AD, MN, PQ đôi một song song. Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ . □

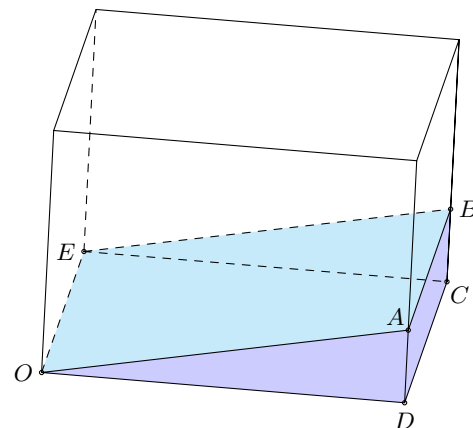
Ví dụ 6 (KNTT).

Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như hình bên. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.



Lời giải.

Ta có ba mặt phẳng $(ABEO)$, $(CDOE)$, $(ABCD)$ cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt AB , OE , CD . Vì $OE \parallel CD$ nên $AB \parallel CD$.

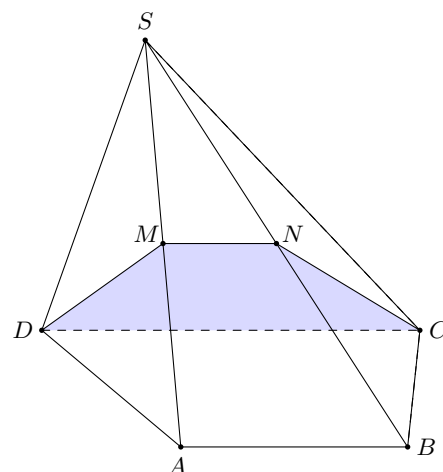


Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB . Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD$.

Vậy tứ giác $MNCD$ là hình thang.



Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có

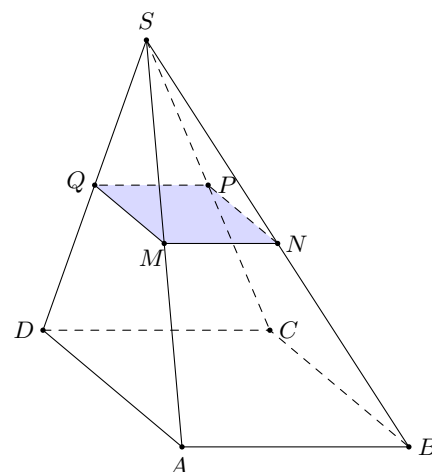
☑ $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$.

☑ $PQ \parallel CD$ và $PQ = \frac{1}{2}CD$.

☑ $AB \parallel CD$ và $AB = CD$.

$\Rightarrow MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$.

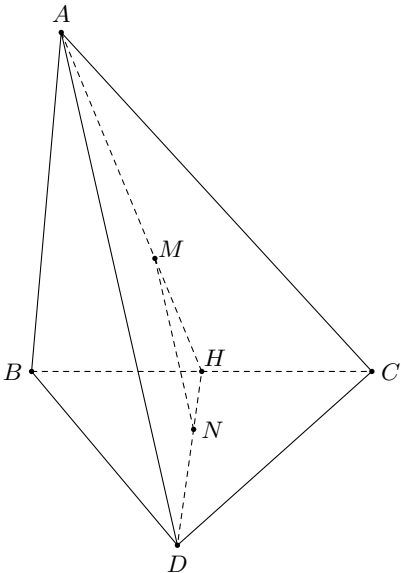
$\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.



Ví dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và DBC . Chứng minh $MN \parallel AD$.

Lời giải.

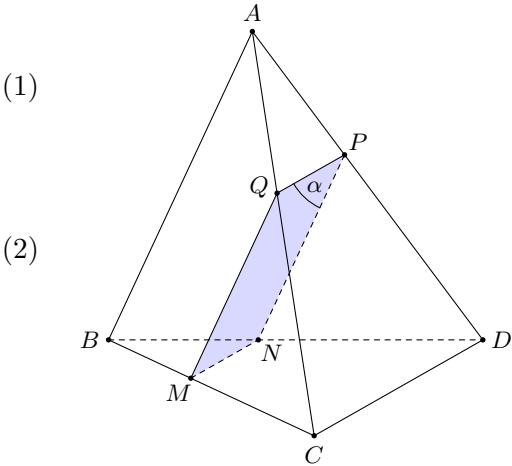
Gọi H là trung điểm của BC , ta có: $M \in AH, N \in DH$.
 Do đó: $\frac{HM}{HA} = \frac{HN}{HD} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm tam giác)
 $\Rightarrow MN \parallel AD$ (Định lý Ta-lét đảo).



Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC ; (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD , cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q . Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AB \parallel (\alpha) \\ (ABC) \supset AB \\ (ABC) \cap (\alpha) = MQ \end{cases}$
 $\Rightarrow MQ \parallel AB$. Tương tự ta có $NP \parallel AB$. Suy ra $MQ \parallel NP$.
 Lại có $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ (ACD) \supset CD \\ (ACD) \cap (\alpha) = PQ \end{cases}$
 $\Rightarrow MN \parallel CD$. Tương tự ta có $PQ \parallel CD$. Suy ra $MN \parallel PQ$.
 Từ (1) và (2) suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.



2. Bài tập tự luận

Bài 1. Quan sát phòng học của lớp và nêu lên hình ảnh của hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.

Lời giải.

Tùy theo tình hình thực tế lại lớp, chẳng hạn như hai mép cửa chính, lề bảng và mép tường,...

Bài 2.

Quan sát hình vẽ và cho biết vị trí tương đối của hai trong số các cột tuabin gió có trong hình.



Lời giải.

Chúng song song với nhau.

Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng đường thẳng G_1G_2 song song với đường thẳng CD .

Lời giải.

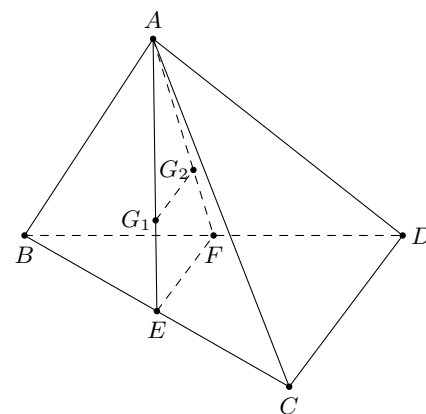
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và BD .

Ta có G_1 là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{AG_1}{AE} = \frac{2}{3}$.

G_2 là trọng tâm tam giác ABD nên suy ra $\frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3}$.

Xét tam giác AEF có $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF}$.

Theo định lí Ta-lét đảo ta có $G_1G_2 \parallel EF$.



□

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB . Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD .

Lời giải.

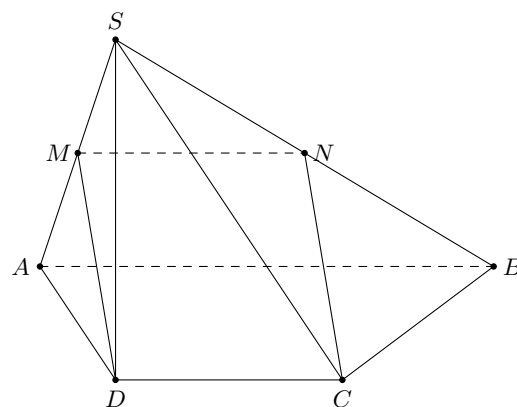
Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$
và $MN = \frac{1}{2}AB$. (1)

Ta lại có $CD \parallel AB$ và $CD = \frac{1}{2}AB$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $MN \parallel CD$ và $MN = CD$.

Vậy $MNCD$ là hình bình hành.

Từ đó suy ra $MN \parallel NC$.



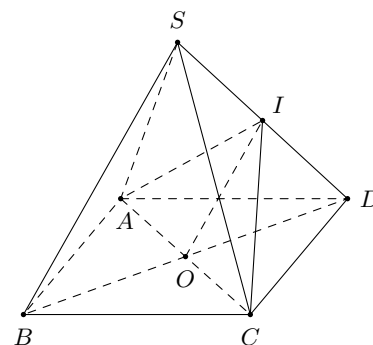
□

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD thì O là trung điểm của BD .

Mặt phẳng (IAC) và (SBC) có chung điểm C . Mặt phẳng (IAC) chứa đường thẳng IO ; mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng SB ; mà $IO \parallel SB$ (tính chất đường trung bình của tam giác SBD). Suy ra giao tuyến của (IAC) và (SBC) là đường thẳng Cx song song với SB .



□

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M và N .

a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .

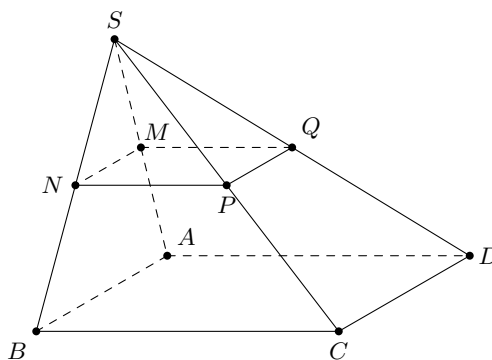
b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$.

Lời giải.

a) Trong mặt phẳng (SAC) , kéo dài CI cắt SA tại M ; trong mặt phẳng (SBD) , kéo dài DI cắt SB tại N .

7

 **Lời giải.**



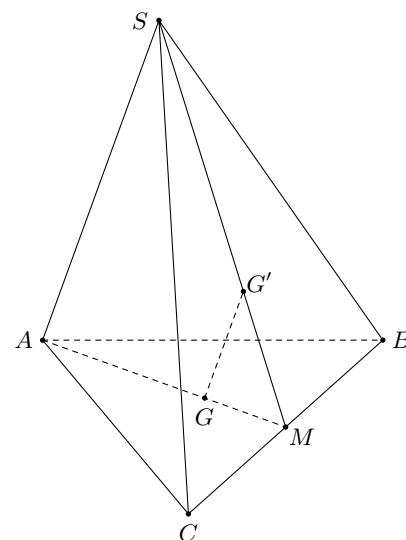
7

 **Lời giải.**

 **Lời giải.**

Gọi M là trung điểm của BC nên $\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$; $\frac{MG'}{MS} = \frac{1}{3}$ (tính chất của trọng tâm).

Xét $\triangle SAM$, có $\frac{MG}{MA} = \frac{MG'}{MS}$ theo định lí Ta-lét đảo suy ra $GG' \parallel SA$.



□

Bài 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chứng minh $IJ \parallel CD$.

🗨️ **Lời giải.**

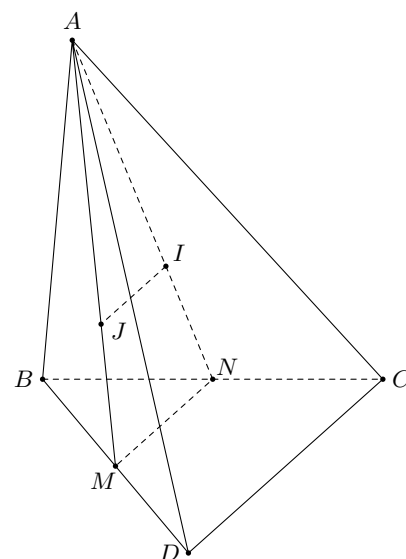
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN \parallel CD$ (1)

I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD

$\Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IJ \parallel CD$.



□

Bài 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD . Chứng minh MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

🗨️ **Lời giải.**

☑ $\triangle ABC$ có MP là đường trung bình
 $\Rightarrow MP \parallel AC, MP = \frac{1}{2}AC.$ (1)

☑ $\triangle ACD$ có NQ là đường trung bình
 $\Rightarrow NQ \parallel AC, NQ = \frac{1}{2}AC.$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MP \parallel NQ$ và $MP = NQ \Rightarrow MPNQ$ là hình bình hành.

$\Rightarrow MN, PQ$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

☑ $\triangle ABC$ có PR là đường trung bình
 $\Rightarrow PR \parallel AB, PR = \frac{1}{2}AB.$ (3)

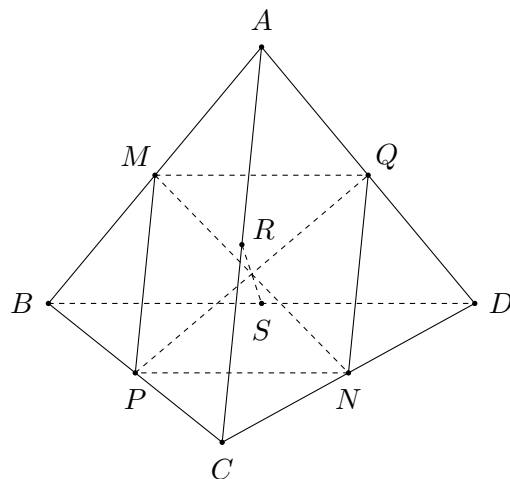
☑ $\triangle ABD$ có QS là đường trung bình
 $\Rightarrow QS \parallel AB, QS = \frac{1}{2}AB.$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow PR \parallel QS$ và $PR = QS.$

$\Rightarrow PRQS$ là hình bình hành.

$\Rightarrow RS, PQ$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Vậy MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.



Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng đường thẳng G_1G_2 song song với đường thẳng CD .

☑ **Lời giải.**

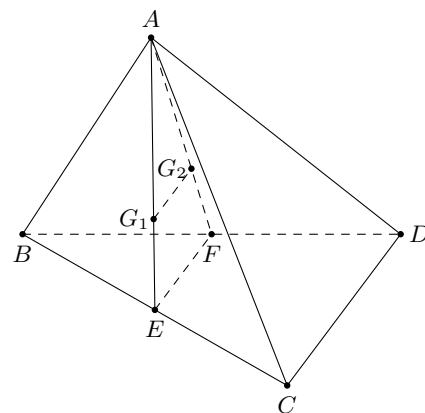
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và BD .

Ta có G_1 là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{AG_1}{AE} = \frac{2}{3}.$

G_2 là trọng tâm tam giác ABD nên suy ra $\frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3}.$

Xét tam giác AEF có $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF}.$

Theo định lý Ta-lét đảo ta có $G_1G_2 \parallel EF.$



Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB . Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD .

☑ **Lời giải.**

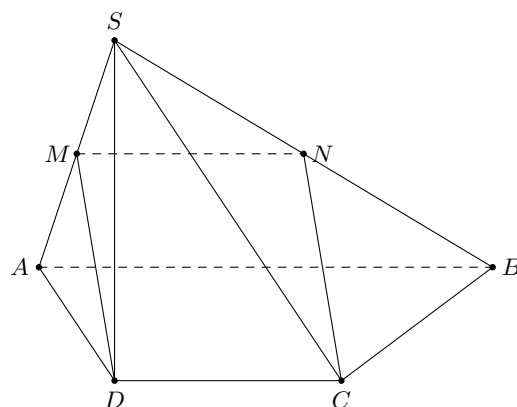
Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB.$ (1)

Ta lại có $CD \parallel AB$ và $CD = \frac{1}{2}AB.$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $MN \parallel CD$ và $MN = CD.$

Vậy $MNCD$ là hình bình hành.

Từ đó suy ra $MN \parallel NC.$



Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ .

- Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.
- Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) .

Lời giải.

a)

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác SMN nên $IJ \parallel MN$. (1)

KL là đường trung bình của tam giác SPQ nên $KL \parallel PQ$. (2)

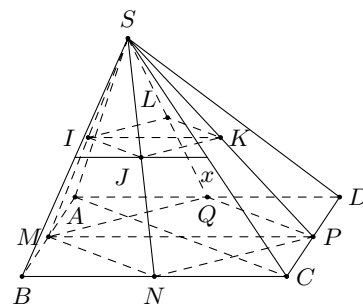
Hơn nữa, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel AC$. (3)

PQ là đường trung bình của tam giác ACD nên $PQ \parallel AC$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $MN \parallel PQ$. (5)

Từ (1), (2) và (5) suy ra $IJ \parallel KL$.

Suy ra bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng.



b) Ta có IK là đường trung bình của tam giác SMP nên suy ra $IK \parallel MP$. (6)

Lại có MP là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên suy ra $MP \parallel BC$. (7)

Từ (6) và (7) suy ra $IK \parallel BC$.

c) Xét hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) có:

J là một điểm chung.

Hơn nữa, ta có

$$\begin{cases} IK \parallel BC \text{ (chứng minh trên)} \\ IK \subset (IJKL) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (IJKL) \cap (SBC) = Jx \parallel BC.$$

□

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD . Trên cạnh AC lấy điểm K . Gọi M là giao điểm của BK và AI , N là giao điểm của DK và AJ . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD .

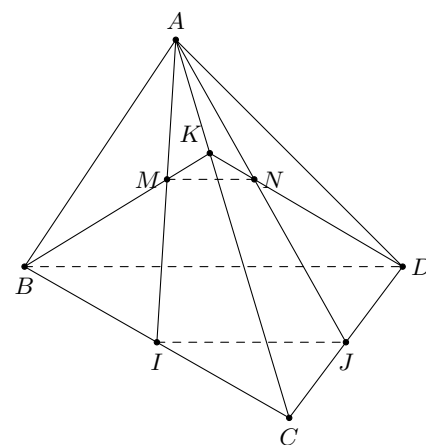
Lời giải.

Xét 3 mặt phẳng: (BCD) , (AIJ) và (KBD) có:

$$(BCD) \cap (AIJ) = IJ, (BCD) \cap (KBD) = BD, (AIJ) \cap (KBD) = MN.$$

Mà $IJ \parallel BD$ (vì IJ là đường trung bình của tam giác BCD).

Theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau đôi một, ta suy ra $MN \parallel BD$.



□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- (A) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

- (B) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
 (C) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
 (D) Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

🗨️ **Lời giải.**

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Chọn đáp án (A) □

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A) Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
 (B) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
 (C) Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
 (D) Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

🗨️ **Lời giải.**

- ✓ Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.
 ✓ Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c , biết $a \parallel b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c :

- (A) Trùng nhau hoặc chéo nhau. (B) Cắt nhau hoặc chéo nhau.
 (C) Chéo nhau hoặc song song. (D) Song song hoặc trùng nhau.

🗨️ **Lời giải.**

Giả sử $b \parallel c \Rightarrow c \parallel a$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- (A) IJ song song với CD . (B) IJ song song với AB . (C) IJ chéo CD . (D) IJ cắt AB .

🗨️ **Lời giải.**

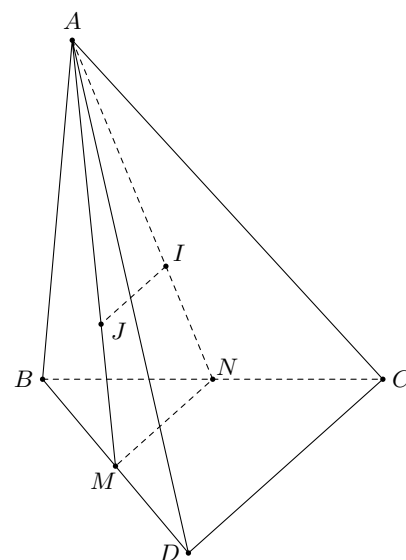
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN \parallel CD$ (1)

I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD

$$\Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $IJ \parallel CD$.



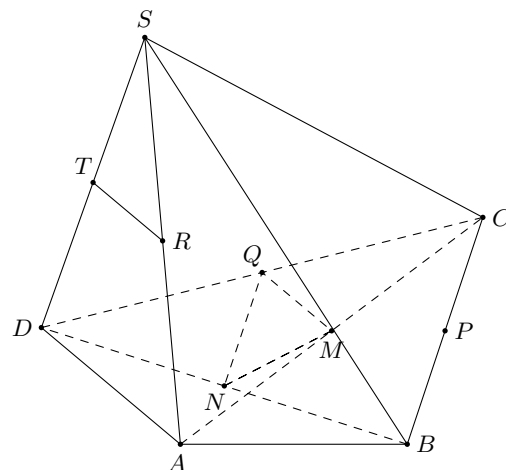
Chọn đáp án (A) □

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC . Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD . Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

- (A) MP và RT . (B) MQ và RT . (C) MN và RT . (D) PQ và RT .

🗨️ **Lời giải.**

Ta có: M, Q lần lượt là trung điểm của AC, CD
 $\Rightarrow MQ$ là đường trung bình của tam giác CAD
 $\Rightarrow MQ \parallel AD$ (1). Ta có: R, T lần lượt là trung điểm của SA, SD
 $\Rightarrow RT$ là đường trung bình của tam giác SAD
 $\Rightarrow RT \parallel AD$ (2)
 Từ (1), (2) suy ra: $MQ \parallel RT$.



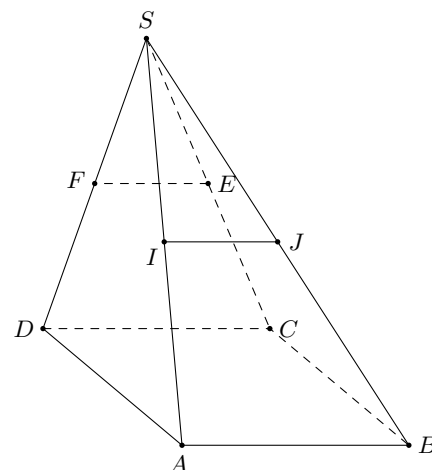
Chọn đáp án (B)

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

- (A) EF . (B) DC . (C) AD . (D) AB .

Lời giải.

Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).
 Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\Rightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.



Chọn đáp án (C)

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB ; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD . Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ .

- (A) $MP \parallel NQ$. (B) $MP \equiv NQ$. (C) MP cắt NQ . (D) MP, NQ chéo nhau.

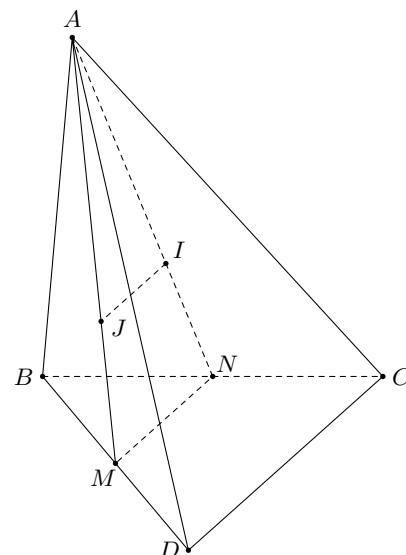
Lời giải.

Xét mặt phẳng (ABP) .

Ta có: M, N thuộc $AB \Rightarrow M, N$ thuộc mặt phẳng (ABP) .

Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P$.

Mà: $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M, N, P, Q$ không đồng phẳng.



Chọn đáp án (D)

Dạng 2. Tìm giao tuyến bằng cách kẻ song song

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ngoài phương pháp "Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng", ta còn có thể tìm bằng cách sau:

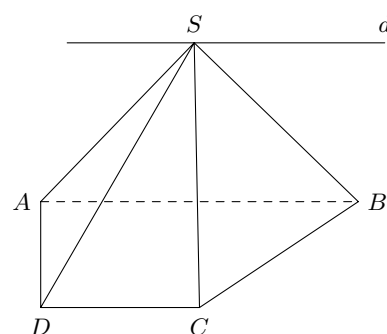
- ✔ Bước 1. Chỉ ra rằng mặt phẳng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b .
- ✔ Bước 2. Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.
- ✔ Bước 3. Khi đó $(\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a \parallel b$.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 11 (Cánh Diều). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải.

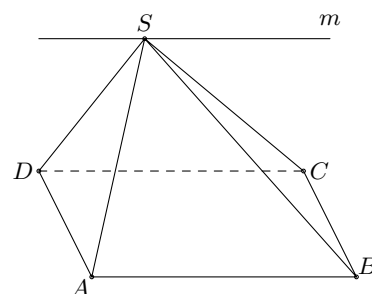
Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng AB và CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD .

**Ví dụ 12 (KNTT).**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Lời giải.

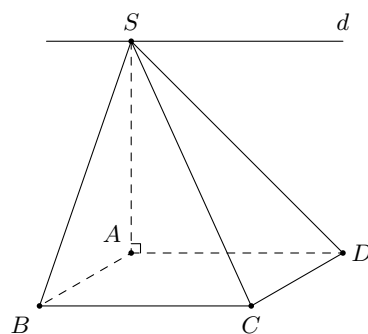
Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung S và chứa hai đường thẳng song song là AB và CD . Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng m đi qua S và song song với AB, CD .

**Ví dụ 13 (CTST).**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD , suy ra theo hệ quả của định lý 2, giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD .



Ta đã biết trong cùng một mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau. $\square$

Ví dụ 14 (TH). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD .

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD) .
- Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB) . Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD .

Lời giải.

- Ta có $M \in SD \subset (SCD)$ và $M \in (MAB)$

$$\text{Suy ra } M \in (SCD) \cap (MAB). \text{ Có } \begin{cases} CD \subset (SCD) \\ AB \subset (MAB) \\ CD \parallel AB \end{cases}$$

Vậy $(MAB) \cap (SCD) = Mx \parallel AB \parallel CD$.

- Theo đề bài, ta có N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB) .

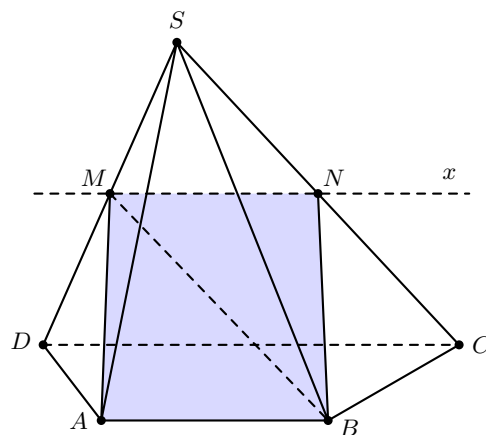
Suy ra $N \in (MAB)$ và $N \in SC \subset (SCD)$.

Mà $(MAB) \cap (SCD) = Mx \parallel AB \parallel CD$.

Suy ra $N \in Mx$ hay $MN \parallel AB \parallel CD$.

$$\text{Xét tam giác } (SDC), \text{ ta có } \begin{cases} MS = MD \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow NS = NC.$$

Vậy MN là đường trung bình của tam giác SCD . $\square$



Ví dụ 15 (TH). Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD .

Lời giải.

Trong mp (AMN) , gọi $E = AM \cap BP$. Khi đó

$$\begin{cases} E \in BP \subset (BPD) \\ E \in AM \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (BPD). \quad (1)$$

Trong mp (ACD) , gọi $F = AN \cap PD$. Khi đó

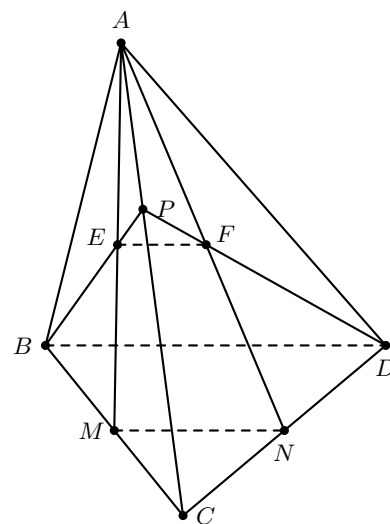
$$\begin{cases} F \in AN \subset (AMN) \\ F \in PD \subset (BPD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (BPD). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (BPD) = EF$.

$$\text{Xét tam giác } BCD, \text{ có } \begin{cases} M \text{ là trung điểm } BC \\ N \text{ là trung điểm } CD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BD$$

Mà $BD \subset (BDP)$; $MN \subset (AMN)$ và $(BDP) \cap (AMN) = EF$

Vậy $MN \parallel EF \parallel BD$. $\square$



Ví dụ 16 (TH). Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc cạnh AC . Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD . Tìm giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) .

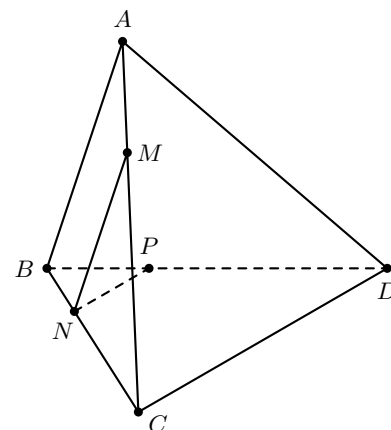
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = Mx \parallel AB.$

Gọi $Mx \cap BC = N \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MN.$

Ta lại có $\begin{cases} N \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (BCD) = Ny \parallel CD.$

Gọi $Ny \cap BD = P$
 Vậy $(P) \cap (BCD) = NP.$



Ví dụ 17 (VDT). Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo; M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Lời giải.

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .

Xét tam giác SAC , ta có $\begin{cases} O \text{ là trung điểm } AC \\ M \text{ là trung điểm } SC \end{cases}$

Suy ra OM là đường trung bình của tam giác SAC .

Suy ra $OM \parallel SA$.

Mà $SA \subset (SAD)$ và $SA \subset (SBA)$.

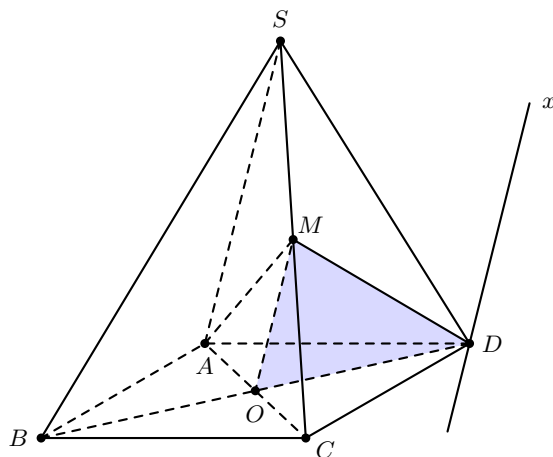
Vậy $OM \parallel (SAD)$ và $OM \parallel (SBA)$.

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Ta có $SA \subset (SAD)$ và $OM \subset (OMD)$.

Mà $SA \parallel OM$ và $D \in (SAD) \cap (OMD)$.

Vậy $(SAD) \cap (OMD) = Dx \parallel SA \parallel OM$.



2. Bài tập rèn luyện

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD . Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) ; (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải.

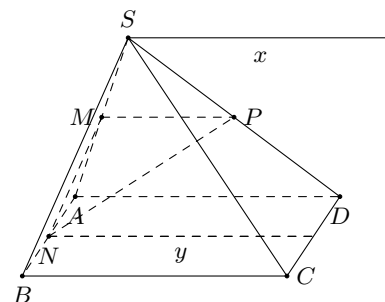


Xét hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có:

S là một điểm chung.

Hơn nữa, ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD.$



- Xét hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ có:

N là một điểm chung.

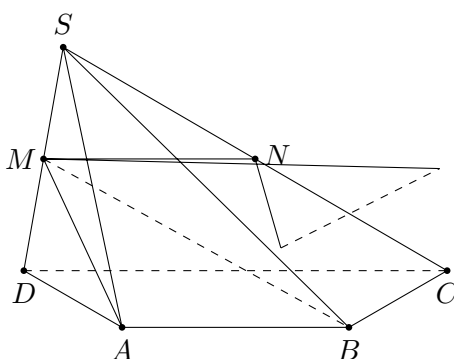
$$\begin{aligned} \text{Hơn nữa ta có } & \begin{cases} MP \parallel AD & (\text{vì } MP \text{ là đường trung bình của tam giác } SAD) \\ AD \subset (ABCD) \\ MP \subset (MNP) \end{cases} \\ \Rightarrow & (MNP) \cap (ABCD) = Ny \parallel AD. \end{aligned}$$

□

Bài 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD .

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD) .
- Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB) . Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD .

Lời giải.



- Xét (MAB) và (SCD) có

$$\begin{cases} M \in (SCD) \cap (MAB) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (MAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (MAB) \cap (SCD) = Mx \text{ (} Mx \parallel AB \parallel CD \text{)}.$$

Vậy giao tuyến của mặt (MAB) và (SCD) là đường thẳng qua M và song song với AB .

- Từ ý 1 ta có trong (SCD) gọi N là giao điểm của Mx với SC .
Vì $MN \parallel DC$ và M là trung điểm của SD nên MN là đường trung bình của tam giác SCD .

□

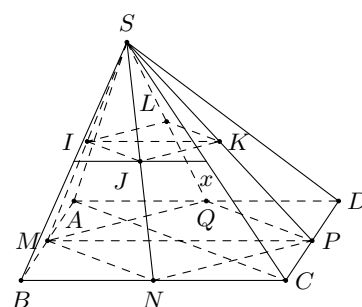
Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA ; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ .

- Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.
- Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) .

Lời giải.

-

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác SMN nên $IJ \parallel MN$. (1)
 KL là đường trung bình của tam giác SPQ nên $KL \parallel PQ$. (2)
 Hơn nữa, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel AC$. (3)
 PQ là đường trung bình của tam giác ACD nên $PQ \parallel AC$. (4)
 Từ (3) và (4) suy ra $MN \parallel PQ$. (5)
 Từ (1), (2) và (5) suy ra $IJ \parallel KL$.
 Suy ra bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng.



b) Ta có IK là đường trung bình của tam giác SMP nên suy ra $IK \parallel MP$. (6)

Lại có MP là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên suy ra $MP \parallel BC$. (7)

Từ (6) và (7) suy ra $IK \parallel BC$.

c) Xét hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) có:

J là một điểm chung.

Hơn nữa, ta có

$\begin{cases} IK \parallel BC \text{ (chứng minh trên)} \\ IK \subset (IJKL) \end{cases}$

$\begin{cases} BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (IJKL) \cap (SBC) = Jx \parallel BC$.



Bài 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD . Trên cạnh AC lấy điểm K . Gọi M là giao điểm của BK và AI , N là giao điểm của DK và AJ . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD .

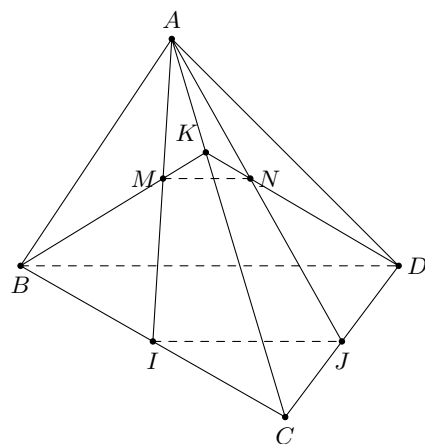
Lời giải.

Xét 3 mặt phẳng: (BCD) , (AIJ) và (KBD) có:

$(BCD) \cap (AIJ) = IJ$, $(BCD) \cap (KBD) = BD$, $(AIJ) \cap (KBD) = MN$.

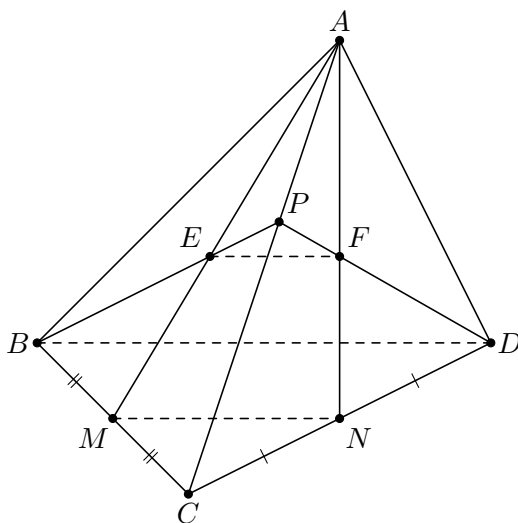
Mà $IJ \parallel BD$ (vì IJ là đường trung bình của tam giác BCD).

Theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng phân biệt cắt nhau đôi một, ta suy ra $MN \parallel BD$.



Bài 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD .

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = AM \cap BP$, suy ra

$$\begin{cases} E \in AM, AM \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN) \\ E \in BP, BP \subset (BPD) \Rightarrow E \in (BPD) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (BPD).$$

Trong mặt phẳng (ACD) , gọi $F = AN \cap DP$, suy ra

$$\begin{cases} F \in AN, AN \subset (AMN) \Rightarrow F \in (AMN) \\ F \in DP, DP \subset (BPD) \Rightarrow F \in (BPD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (BPD).$$

Vậy $EF = (AMN) \cap (BPD)$.

Lại có

$$\begin{cases} MN \parallel BD \text{ (MN là đường trung bình của } \triangle BCD) \\ MN \subset (AMN) \\ BD \subset (BPD) \end{cases}$$

nên giao tuyến EF của (AMN) và (BPD) song song với BD . □

Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD . Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC) ; (MNP) và $(ABCD)$.

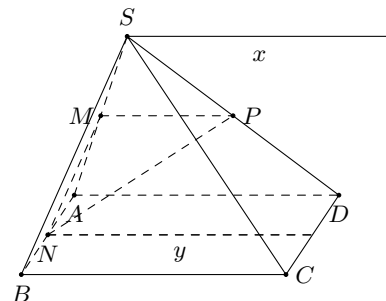
Lời giải.



Xét hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có:
 S là một điểm chung.

$$\text{Hơn nữa, ta có } \begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD.$$



Xét hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ có:
 N là một điểm chung.

$$\text{Hơn nữa ta có } \begin{cases} MP \parallel AD \text{ (vì MP là đường trung bình của tam giác SAD)} \\ AD \subset (ABCD) \\ MP \subset (MNP) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (MNP) \cap (ABCD) = Ny \parallel AD.$$



Bài 22 (NB). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA .

a. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) .

Lời giải.

a. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$$

Vậy $(SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$.

b. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \in SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC) \cap (SAD).$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases} \Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = My \parallel BC \parallel AD.$$

Trong mặt phẳng (SAD) , gọi $F = My \cap SD$.

Vậy $(MBC) \cap (SAD) = MF \parallel BC \parallel AD$.

□

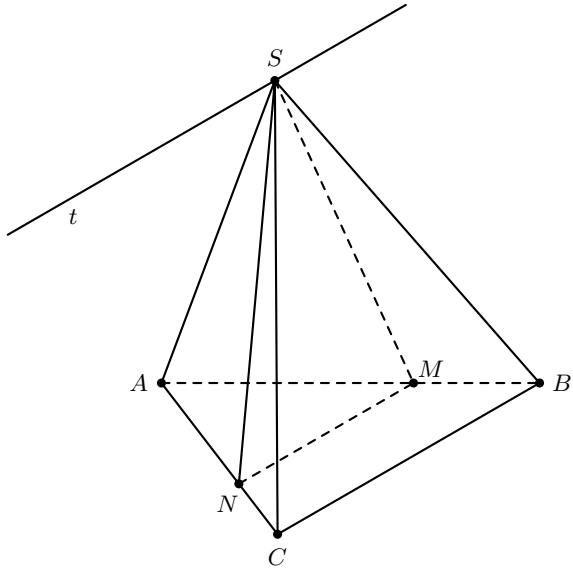
Bài 23 (TH). Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi (P) là mặt phẳng đi động qua S và song song với BC , (P) cắt cạnh AB , AC lần lượt tại M và N . Chứng minh (P) luôn chứa một đường thẳng cố định.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (P) \cap (SBC) \\ (P) \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAB) = St \parallel BC.$$

Mà S , B và C là ba điểm cố định nên St cố định.

Vậy (P) luôn chứa đường thẳng St cố định.



□

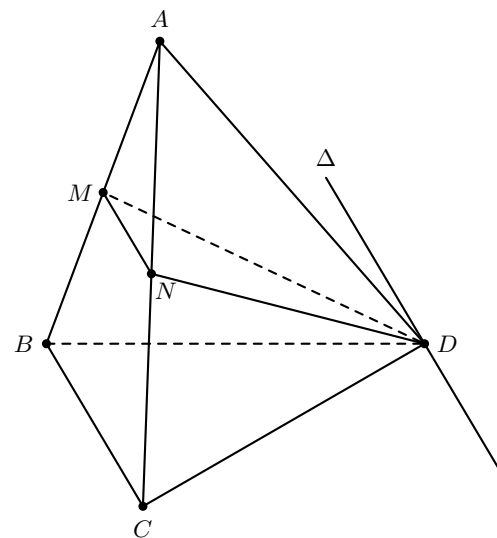
Bài 24 (TH). Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N tương ứng là trung điểm AB , AC . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN) .

🗨️ **Lời giải.**

Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel BC$.

Ta lại có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \subset (DMN) \\ BC \subset (BCD) \end{cases}$

Vậy $(DMN) \cap (BCD) = \Delta$, với Δ đi qua D và $\Delta \parallel BC$.



□

Bài 25 (TH). Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm tam giác ABD và tam giác ACD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AG_1G_2) với mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

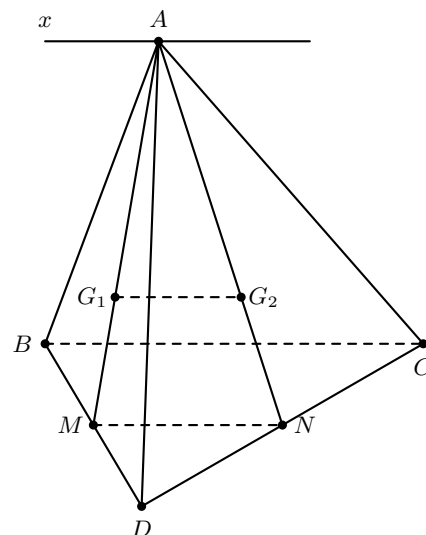
Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của BD và CD .

Xét tam giác ΔAMN , ta có $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel MN$.

Do $MN \parallel BC \Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$.

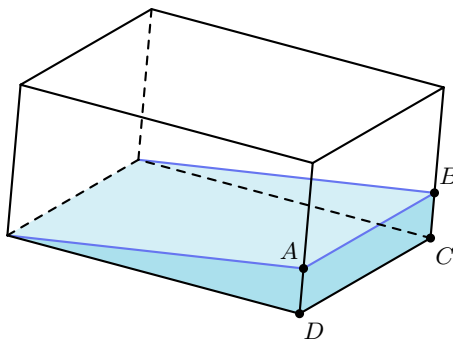
Mà $\begin{cases} A \in (AG_1G_2) \cap (ABC) \\ G_1G_2 \parallel BC \end{cases}$

Vậy $(AG_1G_2) \cap (ABC) = Ax \parallel G_1G_2 \parallel BC$.



□

Bài 26 (VDT). Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như hình dưới. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với CD của bể nước.



Lời giải.

Giả sử mặt phẳng $(ABFE)$ mà mặt nước, mặt phẳng $(EFCD)$ là mặt đáy của bể kính và $(ABCD)$ là một mặt bên của bể kính. Ba mặt phẳng $(ABFE)$, $(EFCD)$ và $(ABCD)$ là ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo các giao tuyến EF , AB và CD . Vì $DC \parallel EF$ (do đáy của bể là hình chữ nhật) nên ba đường thẳng EF , AB và CD đôi một song song. Vậy đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 8 (NB). Cho tứ diện $ABCD$. I và J theo thứ tự là trung điểm của AD , G là trọng tâm tam giác BCD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

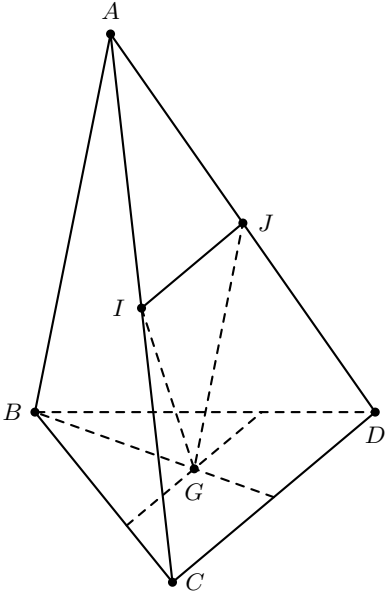
- (A) Qua I và song song với AB .
- (B) Qua J và song song với BD .
- (C) Qua G và song song với CD .
- (D) Qua G và song song với BC .

Lời giải.

Gọi d là giao tuyến của (GIJ) và (BCD) .

$$\text{Ta có } \begin{cases} G \in (GIJ) \cap (BCD) \\ IJ \parallel CD \\ IJ \subset (GIJ) \end{cases}$$

Suy ra d đi qua G và song song với CD .



Chọn đáp án (C)

Câu 9 (NB). Nếu mặt phẳng (α) chứa đường thẳng a và mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b , sao cho $a \parallel b$. Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là

- (A) Đường thẳng c song song với a và b .
- (B) Đường thẳng c song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng a và b .
- (C) Đường thẳng c trùng với một trong hai đường thẳng a và b .
- (D) Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b .

Lời giải.

Chọn đáp án (A)

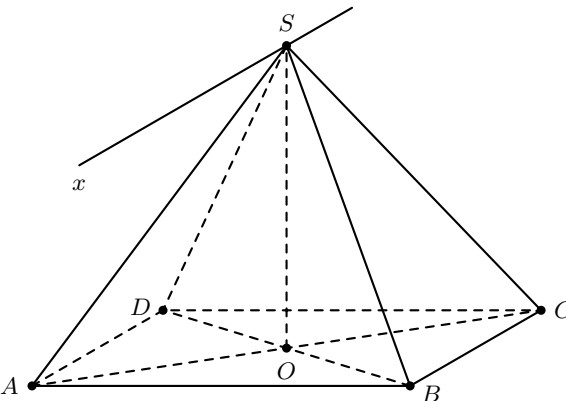
Câu 10 (NB). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là

- (A) Đường thẳng qua S và song song với AB .
- (B) Đường thẳng SO .
- (C) Đường thẳng qua S và song song với AD .
- (D) Không có giao tuyến.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBD) \\ AD \parallel BC \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases}$$

Vậy $(SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$.



Chọn đáp án (C)

Câu 11 (NB). Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD . Đường thẳng MN song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- (A) (PCD) . (B) (ABC) . (C) (BCD) . (D) (BCD) .

Lời giải.

Theo đề bài, ta có MN là đường trung bình của tam giác AB nên MN song song với BC , MN không nằm trong (BCD) nên đường thẳng MN song song với (BCD) .

Chọn đáp án (C) □

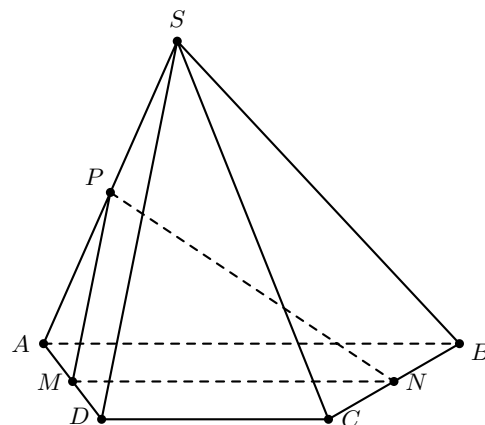
Câu 12 (TH). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AD, SA . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (MNP) .

- (A) Đường thẳng qua P và song song với AB . (B) Đường thẳng qua S và song song với AB .
(C) Đường thẳng qua M và song song với SC . (D) Đường thẳng qua PM .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} P \in SA \subset (SAB) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in (SAD) \cap (SBC)$. Mà $MN \parallel AB$ nên

giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng qua P và song song với AB .



Chọn đáp án (A) □

Câu 13 (TH). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và I là trung điểm của AB . Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại J , đường thẳng JG không song song với mặt phẳng

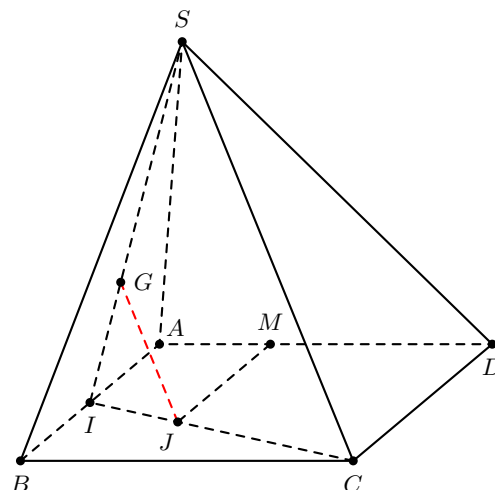
- (A) (SCD) . (B) (SAD) . (C) (SBC) . (D) (SAC) .

Lời giải.

Ta có $AI \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{JI}{IC} = \frac{1}{3}$.

Mà $\frac{GI}{SI} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{GI}{SI} = \frac{JI}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GJ \parallel SC$.

Hơn nữa, $SC \subset (SCD), (SBC), (SAC)$ nên $JG \parallel (SCD), (SBC), (SAC)$. Còn lại đáp án B sai.



Chọn đáp án (B) □

Câu 14 (TH). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Cho G là trọng tâm của tam giác SAB . Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

- (A) SC . (B) Đường thẳng qua S và song song với AB .
(C) Đường thẳng qua G và song song với DC . (D) Đường thẳng qua G và cắt BC .

Lời giải.

Xét hình thang $ABCD$, ta có

I là trung điểm của AD và J là trung điểm của BC

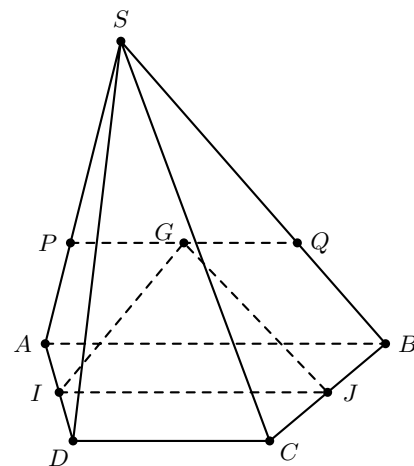
Suy ra IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$

Suy ra $IJ \parallel AB \parallel CD$

Ta có $G \in (SAB) \cap (IJG)$.

Hơn nữa, $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ IJ \subset (IJG) \\ AB \parallel IJ \end{cases}$

Vậy $(SAB) \cap (IJG) = Gy \parallel AB \parallel IJ$.



Chọn đáp án (C)

Câu 15 (VDT). Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm AC, BC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng

(A) KD .

(C) KI .

(B) Qua K và song song AB .

(D) Qua I và song song với JK .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} K \in BD \subset (ABD) \\ K \in (IJK) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABD) \cap (IJK)$

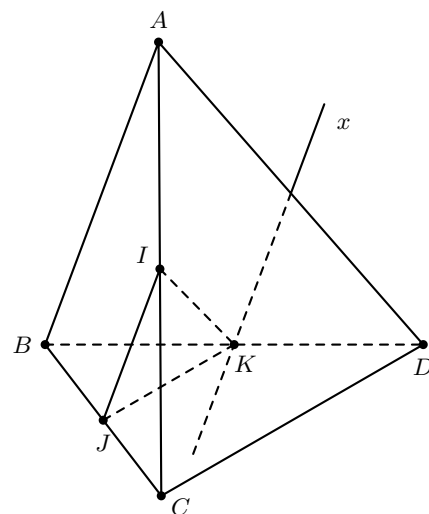
Xét tam giác $\triangle CAB$, ta có $\begin{cases} I \text{ là trung điểm của } AC \\ J \text{ là trung điểm của } BC \end{cases}$

Suy ra IJ là đường trung bình của tam giác ABC .

Suy ra $IJ \parallel AB$.

Mà $IJ \subset (IJK)$ và $AB \subset (ABD)$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng đi qua điểm K và song song với AB .



Chọn đáp án (B)

Câu 16 (VDT). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , gọi I là trung điểm cạnh SC . Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) Đường thẳng IO song song với mp(SAD).

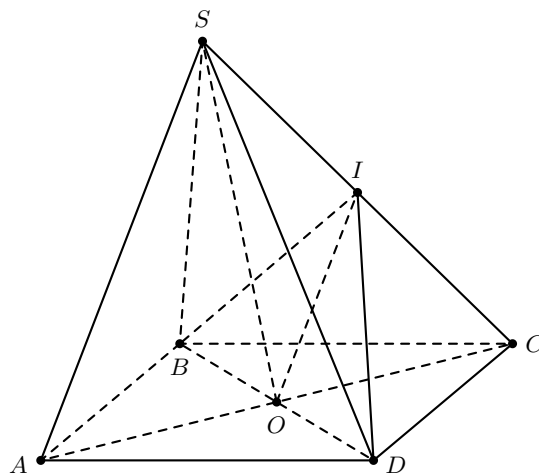
(B) Đường thẳng IO song song với mp(SAB).

(C) Mặt phẳng (IBD) cắt mp(SAC) theo giao tuyến OI .

(D) Mặt phẳng (IBD) cắt mp(SBD) theo giao tuyến OI .

Lời giải.

Trong tam giác SAC có O là trung điểm AC , I là trung điểm SC nên $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$ và (SAD) .
 Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến IO .
 Mặt phẳng (IBD) cắt (SBD) theo giao tuyến BD .
 Nên đáp án D sai.



Chọn đáp án **(D)**

Câu 17 (VDC). Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD . Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

(A) MO_2 cắt (BEC) .

(B) O_1O_2 song song với (BEC) .

(C) O_1O_2 song song với (EFM) .

(D) O_1O_2 song song với (AFD) .

Lời giải.

Gọi J là giao điểm của AM và BC .

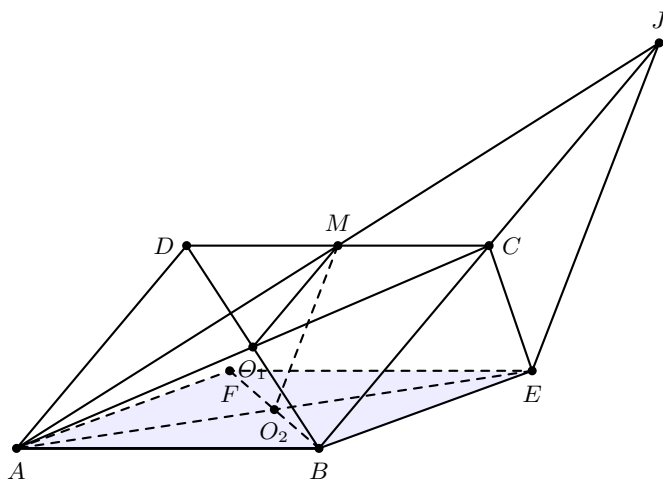
Ta có $MO_1 \parallel AD \parallel BC \Rightarrow MO_1 \parallel CJ$.

Mà O_1 là trung điểm của AC nên M là trung điểm của AJ .

Do đó $MO_2 \parallel EJ$.

Từ đó suy ra $MO_2 \parallel (BEC)$ (vì dễ nhận thấy MO_2 không nằm trên (BEC)).

Vậy MO_2 không cắt (BEC) .



Chọn đáp án **(A)**

Dạng 3. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Cách 1. Tìm giao điểm trực tiếp

Bước 1. Tìm đường thẳng $\Delta \subset (\alpha)$ mà d cắt Δ .

Bước 2. Tìm giao điểm $I = d \cap \Delta$.

Bước 3. Kết luận $I = d \cap (\alpha)$

Cách 2. Tìm giao điểm qua mặt phẳng phụ

Bước 1. Tìm $(\beta) \supset d$ mà $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.

Bước 2. Tìm giao điểm $I = d \cap \Delta$.

Bước 3. Kết luận $I = d \cap (\alpha)$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$ và $AD > BC$. Gọi I là trung điểm SD . Tìm giao điểm của SA và (BIC) .

Lời giải.

- ❶ **Cách 1:** Gọi J là trung điểm SA . Khi đó ta có $IJ \parallel AD$ (IJ là đường trung bình trong tam giác SAD).

Mà $AD \parallel BC$. Vậy $IJ \parallel BC$, do đó $J \in (IBC)$.

Mặt khác, J là trung điểm SA , do đó $J \in SA$.

Vậy J là giao điểm của SA và (IBC) .

- ❷ **Cách 2:** Ta có

$$\begin{cases} BC \subset (IBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \\ I \in (IBC) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow (IBC) \cap (SAD) = Ix \parallel AD.$$

$$\text{Gọi } J = Ix \cap SA \Rightarrow \begin{cases} J \in Ix \subset (IBC) \\ J \in SA \end{cases} \Rightarrow J = SA \cap (IBC).$$

□

Ví dụ 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, E, F lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC . Tìm giao điểm của (MEF) với SD .

Lời giải.

Ta có

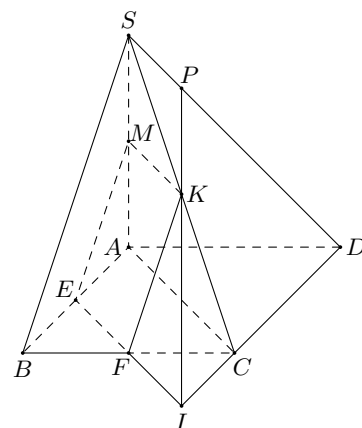
$$\begin{cases} EF \subset (MEF) \\ AC \subset (SAC) \\ EF \parallel AC \\ M \in (MEF) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (MEF) \cap (SAC) = Mx \parallel AC.$$

Trong (SAC) , gọi $K = Mx \cap SC \Rightarrow K \in (MEF)$.

Trong $(ABCD)$, gọi $I = EF \cap CD \Rightarrow I \in EF \subset (MEF)$.

Trong (SCD) , gọi $P = KI \cap SD \Rightarrow P \in KI \subset (MEF)$ và $P \in SD$.

Vậy $P = (MEF) \cap SD$.



□

Ví dụ 20 (NB). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Trên cạnh BC, AD, SD lần lượt lấy các điểm I, J, K sao cho $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{SK}{SD}$. Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (IJK) .

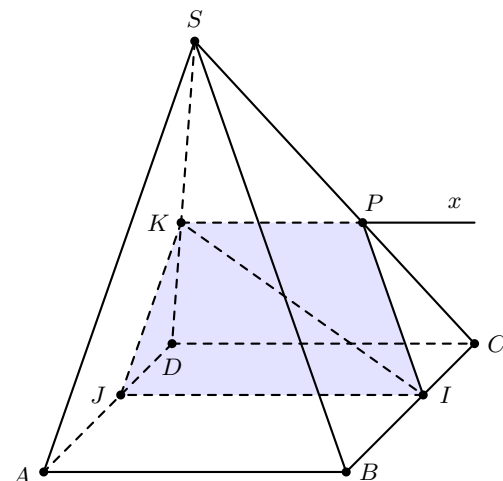
Lời giải.

Theo đề bài, $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} \Rightarrow IJ \parallel DC$ và $\frac{AJ}{AD} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow JK \parallel SA$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (IJK) \cap (SCD) = P \\ IJ \subset (IJK) \\ CD \subset (SCD) \\ IJ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (IJK) \cap (SCD) = Kx \parallel CD.$$

Trong mp(SDC), gọi $P = Kx \cap SC$. Suy ra $\begin{cases} P \in SC \\ P \in Kx \subset (IJK) \\ SC \not\subset (IJK) \end{cases}$

Vậy $P = SC \cap (IJK)$.



□

Ví dụ 21 (TH). Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC . $P \in BD$ với $PB = \frac{1}{4}BD$.

Xác định giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP) .

Lời giải.

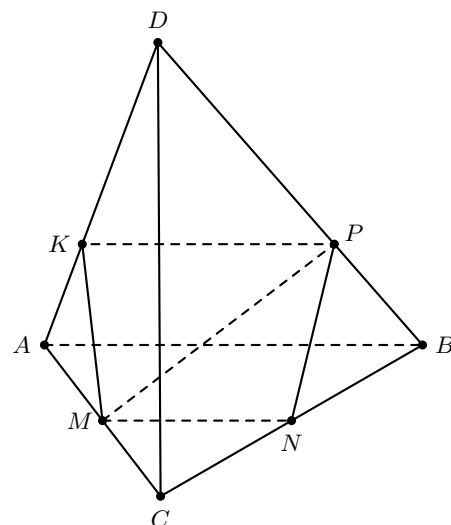
Xét tam giác ABC có $\begin{cases} M \text{ là trung điểm của } AC \\ N \text{ là trung điểm của } BC \end{cases}$.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC

Suy ra $MN \parallel AB$. Mà $\begin{cases} MN \subset (MNP) \\ AB \subset (ABD) \\ (MNP) \cap (ABD) = Px \end{cases} \Rightarrow Px \parallel MN \parallel AB$.

Gọi $K = Px \cap AD$, ta có $\begin{cases} K \in AD \\ K \in Px \subset (MNP) \\ AD \not\subset (MNP) \end{cases}$

Vậy $AD \cap (MNP) = K$.



Ví dụ 22 (TH). Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD , AB cắt CD tại K , điểm M thuộc cạnh SD .

a. Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC) .

b. Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .

Lời giải.

a. Xác định giao tuyến (d) của (SAD) và (SBC) .

Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

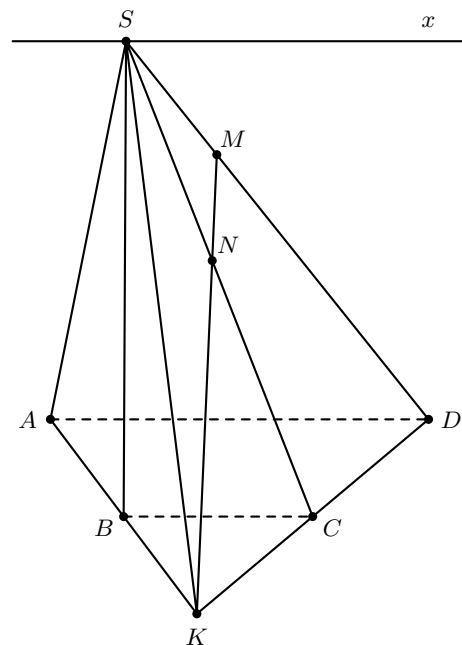
Vậy $(SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$.

b. Tìm giao điểm N của KM và (SBC) .

Trong mặt phẳng (SCD) , gọi $N = KM \cap SC$

Suy ra $\begin{cases} N \in KM \\ N \in SC \subset (SBC) \end{cases}$

Vậy $N = KM \cap (SBC)$.



Ví dụ 23 (TH). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Điểm H thuộc đoạn SD thỏa mãn $\frac{SH}{SD} = \frac{3}{4}$. Tìm giao điểm của đường thẳng SC và mp (HMN) .

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB . Suy ra $MN \parallel AB$.

Mà $AB \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel DC$.

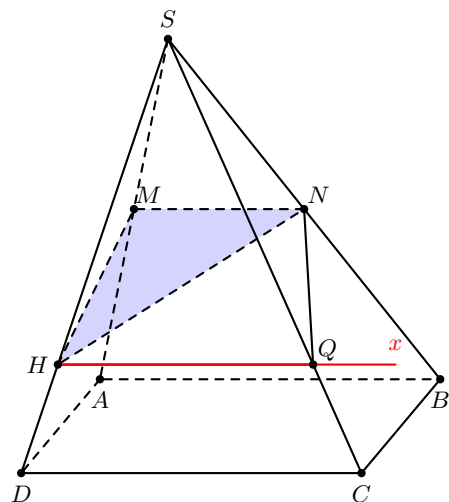
Ta lại có $\begin{cases} DC \subset (SDC) \\ DC \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MN$ cũng song song với (SDC) .

Vì $\begin{cases} H \in SD \subset (SDC) \\ H \in (MNH) \end{cases} \Rightarrow H \in (SDC) \cap (MNH)$

Có $\begin{cases} MN \parallel DC \\ MN \subset (MNH) \Rightarrow (SDC) \cap (MNH) = Hx \parallel MN \parallel DC. \\ DC \subset (SDC) \end{cases}$

Trong mp(SDC), gọi $Q = Hx \cap SC$. Khi đó $\begin{cases} Q \in Hx \subset (MNH) \\ Q \in SC \end{cases}$.

Vậy $Q = SC \cap (MNH)$.



Ví dụ 24 (VDT). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD .

a. Tìm giao tuyến của (SBD) và (SIK) .

b. Cho M là trung điểm của SB . Tìm giao điểm F của DM và (SIK) .

Lời giải.

a. Tìm giao tuyến của (SBD) và (SIK) .

Ta có $\begin{cases} S \in (SIK) \cap (SBD) \\ BD \subset (SBD) \\ IK \subset (SIK) \\ BD \parallel IK \end{cases}$

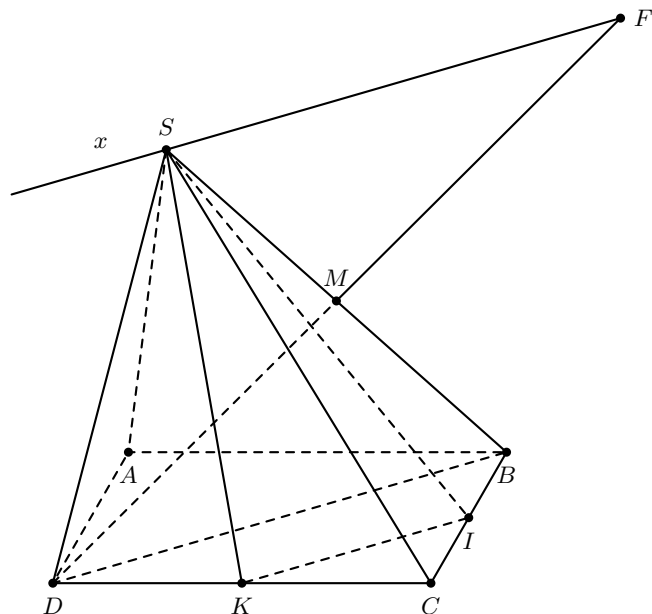
Vậy $(SIK) \cap (SBD) = Sx \parallel BD \parallel IK$.

b. Tìm giao điểm F của DM và (SIK) .

Trong mp(SBD), gọi $F = Sx \cap DM$

Suy ra $\begin{cases} S \in DM \\ S \in Sx \subset (SIK) \end{cases}$

Vậy $F = DM \cap (SIK)$.



2. Bài tập rèn luyện

Bài 27 (NB). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm nằm trên cạnh SC . Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M \in (MAB) \\ M \in SC \subset (SDC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MAB) \cap (SDC).$

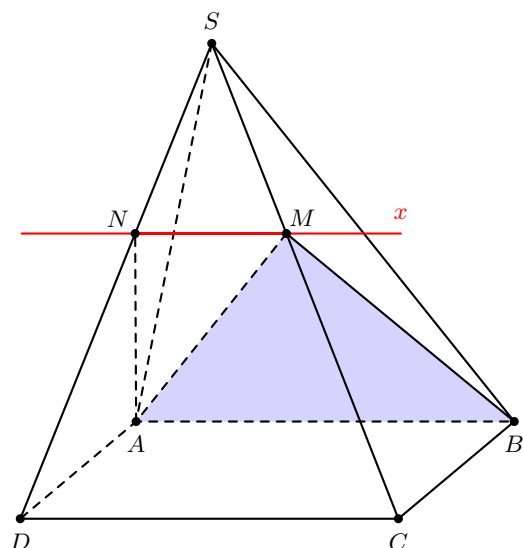
Mà $AB \parallel DC$; $AB \subset (MAB)$ và $CD \subset (SCD).$

Suy ra $(MAB) \cap (SDC) = Mx \parallel CD \parallel AB.$

Trong mặt phẳng (SDC) , gọi $N = Mx \cap SD.$

Suy ra $\begin{cases} N \in SD \\ N \in Mx \subset (MAB) \end{cases}$

Vậy $N = SD \cap (MAB).$



Bài 28 (TH). Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M, P lần lượt là trung điểm của AB, SC . Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC .

- Xác định giao tuyến của (α) với đường thẳng SA và BC .
- Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ) .

Lời giải.

- Xác định giao tuyến của (α) với đường thẳng SA và BC .

☑ Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ AC \subset (ABC) \\ AC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = Mx \parallel AC.$

Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $Q = Mx \cap BC.$

Vậy $(\alpha) \cap (ABC) = MQ \parallel AC.$

☑ Ta có $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SAC) \\ AC \subset (SAC) \\ AC \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = Py \parallel AC.$

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $N = Py \cap SA.$

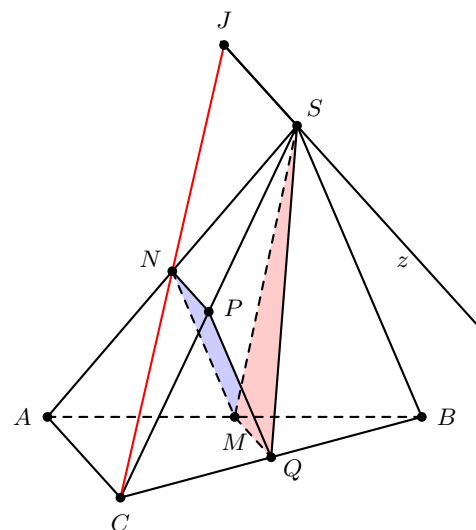
Vậy $(\alpha) \cap (SAC) = PN \parallel AC.$

- Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ) .

Có $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SMQ) \\ AC \parallel MQ \\ AC \subset (SAC) \\ MQ \subset (SMQ) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SMQ) = Sz \parallel AC \parallel MQ.$

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $J = Sz \cap CN$ mà $Sz \subset (SMQ).$

Vậy $J = Sz \cap (SMQ).$



Bài 29 (VDT). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và CD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC .

- Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD).$
- Tìm giao điểm của SB với $(\alpha).$

Lời giải.

a. Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} N \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha) \parallel AC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = Nx \parallel AC.$$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = Nx \cap CD$.

Vậy $(\alpha) \cap (ABCD) = NE \parallel AC$.

b. Tìm giao điểm của SB với (α) .

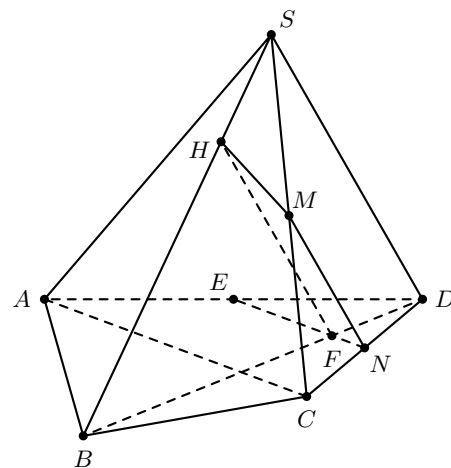
Dễ thấy MN là đường trung bình của tam giác SCD .

Suy ra $MN \parallel SD$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $F = BD \cap NE$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} F \in (\alpha) \cap (SBD) \\ MN \parallel SD \\ MN \subset (\alpha) \\ SD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBD) = Fy \parallel MN \parallel SD.$$

Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $H = Fy \cap SB$. Mà $Fy \subset (\alpha)$.

Vậy $H = SB \cap (\alpha)$.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 18 (NB). Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Đường thẳng c song song với a . Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) b và c chéo nhau.

(B) b và c cắt nhau.

(C) b và c chéo nhau hoặc cắt nhau.

(D) b và c song song với nhau.

Lời giải.

Chọn đáp án (C)

Câu 19 (NB). Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N và P lần lượt là các điểm nằm trên AC, BC và BD . Sao cho $\frac{BP}{PD} = \frac{BN}{NC} = \frac{AM}{MC} = \frac{1}{3}$. Giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

(A) CD và NP .

(B) CD và MN .

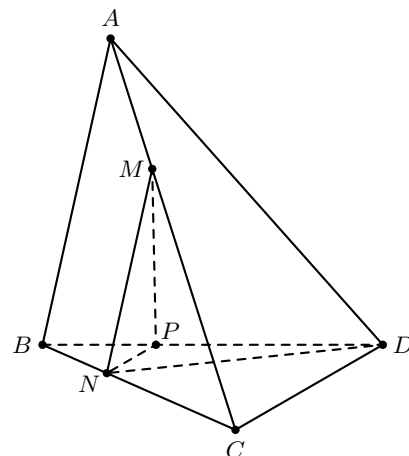
(C) A và B đều sai.

(D) A và B đều đúng.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \in (MNP) \cap (SCD) \\ NP \parallel CD \\ NP \subset (MNP) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}.$$

Vậy $(MNP) \cap (SCD) = MQ \parallel CD \parallel NP$, với $Q = AD \cap Mx$.



Chọn đáp án (C)

Câu 20 (NB). Giả sử có ba đường thẳng a, b, c trong đó $b \parallel a$ và $c \parallel a$. Những phát biểu nào sau đây là sai?

(1) Nếu mặt phẳng (a, b) không trùng với mặt phẳng (a, c) thì b và c chéo nhau.

(2) Nếu mặt phẳng (a, b) trùng với mặt phẳng (a, c) thì ba đường thẳng a, b, c song song với nhau từng đôi một.

(3) Dù cho hai mặt phẳng (a, b) và (a, c) có trùng nhau hay không, ta vẫn có $b \parallel c$.

(A) Chỉ có (1) sai.

(B) Chỉ có (2) sai.

(C) Chỉ có (3) sai.

(D) Cả 3 đều sai.

Lời giải.

(1) sai vì nếu mặt phẳng (a, b) không trùng với mặt phẳng (a, c) thì b và c song song.

(2) Sai vì nếu mặt phẳng (a, b) trùng với mặt phẳng (a, c) thì b trùng c .

(3) Sai vì có thể xảy ra b trùng c .

Chọn đáp án **(D)**

Câu 21 (TH). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh SA (M không trùng với S và A). Từ M kẻ đường thẳng song song với SD cắt AD tại N , từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại P . Chỉ ra mệnh đề **sai**. Biết Q là giao điểm của (MNP) và SB .

(A) $MQ \parallel AB$.

(B) $NP \parallel CD$.

(C) $PQ \parallel SC$.

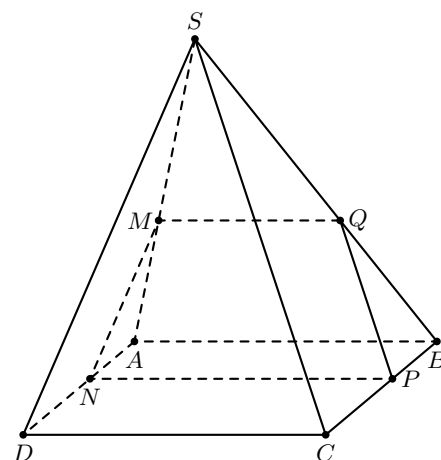
(D) $MQ \parallel SC$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} M \in (MNP) \cap (SAB) \\ NP \subset (MNP) \\ AB \subset (SAB) \\ NP \parallel AB \end{cases}$$

Suy ra $(MNP) \cap (SAB) = MQ \parallel AB \parallel NP$, với $Q \in SB$.

Vậy $SB \cap (MNP) = Q$.



Chọn đáp án **(D)**

Câu 22 (TH). Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S, C ; K là giao điểm của SO và AM . Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

(A) Giao điểm của SD và AB .

(B) Giao điểm của SD và AM .

(C) Giao điểm của SD và BK .

(D) Giao điểm của SD và MK .

Lời giải.

Ta có $B \in (ABM) \cap (SBD)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

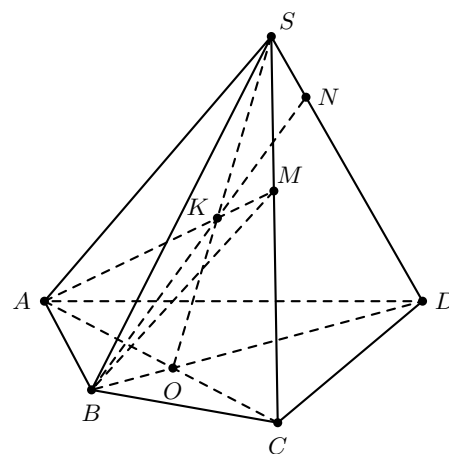
$$\text{Ta có } \begin{cases} K \in SO \subset (SBD) \\ K \in AM \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABM) \cap (SBD).$$

Do đó $(ABM) \cap (SBD) = BK$.

Trong mặt phẳng (SBD) , gọi $N = SD \cap BK$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} N \in BK \subset (ABM) \\ N \in SD \end{cases}$$

Vậy $N = SD \cap (ABM)$.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 23 (TH). Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng ở một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB . Trên SC lấy điểm K sao cho IK không song song với AC (K không trùng với các đầu mút). Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (HIK) . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

(A) E nằm ngoài đoạn BC về phía B .

(C) E nằm trong đoạn BC .

Lời giải.

Ta có $H \in (ABC) \cap (IHK)$.

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $F = IK \cap AC$.

Ta lại có $\begin{cases} F \in AC \subset (ABC) \\ F \in IK \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow F \in (ABC) \cap (IHK)$.

Khi đó $HF = (ABC) \cap (IHK)$.

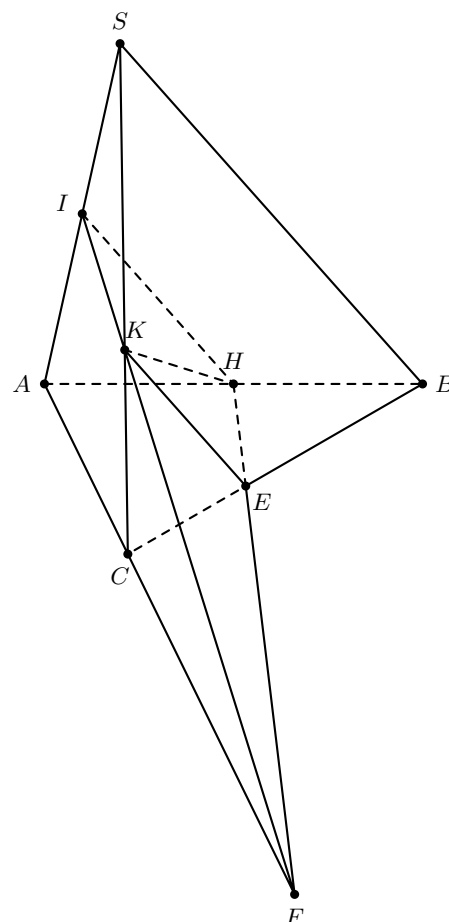
Trong mặt phẳng (ABC) , gọi $E = HF \cap BC$.

Ta có $\begin{cases} E \in HF \subset (HIK) \\ E \in BC \end{cases}$

Vậy $E = BC \cap (HIK)$.

(B) E nằm ngoài đoạn BC về phía C .

(D) E nằm trong đoạn BC và $E \neq B, E \neq C$.



Chọn đáp án (D)

Câu 24 (TH). Cho tứ diện $ABCD$ trong đó có tam giác BCD không cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN . Gọi O là giao điểm của AG và (BCD) . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) O là tâm đường tròn tam giác BCD .

(B) O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .

(C) O là trực tâm tam giác BCD .

(D) O là trọng tâm tam giác BCD .

Lời giải.

Mặt phẳng (ABN) cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến BN .

Mà $AG \subset (ABN)$ suy ra AG cắt BN tại điểm O .

Qua M dựng $MP \parallel AO$ với $P \in BN$

Có M là trung điểm của $AB \Rightarrow P$ là trung điểm BO

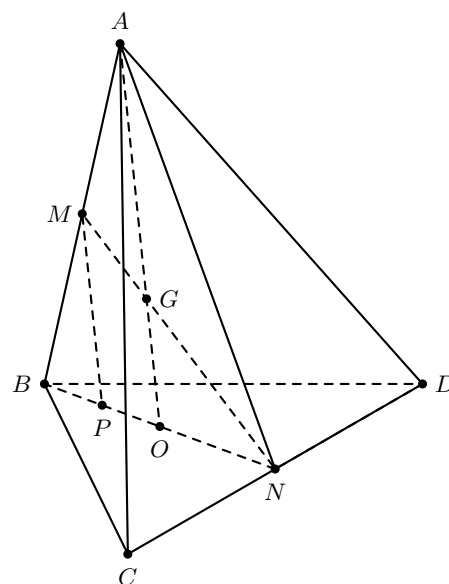
Suy ra $BP = PO$. (1)

Tam giác MNP có $MP \parallel GO$ và G là trung điểm của MN .

Suy ra O là trung điểm của $NP \Rightarrow PO = NO$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $BP = PO = ON \Rightarrow \frac{BO}{BN} = \frac{2}{3}$ mà N là trung điểm CD .

Do đó, O là trọng tâm của tam giác BCD .



Chọn đáp án (D)

Câu 25 (VDT). Cho tứ diện $ABCD$, M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của BD và AD . Điểm Q là giao điểm của AC với (MNP) . Tính $\frac{QC}{QA}$.

(A) $\frac{QC}{QA} = \frac{3}{2}$.

(B) $\frac{QC}{QA} = \frac{5}{2}$.

(C) $\frac{QC}{QA} = 2$.

(D) $\frac{QC}{QA} = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} NP \parallel AB \\ NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (MNP)$.

Mà $AB \subset (ABC)$

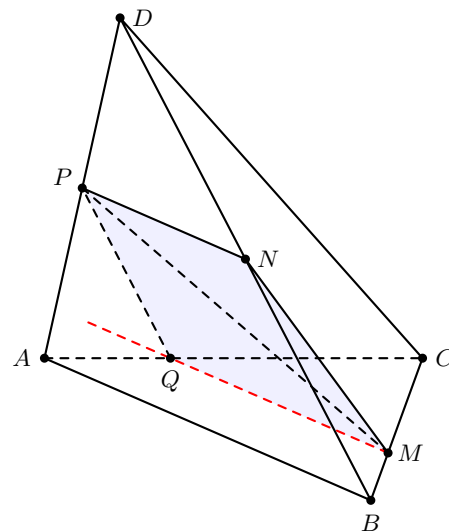
Và $M \in (ABC) \cap (MNP)$.

Suy ra $(ABC) \cap (MNP) = Mx \parallel AB \parallel NP$.

Trong mp(ABC), gọi $Q = Mx \cap AC$

Suy ra đường thẳng $(ABC) \cap (MNP) = MQ \parallel AB \parallel NP$.

Vậy $\frac{QC}{QA} = \frac{MC}{MB} = 2$.



Chọn đáp án **(C)**

Dạng 4. Tìm thiết diện bằng cách kẻ song song

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) .

☑ Tìm một điểm chung S của hai mặt phẳng (α) và (β) .

☑ Hai mặt phẳng (α) , (β) lần lượt chứa hai đường thẳng d_1, d_2 mà $d_1 \parallel d_2$. Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng Sx song song với d_1, d_2 .

b) Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình (H) ta tìm giao điểm của các cạnh của hình (H) với mặt phẳng (α) . Đa giác tạo bởi các giao điểm tìm được chính là thiết diện cần tìm.

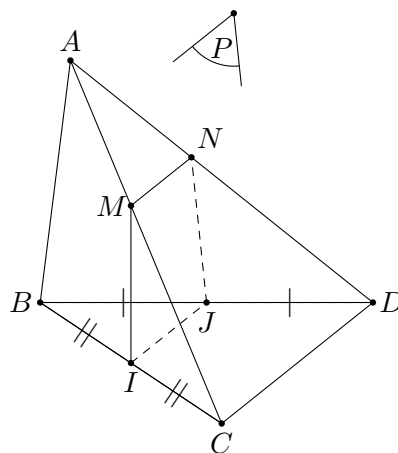
1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 25 (CTST).

Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.

b) Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.



Lời giải.

a) Ba mặt phẳng (ACD) , (BCD) , (P) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến CD, IJ, MN .

Vì $IJ \parallel CD$ (IJ là đường trung bình của tam giác BCD) nên theo định lý 3 ta có $IJ \parallel MN$.

Vậy tứ giác $IJNM$ là một hình thang.

b) Để tứ giác $IJNM$ là hình bình hành thì $\begin{cases} MN = IJ \\ MN \parallel IJ. \end{cases}$

Mặt khác $\begin{cases} IJ = \frac{CD}{2} \\ IJ \parallel CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN = \frac{CD}{2} \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow M, N$ lần lượt là trung điểm của AC, AD .

Vậy M là trung điểm AC thì tứ giác $IJMN$ là hình bình hành.

□

Ví dụ 26. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $AP = \frac{1}{3}AB$, $BC = 3QC$ và R không trùng với C, D . Gọi $PQRS$ là thiết diện của mặt phẳng (PQR) với tứ diện $ABCD$. Khi đó $PQRS$ là hình gì?

🗨️ **Lời giải.**

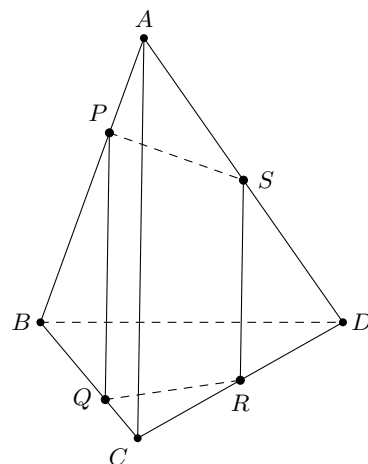
Từ giả thiết, ta có $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ \parallel AC$.

Ta có $\begin{cases} PQ \parallel AC \\ (PQRS) \supset PQ, (ACD) \supset AC \Rightarrow RS \parallel AC. \\ (PQRS) \cap (ACD) = RS \end{cases}$

Suy ra, $PQRS$ là hình thang.

Nếu $AB = CB$ và $AD = CD$ thì $\triangle ABD = \triangle CBD$

$\Rightarrow QR = PS$, khi đó $PQRS$ là hình thang cân.

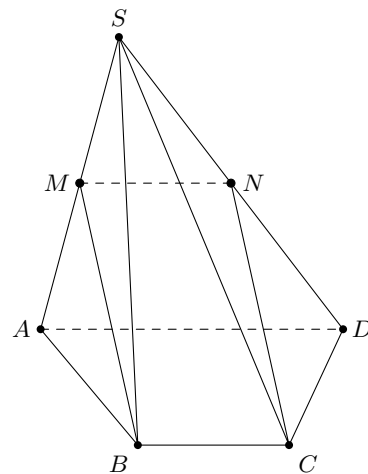


□

Ví dụ 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm SA . Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

🗨️ **Lời giải.**

Gọi N là giao của SD và mặt phẳng (MBC) . Do các mặt phẳng (MBC) và (SAD) lần lượt chứa hai đường song song là BC và AD , nên giao tuyến của chúng cũng song song với hai đường đó, tức $MN \parallel AD$. Suy ra N là trung điểm của SD . Khi đó, MN là đường trung bình của tam giác SAD , suy ra $MN = \frac{1}{2}AD = BC$. Vậy, thiết diện $BCNM$ là một hình bình hành.

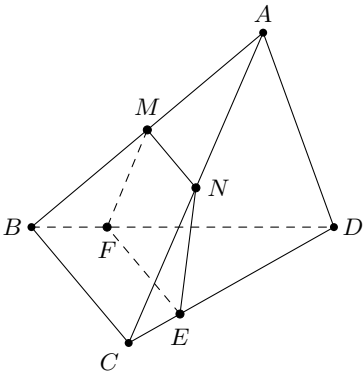


□

Ví dụ 28. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC , E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình gì?

🗨️ **Lời giải.**

- Thiết diện là tứ giác $MNEF$
- $MN \parallel EF$ và $MN \neq EF$ nên $MNEF$ là hình thang.



□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB , M là trung điểm CD . Mặt phẳng (α) qua M song song với BC và SA . (α) cắt AB , SB lần lượt tại N và P . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là hình gì?

Lời giải.

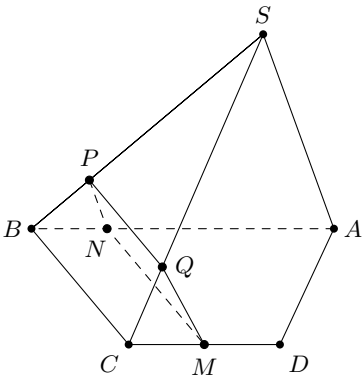
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại N .

Trong mặt phẳng (SAB) qua N kẻ đường thẳng song song với SA cắt SB tại P .

Trong mặt phẳng (SBC) qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại Q .

Khi đó thiết diện là mặt phẳng $(MNPQ)$.

Ta thấy $MNPQ$ là hình thang có đáy lớn là MN .



□

Bài 31. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm AB và AC , E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình gì?

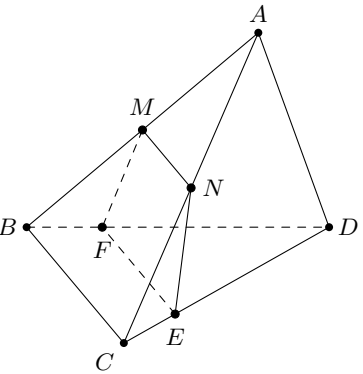
Lời giải.

M và N lần lượt là trung điểm AB và AC nên $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Qua E kẻ đường thẳng song song với BC , cắt BD tại F thì $EF \parallel MN$.

Ta có $\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{DC} = \frac{3}{4} \Rightarrow EF = \frac{3}{4}BC > MN$.

Vậy thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình thang $MNEF$.

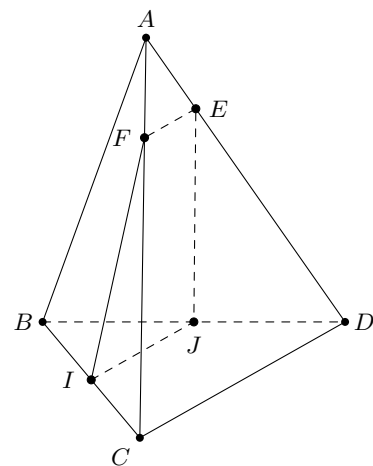


□

Bài 32. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD ; E là điểm thuộc AD khác với A và D . Thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng (IJE) là hình gì?

Lời giải.

- Vì I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD nên $IJ \parallel CD$.
- $IJ \subset (IJE)$, $CD \subset (ACD)$, $E \in (IJE) \cap (ACD)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (IJE) và (ACD) là đường thẳng d qua E và song song với CD .
- Gọi $F = d \cap AC$, ta có: tứ giác $IJEF$ là thiết diện của (IJE) với tứ diện $ABCD$.
- Vì $EF \parallel IJ$ nên $IJEF$ là hình thang.



□

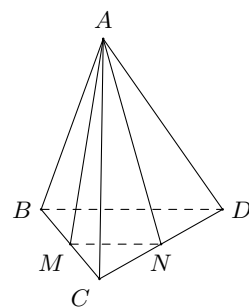
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD . Mặt phẳng (AMN) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là

- (A) tam giác. (B) tứ giác. (C) ngũ giác. (D) hình thang.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} BD \parallel MN \\ MN \subset (AMN) \Rightarrow BD \parallel (AMN). \end{cases}$



□

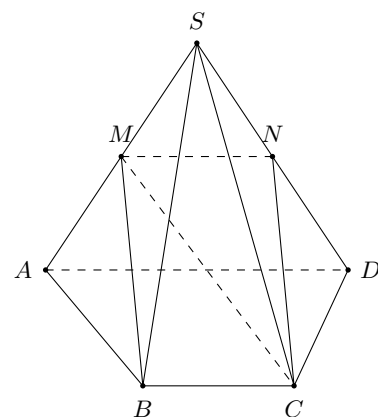
Chọn đáp án (A)

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm SA . Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

- (A) một hình bình hành. (B) một tam giác.
(C) một hình tứ giác (không là hình thang). (D) một hình thang (không là hình bình hành).

🗨️ **Lời giải.**

Gọi N là giao của SD và mặt phẳng (MBC) . Do các mặt phẳng (MBC) và (SAD) lần lượt chứa hai đường song song là BC và AD , nên giao tuyến của chúng cũng song song với hai đường đó, tức $MN \parallel AD$. Suy ra N là trung điểm của SD . Khi đó, MN là đường trung bình của tam giác SAD , suy ra $MN = \frac{1}{2}AD = BC$. Vậy, thiết diện $BCNM$ là một hình bình hành.



□

Chọn đáp án (A)

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD . Mặt phẳng (IJK) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là

- (A) hình chữ nhật. (B) hình bình hành. (C) hình vuông. (D) hình thang.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có điểm K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) .

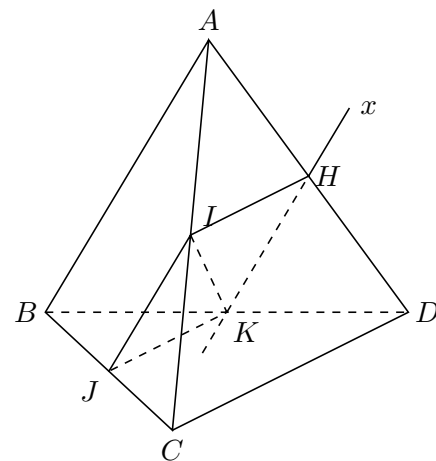
Mặt khác ta có $IJ \parallel AB$, $IJ \subset (IJK)$, $AB \subset (ABD)$.

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng đi qua điểm K và song song với AB . Ta đặt là Kx .

Trong (ABD) , gọi $H = AD \cap Kx$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} IJ = KH = \frac{1}{2}AB \\ JK = IH = \frac{1}{2}CD \end{cases}$$

Suy ra tứ giác $IJKH$ là hình bình hành.



Chọn đáp án (B)

Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $AP = \frac{1}{3}AB$, $BC = 3QC$ và R không trùng với C, D . Gọi $PQRS$ là thiết diện của mặt phẳng (PQR) với tứ diện $ABCD$. Khi đó $PQRS$ là

(A) hình thang cân.

(B) hình thang.

(C) một tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song.

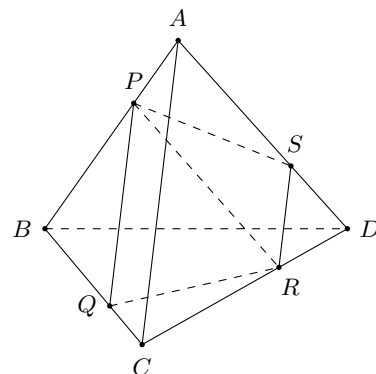
(D) hình bình hành.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ \parallel AC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} PQ \parallel AC \\ (PQRS) \supset PQ, (ACD) \supset AC \Rightarrow RS \parallel AC \\ (PQRS) \cap (ACD) = RS \end{cases}$$

Suy ra, $PQRS$ là hình thang.



Chọn đáp án (B)

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm I . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CD và SI . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNP) là

(A) Một tam giác.

(B) Một lục giác.

(C) Một ngũ giác.

(D) Một tứ giác.

Lời giải.

Trong $(ABCD)$: $MN \cap AC = K$.

$$\begin{cases} P \in (SBD) \cap (MNP) \\ MN \parallel BD \\ MN \subset (MNP) \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (MNP) \cap (SCD) = d \parallel MN \parallel BD$$

$$d \cap SB = E; d \cap SD = F.$$

Trong (SAC) : $KP \cap SA = G$. Ta có

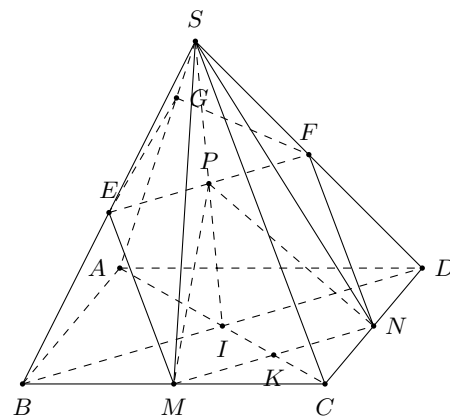
$$(MNP) \cap (ABCD) = MN; (MNP) \cap (SBC) = ME$$

$$(MNP) \cap (SAB) = EG; (MNP) \cap (SAD) = GF$$

$$(MNP) \cap (SCD) = FN.$$

Thiết diện là ngũ giác $MNFGE$.

Chọn đáp án (C)



Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BC, AD và SD . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) là

- (A) Một hình thang. (B) Một ngũ giác. (C) Một tam giác. (D) Một hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $P \in (MNP) \cap (SCD)$ và $MN \parallel CD$

$\Rightarrow (SCD) \cap (MNP) = PQ \parallel MN \parallel CD$ với Q là trung điểm của SC .

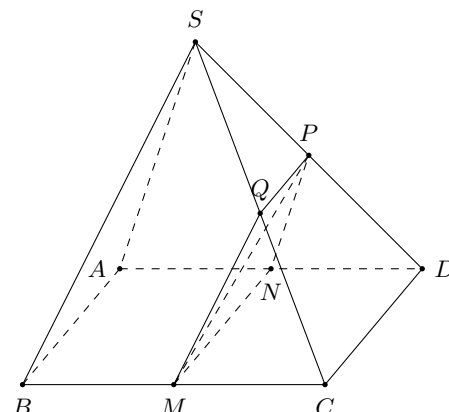
Khi đó $(SBC) \cap (MNP) = MQ, (ABCD) \cap (MNP) = MN,$

$(SAD) \cap (MNP) = NP.$

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNP)

là hình tứ giác $MNPQ$

Mà $MN \parallel PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình thang.



Chọn đáp án (A)

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB, M là giao điểm của IC và JD . Khẳng định nào sau đây **SAI**?

- (A) $IJ \parallel CD.$ (B) $ID \parallel JC.$
(C) $(SAC) \cap (SBD) = SO.$ (D) $IJ = \frac{1}{2}AB.$

Lời giải.

- ☑ Ta có IJ là đường trung bình tam giác SAB nên $IJ \parallel AB$ và $IJ = \frac{1}{2}AB.$

Do đó $IJ \parallel CD$ (do $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$).

- ☑ Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là $SO.$

- ☑ Do $IJ \parallel CD$ và $IJ = \frac{1}{2}CD$ nên $IJCD$ là hình thang đáy là IJ và CD nên DI và CJ cắt nhau.

Chọn đáp án (B)

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh SC . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABM) là

- (A) Một hình bình hành. (B) Một hình thang cân. (C) Một hình thang. (D) Một hình thoi.

Lời giải.

Ta có $(SBC) \cap (ABM) = BM$

Ta lại có $M \in (MAB) \cap (SCD)$ và $AB \parallel CD$

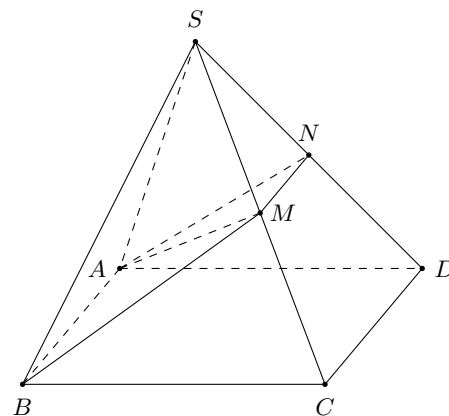
$\Rightarrow (SCD) \cap (ABM) = MN \parallel CD \parallel AB$

Và $(SAD) \cap (ABM) = AN$

Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (ABM)

là hình tứ giác $ABMN$

Mà $AB \parallel MN \Rightarrow ABMN$ là hình thang.



Chọn đáp án (C)

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$, điểm E nằm giữa hai điểm A và C . Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, CD . Thiết diện của tứ diện $(ABCD)$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì?

- (A) Hình vuông. (B) Hình thoi. (C) Hình thang cân. (D) hình bình hành.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB .

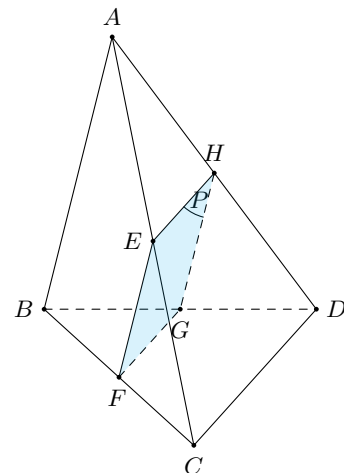
Vẽ $EF \parallel AB$ (F thuộc BC) thì EF là giao tuyến của (P) và (ABC) .

Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên chúng cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD .

Vẽ EH, FG song song với CD (H thuộc AD , G thuộc BD) thì EH, FG lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt phẳng $(ACD), (BCD)$. Khi đó GH là giao tuyến của (P) và (ABD) .

Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến GH của (ABD) và (P) song song với AB .

Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH$ (vì cùng song song với AB) và $EH \parallel FG$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành.



Chọn đáp án **(D)**

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi E là một điểm nằm giữa S và A . Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD . Xác định giao tuyến của (P) và các mặt bên của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

(A) Hình thang.

(B) Hình thang cân.

(C) Hình bình hành.

(D) Hình chữ nhật.

Lời giải.

• Ta có $\begin{cases} AB \parallel (P) \\ AC \subset (SAB) \\ (P) \cap (SAB) = EF \quad (F \in SB) \end{cases}$

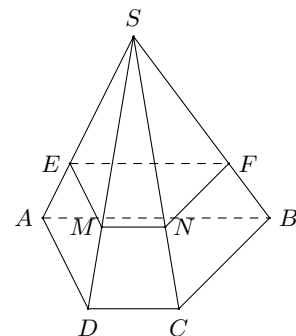
$\Rightarrow AB \parallel EF$. (1)

• Tương tự $(P) \cap (SAD) = EM; (P) \cap (SCD) = MN; (P) \cap (SBC) = NF$.

Do đó $AD \parallel EM$ ($M \in SD$). (2)

$MN \parallel AB$ ($N \in SC$). (3)

Từ (1); (2) và (3), ta được hình tạo bởi $EMNF$ là hình thang.



Chọn đáp án **(A)**

Dạng 5. Ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy

☑ Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng ta có thể

- Quy về một mặt phẳng rồi chứng minh theo các phương pháp đã học trong hình học phẳng.
- Chứng minh 3 điểm đó cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng.

☑ Chứng minh ba đường thẳng đồng quy ta có thể

- Chứng minh ba đường cùng đi qua điểm đặc biệt (chẳng hạn trung điểm mỗi đường).
- Gọi I giao điểm của hai đường (cần chắc chắn hai đường này đồng phẳng) và chứng minh đường còn lại đi qua I (chuyển sang bài toán chứng minh thẳng hàng).
- Sử dụng định lý “Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy, hoặc đôi một song song với nhau”.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 29. Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ như Hình 14. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS có cùng trung điểm.

Lời giải.

Ta có MP là đường trung bình của $\triangle ABC$, suy ra $MP \parallel AC$ và $MP = \frac{AC}{2}$.

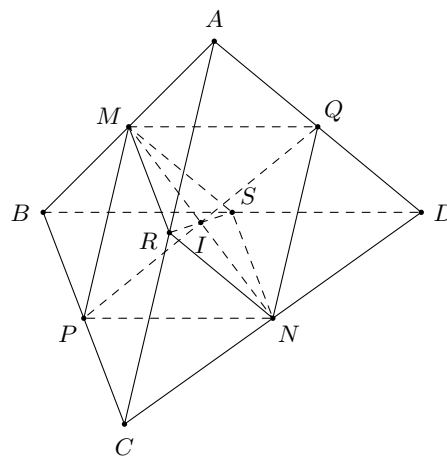
Ta cũng có QN là đường trung bình của tam giác ADC , suy ra $QN \parallel AC$ và $QN = \frac{AC}{2}$.

Do MP và QN cùng song song với AC suy ra $MP \parallel QN$.

Tứ giác $MPNQ$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành, suy ra MN và QP có cùng trung điểm I .

Chứng minh tương tự ta có MN và RS có cùng trung điểm I .

Vậy các đoạn thẳng MN , PQ , RS có cùng trung điểm.



Hình 14

Ví dụ 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB , N là điểm đối xứng của C qua M . Gọi P là điểm trên cạnh SD , Q là giao điểm của AP với (SBC) . Chứng minh N, S, Q thẳng hàng.

Lời giải.

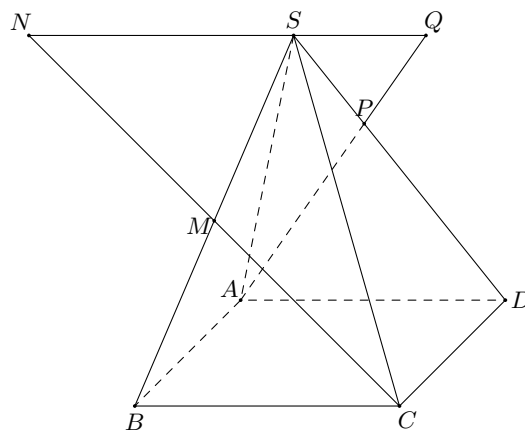
Ta có $S \in (SBC) \cap (SAD)$, $Q = AP \cap (SBC)$, $AP \subset (SAD)$ nên $Q \in (SBC) \cap (SAD)$.

Suy ra $SQ = (SBC) \cap (SAD)$. Mà

$$\begin{cases} BC \subset (SBC) \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow SQ \parallel BC. \\ BC \parallel AD \end{cases}$$

Mặt khác $SCBN$ là hình bình hành nên $SN \parallel BC$.

Vậy N, S, Q thẳng hàng.



2. Bài tập rèn luyện

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Trên SD , SC lần lượt lấy M và N sao cho $\frac{SM}{SD} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$. Chứng minh AN , BM và SO cùng đồng quy.

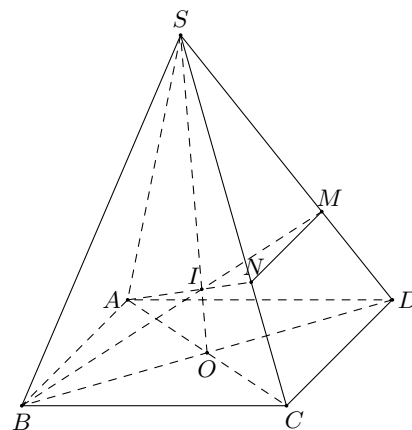
Lời giải.

Ta có $\frac{SM}{SD} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel CD$, mà $CD \parallel AB$ nên $MN \parallel AB$ và M, N, B, A đồng phẳng.

Gọi I là giao điểm của AN và BM suy ra $I \in (SAC) \cap (SBD)$.

Mà $SO = (SAC) \cap (SBD)$ nên SO đi qua I .

Vậy AN , BM và SO cùng đồng quy tại I .



Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang có đáy lớn AD . Gọi K là giao điểm của AB và CD , M là trung điểm cạnh SD , N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$, KM cắt SC tại P . Chứng minh rằng SK , AN , DP đồng quy.

Lời giải.

- ☑ Cách 1: Ta có $\frac{KC}{KD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow C$ là trung điểm KD và P là trọng tâm $\triangle SKD$.

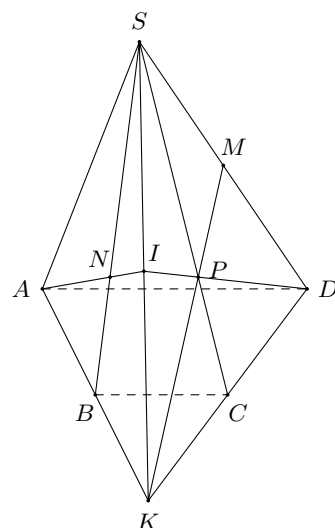
$$\text{Suy ra } \frac{SP}{SC} = \frac{SN}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow NP \parallel BC \Rightarrow NP \parallel AD.$$

Do đó A, D, P, N đồng phẳng. Gọi I là giao điểm của AN và $DP \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$.

Mà $(SAB) \cap (SCD) = SK \Rightarrow SK$ đi qua I .

Vậy SK, AN, DP đồng quy tại I .

- ☑ Cách 2: Ta chứng minh được N và P lần lượt là trọng tâm $\triangle SAK$ và $\triangle SDK$ do đó AN và DP cùng đi qua trung điểm SK .



Bài 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi N, P lần lượt là trung điểm SC và SA . Gọi I là giao điểm của CP và AN , M là giao điểm của SD và (ABN) . Chứng minh rằng B, I, M thẳng hàng.

Lời giải.

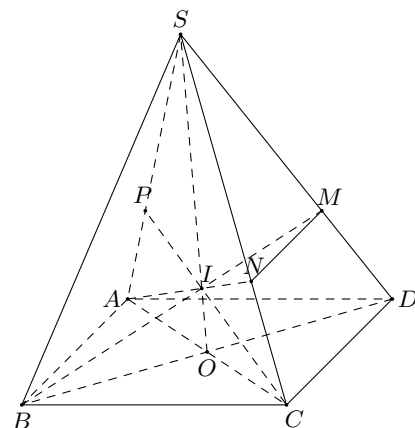
Ta có

$$\begin{cases} AB \subset (ABN) \\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \\ N \in (ABN) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (ABN) \cap (SCD) = Nx \parallel CD.$$

Trong (SCD) , gọi $M = Dx \cap SD \Rightarrow M = SD \cap (ABN)$ và M là trung điểm SD .

Lại có I là trọng tâm $\triangle SAC$ nên S, I, O thẳng hàng và $SI = \frac{2}{3}SO$.

Mà SO là trung tuyến của $\triangle SBD$ nên I cũng là trọng tâm $\triangle SBD$. Vậy B, I, M thẳng hàng.



Bài 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang đáy lớn AD , gọi K là giao điểm của AB và CD , M là điểm nằm trên SD , P là giao điểm của KM và SC , Gọi d là giao tuyến của (SAD) và (SBC) . Chứng minh AM, BP và d đồng quy.

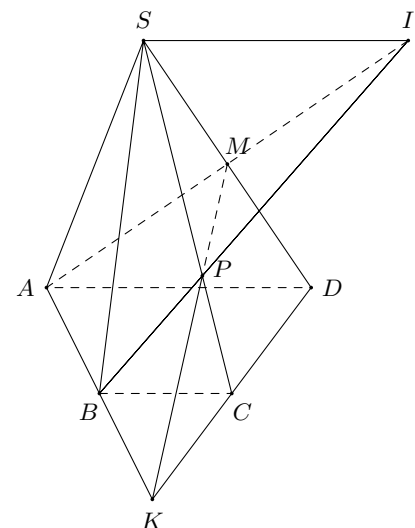
Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC.$$

Xét 3 mặt phẳng $(SAD), (SBC), (AMK)$ có $\begin{cases} (SAD) \cap (SBC) = d \\ (SAD) \cap (AMK) = AM \\ (AMK) \cap (SBC) = BP. \end{cases}$

Mà AM cắt Sx hay AM cắt d , vậy AM, BP và d đồng quy.



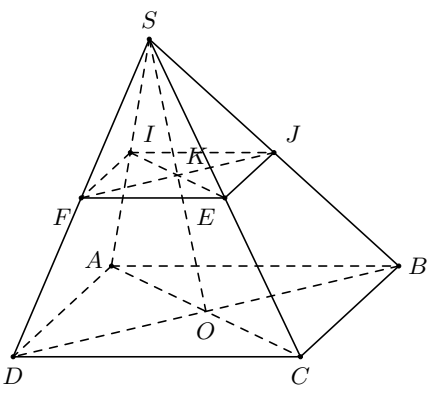
Bài 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang. Gọi E, F, I, J lần lượt là trung điểm SC, SD, SA, SB . Gọi O là giao điểm của AC và BD , K là giao điểm của IE và FI . Chứng minh S, K, O thẳng hàng.

Lời giải.

Giả sử $AB \parallel CD$. Mà theo tính chất đường trung bình thì $EF \parallel CD$, $IJ \parallel AB$ nên $IJ \parallel FE$ và E, F, I, J đồng phẳng.

Xét 3 mặt phẳng $(SAC), (SBD)$ và $(EFIJ)$ có
$$\begin{cases} (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \cap (EFIJ) = IE \\ (SBD) \cap (EFIJ) = FJ. \end{cases}$$

Mà IE cắt FJ nên SO, IE và FJ đồng quy tại O hay S, K, O thẳng hàng.



Bài số 3

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A – KIẾN THỨC CẦN NẮM

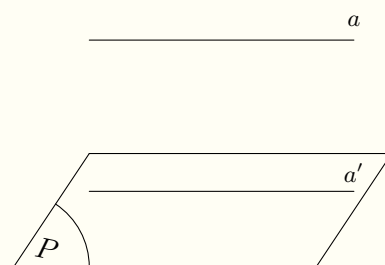
1. Đường thẳng song song với mặt phẳng

❖ **Định nghĩa 3.1.** Đường thẳng được gọi là song song với mặt phẳng nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện và tính chất

❖ **Định lý 3.1 (dấu hiệu nhận biết một đường thẳng song song với một mặt phẳng).**

Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và a song song với đường thẳng a' nằm trong (P) thì a song song với (P) .



❖ **Định lý 3.2 (Tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng).** Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a .

⚠ Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

⚠ Cho hai đường thẳng chéo nhau. Khi đó có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1. Trong không gian cho mặt phẳng (α) và A không thuộc (α) . Qua điểm A có thể dựng được bao nhiêu đường thẳng song song với (α) ?

(A) Duy nhất.

(B) Vô số.

(C) 2.

(D) 4.

💬 **Lời giải.**

Chọn đáp án (B)



Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ . Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng song song với đường thẳng Δ ?

(A) Vô số.

(B) 3.

(C) 1.

(D) 2.

💬 **Lời giải.**

Gọi d là đường thẳng qua O và song song với Δ . Khi đó có vô số mặt phẳng chứa d và không chứa Δ . Vậy có vô số mặt phẳng qua O và song song với Δ .

Chọn đáp án (A)



Câu 3. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

(A) Vô số.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

💬 **Lời giải.**

Chọn đáp án (A)



Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha), b \subset (\alpha)$. Khi đó

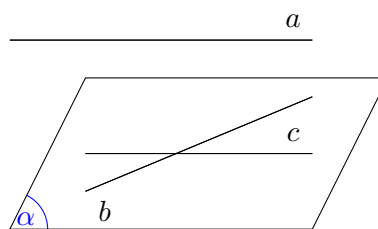
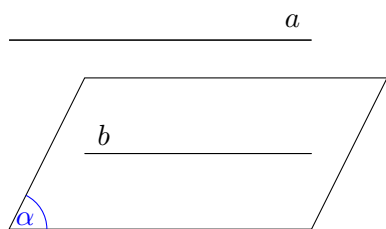
(A) $a \parallel b$.

(B) a, b chéo nhau.

(C) a, b cắt nhau.

(D) $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

Lời giải.



Vì $a \parallel (\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a \parallel c$. Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

☑ Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a \parallel b$.

☑ Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Chọn đáp án (D)

Câu 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $a \parallel (\alpha)$.

(B) $a \subset (\alpha)$.

(C) $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

(D) a cắt (α) .

Lời giải.

Chọn đáp án (C)

Câu 6. Cho hai mặt phẳng $(\alpha); (\beta)$ cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d . Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ trùng với d .

(B) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ song song hoặc trùng với d .

(C) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ cắt d .

(D) Giao tuyến của $(\alpha); (\beta)$ song song với d .

Lời giải.

Do d không nằm trên mặt phẳng (α) và (β) nên giao tuyến không thể trùng với d .

Theo tính chất ta có giao tuyến song song với d .

Chọn đáp án (D)

Câu 7. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không thuộc (α) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

(B) Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

(C) Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b .

(D) Nếu b cắt (α) thì b cắt a .

Lời giải.

☑ Phương án “Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ ” sai. Vì nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$ hoặc a, b chéo nhau.

☑ Phương án “Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b ” sai. Vì nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.

☑ Phương án “Nếu b cắt (α) thì b cắt a ” sai. Vì nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a .

Chọn đáp án (B)

Câu 8. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Khẳng định nào sau đây sai?

(A) Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b .

(B) Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b .

- (C)** Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b .
- (D)** Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M , song song với a và b (với M là điểm cho trước).

Lời giải.

Có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 9. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d' . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A)** d cắt d' .
- (B)** $d \parallel d'$.
- (C)** d và d' chéo nhau.
- (D)** $d \equiv d'$.

Lời giải.

Ta có $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d \parallel d'$. Nếu d cắt d' thì d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết). Vậy $d \parallel d'$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 10 (KNTT). Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) . Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

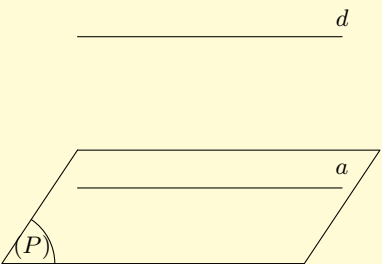
- a) Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P) .
- b) Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau.
- c) Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P) .
- d) Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b .

Lời giải.

- a) Mệnh đề “Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P) ” đúng.
- b) Mệnh đề “Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau” sai.
- c) Mệnh đề “Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P) ” sai vì a và b có thể cùng thuộc (P) .
- d) Mệnh đề “Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b ” sai.

Dạng 2. Đường thẳng song song với một phẳng

Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng a nào đó nằm trong (P) .

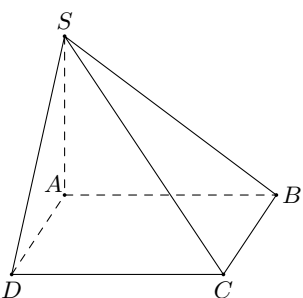


1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $AB \parallel (SCD)$.

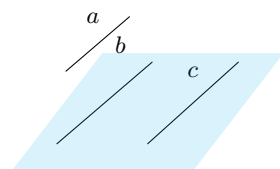
Lời giải.

Nếu đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) có điểm chung là M thì điểm M nằm trên cả hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD) , suy ra điểm M nằm trên CD . Do đó M là điểm chung của hai đường thẳng AB và CD . Điều này không xảy ra vì $AB \parallel CD$. Vậy $AB \parallel (SCD)$.



Ví dụ 2 (KNTT).

Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một song song với nhau và không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng đường thẳng a song song với $\text{mp}(b, c)$.

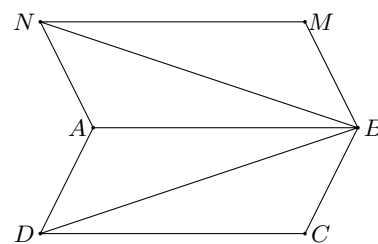
**Lời giải.**

Ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng nên đường thẳng a không nằm trong $\text{mp}(b, c)$. Vì đường thẳng a song song với đường thẳng b và đường thẳng b nằm trong $\text{mp}(b, c)$ nên đường thẳng a song song với mặt phẳng (b, c) . $\square$

Ví dụ 3 (CTST). Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng. Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ lần lượt với các đường thẳng CD, BD và BN .

Lời giải.

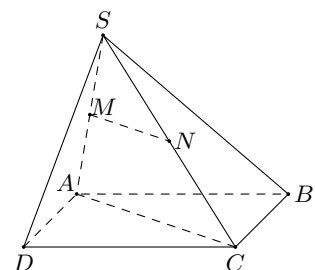
- ☑ Nếu CD có điểm chung O với $(ABMN)$ thì O thuộc giao tuyến AB của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$, suy ra CD cắt AB (mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là hình bình hành).
Vậy $CD \parallel (ABMN)$.
- ☑ BD có một điểm chung duy nhất B với $(ABMN)$, suy ra BD cắt $(ABMN)$ tại B .
- ☑ BN có hai điểm chung B và N với $(ABMN)$, suy ra $BN \subset (ABMN)$.



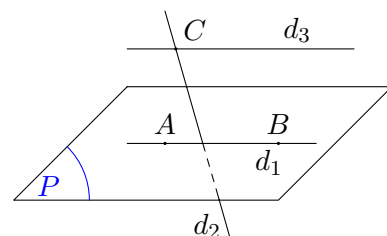
Ví dụ 4 (Cánh Diều). Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SC . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SC nên MN là đường trung bình của tam giác SAC . Suy ra $MN \parallel AC$. Do $AC \subset (ABCD)$, nên theo Định lý 1, ta có $MN \parallel (ABCD)$. $\square$

**Ví dụ 5 (CTST).**

Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P) . Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B ; d_2 đi qua A, C ; d_3 đi qua C và song song với AB (Hình 7). Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P) . Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với các đường thẳng d_1, d_2, d_3 .



Hình 7

Lời giải.

- ☑ Đường thẳng d_1 chứa hai điểm A, B thuộc (P) , vậy $d_1 \subset (P)$.
- ☑ Đường thẳng d_2 không nằm trong (P) vì có chứa điểm C không thuộc (P) . Mặt khác, d_2 lại có điểm A chung với (P) , suy ra d_2 cắt (P) tại A .
- ☑ Đường thẳng d_3 không nằm trong (P) và song song với đường thẳng d_1 nằm trong (P) , suy ra $d_3 \parallel (P)$.

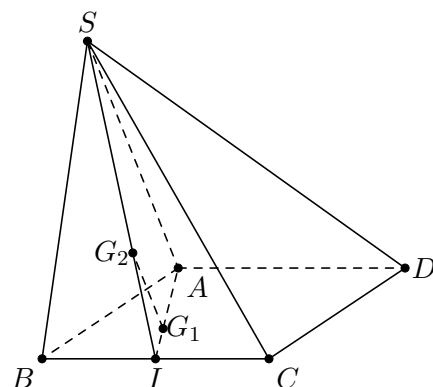
Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh $G_1G_2 \parallel (SAB)$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC .

Xét tam giác SIA , ta có $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3}$ suy ra $G_1G_2 \parallel SA$.

Do đó $\begin{cases} G_1G_2 \not\subset (SAB) \\ G_1G_2 \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$ suy ra $G_1G_2 \parallel (SAB)$.

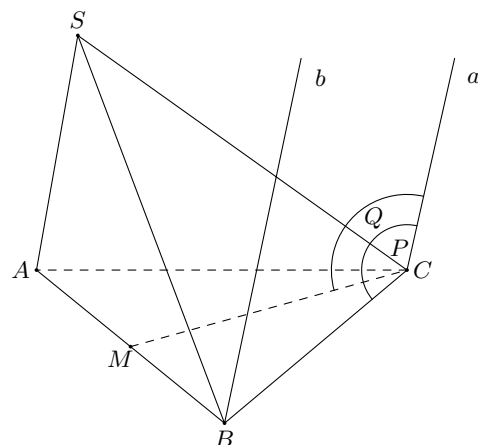


Ví dụ 7 (CTST). Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB . Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA , (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Lời giải.

- Ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng có điểm chung C và cùng song song với SA , suy ra giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng a đi qua C và $a \parallel SA$.
- Ta có $SA \parallel (P)$ và B thuộc (P) , b là đường thẳng đi qua B và $b \parallel SA$, suy ra $b \subset (P)$.



Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SB, AD lần lượt lấy các điểm N, P sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$. Chứng minh $NP \parallel (SCD)$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBC) , kẻ $NR \parallel BC$ với $R \in SC$, kẻ $RQ \parallel SB$ với $Q \in BC$ thì ta có $\frac{SN}{SB} = \frac{SR}{SC}$ và $\frac{SR}{SC} = \frac{BQ}{BC}$.

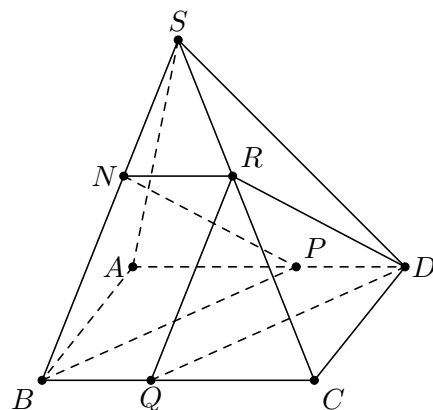
Kết hợp với giả thiết $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$, ta được $\frac{BQ}{BC} = \frac{PD}{AD}$ suy ra $BQ = PD$ (do $BC = AD$).

Lại có $NR = BQ$, suy ra $NR = PD$.

Hơn nữa, ta có $\begin{cases} NR \parallel BQ \\ PD \parallel BQ \end{cases}$ suy ra $NR \parallel PD$.

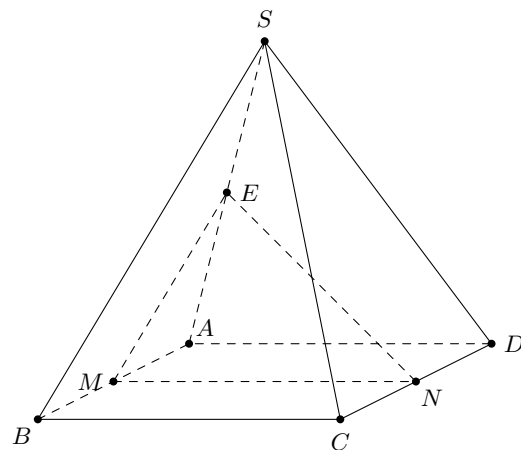
Do đó $PDRN$ là hình bình hành nên $NP \parallel DR$.

Ta có $\begin{cases} NP \not\subset (SCD) \\ NP \parallel DR \\ DR \subset (SCD) \end{cases}$ suy ra $NP \parallel (SCD)$.



Ví dụ 9.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA (hình bên). Chứng minh rằng



- MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) ;
- SB và SC song song với mặt phẳng (MNE) .

Lời giải.

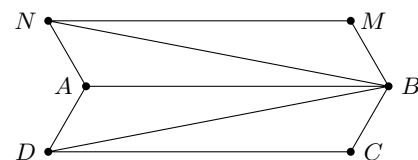
- Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD suy ra $MN \parallel BC, MN \parallel AD$.
Ta có MN không nằm trong (SBC) và song song với BC nằm trong (SBC) , suy ra $MN \parallel (SBC)$.
Tương tự, $MN \parallel (SAD)$.
- Do M, E lần lượt là trung điểm của AB, SA suy ra ME là đường trung bình của tam giác SAB hay $ME \parallel SB$.
Ta có SB không nằm trong (MNE) và song song với ME nằm trong (MNE) , suy ra $SB \parallel (MNE)$.
Gọi O là giao điểm của AC và BD . Do $ABCD$ là hình bình hành suy ra O là trung điểm AC .
Mà E là trung điểm SA , suy ra OE là đường trung bình của tam giác SAC .
Suy ra $OE \parallel SC$.
Ta có SC không nằm trong (MNE) và song song với OE nằm trong (MNE) , suy ra $SC \parallel (MNE)$.

□

Ví dụ 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng, xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ lần lượt với các đường thẳng CD, BD và BN .

Lời giải.

Nếu CD có điểm chung O với $(ABMN)$ thì O thuộc giao tuyến AB của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$, suy ra CD cắt AB (mâu thuẫn giả thiết $ABCD$ là hình bình hành). Vậy $CD \parallel (ABMN)$.
 BD có một điểm chung duy nhất B với $(ABMN)$, suy ra BD cắt $(ABMN)$ tại B .
 BN có hai điểm chung B và N với $(ABMN)$, suy ra $BN \subset (ABMN)$.



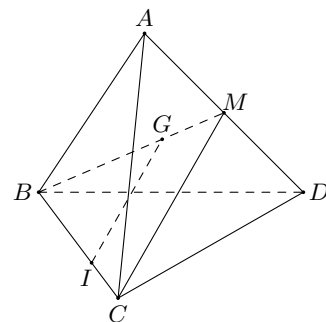
□

2. Bài tập tự luận

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (ACD) .

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của cạnh AD .
Xét tam giác BCM có $\frac{BI}{BC} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG \parallel CM$.
Mà $CM \subset (ACD)$ và $IG \not\subset (ACD)$ nên suy ra $IG \parallel (ACD)$.



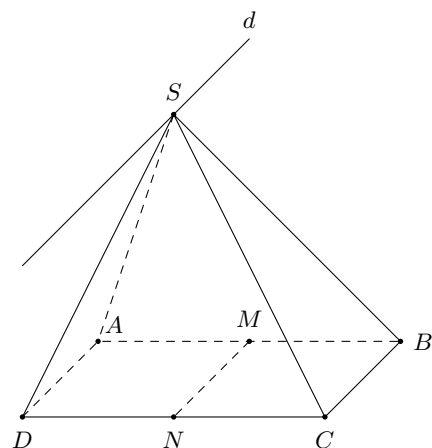
□

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng BC và AD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD .

Ta lại có $MN \parallel AD \parallel BC$ nên suy ra $MN \parallel d$.



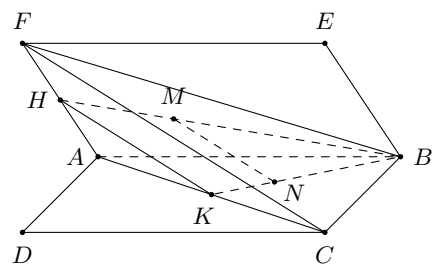
Bài 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF) .

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AF, AC .

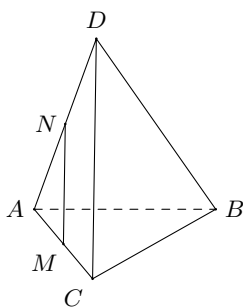
Ta có $\frac{BM}{BH} = \frac{BN}{BK} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel HK$.

Mà $HK \subset (ACF)$ và $MN \not\subset (ACF) \Rightarrow MN \parallel (ACF)$.



Bài 4. Cho hai tam giác ABC và ABD không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AD .

- Đường thẳng AM có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.
- Đường thẳng MN có song song với mặt phẳng (BCD) hay không? Hãy giải thích tại sao.

Lời giải.

- Ta có AM cắt (BCD) tại C nên AM không song song với (BCD) .
- $$\begin{cases} MN \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (BCD).$$

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

- Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA) .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Lời giải.

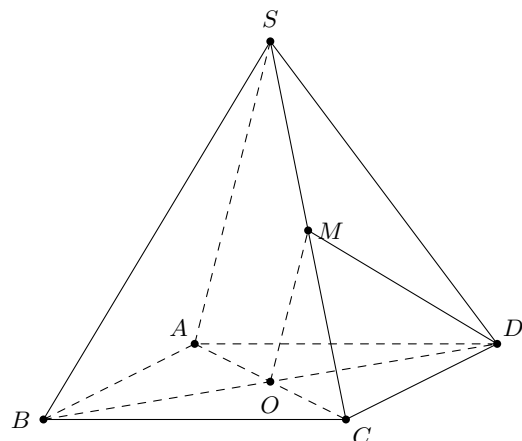
- a) Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC , suy ra $OM \parallel SA$.

OM không nằm trong mặt phẳng (SAD) và OM song song với SA nằm trong (SAD) , suy ra $OM \parallel (SAD)$.

Tương tự, OM không nằm trong mặt phẳng (SBA) và OM song song với SA nằm trong (SBA) , suy ra $OM \parallel (SBA)$.

- b) Hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) có điểm chung D và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song OM và SA .

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) là đường thẳng d qua D và song song với SA và OM .

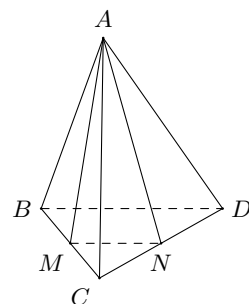


□

Bài 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh BC, CD . Chứng minh rằng đường thẳng BD song song với mặt phẳng (AMN) .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \parallel MN \\ MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow BD \parallel (AMN).$$



□

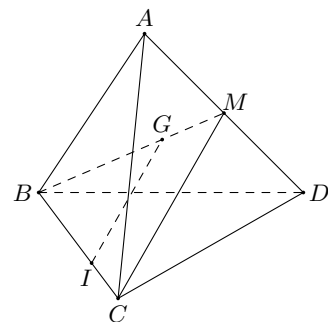
Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song với mặt phẳng (ACD) .

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của cạnh AD .

Xét tam giác BCM có $\frac{BI}{BC} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG \parallel CM$.

Mà $CM \subset (ACD)$ và $IG \not\subset (ACD)$ nên suy ra $IG \parallel (ACD)$.



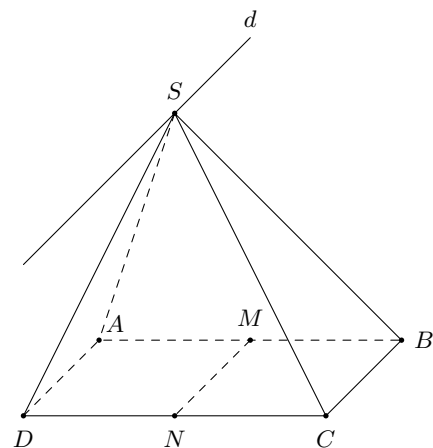
□

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng BC và AD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD .

Ta lại có $MN \parallel AD \parallel BC$ nên suy ra $MN \parallel d$.



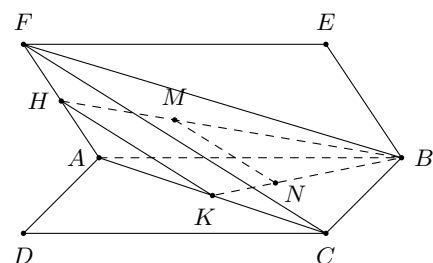
Bài 9. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF) .

Lời giải.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AF, AC .

Ta có $\frac{BM}{BH} = \frac{BN}{BK} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel HK$.

Mà $HK \subset (ACF)$ và $MN \not\subset (ACF) \Rightarrow MN \parallel (ACF)$.



Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD .

b) Gọi I là trung điểm của AB .

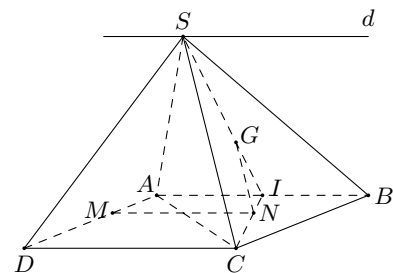
Xét hình bình hành $ABCD$ có

$$\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CI} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel CD.$$

Mà $CD \subset (SCD)$ và $MN \not\subset (SCD)$ nên $MN \parallel (SCD)$.

Ta có $\frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow NG \parallel SC$.

Mà $SC \subset (SAC)$ và $NG \not\subset (SAC)$ nên $NG \parallel (SAC)$.



Bài 11. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

a) Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDEF)$, (ADF) và (BCE) .

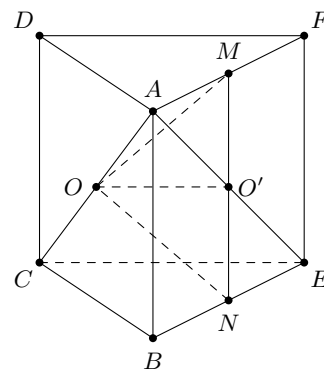
b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE . Chứng minh $MN \parallel (CDFE)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Lời giải.

a)

- ☑ Ta có OO' là đường trung bình của tam giác ACE , suy ra $OO' \parallel CE$. Khi đó, OO' không nằm trong mặt phẳng $(CDEF)$ và OO' song song với CE nằm trong $(CDEF)$, suy ra $OO' \parallel (CDEF)$.
- ☑ Ta có OO' không nằm trong mặt phẳng (BCE) và OO' song song với CE nằm trong (BCE) , suy ra $OO' \parallel (BCE)$.
- ☑ Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF , suy ra $OO' \parallel DF$. Khi đó, OO' không nằm trong (ADF) và OO' song song với DF nằm trong (ADF) , suy ra $OO' \parallel (ADF)$.



- b) Do $ABEF$ là hình bình hành suy ra $MN \parallel EF$ (do M, N lần lượt là trung điểm của AF, BE). Ta có MN không nằm trong $(CDEF)$ và MN song song với EF nằm trong $(CDEF)$, suy ra $MN \parallel (CDEF)$.
- c) Do $ABEF$ là hình bình hành suy ra $MN \parallel AB$ (do M, N lần lượt là trung điểm của AF, BE). Mà hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$ có điểm chung là O và đi qua hai đường thẳng song song MN và AB . Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$ là đường thẳng d qua O và song song với MN .

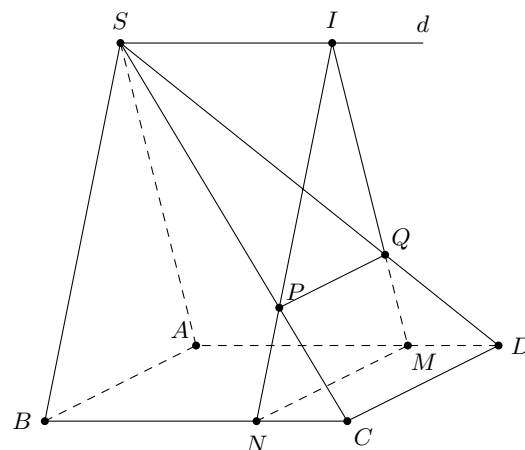
□

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- a) $MNPQ$ là hình gì?
- b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

🗨️ **Lời giải.**

- a) Ta có (α) cắt $(ABCD)$ theo MN và $(\alpha) \parallel CD$, suy ra $MN \parallel CD$.
 (α) cắt (SCD) theo PQ và $(\alpha) \parallel CD$, suy ra $PQ \parallel CD$.
 Suy ra $MN \parallel PQ$ hay $MNPQ$ là hình thang.
- b) Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Ba mặt phẳng (SAD) , (SBC) , $(ABCD)$ cắt nhau theo giao tuyến d , BC , AD mà $AD \parallel BC$.
 Suy ra $d \parallel AD \parallel BC$, nên d cố định.
 Mà I thuộc MQ nằm trong (SAD) , I thuộc NP nằm trong (SBC) .
 Suy ra I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) hay I thuộc đường thẳng d cố định.



□

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

🗨️ **Lời giải.**

a) Ta có (α) cắt (ABC) theo MN và $(\alpha) \parallel BC$, suy ra $MN \parallel BC$.

(α) cắt (BCD) theo PQ và $(\alpha) \parallel BC$, suy ra $PQ \parallel BC$.

Do đó $MN \parallel PQ$. (1)

Tương tự, ta có (α) cắt (ABD) theo MQ và $(\alpha) \parallel AD$, suy ra $MQ \parallel AD$.

(α) cắt (ACD) theo NP và $(\alpha) \parallel AD$, suy ra $NP \parallel AD$.

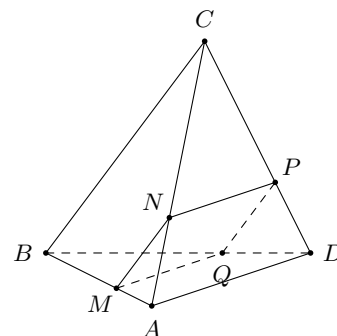
Do đó $MQ \parallel NP$. (2)

Từ (1), (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Để $MNPQ$ là hình thoi thì $MN = NP = PQ = MQ$.

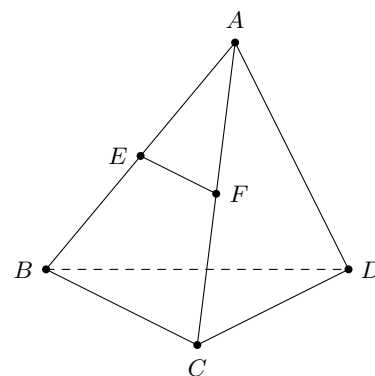
Trường hợp M là trung điểm AB và $BC = AD$. Khi đó MN là đường trung bình của tam giác ABC và NP là đường trung bình của tam giác ACD .

Ta có $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = NP$.



Bài 14.

Cho E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC của tứ diện $ABCD$. Xác định vị trí tương đối của các đường thẳng BC , AD và EF với mặt phẳng (BCD) .



Lời giải.

☑ BC có hai điểm chung B và C với (BCD) , suy ra $BC \subset (BCD)$.

☑ AD có một điểm chung duy nhất D với (BCD) , suy ra AD cắt (BCD) tại D .

☑ EF là đường trung bình của tam giác ABC suy ra EF song song với BC .

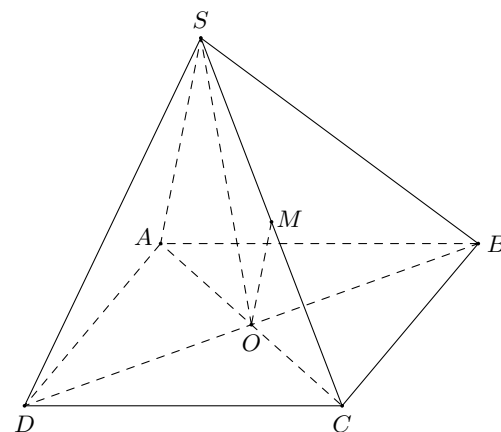
Giả sử EF có điểm chung O với (BCD) thì O thuộc giao tuyến BC của hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) , suy ra EF cắt BC (mâu thuẫn với giả thiết EF là đường trung bình). Vậy $EF \parallel (BCD)$.

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC . Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SAB) .

Lời giải.

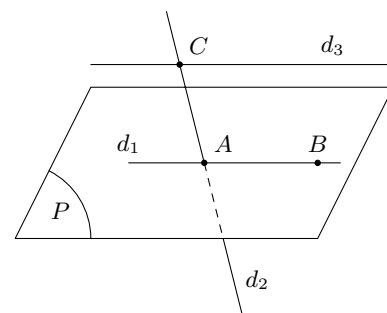
Ta có $\begin{cases} OM \not\subset (SAD) \\ OM \parallel SA \text{ (đường trung bình)} \Rightarrow OM \parallel (SAD). \\ SA \subset (SAD) \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} OM \not\subset (SAB) \\ OM \parallel SA \text{ (đường trung bình)} \Rightarrow OM \parallel (SAB). \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$



Bài 16.

Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P) . Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B ; d_2 đi qua A, C ; d_3 đi qua C và song song với AB (hình bên). Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P) . Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với đường thẳng d_1, d_2, d_3 .

**Lời giải.**

Đường thẳng d_1 chứa hai điểm A, B thuộc (P) , vậy $d_1 \subset (P)$.

Đường thẳng d_2 không nằm trong (P) vì có chứa điểm C không thuộc (P) . Mặt khác, d_2 lại có điểm A chung với (P) , suy ra d_2 cắt (P) tại A . Đường thẳng d_3 không nằm trong (P) và song song với đường thẳng d_1 nằm trong (P) , suy ra $d_3 \parallel (P)$. $\square$

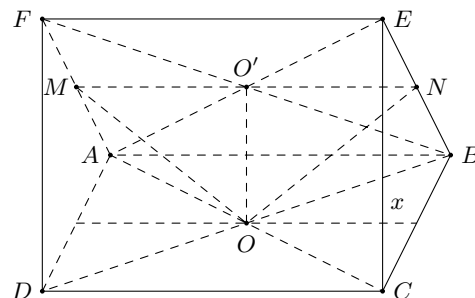
Bài 17. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDFE)$, (ADF) và (BCE) .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} OO' \not\subset (CDFE) \\ OO' \parallel DF \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel (CDFE).$

Ta có $\begin{cases} OO' \not\subset (ADF) \\ OO' \parallel DF \\ DF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel (ADF).$

Ta có $\begin{cases} OO' \not\subset (BCE) \\ OO' \parallel CE \\ CE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel (BCE).$



Bài 18. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

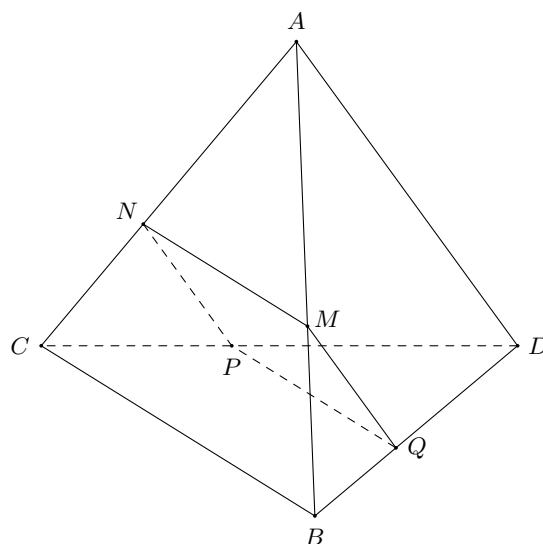
Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ QP \parallel BC \end{cases} \Rightarrow MN \parallel QP \quad (1).$

Ta có $\begin{cases} NP \parallel AD \\ MQ \parallel AD \end{cases} \Rightarrow NP \parallel MQ \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

- Để hình bình hành $MNPQ$ là hình thoi thì ta cần $MQ = PQ$. Để $MQ = PQ$ ta cần M là trung điểm AB và $AD = BC$. Vậy để $MNPQ$ là hình thoi ta cần bổ sung thêm M là trung điểm AB và $AD = BC$.



3. Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 11. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- (A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song nhau.
 (B) Nếu $a \parallel (P)$ thì tồn tại trong (P) đường thẳng b để $b \parallel a$.
 (C) Nếu $\begin{cases} a \parallel (P) \\ b \subset (P) \end{cases}$ thì $a \parallel b$.
 (D) Nếu $a \parallel (P)$ và đường thẳng b cắt mặt phẳng (P) thì hai đường thẳng a và b cắt nhau.

Lời giải.

Nếu $a \parallel (P)$ thì tồn tại trong (P) đường thẳng b để $b \parallel a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng $d \notin (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) Nếu $d \parallel (\alpha)$ thì trong (α) tồn tại đường thẳng Δ sao cho $\Delta \parallel d$.
 (B) Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$.
 (C) Nếu $d \cap (\alpha) = \{A\}$ và $d' \subset (\alpha)$ thì d và d' hoặc cắt nhau hoặc chéo nhau.
 (D) Nếu $d \parallel c$; $c \in (\alpha)$ thì $d \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

Mệnh đề “Nếu $d \parallel (\alpha)$ và $b \subset (\alpha)$ thì $b \parallel d$ ” sai vì b và d có thể chéo nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13. Cho các mệnh đề:

- $a \parallel b, b \subset (P) \Rightarrow a \parallel (P)$.
 - $a \parallel (P), a \in (Q)$ với $\forall (Q)$ và $(Q) \cap (P) = b \Rightarrow b \parallel a$.
 - Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.
 - Nếu a, b là hai đường thẳng chéo nhau thì có vô số mặt phẳng chứa a và song song với b .
- Số mệnh đề đúng là:

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Mệnh đề “Nếu a, b là hai đường thẳng chéo nhau thì có vô số mặt phẳng chứa a và song song với b ” là mệnh đề sai vì nếu a, b là hai đường thẳng chéo nhau thì chỉ có một mặt phẳng chứa a và song song với b .

Chọn đáp án (A) □

Câu 14. Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b ?

- (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Nếu a, b là hai đường thẳng chéo nhau thì chỉ có một mặt phẳng chứa a và song song với b .

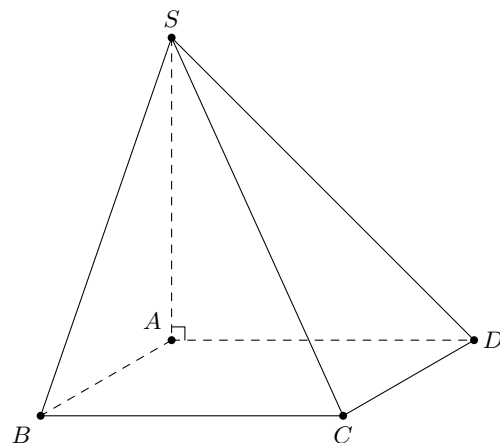
Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

- (A) (SBC) . (B) $(ABCD)$. (C) (SAC) . (D) (SAB) .

Lời giải.

Do $AD \parallel BC$, $AD \not\subset (SBC)$ và $BC \subset (SBC)$ nên $AD \parallel (SBC)$.



Chọn đáp án (A)

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi A' , B' lần lượt là trung điểm của SA , SB . Đường thẳng $A'B'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) (SAB) .

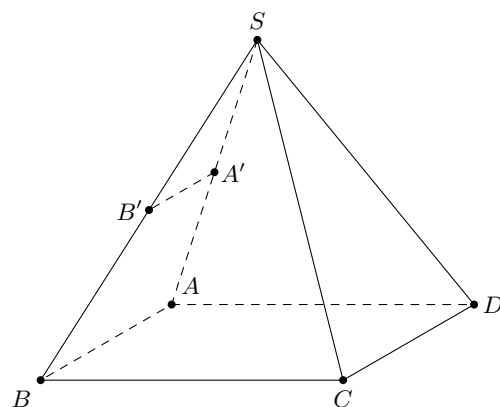
(B) (SBC) .

(C) (SCD) .

(D) (SAD) .

Lời giải.

Vì $A'B'$ song song với AB và AB song song với CD nên $A'B'$ song song với CD . Hơn nữa, $A'B'$ không chứa trong (SCD) nên $A'B'$ song song với (SCD) .



Chọn đáp án (C)

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 , G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD . Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

(B) $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$.

(C) $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

(D) Ba đường thẳng BG_1 , AG_2 và CD đồng quy.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD .

Do G_1 , G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD nên ta có

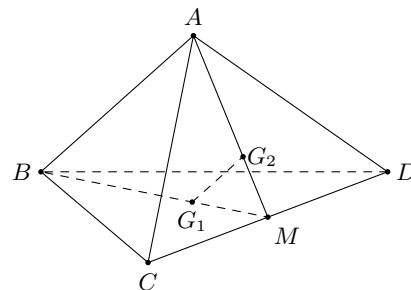
$$\frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB, \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Do $G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABD)$ và $G_1G_2 \parallel (ABC)$.

Để thấy, ba đường thẳng BG_1 , AG_2 và CD đồng quy tại M .

Vậy mệnh đề " $G_1G_2 = \frac{2}{3}AB$ " là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (B)



Câu 18. Cho hai mặt phẳng (α) ; (β) cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d . Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Giao tuyến của (α) ; (β) trùng với d .

(B) Giao tuyến của (α) ; (β) song song hoặc trùng với d .

(C) Giao tuyến của (α) ; (β) cắt d .

(D) Giao tuyến của (α) ; (β) song song với d .

Lời giải.

Do d không nằm trên mặt phẳng (α) và (β) nên giao tuyến không thể trùng với d .

Theo tính chất ta có giao tuyến song song với d .

Chọn đáp án (D).

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

(A) (ACD) .

(B) (BCD) .

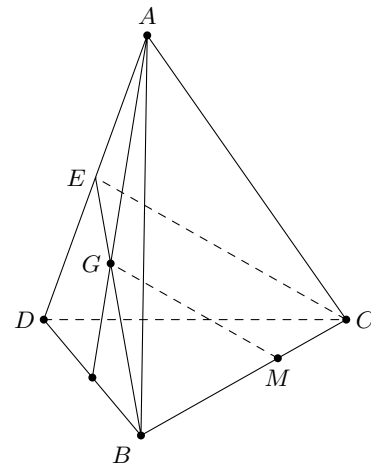
(C) (ABD) .

(D) (ABC) .

Lời giải.

Gọi E là trung điểm AD .

Xét tam giác BCE có $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ nên suy ra $MG \parallel (ACD)$.



Chọn đáp án (A).

Câu 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Lấy N trên cạnh $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$?

(A) $x = \frac{2}{3}$.

(B) $x = \frac{1}{3}$.

(C) $x = \frac{1}{4}$.

(D) $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

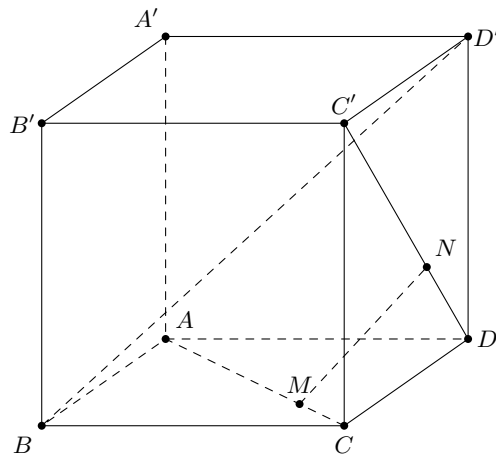
Từ giả thiết, ta có M là trọng tâm tam giác BCD .

Gọi O và I lần lượt là trung điểm của AC và DD' . Khi đó, ta có $BD' \parallel (IAC)$.

Trong $(CDD'C')$ gọi $N' = CI \cap C'D$, khi đó N' là trọng tâm tam giác CDD' .

Do đó $\frac{CM}{CO} = \frac{2}{3} = \frac{CN'}{CI} \Rightarrow MN' \parallel OI$. Mà $OI \parallel BD'$ nên $MN \parallel BD'$.

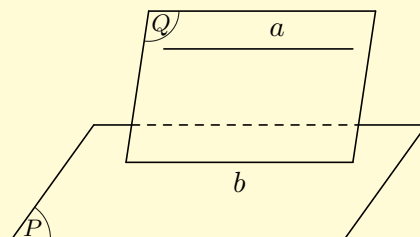
Vậy $N' \equiv N$ và $x = \frac{2}{3}$.



Chọn đáp án (A).

Dạng 3. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng- Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a .



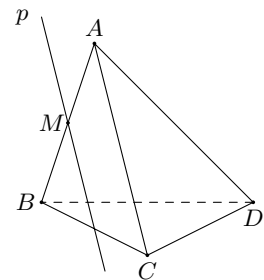
Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 11 (Cánh Diều). Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy một điểm M . Gọi (R) là mặt phẳng qua M và song song với hai đường thẳng AC và BD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

Áp dụng Định lý 2, ta có: Mặt phẳng (R) đi qua M và song song với AC , mà $AC \subset (ABC)$ nên mặt phẳng (R) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến p đi qua M và song song với AC .



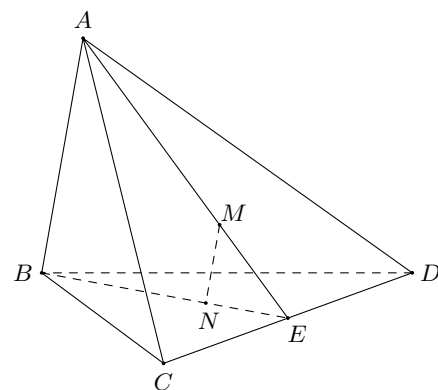
Ví dụ 12 (CTST). Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD (Hình 11). Chứng minh đường thẳng MN song song với các mặt phẳng (CAB) và (DAB) .

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của CD . Do M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD nên ta có $\frac{EM}{EA} = \frac{EN}{EB} = \frac{1}{3}$, suy ra $MN \parallel AB$.

Đường thẳng MN không nằm trong (CAB) và song song với đường thẳng AB nằm trong (CAB) , suy ra $MN \parallel (CAB)$.

Tương tự ta cũng có $MN \parallel (DAB)$.



Hình 11

Ví dụ 13. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau, điểm G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua G và song song với hai cạnh BC, AC . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD) .

Lời giải.

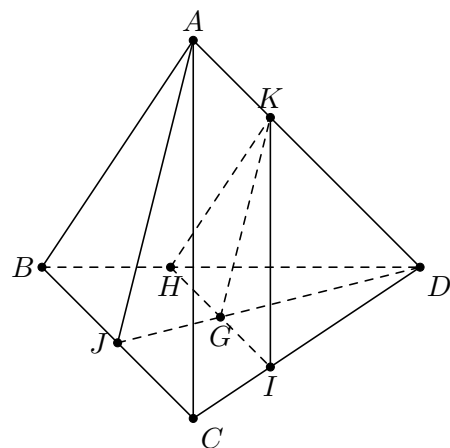
Ta có $\begin{cases} G \in (BCD) \cap (P) \\ BC \parallel (P) \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \cap (P) = Gx \parallel BC.$

Gọi H, I lần lượt là giao điểm của Gx với BD và DC .

Ta có $\begin{cases} I \in (ACD) \cap (P) \\ AC \parallel (P) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (ACD) \cap (P) = IK \parallel AC \text{ với } K \in AD.$

Ta thấy H, K là hai điểm chung của mặt phẳng (P) và (ABD) .

Do đó $(P) \cap (ABD) = HK$



Ví dụ 14. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với AC . Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α) .

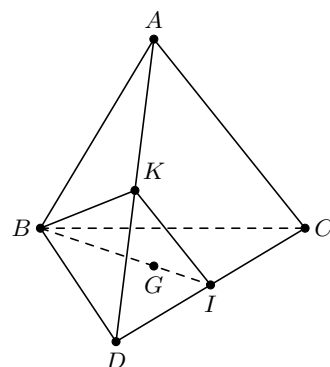
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của CD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ACD) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = Ix \parallel AC.$$

Trong mặt phẳng (ACD) , gọi $Ix \cap AD = K$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} K \in AD \\ K \in Ix \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K = AD \cap (\alpha).$$



□

Ví dụ 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA . Tìm giao điểm K của mặt phẳng (α) và SC .

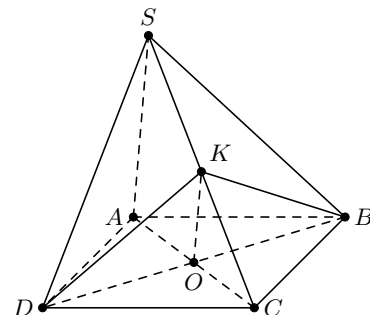
Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó, $O \in (\alpha) \cap (SAC)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ O \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow Ox \parallel SA.$$

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $K = SC \cap Ox$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} K \in SC \\ K \in Ox \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (\alpha).$$



□

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là một điểm trên CD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC . Tìm giao điểm Q của SC và (α) .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \parallel BC, BC \subset (ABCD) \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$$

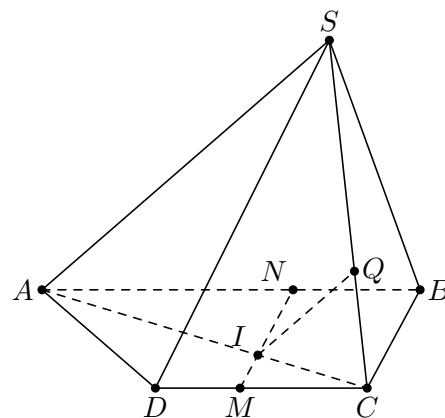
$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \parallel BC \text{ và } N \in AB.$$

Gọi I là giao điểm của AC và MN ta có

$$\begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ I \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = Ix \parallel SA.$$

Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của Ix và SC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} Q \in SC \\ Q \in Ix \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (\alpha).$$



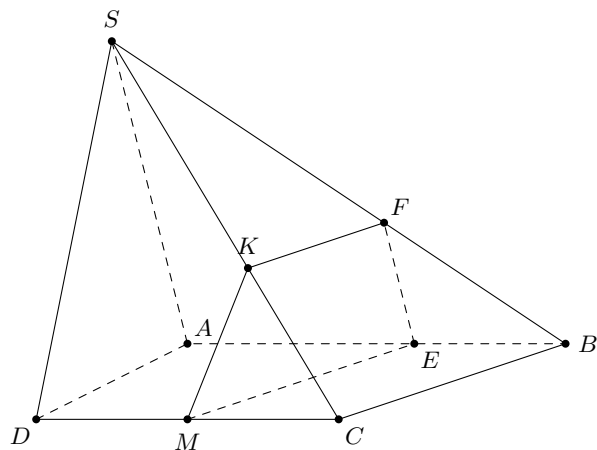
□

2. Bài tập tự luận

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD , (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng của hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Trong $(ABCD)$, kẻ ME song song với CD với E thuộc AB .
Ta có $(P) \parallel CD$ và M thuộc (P) , suy ra $ME \in (P)$.
Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$ là ME .
Trong (SAB) , kẻ EF song song với SA với F thuộc SB . Ta có $(P) \parallel SA$ và E thuộc (P) , suy ra $EF \in (P)$.
Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SAB) là EF .
Trong (SCB) , kẻ FK song song với BC với K thuộc SC . Ta có $(P) \parallel BC$ và F thuộc (P) , suy ra $FK \in (P)$.
Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SCB) là FK .
Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SCD) là MK .

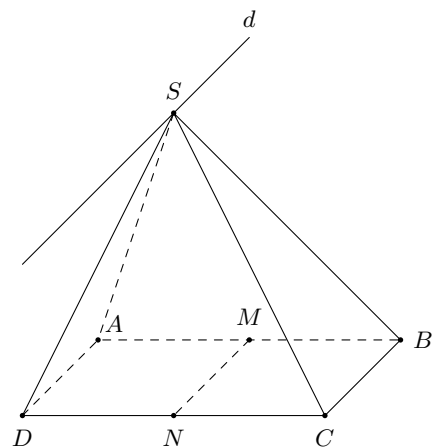


Bài 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng BC và AD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD .

Ta lại có $MN \parallel AD \parallel BC$ nên suy ra $MN \parallel d$.



Bài 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .
- Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.

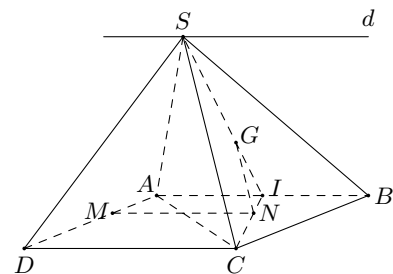
- Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD .
- Gọi I là trung điểm của AB .
Xét hình bình hành $ABCD$ có

$$\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CI} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel CD.$$

Mà $CD \subset (SCD)$ và $MN \not\subset (SCD)$ nên $MN \parallel (SCD)$.

Ta có $\frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow NG \parallel SC$.

Mà $SC \subset (SAC)$ và $NG \not\subset (SAC)$ nên $NG \parallel (SAC)$.

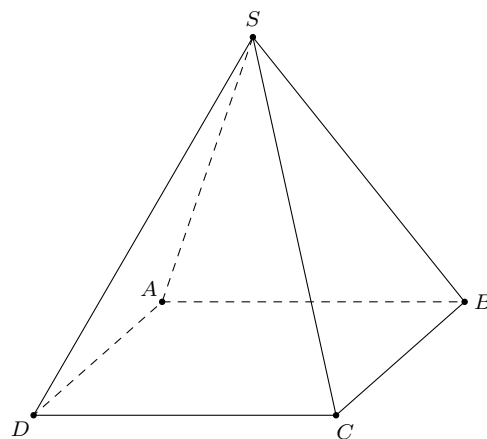


3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 21.

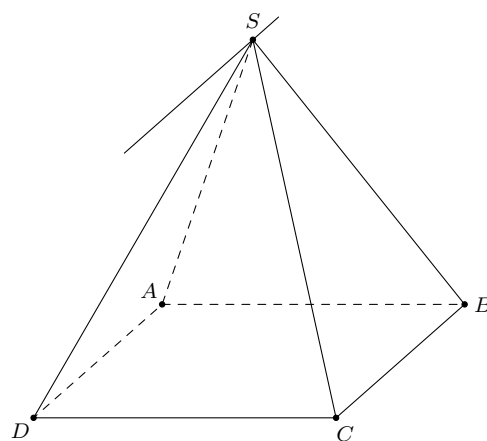
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

- (A) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
 (B) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .
 (C) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB .
 (D) Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD .



Lời giải.

Do hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có chung điểm S và có hai đường thẳng AD, BC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC .



Chọn đáp án (B)

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

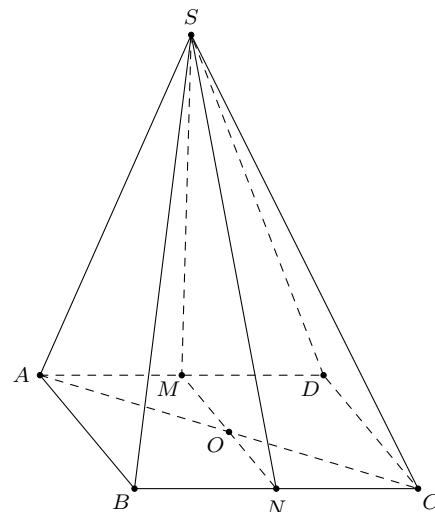
- (A) SO với O là tâm hình bình hành $ABCD$.
 (B) SD .
 (C) SG với G là trung điểm AB .
 (D) SF với F là trung điểm CD .

Lời giải.

Gọi O là giao điểm AC và MN ta có

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SMN) \\ O \in (SAC) \cap (SMN) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SMN).$$

Vì $MN \parallel AB$ và N là trung điểm BC nên O là trung điểm $AC \Rightarrow O$ là tâm hình bình hành $ABCD$.



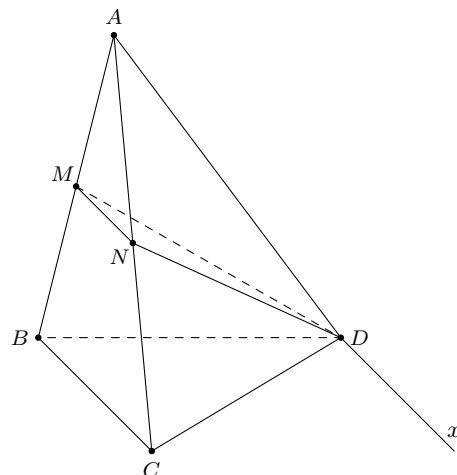
Chọn đáp án (A)

Câu 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (BCD) và (DMN) là đường thẳng d được dựng như thế nào?

- (A) Đi qua D và song song với AC .
 (B) Đi qua D và song song với MN .
 (C) Đi qua D và song song với AB .
 (D) Đi qua hai điểm D và E , với $E = MN \cap BC$.

Lời giải.

Qua D kẻ đường thẳng Dx song song với BC và MN .
 Để thấy Dx nằm trong mặt phẳng (DMN) và (DBC) .
 Do đó Dx chính là giao tuyến của 2 mặt phẳng (DBC) và (DMN) .



Chọn đáp án (B)

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

(A) BJ .

(B) AD .

(C) IJ .

(D) BI .

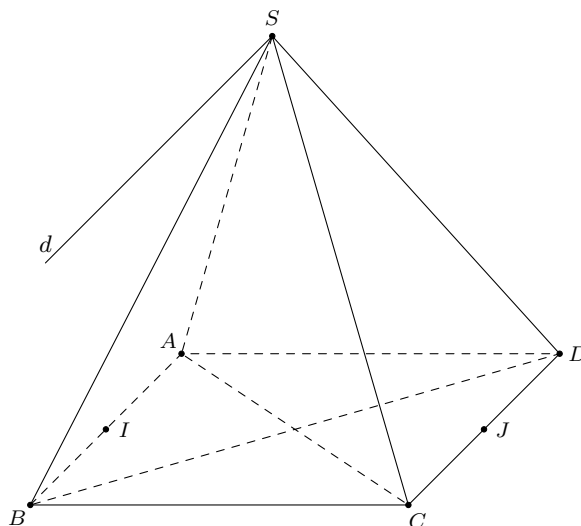
Lời giải.

Qua S kẻ đường thẳng d song song với AB và CD .

Ta thấy

☑ d đi qua điểm S nằm trong mặt phẳng (SAB) và song song với $AB \subset (SAB)$
 $\Rightarrow d \subset (SAB)$ (1)

☑ d đi qua điểm S nằm trong mặt phẳng (SCD) và song song với $CD \subset (SCD)$
 $\Rightarrow d \subset (SCD)$ (2)



Từ (1) và (2), suy ra d chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với BI .

Chọn đáp án (D)

Câu 25. Cho mặt phẳng (α) chứa hình bình hành $ABCD$, một điểm S nằm ngoài (α) . Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) d là đường thẳng SO với $O = AC \cap BD$.

(B) d là đường thẳng qua điểm S và song song với AB .

(C) d là đường thẳng qua điểm S và song song với AC .

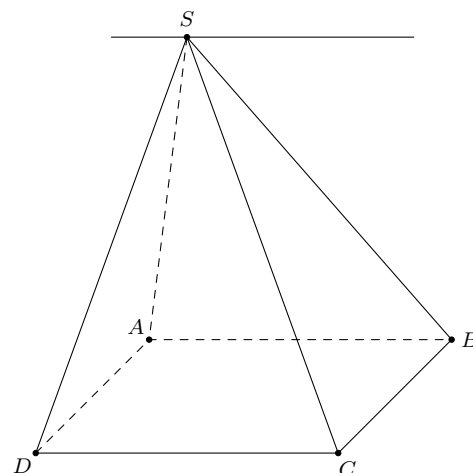
(D) d là đường thẳng SK với K là trung điểm của AB .

Lời giải.

Ta có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến là d với d là đường thẳng qua điểm S và song song với AB .



Chọn đáp án (B)

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC , G là trọng tâm $\triangle SAB$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là

(A) đường thẳng qua S và song song với AB .

(B) đường thẳng qua G và song song với DC .

(C) SC .

(D) đường thẳng qua G và cắt BC .

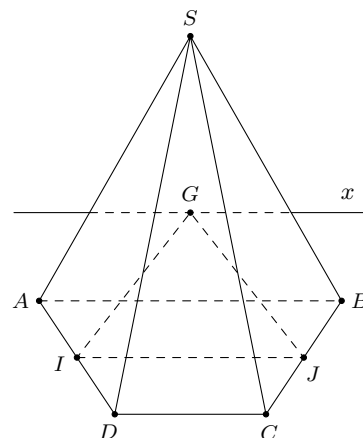
Lời giải.

Ta có $IJ \parallel AB$ (1) (đường trung bình hình thang).

$G \in (GIJ) \cap (SAB)$. (2)

$IJ \subset (GIJ), AB \subset (SAB)$. (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow Gx = (GIJ) \cap (SAB), Gx \parallel AB, Gx \parallel CD$.



Chọn đáp án (B)

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là trung điểm đoạn SB , G là trọng tâm tam giác SAD . Gọi J là giao điểm của AD với (OMG) khi đó $\frac{JD}{AD}$ bằng

(A) $\frac{2}{5}$.

(B) $\frac{1}{4}$.

(C) $\frac{2}{3}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có MO là đường trung bình của tam giác SBD suy ra $MO \parallel SD$.

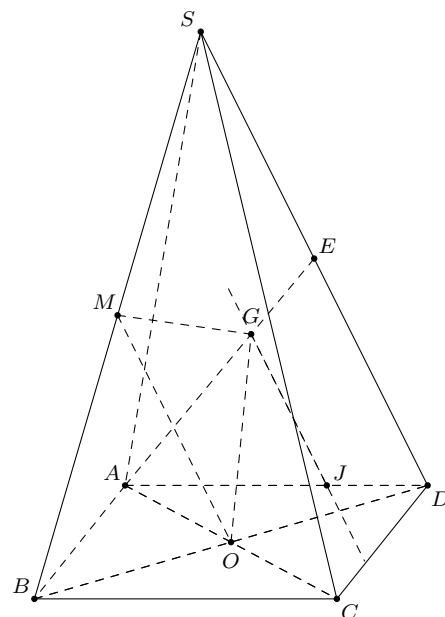
Ta có $\begin{cases} MO \parallel SD \\ G \in (OMG) \cap (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow (OMG) \cap (SAD) = Gx \parallel SD \parallel MO$

$\Rightarrow Gx \cap AD = J$.

Ta có $J \in Gx \subset (OMG) \Rightarrow J = AD \cap (OMG)$.

Gọi E là trung điểm SD với G là trọng tâm ta có $\frac{AG}{AE} = \frac{2}{3}$.



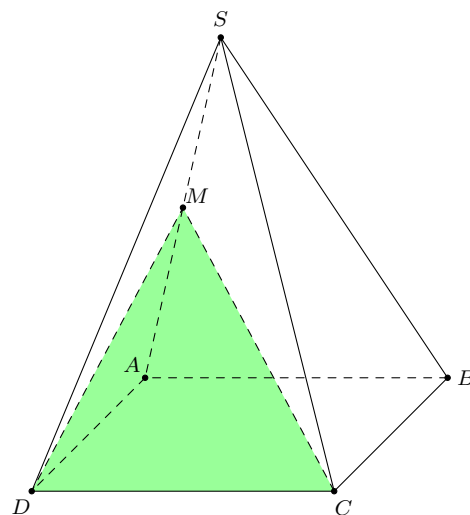
Do $GJ \parallel MO \parallel SD$, áp dụng định lý Ta-lét trong tam giác AED ta có $\frac{GE}{AE} = \frac{JD}{AD} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 28.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA . Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là

- (A) Không có giao điểm.
- (B) Giao điểm của đường thẳng SB và MC .
- (C) Giao điểm của đường thẳng SB và MD .
- (D) Trung điểm của đoạn thẳng SB .



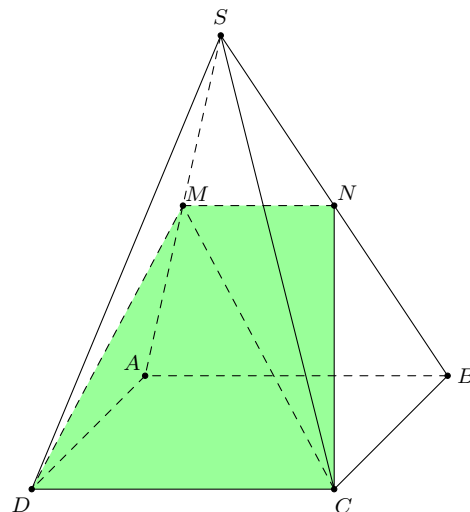
Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ M \in (CMD) \cap (SAB) \\ CD \subset (CMD), AB \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow$ giao tuyến của hai mặt phẳng (CMD) và (SAB) là đường thẳng $MN \parallel AB \parallel CD$ với $N \in SB$.

$\Rightarrow N$ là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) .

Xét tam giác $\triangle SAB$ có M là trung điểm SA và $MN \parallel AB \Rightarrow N$ là trung điểm SB .



Chọn đáp án (D)

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SB . Giao điểm của DM và (SAC) là

(A) Giao điểm của DM và SA .

(B) Giao điểm của DM và SC .

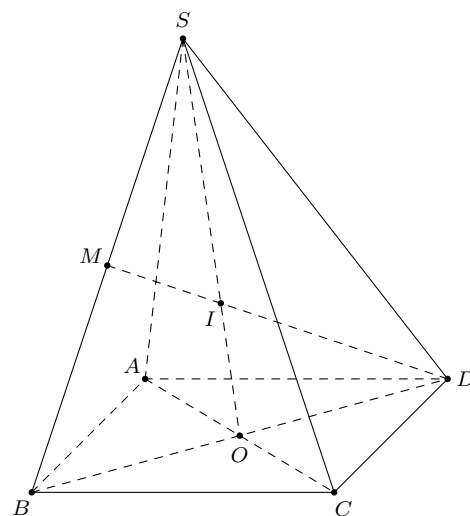
(C) Giao điểm của DM và SO .

(D) Giao điểm của DM và BD .

🗨️ **Lời giải.**

Trong (SBD) , gọi $I = SO \cap DM \Rightarrow \begin{cases} I \in DM \\ I \in SO \subset (SAC) \end{cases}$

Vậy $I = DM \cap (SAC)$.



Chọn đáp án (C)

Câu 30. Cho tứ diện $ABCD$, có độ dài các cạnh đôi một khác nhau. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, CD . Mặt phẳng (MNP) cắt BD tại điểm Q . Phát biểu nào sau đây **sai**?

(A) $MN = MQ$.

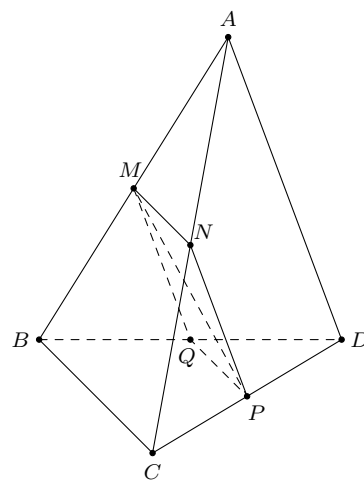
(B) $MQ = NP$.

(C) $PQ \parallel (ABC)$.

(D) $MQ \parallel (ACD)$.

🗨️ **Lời giải.**

$MN = \frac{1}{2}BC; MQ = \frac{1}{2}AD \Rightarrow MQ \neq MN$ (vì $BC \neq AD$).



Chọn đáp án (A)

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SO . Gọi E là giao điểm của SC với mặt phẳng (MNP) . Tính tỉ số $\frac{SE}{SC}$.

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{3}{4}$.

(C) $\frac{2}{7}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

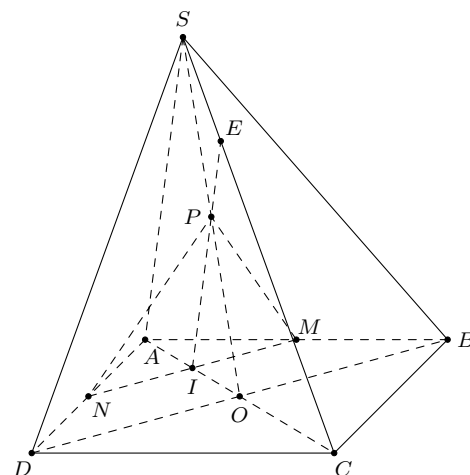
🗨️ **Lời giải.**

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $I = MN \cap AC$. Khi đó I là trung điểm của AO .

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $E = PI \cap SC \Rightarrow E = SC \cap (MNP)$.

Vì I là trung điểm của AO , P là trung điểm của SO nên $PI \parallel SA \Rightarrow$

$$IE \parallel SA \Rightarrow \frac{CI}{CA} = \frac{CE}{CS} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{SE}{SC} = \frac{1}{4}.$$



Chọn đáp án (A)

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = \frac{2}{3}SD$. Mặt phẳng chứa AM và song song với BD cắt cạnh SC tại K . Tỷ số $\frac{SK}{SC}$ bằng

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SBD) qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt SB tại N .

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$.

Trong mặt phẳng (SBD) gọi $I = SO \cap MN$.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $K = AI \cap SC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in AI \subset (AMN) \\ K \in SC \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (AMN).$$

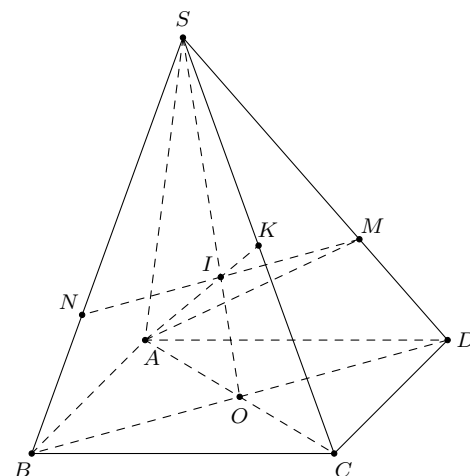
$$\Delta SOD \text{ có } MI \parallel DO \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{SM}{SD} = \frac{2}{3}.$$

$$\Delta SAC \text{ có } SO \text{ là trung tuyến và } \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow I \text{ là trọng tâm tam giác } \Delta SAC.$$

Nên AK là đường trung tuyến của ΔSAC .

$$\text{Do đó } K \text{ là trung điểm của } SC \Rightarrow \frac{SK}{SC} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (C)



Dạng 4. Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Để tìm thiết diện của mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với hai cạnh a, b của hình chóp ta làm như sau

- ☑ Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh a .
- ☑ Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với a .
- ☑ Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh b .
- ☑ Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với b .

Nối các đoạn giao tuyến lại ta được thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 17. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M tùy ý trên cạnh BC . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AD, AC . Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi (α) .

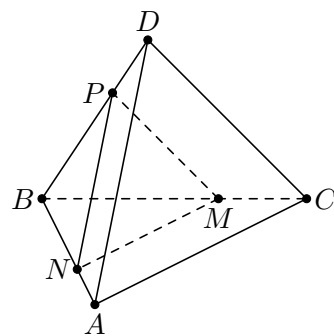
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABC) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABC) \end{cases}$ nên giao tuyến của (α) và (ABC) là đường thẳng qua

M , song song với AC , cắt AB tại N .

Tương tự, giao tuyến của (α) và (ABD) là đường thẳng qua N , song song với AD , cắt BD tại P .

Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABC) = MN \\ (\alpha) \cap (ABD) = NP \\ (\alpha) \cap (BCD) = PM \end{cases}$ nên thiết diện của tứ diện cắt bởi (α) là tam giác MNP .



□

Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm AB . Mặt phẳng (α) qua M và song song với BD, SA . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) .

Lời giải.

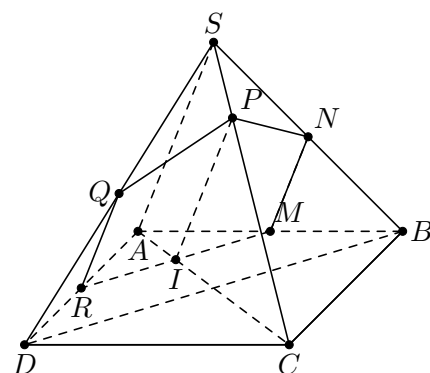
Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$ nên giao tuyến của (α) và (SAB) là đường thẳng

qua M , song song với SA , cắt SB tại N .

Lại có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BD \parallel (\alpha) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$ nên giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là đường

thẳng qua M , song song với BD , cắt AC, AD lần lượt tại I, R .

Tương tự, giao tuyến của (α) và (SAD) là đường thẳng qua R , song song với SA , cắt SD tại Q .



Mặt khác, $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SAC) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$ nên giao tuyến của (α) và (SAC) là đường thẳng qua I , song song với SA , cắt SC

tại P .

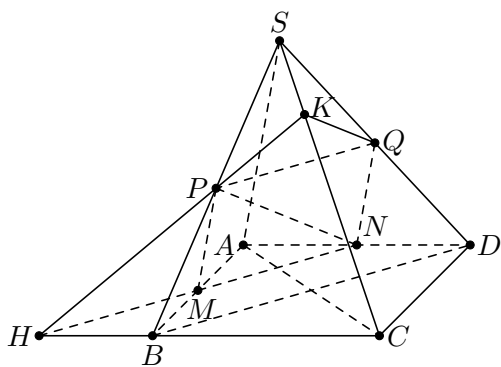
Ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAB) = MN \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \\ (\alpha) \cap (SCD) = PQ \\ (\alpha) \cap (SDA) = QR \\ (\alpha) \cap (ABCD) = RM \end{cases}$ nên giao tuyến của hình chóp cắt bởi (α) là ngũ giác $MNPQR$.

□

Ví dụ 19. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB .

- Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.
- Tìm giao điểm của (MNP) với BC .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) .
- Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP) .

Lời giải.

$$\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = (MNP) \cap BC.$$

$$\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (MNP), (BD) \subset (SBD) \Rightarrow \Delta \parallel MN. \\ (MNP) \cap (SBD) = \Delta \end{cases}$$

d) Trong (SBC) , dựng $K = HP \cap SC$. Giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(ABCD)$, (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SDA) lần lượt là MN , PM , PK , KQ , QN . Vậy thiết diện của hình chóp với (MNP) là ngũ giác $PMNQK$.

The diagram illustrates a 3D geometric structure. A tetrahedron $ABCD$ is shown with vertices A , B , C , and D . A point S is located above the tetrahedron, connected to vertices A , B , and C . A plane passes through points H , K , M , E , and N , creating a shaded blue cross-section. Dashed lines represent hidden edges and the projection of the plane onto the base.

Ví dụ 21. Cho hình chóp $S.ABCD$. M, N là hai điểm trên SB, CD . Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải.

Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC . Vẽ $MK \parallel SC$ ($K \in BC$) thì MK là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SBC) .

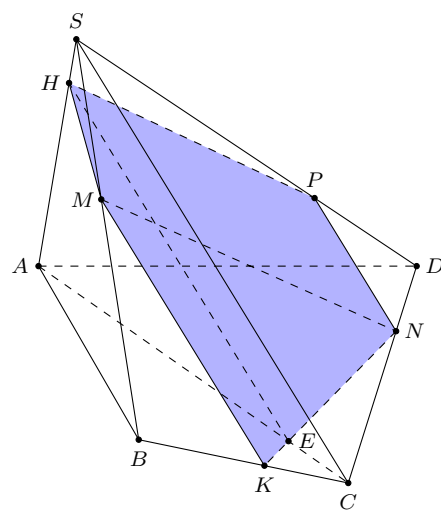
Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC . Vẽ $NP \parallel SC$ ($P \in SD$) thì NP là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SCD) .

Trong $(ABCD)$ ta có $AC \cap NK = E \Rightarrow E \in (P)$.

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC . Vẽ $EH \parallel SC$ ($H \in SA$) thì EH là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAC) .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SAD) với mặt phẳng (P) là PH ; HM là giao tuyến của (P) với (SAB) .

Vậy thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.



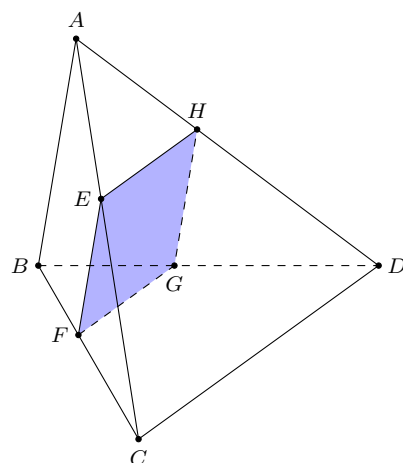
Ví dụ 22. Cho tứ diện $ABCD$, điểm E nằm giữa hai điểm A và C . Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, CD . Xác định các giao tuyến của (P) và các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Vẽ $EF \parallel AB$ ($F \in BC$) thì EF là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABC) .

Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên chúng cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ EF, GH lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) . Khi đó GH là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABD) .

Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến GH của (ABD) và (P) song song với AB . Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH$ (vì cùng song song với AB) và $EH \parallel FG$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành.



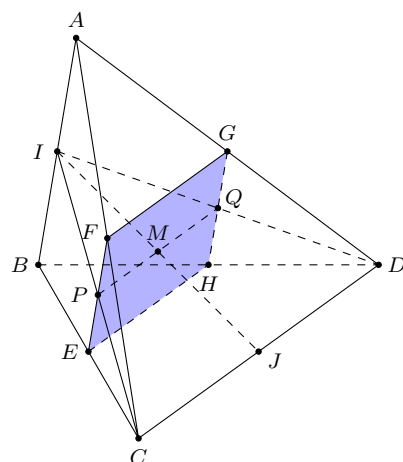
Ví dụ 23. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mặt phẳng (P) đi qua một điểm M trên đoạn IJ và song song với AB và CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ICD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ICD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Qua M vẽ $PQ \parallel CD$ ($P \in IC$; $Q \in ID$) thì PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ICD) .

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Qua P vẽ $EF \parallel AB$ ($E \in BC$; $F \in AC$) thì EF là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SBC) .

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $FG \parallel CD$ ($G \in AD$) thì FG là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ACD) .



Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $EH \parallel CD$ ($H \in BD$) thì EH là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) . Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (ABD) với mặt phẳng (P) là GH .

Ta có $Q \in (ABD) \cap (P) \Rightarrow Q \in QH; EF \parallel GH; FG \parallel EH$.

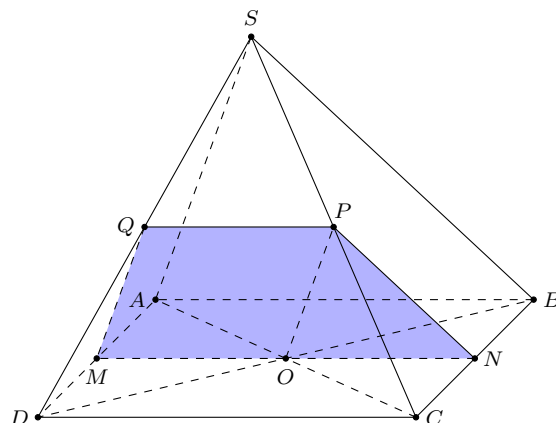
Vậy thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $EFGH$. $\square$

Ví dụ 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng (P) qua O đồng thời song song với SA và CD . Tìm thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp.

Lời giải.

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA . Vẽ $OP \parallel SA$ ($P \in SC$) thì OP là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAC) .

Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Qua O vẽ $MN \parallel CD$ ($M \in AD; N \in BC$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng $(ABCD)$.



Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $PQ \parallel CD$ ($Q \in SD$) thì PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SCD) .

Ta có NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) với (SBC) .

Tứ giác $MPNQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình thang. $\square$

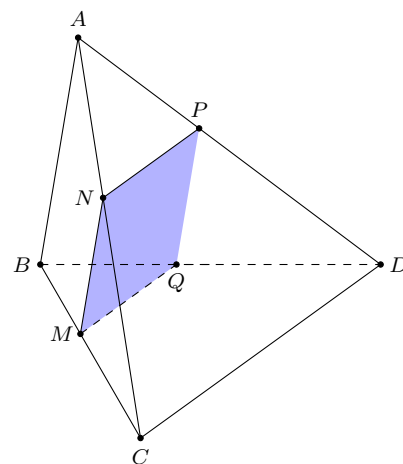
2. Bài tập tự luận

Bài 22. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . (P) là mặt phẳng qua M và song song với hai đường thẳng AB, CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Vẽ $MN \parallel AB$ ($N \in AC$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABC) . Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên chúng cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ MQ, NP lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) . Khi đó PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABD) .

Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến PQ của (ABD) và (P) song song với AB .



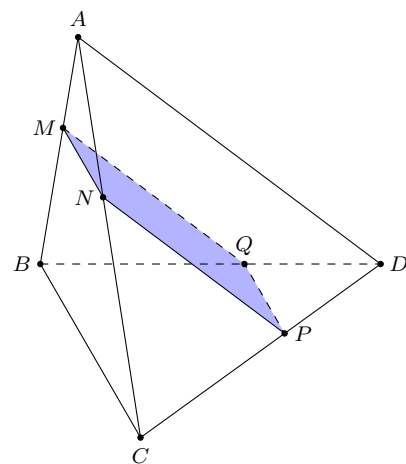
Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với AB) và $NP \parallel MQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành. $\square$

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . (P) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC . Vẽ $MN \parallel BC$ ($N \in AC$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD . Vẽ $MQ \parallel AD$ ($Q \in BD$) thì MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (ABD) .

Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC . Vẽ $QP \parallel BC$ ($P \in CD$) thì PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) .



Khi đó NP là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ACD) .

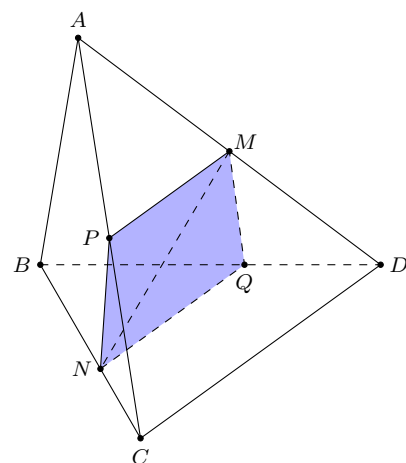
Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến NP của (ACD) và (P) song song với AD . Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với BC) và $NP \parallel MQ$ (vì cùng song song với AD) nên nó là hình bình hành. $\square$

Bài 24. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AD ; N là điểm bất kỳ trên cạnh BC . Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $MP \parallel CD$ ($P \in CD$) thì MP là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ACD) . Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $NQ \parallel CD$ ($Q \in BD$) thì NQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) . Khi đó MQ là giao tuyến của (P) với (ABD) ; NP là giao tuyến của (P) với (ABC) .

Tứ giác $MPNQ$ có $MP \parallel NQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình thang.



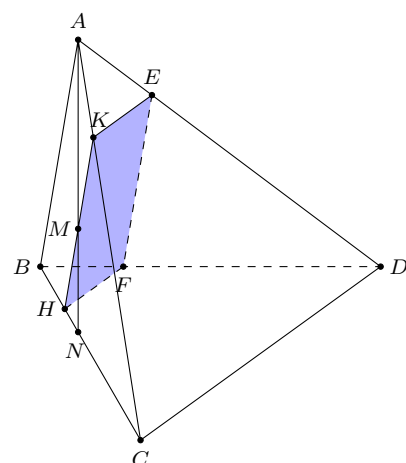
Bài 25. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác ABC , (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với các đường thẳng AB và CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải.

Trong (ABC) ta có $AM \cap BC = N$.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Qua M vẽ $HK \parallel AB$ ($H \in BC$; $K \in AC$) thì HK là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABC) .

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $KE \parallel CD$ ($E \in AD$) thì KE là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ACD) . Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $HF \parallel CD$ ($F \in BD$) thì HF là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) .



Tứ giác $KEFH$ có $KE \parallel HF$ (vì cùng song song với CD) và $HK \parallel FE$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình bình hành. $\square$

Bài 26. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác BCD , (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với các đường thẳng AB và CD . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

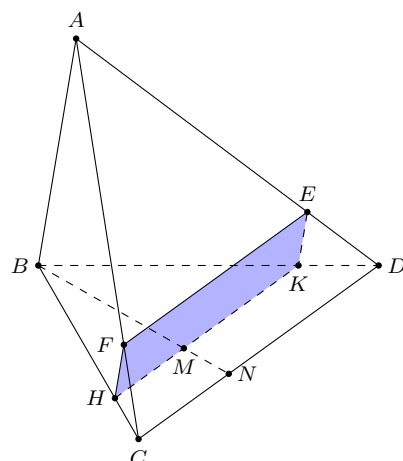
Lời giải.

Trong (BCD) ta có $BM \cap CD = N$.

Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Qua M vẽ $HK \parallel CD$ ($H \in BC$; $K \in BD$) thì HK là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD) .

Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Vẽ $KE \parallel AB$ ($E \in AD$) thì KE là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABD) .

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Vẽ $HF \parallel AB$ ($F \in AC$) thì HF là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABC) .



Tứ giác $KEFH$ có $KE \parallel HF$ (vì cùng song song với AB) và $HK \parallel FE$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành. □

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm trên cạnh SC và (P) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

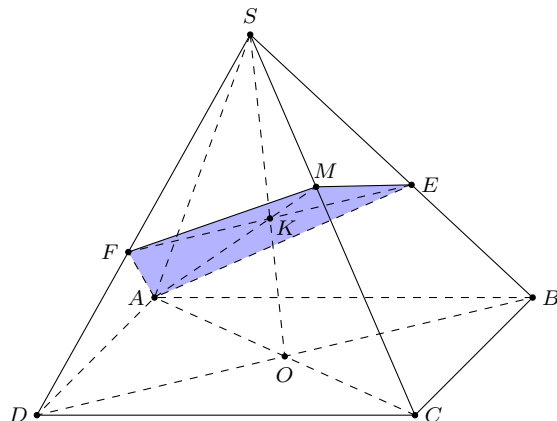
Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Trong (SAC) ta có $AM \cap SO = K$.

Mặt phẳng (SBD) chứa đường thẳng BD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BD . Qua K vẽ $EF \parallel BD$ ($E \in SB$; $F \in SD$) thì EF là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SBD) .

Khi đó AF là giao tuyến của (P) với (SAD) ; FM là giao tuyến của (P) với (SCD) ; MF là giao tuyến của (P) với (SBC) ; AE là giao tuyến của (P) với (SAB) .



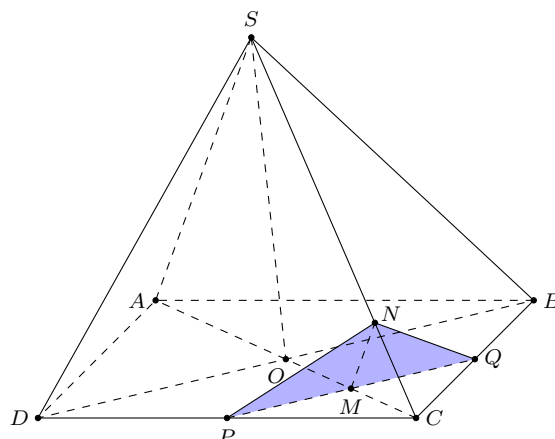
Thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AFME$. □

Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . M là trung điểm OC . (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BD . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA . Vẽ $MN \parallel SA$ ($N \in SC$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAC) .

Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng BD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BD . Qua M vẽ $PQ \parallel BD$ ($P \in DC$, $Q \in BC$) thì PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng $(ABCD)$.



Khi đó MP là giao tuyến của (P) với (SCD) ; NQ là giao tuyến của (P) với (SBC) .

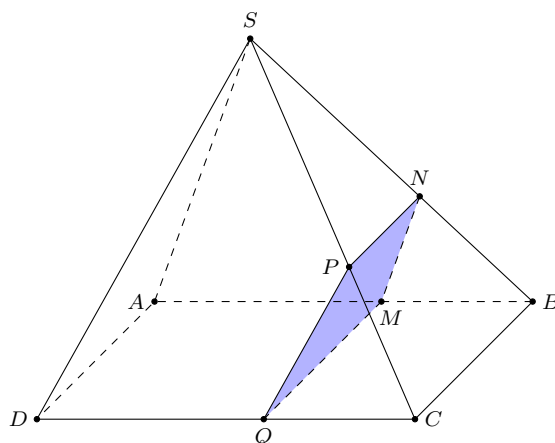
Vậy thiết diện là $\triangle NPQ$. □

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là điểm di động trên đoạn AB . (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA . Vẽ $MN \parallel SA$ ($N \in SB$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAB) .

Hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ cùng chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên chúng cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC . Vẽ NP , MQ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Khi đó PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SCD) .



Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến NP của (SBC) và (P) song song với BC .

Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến MQ của $(ABCD)$ và (P) song song với BC .

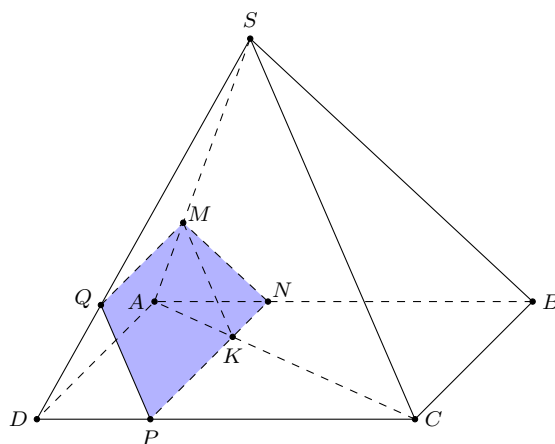
Tứ giác $MNPQ$ có $MQ \parallel NP$ (vì cùng song song với BC) nên nó là hình thang. □

Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là điểm thuộc đoạn SA . (P) là mặt phẳng qua M và song song với SC và AD . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC . Vẽ $MK \parallel SC$ ($K \in AC$) thì MK là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAC) .

Mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD . Vẽ $MQ \parallel AD$ ($Q \in SD$) thì MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) .



Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD . Qua K vẽ $NP \parallel AD$ ($N \in AB$; $P \in CD$) thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAB) .

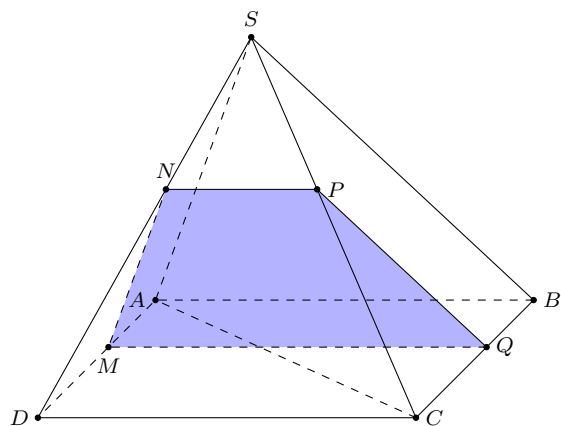
Tứ giác $MNPQ$ có $MQ \parallel NP$ (vì cùng song song với AD) nên nó là hình thang. □

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là điểm di động trên cạnh AD . (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA và CD . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA . Vẽ $MN \parallel SA$ ($N \in SD$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAD) .

Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $NP \parallel CD$ ($P \in SC$) thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SCD) .



Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $MQ \parallel CD$ ($Q \in BC$) thì MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Khi đó PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SBC) .

Tứ giác $MNPQ$ có $MQ \parallel NP$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình thang. □

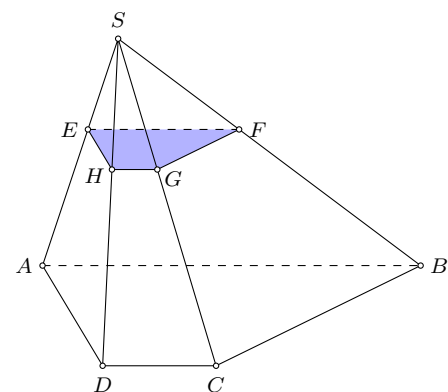
Bài 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi E là một điểm nằm giữa S và A . Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB, AD . Xác định giao tuyến của (P) và các mặt bên của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Lời giải.

Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Vẽ $EF \parallel AB$ ($F \in SB$) thì EF là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAB) .

Mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD .

Vẽ $EH \parallel AD$ ($H \in SD$) thì EH là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAD) .



Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng $CD \parallel AB$ song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Vẽ $HG \parallel CD$ ($G \in SC$) thì HG là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SCD) . Khi đó GF là giao tuyến của (P) với (SBC) .

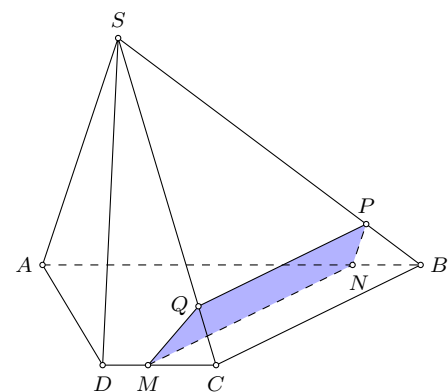
Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình thang. □

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là hình thang đáy lớn là AB . Gọi M là một điểm trên cạnh CD . (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC . Vẽ $MN \parallel BC$ ($N \in AB$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA . Vẽ $NP \parallel SA$ ($P \in SB$) thì NP là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAB) .



Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC . Vẽ $PQ \parallel BC$ ($Q \in SC$) thì PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SBC) . Khi đó MQ là giao tuyến của (P) với (SCD) .

Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với BC) nên nó là hình thang. □

Bài 34. Cho tứ diện đều $S.ABC$. Gọi I ; M lần lượt là trung điểm AB và AI . (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng SIC . Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $S.ABC$.

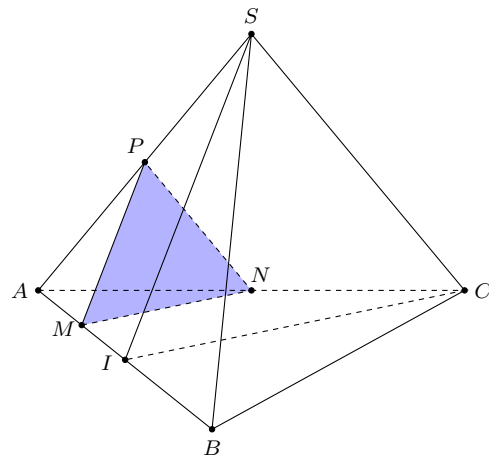
Lời giải.

Ta có $(P) \parallel (SIC) \Rightarrow (P) \parallel SI, SC, IC$.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng IC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với IC . Vẽ $MN \parallel IC$ ($N \in AC$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (ABC) .

Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng SI song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SI . Vẽ $MP \parallel SI$ ($P \in SA$) thì MP là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAB) .

Khi đó PN là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAC) .



Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC . Suy ra $PN \parallel SC$.

Ta có MN là đường trung bình của $\triangle AIC$ nên $MN = \frac{IC}{2}$;

MP là đường trung bình của $\triangle SAI$ nên $MP = \frac{SI}{2}$;

Mà $IC = SI$ (do $S.ABC$ là tứ diện đều) nên $MN = MP$.

Thiết diện là tam giác MNP cân tại M . □

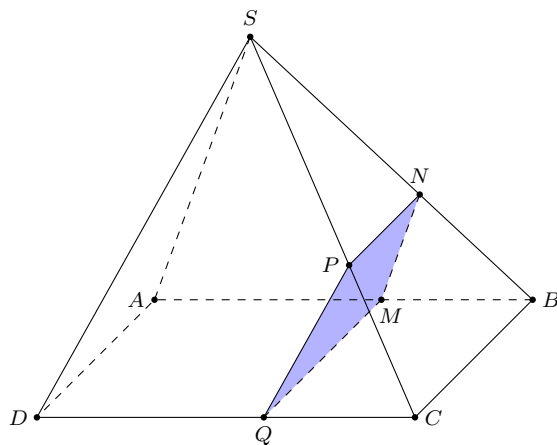
Bài 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. M là điểm di động trên đoạn AB . (P) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

Ta có $(P) \parallel (SAD) \Rightarrow (P) \parallel SA, SD, AD$.

Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA . Vẽ $MN \parallel SA$ ($N \in SB$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAB) .

Hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ lần lượt chứa đường thẳng BC ; AD song song với mặt phẳng (P) nên chúng cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với $BC \parallel AD$. Vẽ NP , MQ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Khi đó PQ là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SCD) .



Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến NP của (SBC) và (P) song song với BC .

Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến MQ của $(ABCD)$ và (P) song song với BC .

Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SD song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến PQ của (SCD) và (P) song song với SD .

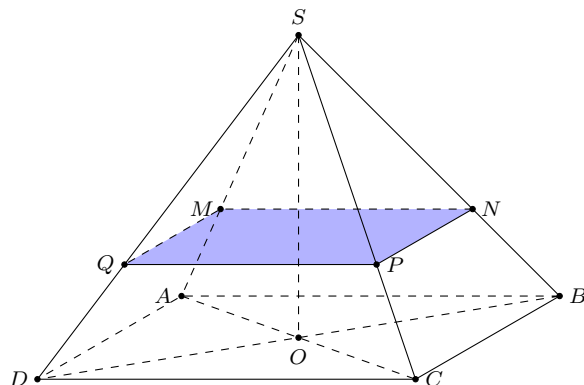
Tứ giác $MNPQ$ có $MQ \parallel NP$ (vì cùng song song với BC) nên nó là hình thang. □

Bài 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. (P) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng AB và AD . Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$. Tính diện tích thiết diện này.

Lời giải.

Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB . Vẽ $MN \parallel AB$ ($N \in SB$) thì MN là giao tuyến của (P) với mặt phẳng (SAB) .

Mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD . Vẽ $MQ \parallel AD$ ($Q \in SD$) thì MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SAD) .



Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng $BC \parallel AD$ song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC . Vẽ $NP \parallel BC$ ($P \in SC$) thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) với hai mặt phẳng (SBC) .

Khi đó QP là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt phẳng (SCD) .

Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng $CD \parallel AB$ song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD . Suy ra $QP \parallel CD$.

Tứ giác $MNPQ$ có $MQ \parallel NP$ (vì cùng song song với BC); $MN \parallel QP$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp AD \Rightarrow MN \perp MQ$; $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = 10 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$.

Tương tự $MQ = \frac{20}{3}$.

Vậy $MNPQ$ là hình vuông và có diện tích là $\frac{20}{3} \cdot \frac{20}{3} = \frac{400}{9}$.

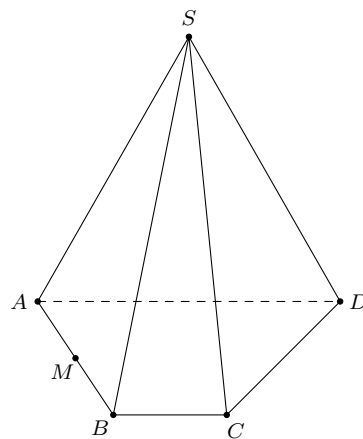
□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 33.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang ($AD \parallel BC, AD > BC$). Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song SA và BC . Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì?

- (A) Ngũ giác. (B) Hình bình hành.
 (C) Tam giác. (D) Hình thang.

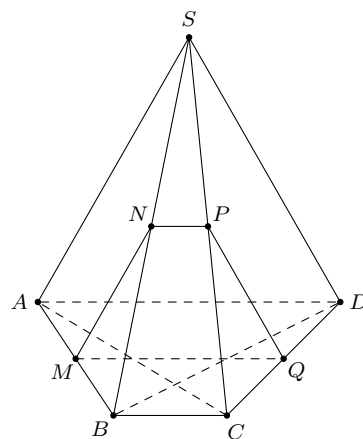


Lời giải.

Gọi N là giao điểm của SB và (P) , suy ra $MN \parallel SA \Rightarrow N$ là trung điểm SB .

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của SC, CD với (P) , tương tự có được P, Q là trung điểm của SC, DC .

Suy ra $NP \parallel MQ$ nên $MNPQ$ là hình thang.



Chọn đáp án (D)

□

Câu 34. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song BD . Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) .

- (A) $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. (B) $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. (C) $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. (D) $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, $G = SO \cap AM$, trong mặt phẳng (SBD) kẻ đường thẳng d đi qua G song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại F và E . Ta có thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp là tứ giác $AEMF$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$
 $\Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp AM$.

kẻ $MH \parallel SO$ ($H \in AC$). Ta có $\frac{CH}{CO} = \frac{CM}{CS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \frac{OG}{MH} = \frac{AO}{AH} = \frac{3}{5}$$

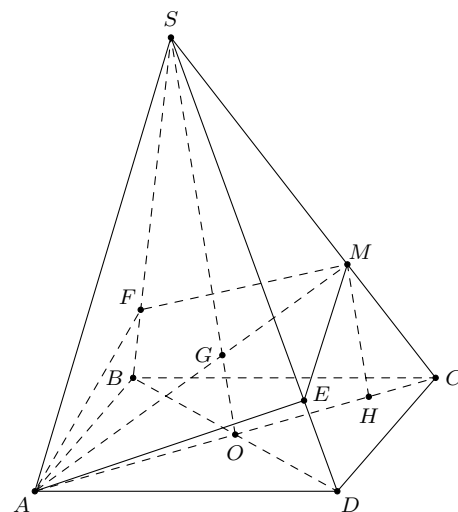
$$\Rightarrow OG = \frac{3}{5}MH = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}SO = \frac{1}{5}SO.$$

$$\text{Suy ra } \frac{EF}{BD} = \frac{SG}{OS} = \frac{4}{5} \Rightarrow EF = \frac{4}{5}BD = \frac{4a\sqrt{2}}{5}.$$

$$\text{Để thấy tam giác } SAC \text{ vuông cân tại } S \text{ nên } AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } S_{AEMF} = \frac{1}{2}AM \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{3} \cdot \frac{4a\sqrt{2}}{5} = \frac{2a^2\sqrt{26}}{15}.$$

Chọn đáp án (B)



Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB . Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD , thiết diện thu được là hình gì?

- (A) Tam giác đều. (B) Tam giác vuông. (C) Hình bình hành. (D) Ngũ giác.

Lời giải.

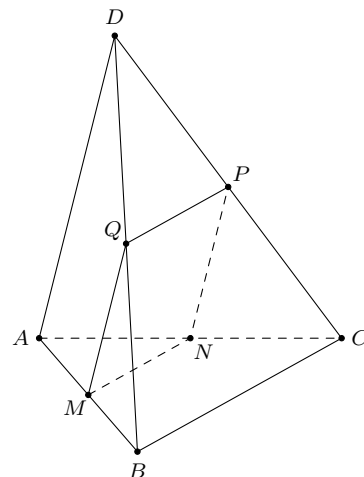
Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với AD và BC . Giả sử N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với AC, CD và DB .

Vì $(\alpha) \cap (ABC) = MN$ và $BC \parallel (\alpha)$ suy ra $MN \parallel BC$. Tương tự ta có $PQ \parallel BC$ do đó $MN \parallel PQ$.

Vì $(\alpha) \cap (ACD) = NP$ và $AD \parallel (\alpha)$ suy ra $NP \parallel AD$. Tương tự ta có $QM \parallel AD$ suy ra $MQ \parallel NP$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (C)



Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . SA vuông góc với đáy, M là một điểm trên cạnh AB . Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA, AD . Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) là

- (A) Hình bình hành. (B) Hình vuông. (C) Hình thang vuông. (D) Hình chữ nhật.

Lời giải.

Ta có

$$(1) \begin{cases} (P) \parallel SA \\ M \in (SAB) \cap (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAB) = MN$$

(với $N \in SB; MN \parallel SA$).

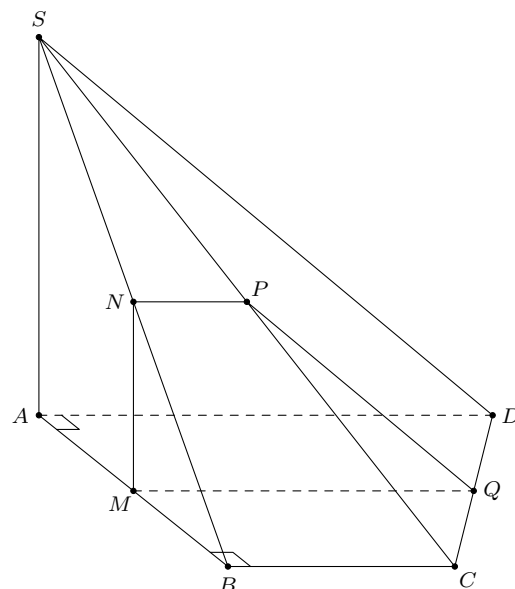
$$(2) \begin{cases} (P) \parallel AD \\ M \in (ABCD) \cap (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABCD) = MQ$$

(với $Q \in BC; MQ \parallel AD$).

$$(3) \begin{cases} (P) \parallel AD \\ N \in (SBC) \cap (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = NP$$

(với $P \in SC; NP \parallel AD \parallel BC$).

Từ (1), (2), (3) ta kết luận được thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$.

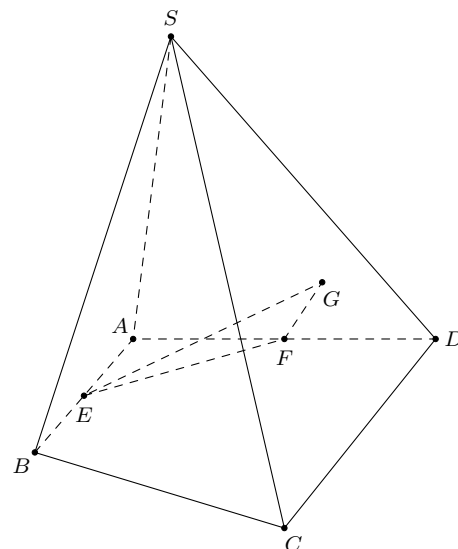


Chọn đáp án **(C)**

Câu 37.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là điểm nằm trong tam giác SCD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD (tham khảo hình vẽ bên). Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là

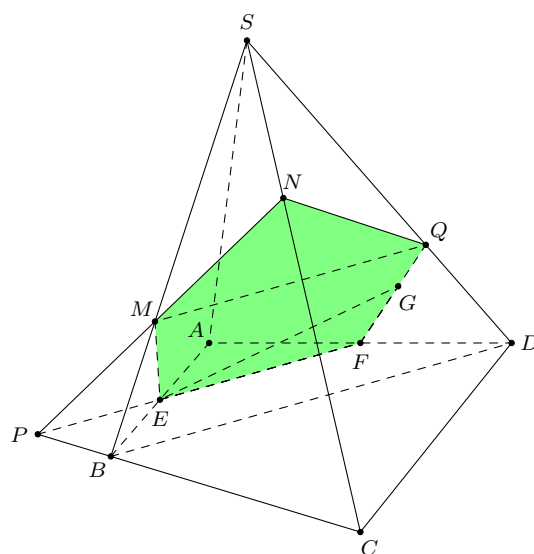
- (A)** hình tam giác. **(B)** hình tứ giác.
(C) hình ngũ giác. **(D)** hình lục giác.



Lời giải.

Vì E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $EF \parallel BD$. Kéo dài EF cắt BC tại P .

Gọi Q là giao điểm của FG và SD . Kẻ $QM \parallel BD$ ($M \in SB$). Nối PM cắt SC tại N . Khi đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi (EFG) là ngũ giác $EMNQF$.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O . Gọi M là trung điểm của OC . Mặt

phẳng (α) qua M và (α) song song với SA và BD . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) là hình gì?

(A) Hình tam giác.

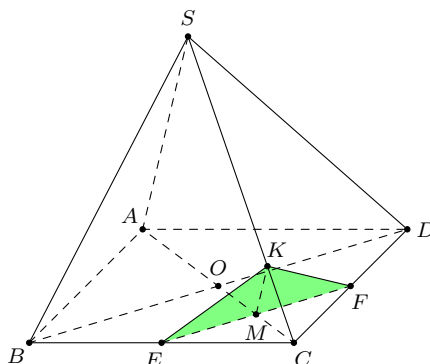
(B) Hình bình hành.

(C) Hình chữ nhật.

(D) Hình ngũ giác.

Lời giải.

Thiết diện là tam giác EFK như hình vẽ.



Chọn đáp án (A)

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh BC ; AD . Thiết diện thu được là hình gì?

(A) Tam giác đều.

(B) Tam giác vuông.

(C) Hình bình hành.

(D) Ngũ giác.

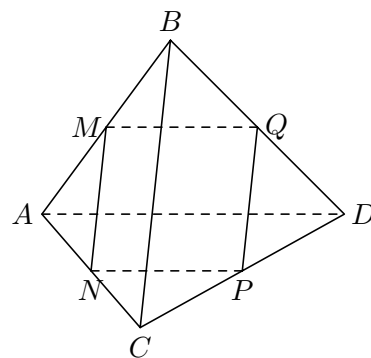
Lời giải.

Gọi N , P , Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC , CD , BD .

Khi đó MN và PQ cùng song song với BC và cùng bằng nửa BC .

Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành (đương nhiên lúc đó M , N , P , Q đồng phẳng)

Ngoài ra NP song song với AD nên $(MNPQ)$ là thiết diện qua M và song song với cả BC lẫn AD .



Chọn đáp án (C)

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB , SD và BC . Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với cạnh SA . Tính tỉ số $\frac{SE}{SA}$.

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

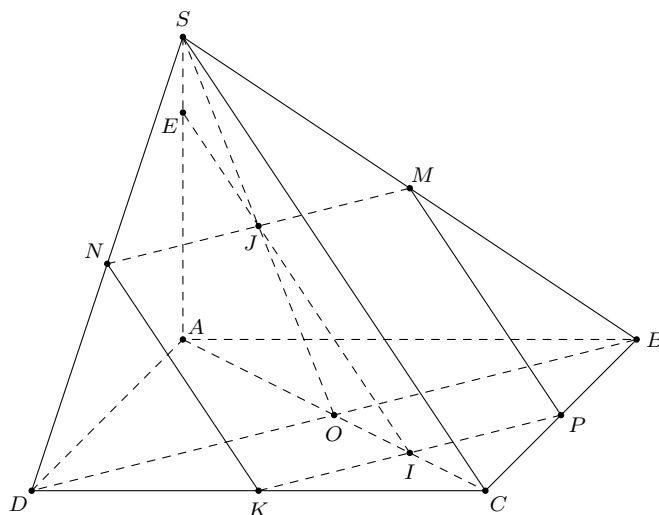
Mặt phẳng (MNP) song song với BD nên cắt DC tại trung điểm K .

Kẻ KP cắt AC tại I , kẻ MN cắt SO tại J .

Trong mặt phẳng (SAC) , IJ cắt SA tại E .

Vì $(MNP) \parallel SC$ nên $IJ \parallel SC$.

Vậy $\frac{SE}{SA} = \frac{IC}{AC} = \frac{1}{4}$.



Câu 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua O , song song với AB và SC là hình gì?

- (A) Hình chữ nhật. (B) Hình thang. (C) Hình bình hành. (D) Hình vuông.

Lời giải.

Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC, AD lần lượt tại M, N .

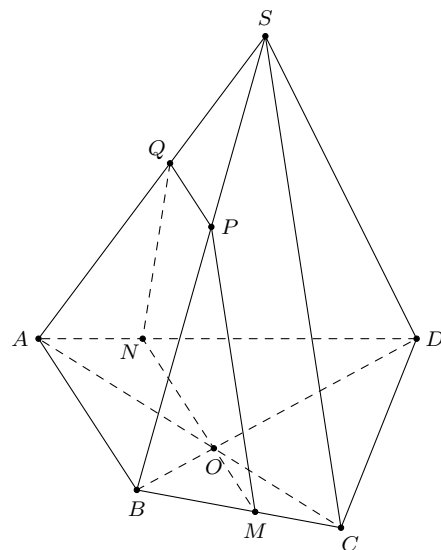
Qua M kẻ đường thẳng song song với SC cắt SB tại P .

Qua P kẻ đường thẳng song song với AB cắt SA tại Q .

Ta được thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Vì QP, MN cùng song song với AB nên $QP \parallel MN$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang.



Chọn đáp án (B)

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$), cạnh $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Tam giác SAB cân tại S , $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q . Đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Biết x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn, bán kính của đường tròn đó là

- (A) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. (B) $\frac{a\sqrt{7}}{6}$. (C) $\frac{3a}{4}$. (D) a .

Lời giải.

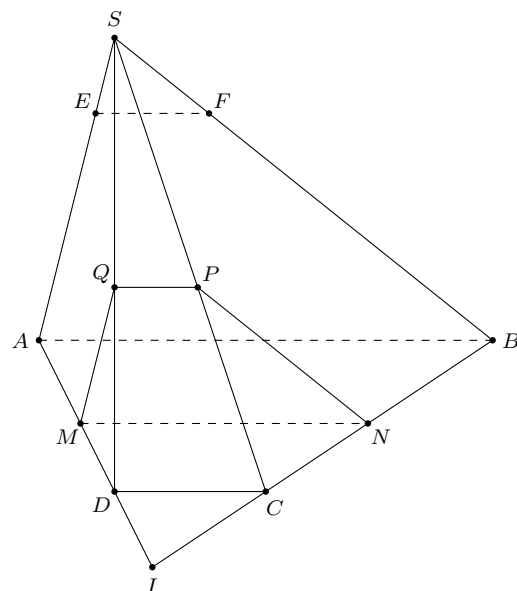
- ☑ Vì (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q nên $MN \parallel AB \parallel PQ$, $MQ \parallel SA$, $NP \parallel SB$.

- ☑ Theo công thức Hê-rông, diện tích $\triangle SAB$ là

$$S_{SAB} = \frac{3\sqrt{7}}{4}a^2.$$

Gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB . Suy ra,

$$r_1 = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{7}}{14}a.$$



- ☑ Gọi E, F nằm trên SA, SB sao cho EF song song AB và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác SAB .

Khi đó, khoảng cách giữa EF và AB là $d = 2r_1 = \frac{3\sqrt{7}}{7}a$.

Gọi h là đường cao tam giác SAB , ta có

$$h = \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

Suy ra,

$$\frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SA} = \frac{h-d}{h} = \frac{1}{7}.$$

☑ Ta có,

$$\frac{AM}{AD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{QP}{DC} \Rightarrow QP = AM = x.$$

Mặt khác, gọi I là giao điểm của AD và BC . Ta có,

$$\frac{MN}{AB} = \frac{IM}{IA} = \frac{3a - 2x}{3a} \Rightarrow MN = 3a - 2x.$$

Điều kiện để hình thang $MNPQ$ ngoại tiếp đường tròn là hai hình thang $MNPQ$ và $ABEF$ đồng dạng. Khi đó,

$$\frac{QP}{MN} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{x}{3a - 2x} = \frac{1}{7} \Rightarrow x = \frac{a}{3}.$$

☑ Gọi r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp hình thang $MNPQ$. Ta có

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{MN}{AB} = \frac{3a - 2x}{3a} = \frac{7}{9} \Rightarrow r_2 = \frac{a\sqrt{7}}{6}.$$

Chọn đáp án (B)

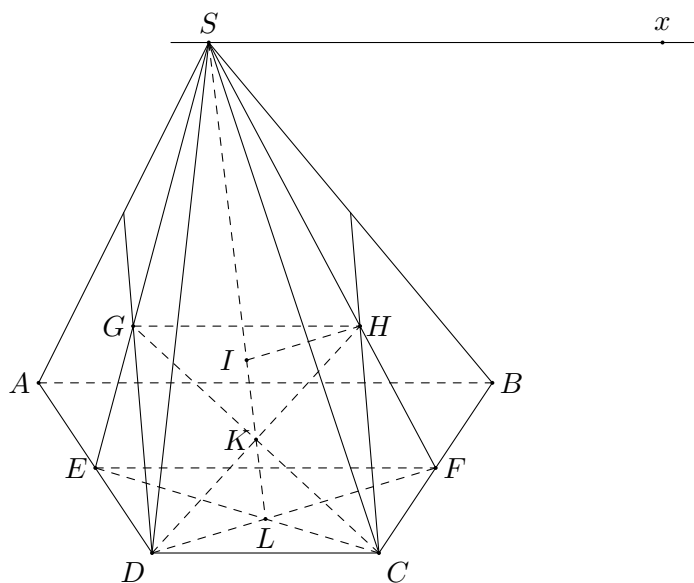


Dạng 5. Ba điểm thẳng hàng-Bài toán quỹ tích

Bài 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 2CD$. Gọi G, H lần lượt là trọng tâm tam giác SAD và SBC , gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
- Chứng minh rằng: $GH \parallel (SCD)$.
- Gọi K là giao điểm của CG và DH , L là giao điểm của CE và DF . Chứng minh ba điểm S, K, L thẳng hàng và tính tỉ số $\frac{SK}{SL}$.

Lời giải.



- Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \text{ với } Sx \parallel AB \parallel CD.$

- b) Vì G, H lần lượt là trọng tâm $\triangle SAD$ và $\triangle SBC$ nên $\begin{cases} SG = \frac{2}{3}SE \\ SH = \frac{2}{3}SF \end{cases} \Rightarrow \frac{SG}{SE} = \frac{SH}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow GH \parallel EF$.

Mặt khác, $EF \parallel CD$ (do EF là đường trung bình của hình thang $ABCD$)

Suy ra $GH \parallel CD$.

Do đó, ta có $\begin{cases} GH \parallel CD \\ EF \subset (SCD) \Rightarrow GH \parallel (SCD). \\ GH \not\subset (SCD) \end{cases}$

- c) Ta có $\begin{cases} S = GE \cap HF \\ K = CG \cap DH \Rightarrow S, K, L \in (GEC) \cap (HFD) \Rightarrow S, K, L \text{ thẳng hàng.} \\ L = CE \cap DF \end{cases}$

Trong (SDF) , kẻ đường thẳng đi qua H và song song với DF , cắt SL tại I .

Ta có EF là đường trung bình hình thang $ABCD \Rightarrow EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{3}{2}CD$.

Khi đó $\frac{DL}{LF} = \frac{CD}{EF} = \frac{2}{3}$.

Ta lại có $HI \parallel FL \Rightarrow \frac{HI}{FL} = \frac{SH}{SF} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $DL = HI$. Do đó tứ giác $IHD L$ là hình bình hành $\Rightarrow LK = KI \Rightarrow LK = \frac{1}{2}LI$.

Mặt khác, ta có $\frac{IL}{SL} = \frac{HF}{SF} = \frac{1}{3} \Rightarrow IL = \frac{1}{3}SL$.

Suy ra $LK = \frac{1}{6}SL \Rightarrow SK = \frac{5}{6}SL$. Vậy $\frac{SK}{SL} = \frac{5}{6}$.

□

Bài 38 (CTST). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- a) $MNPQ$ là hình gì?
b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

Lời giải.

- a) Ta có $PQ \parallel CD$ và $NM \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel NM$.
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

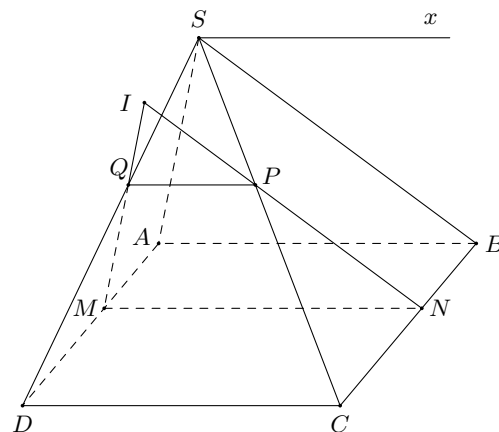
- b) Ta có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx$ với $Sx \parallel AD \parallel BC$.

Ta có $I = MQ \cap NP \Rightarrow \begin{cases} I \in MQ \subset (SAD) \\ I \in NP \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC) = Sx$. Mà Sx cố định.

Vậy I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

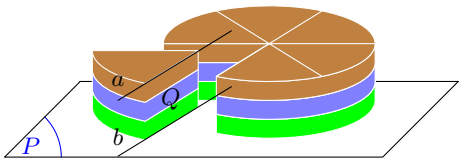


□

Dạng 6. Bài toán thực tế

Bài 39 (Cánh Diều).

Trong hình bên, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gọi nên hình ảnh mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P); mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b trong đó a song song với mặt phẳng (P). Cho biết hai đường thẳng a, b có song song với nhau hay không.



Lời giải.

Theo định lí 2 ta có hai đường thẳng a và b song song với nhau



Bài 40 (CTST). Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà trong hình dưới đây.



Lời giải.

Các đường thẳng a, e nằm trong mặt phẳng (P).
Các đường thẳng b, c song song mặt phẳng (P).
Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P).



Bài 41 (KNTT). Bạn Nam quan sát thấy dù cửa ra vào được mở ở vị trí nào thì mép trên của cửa luôn song song với một mặt phẳng cố định. Hãy cho biết đó là mặt phẳng nào và giải thích tại sao.



Lời giải.

Mép trên của cửa luôn song song với một mặt phẳng cố định đó là nền nhà.
Vì mép trên của cửa luôn song song với mép dưới của cánh cửa, mà mép dưới luôn nằm trong mặt phẳng cố định là nền nhà.



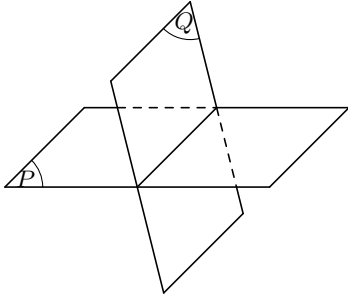
Bài số 4

HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

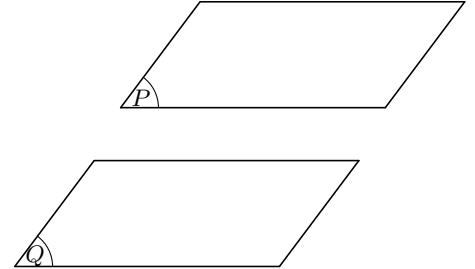
A – KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) . Có hai khả năng xảy ra:



$(P), (Q)$ có 1 điểm chung: $(P) \cap (Q) = a$



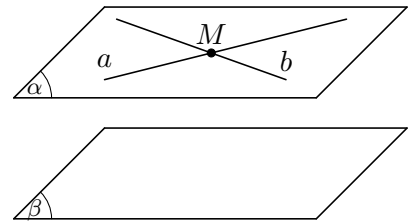
$(P), (Q)$ không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

❖ **Định nghĩa 4.1.** Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện và tính chất

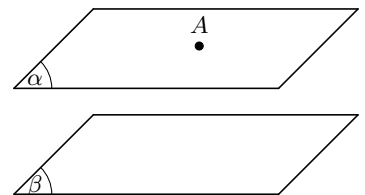
❖ **Định lý 4.1 (Dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song).**

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .



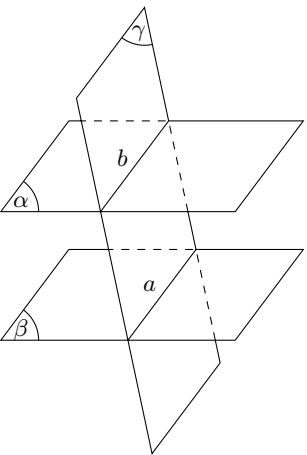
- ⚠ Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- ⚠ Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P) \parallel (Q)$.

❖ **Định lý 4.2.** Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

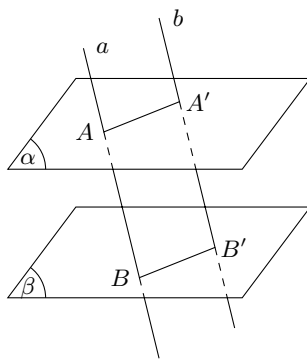


- ⚠ Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) . Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow d \parallel (\alpha)$.
- ⚠ Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- ⚠ Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .

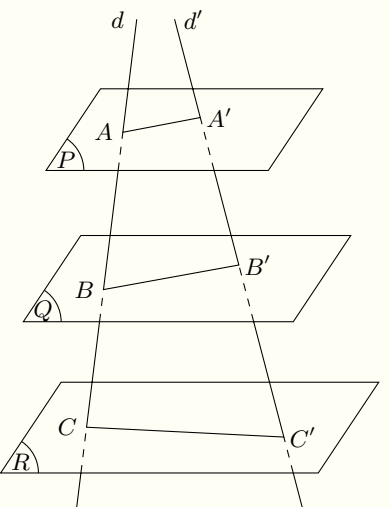
✧ **Định lí 4.3.** Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



⚠ Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



✧ **Định lí 4.4 (Định lý Ta-lét (Thalès)).**
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



⚠ Nếu hai cát tuyến d và d' cắt 3 mặt phẳng song song $(P) \parallel (Q) \parallel (R)$ lần lượt tại các giao điểm A, B, C và A', B', C' thì $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

3. Hình lăng trụ và hình hộp

Hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$ có

- ☑ Hai đáy là hai đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$, nằm ở hai mặt phẳng song song nhau.
- ☑ Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ được gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.
- ☑ Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ được gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ.
- ☑ Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1, A'_1A'_2, A'_2A'_3, \dots, A'_nA'_1$ được gọi là các cạnh đáy của hình lăng trụ.
- ☑ Các tứ giác $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \dots, A_nA'_nA'_{n+1}A_{n+1}$ được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ, đồng thời chúng là các hình bình hành.

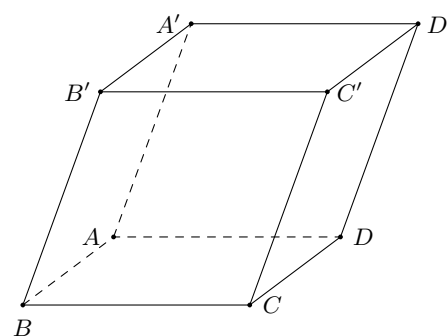
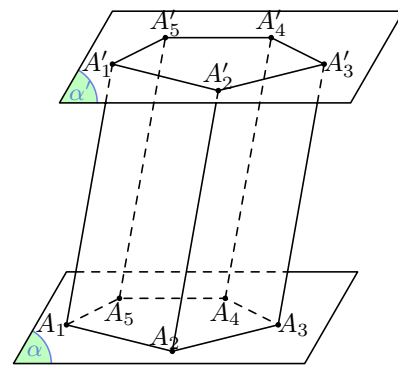
⚠ Tên của hình lăng trụ được gọi theo tên của đa giác đáy.

☑ Hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được gọi là hình lăng trụ tam giác.

☑ Hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ được gọi là hình lăng trụ tứ giác.

Hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

- ☑ Các cặp điểm A và C', D và B', C và A', B và D' được gọi là các đỉnh đối diện của hình hộp.
- ☑ Các đoạn thẳng $AC', B'D, A'C, BD'$ được gọi là các đường chéo của hình hộp.
- ☑ Các cặp hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D', AA'B'B$ và $DD'C'C, AA'D'D$ và $BB'C'C$ được gọi là các mặt đối diện của hình hộp.



B – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

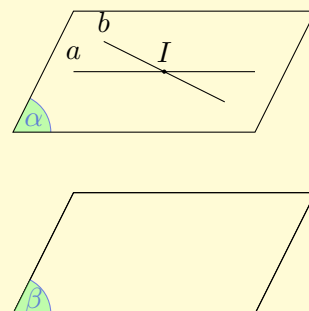
Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp Chứng minh hai mặt phẳng song song $(\alpha) \parallel (\beta)$.

Ta chứng minh mặt phẳng (α) có hai đường thẳng **CẮT NHAU** và lần lượt song song với mặt phẳng (β) .

Cụ thể

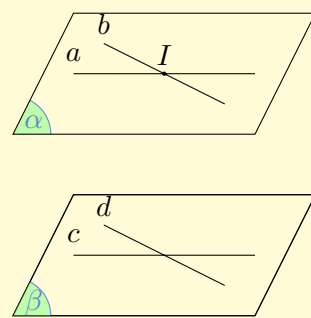
$$\begin{cases} a \parallel (\beta) \\ b \parallel (\beta) \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



Ngoài ra, dựa vào phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ta còn có thể chứng minh hai mặt phẳng song song như sau: **chứng minh hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng này, song song với hai đường thẳng (cắt nhau) nằm trong mặt phẳng kia.**

Cụ thể

$$\begin{cases} a \parallel c \\ b \parallel d \\ a, b \subset (\alpha) \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta). \\ c, d \subset (\beta) \\ a \cap b = I \end{cases}$$

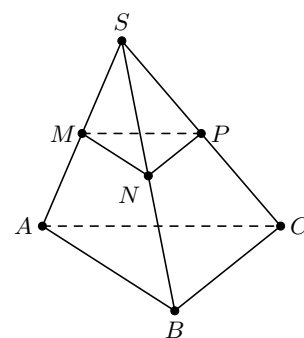


1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC . Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABC)$.

🗨️ Lời giải.

Nếu hai mặt phẳng (MNP) , (ABC) có một điểm chung thì chúng có đường thẳng chung d . Vì $MN \parallel AB$ nên $d \parallel AB$ hoặc d trùng với AB . Tương tự, do $MP \parallel AC$ nên $d \parallel AC$ hoặc d trùng với AC . Điều này là không thể xảy ra vì AB cắt AC tại A .



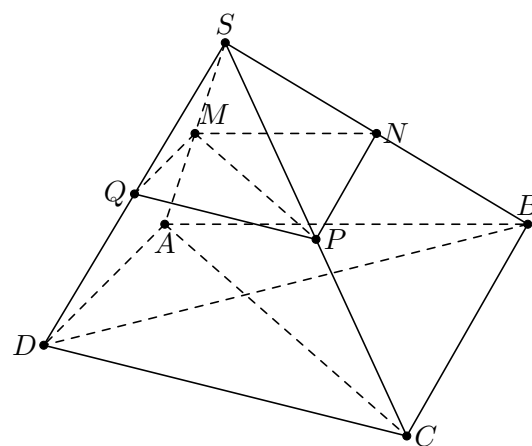
Ví dụ 2. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC .

- Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.
- Giả sử mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q . Chứng minh rằng Q là trung điểm của SD .

🗨️ Lời giải.

- Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB$. Vì $AB \subset (ABCD)$ nên $MN \parallel (ABCD)$. Chứng minh tương tự ta có: $NP \parallel (ABCD)$. Mà MN cắt NP nên theo Định lý 1 ta có: $(MNP) \parallel (ABCD)$.

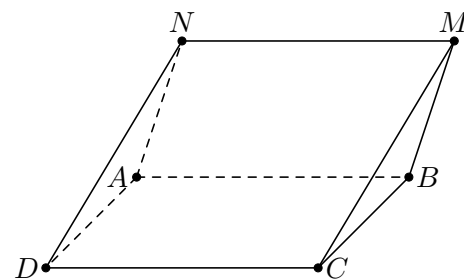
- Vì Q là giao điểm của SD và (MNP) , M là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) nên MQ là giao tuyến của (MNP) và (SAD) . Do $(MNP) \parallel (ABCD)$, $MQ = (MNP) \cap (SAD)$, $AD = (SAD) \cap (ABCD)$ nên theo Định lý 3, ta có: $MQ \parallel AD$. Trong tam giác SAD , M là trung điểm của SA và $MQ \parallel AD$ nên Q là trung điểm của SD .



Ví dụ 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$, $ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN) \parallel (BCM)$.

🗨️ Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$. Mà AD không thuộc mặt phẳng (BCM) suy ra $AD \parallel (BCM)$. Tương tự, do $ABMN$ là hình bình hành nên $AN \parallel BM$, suy ra $AN \parallel (BCM)$. Mà AD, AN cắt nhau và nằm trong mặt phẳng (ADN) nên theo Định lý 1, ta có $(ADN) \parallel (BCM)$.



□

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC và K là điểm bất kỳ trên cạnh MN . Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABC)$. Từ đó suy ra $PK \parallel (ABC)$.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của $\triangle SAB$ nên $MN \parallel AB$.

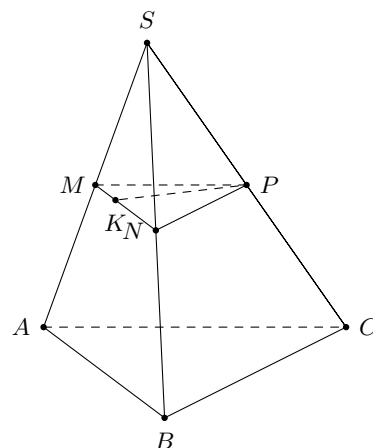
Khi đó $\begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ MN \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABC).$

Tương tự, $\begin{cases} NP \parallel BC \text{ (do } NP \text{ là đường trung bình } \triangle SBC) \\ BC \subset (ABC) \\ NP \not\subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow NP \parallel (ABC).$

Vậy $\begin{cases} MN \parallel (ABC) \\ NP \parallel (ABC) \\ MN, NP \subset (MNP) \\ MN \cap NP = N \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC).$

Mặt khác, do $PK \subset (MNP)$ nên $PK \parallel (ABC)$.



□

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB .

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.

b) Gọi K là điểm bất kỳ trên MN . Chứng minh $OK \parallel (SCD)$.

Lời giải.

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.

Ta có OM là đường trung bình của $\triangle SAC$ nên $OM \parallel SC$.

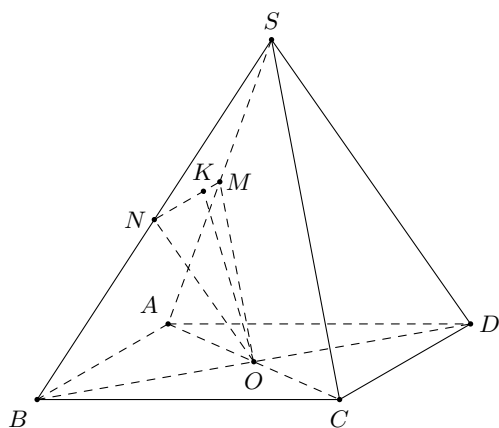
Khi đó $\begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ OM \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (SCD).$

Tương tự, $\begin{cases} ON \parallel SD \text{ (do } ON \text{ là đường trung bình tam giác } SBD) \\ SD \subset (SCD) \\ ON \not\subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow ON \parallel (SCD).$

Vậy $\begin{cases} OM, ON \parallel (SCD) \\ OM, ON \subset (OMN) \\ OM \cap ON = O \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD).$

b) Chứng minh $OK \parallel (SCD)$.



Ta có $\begin{cases} (OMN) \parallel (SCD) \\ OK \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow OK \parallel (SCD).$

□

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$, từ đó suy ra $BM \parallel (SCD)$.

Lời giải.

Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle SAD \Rightarrow MN \parallel SD$.

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel SD \\ SD \subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD). \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases}$

Mà có $2ND = AD = 2BC$ và $ND \parallel BC$ nên suy ra $BNDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BN \parallel CD$.

Ta có: $\begin{cases} NB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \Rightarrow NB \parallel (SCD). \\ NB \not\subset (SCD) \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} MN, NB \parallel (SCD) \\ MN, NB \subset (BMN) \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD). \\ MN \cap NB = N \end{cases}$

Mặt khác, do $BM \subset (BMN)$ nên $BM \parallel (SCD)$.

□

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD gấp đôi đáy bé BC . Gọi $O = AC \cap BD$, M thuộc cạnh SA sao cho $AM = 2MS$ và N thuộc cạnh SB sao cho $2BN = NS$.

a) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SCD)$.

b) Gọi $d = (OMN) \cap (ABCD)$, $P = d \cap AD$, $Q = d \cap BC$. Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

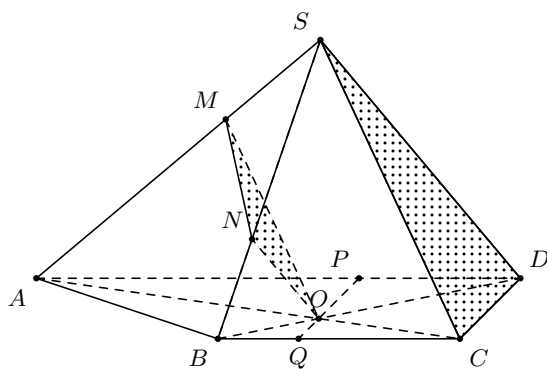
a) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SCD)$.

Ta có $AM = 2MS \Rightarrow \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3}$.

$2BN = NS \Rightarrow \frac{BN}{BS} = \frac{1}{3}$.

Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OBC$ có

$$\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD = 2BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = 2OC \\ OD = 2OB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AO}{AC} = \frac{2}{3} \\ \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3} \end{cases}$$



Trong tam giác SAC có $\frac{AM}{AS} = \frac{AO}{AC} = \frac{2}{3}$ nên $OM \parallel SC$.

Trong tam giác SBD có $\frac{BN}{BS} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$ nên $ON \parallel SD$.

Như vậy,

$$\begin{cases} OM \parallel SC \\ ON \parallel SD \\ OM, ON \subset (OMN) \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD). \\ SC, SD \subset (SCD) \\ OM \cap ON = O \end{cases}$$

b) Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} (OMN) \parallel (SCD) \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \Rightarrow d \parallel CD, \text{ trong đó } d \text{ đi qua } O \in (ABCD) \cap (OMN). \\ (ABCD) \cap (OMN) = d \end{cases}$

Xét tứ giác $PQCD$ có $\begin{cases} PQ \parallel CD \\ PD \parallel CQ \end{cases} \Rightarrow PQCD$ là hình bình hành.

□

Ví dụ 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và $A'B'$.

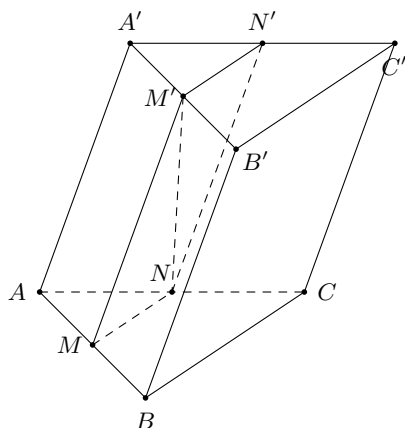
a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM') . Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

Lời giải.

a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.

Ta có $\begin{cases} MM' \parallel BB' \text{ (tính chất đường trung bình hình bình hành } AA'B'B) \\ MN \parallel BC \text{ (tính chất đường trung bình tam giác } ABC) \\ MM', MN \subset (MNM') \\ BB', BC \subset (BCC'B') \\ MN \cap MM' = M \end{cases}$
 $\Rightarrow (MNM') \parallel (BCC'B')$.



b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM') . Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNM') \parallel (BCC'B') \\ (A'B'C') \cap (BCC'B') = B'C' \\ M' \in (A'B'C') \cap (MNM') \end{cases}$$

Suy ra $(A'B'C') \cap (MNM') = x'M'x \parallel B'C'$.

$$\text{Trong } (A'B'C'), \text{ gọi } N' = A'C' \cap x'M'x \Rightarrow \begin{cases} N' \in A'C' \\ N' \in x'M'x \subset (MNM') \end{cases} \Rightarrow N' = A'C' \cap (MNM').$$

Suy ra $M'N'$ là đường trung bình tam giác $A'B'C' \Rightarrow M'N' = \frac{1}{2}B'C'$.

Mà MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN \parallel BC$ và $MN = \frac{1}{2}BC$.

Lại do $BC \parallel B'C'$ và $BC = B'C'$ nên $MN \parallel M'N'$ và $MN = M'N'$.

Vậy tứ giác $MNN'M'$ là hình bình hành.

□

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA lấy hai điểm A_1, A_2 sao cho $A_2A_1 = 2A_1A$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng lần lượt đi qua A_1, A_2 , đồng thời cùng song song với (ABC) . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 ; mặt phẳng (Q) lần lượt cắt các cạnh SB, SC tại B_2, C_2 . Chứng minh $B_2B_1 = 2B_1B$ và $C_2C_1 = 2C_1C$.

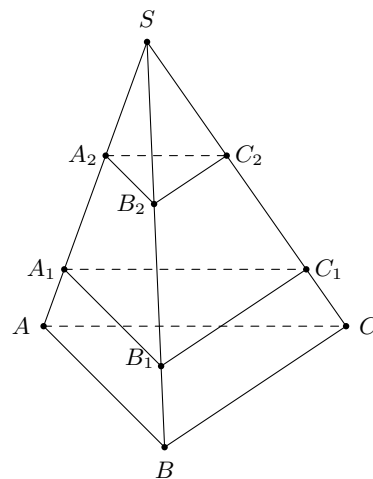
Lời giải.

Áp dụng định lý Thales cho ba mặt phẳng đôi một song song $(P), (Q), (ABC)$ và hai cát tuyến SA, SB ta được

$$\frac{A_2A_1}{A_1A} = \frac{B_2B_1}{B_1B}.$$

$$\text{Vì } \frac{A_2A_1}{A_1A} = 2 \text{ (do } A_2A_1 = 2A_1A) \text{ nên } \frac{B_2B_1}{B_1B} = 2 \Rightarrow B_2B_1 = 2B_1B.$$

Chứng minh tương tự, ta được $C_2C_1 = 2C_1C$.



□

Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB

a) Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ với mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

a) Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, BD .

$$\text{Ta có } \frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{AG_3}{AL} = \frac{2}{3} \text{ suy ra } \begin{cases} G_1G_2 \parallel MN \\ G_2G_3 \parallel NL \end{cases}$$

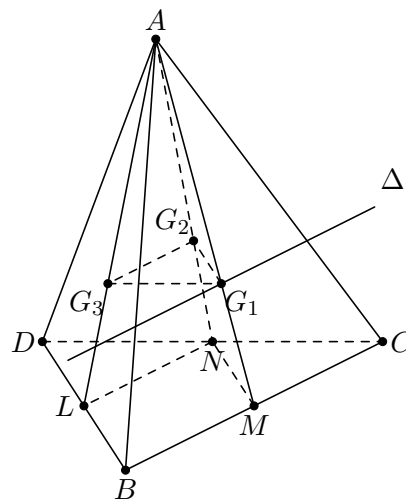
$$\text{Mà } \begin{cases} MN \subset (BCD) \\ NL \subset (BCD) \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} G_1G_2 \parallel (BCD) \\ G_2G_3 \parallel (BCD) \end{cases}$$

suy ra $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

b) Từ $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$ suy ra $BC \parallel (G_1G_2G_3)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} G_1 \in (ABC) \cap (G_1G_2G_3) \\ BC \subset (ABC) \\ BC \parallel (G_1G_2G_3) \end{cases}$$

$\Rightarrow (ABC) \cap (G_1G_2G_3) = \Delta \parallel BC$ với Δ qua G_1 .



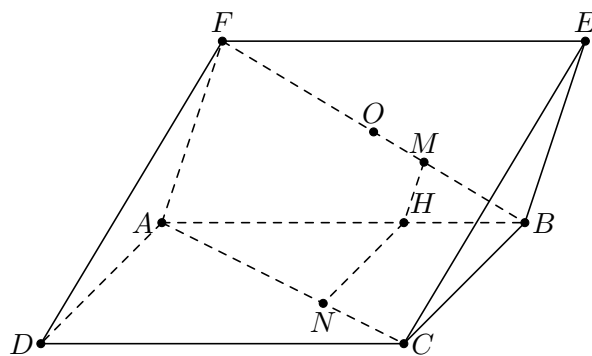
□

Ví dụ 11. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

- a) Chứng minh rằng $(AFD) \parallel (BEC)$.
- b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD) . Lấy N là giao điểm của (P) và AC . Tính $\frac{AN}{NC}$.

Lời giải.

- a) Ta có $AD \parallel BC$, suy ra $AD \parallel (BCE)$. Tương tự $AF \parallel (BCE)$.
 Khi đó $(ADF) \parallel (BCE)$.
- b) Ta có $(P) \parallel (AFD)$ nên $(P) \cap (ABF) = MH$ với $M \in AB$ và $MH \parallel AF$.
 Vì M là trọng tâm của tam giác ABE nên $\frac{BM}{BO} = \frac{2}{3}$ với O là tâm hình bình hành $ABEF$.
 Vì $ABEF$ là hình bình hành nên $\frac{BO}{BF} = \frac{1}{2}$. Suy ra $\frac{BM}{BD} = \frac{1}{3}$. Do đó $\frac{BM}{MF} = \frac{1}{2}$.
 Khi đó $\frac{BH}{AH} = \frac{1}{2}$ (vì $AF \parallel MH$).
 $(P) \parallel (AFD)$ nên $(P) \cap (ABC) = NH$ với $N \in AC$ và $NH \parallel AD$.
 Do đó $\frac{AN}{NC} = \frac{AH}{BH} = 2$.



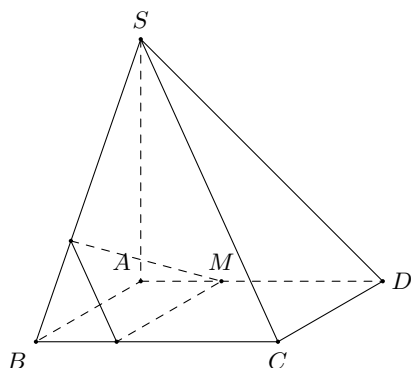
2. Bài tập tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm trên AD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và SC .

- a) Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (SDC) song song.
- b) Chứng minh SD song song với mặt phẳng (α) .

Lời giải.

- a) Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (SDC) song song.
- Ta có $\begin{cases} SC \parallel (\alpha) \\ CD \parallel (\alpha) \text{ (do } CD \parallel AB \parallel (\alpha)) \\ CD, SD \subset (SCD) \\ CD \cap SC = C \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (SCD)$.
- b) Chứng minh SD song song với mặt phẳng (α) .
- Ta có $\begin{cases} (SCD) \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SD \parallel (\alpha)$.





Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC và SAC . Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.

Lời giải.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, BC và AC .

Khi đó do G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB$ và $\triangle SBC$ nên

$$\frac{SG_1}{SM} = \frac{SG_2}{SN} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $G_1G_2 \parallel MN$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} G_1G_2 \parallel MN \\ MN \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC). \\ G_1G_2 \not\subset (ABC) \end{cases}$$

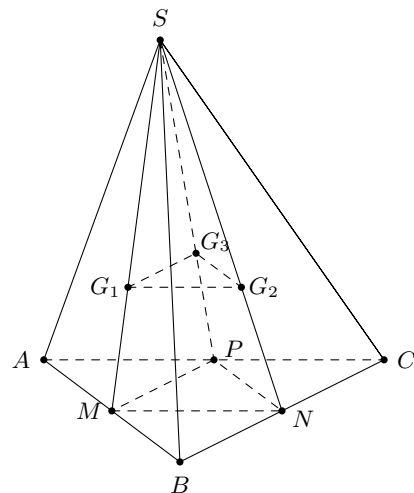
Tương tự, do G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm $\triangle SBC$ và $\triangle SAC$ nên

$$\frac{SG_2}{SN} = \frac{SG_3}{SP} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $G_2G_3 \parallel NP$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} G_2G_3 \parallel NP \\ NP \subset (ABC) \Rightarrow G_2G_3 \parallel (ABC). \\ G_2G_3 \not\subset (ABC) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} G_1G_2, G_2G_3 \parallel (ABC) \\ G_1G_2, G_2G_3 \subset (G_1G_2G_3) \Rightarrow (G_1G_2G_3) \parallel (ABC). \\ G_1G_2 \cap G_2G_3 = G_2 \end{cases}$$



Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD và K, I là trung điểm của BC, OM . Chứng minh rằng

a) $(OMN) \parallel (SCD)$.

b) $(PMN) \parallel (ABCD)$.

c) $KI \parallel (SCD)$.

Lời giải.

a) Chứng minh: $(OMN) \parallel (SCD)$.

Ta có: M, O lần lượt là trung điểm của SA và AC .

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\triangle SAC \Rightarrow OM \parallel SC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD). \\ OM \not\subset (SCD) \end{cases}$$

Ta có: N, O lần lượt là trung điểm của SB và BD .

$\Rightarrow ON$ là đường trung bình của $\triangle SBD \Rightarrow ON \parallel SD$.

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} ON \parallel SD \\ SD \subset (SCD) \Rightarrow ON \parallel (SCD). \\ ON \not\subset (SCD) \end{cases}$$

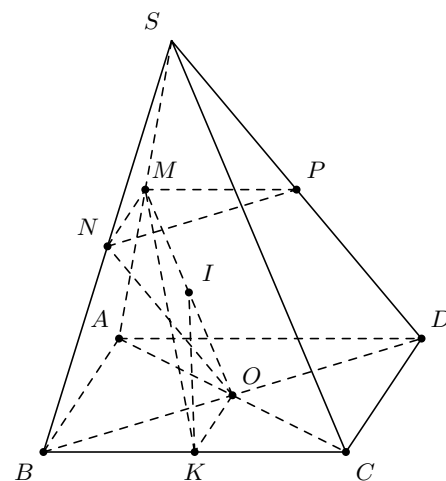
$$\text{Khi đó: } \begin{cases} OM \parallel (SCD) \\ ON \parallel (SCD) \\ OM, ON \subset (OMN) \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD). \\ OM \cap ON = O \end{cases}$$

b) Chứng minh: $(PMN) \parallel (ABCD)$.

Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB .

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle SAB \Rightarrow MN \parallel AB$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \parallel AB \\ AB \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD). \\ MN \not\subset (ABCD) \end{cases}$$



Ta có: N, P lần lượt là trung điểm của SB và SD .

$\Rightarrow NP$ là đường trung bình của $\triangle SBD \Rightarrow NP \parallel BD$.

Tương tự: $\begin{cases} NP \parallel BD \\ BD \subset (ABCD) \Rightarrow NP \parallel (ABCD). \\ NP \not\subset (ABCD) \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} MN, NP \parallel (ABCD) \\ MN, NP \subset (MNP) \Rightarrow (PMN) \parallel (ABCD). \\ MN \cap NP = N \end{cases}$

c) Chứng minh: $KI \parallel (SCD)$.

Ta có: M, O lần lượt là trung điểm của SA và AC .

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\triangle SAC \Rightarrow OM \parallel SC$.

Ta có: $\begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD). \\ OM \not\subset (SCD) \end{cases}$

Ta có: K, O lần lượt là trung điểm của BC và BD .

$\Rightarrow OK$ là đường trung bình của $\triangle BCD \Rightarrow OK \parallel CD$.

Tương tự: $\begin{cases} OK \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \Rightarrow OK \parallel (SCD). \\ OK \not\subset (SCD) \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} OM, OK \parallel (SCD) \\ OM, OK \subset (OMK) \Rightarrow (OMK) \parallel (SCD). \\ OM \cap OK = O \end{cases}$

Do $KI \subset (OMK) \Rightarrow KI \parallel (SCD)$. □

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD .

a) Chứng minh: $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm AB, ON, SB . Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$.

c) Chứng minh: $(MOR) \parallel (SCD)$.

Lời giải.

a) Chứng minh: $(OMN) \parallel (SBC)$.

Ta có: M, O lần lượt là trung điểm của SA và AC .

$\Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\triangle SAC \Rightarrow OM \parallel SC$.

Ta có: $\begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC). \\ OM \not\subset (SBC) \end{cases}$

Ta có: N, O lần lượt là trung điểm của SD và AC .

$\Rightarrow ON$ là đường trung bình của $\triangle SBD \Rightarrow ON \parallel SB$.

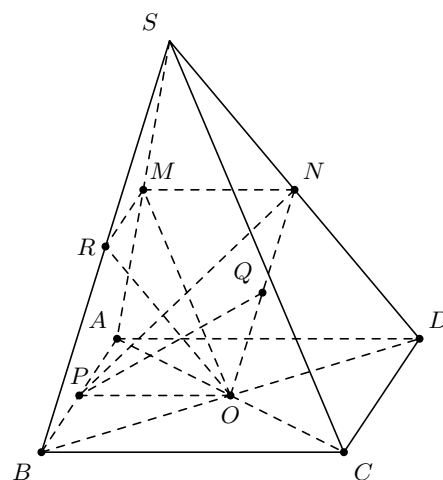
Tương tự: $\begin{cases} ON \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC). \\ ON \not\subset (SBC) \end{cases}$

Khi đó: $\begin{cases} OM \parallel (SBC) \\ ON \parallel (SBC) \\ OM, ON \subset (OMN) \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC). \\ OM \cap ON = O \end{cases}$

b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm AB, ON, SB . Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$.

Ta có: O, P lần lượt là trung điểm của BD và AB .

$\Rightarrow OP$ là đường trung bình của $\triangle ABD \Rightarrow OP \parallel AD$.



$$\text{Ta có: } \begin{cases} OP \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \Rightarrow OP \parallel (SBC). \\ OP \not\subset (SBC) \end{cases}$$

Ta có: N, O lần lượt là trung điểm của SD và BD .
 $\Rightarrow ON$ là đường trung bình của $\triangle SBD \Rightarrow ON \parallel SB$.

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} ON \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC). \\ ON \not\subset (SBC) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} OP \parallel (SBC) \\ ON \parallel (SBC) \\ OP, ON \subset (OPN) \Rightarrow (OPN) \parallel (SBC). \\ OP \cap ON = O \end{cases}$$

Do $PQ \subset (OPN) \Rightarrow PQ \parallel (SBC)$.

c) Chứng minh: $(MOR) \parallel (SCD)$.

Ta có: M, O lần lượt là trung điểm của SA và AC .
 $\Rightarrow OM$ là đường trung bình của $\triangle SAC \Rightarrow OM \parallel SC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} OM \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD). \\ OM \not\subset (SCD) \end{cases}$$

Ta có: R, O lần lượt là trung điểm của SB và BD .
 $\Rightarrow OR$ là đường trung bình của $\triangle SBD \Rightarrow OR \parallel SD$.

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} OR \parallel SD \\ SD \subset (SCD) \Rightarrow OR \parallel (SCD). \\ OR \not\subset (SCD) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} OM \parallel (SCD) \\ OR \parallel (SCD) \\ OM, OR \subset (MOR) \Rightarrow (MOR) \parallel (SCD). \\ OM \cap OR = O \end{cases}$$

□

Bài 5. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF .

a) Chứng minh: $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Chứng minh: $(DIK) \parallel (JBE)$.

Lời giải.

a) Chứng minh: $(ADF) \parallel (BCE)$.

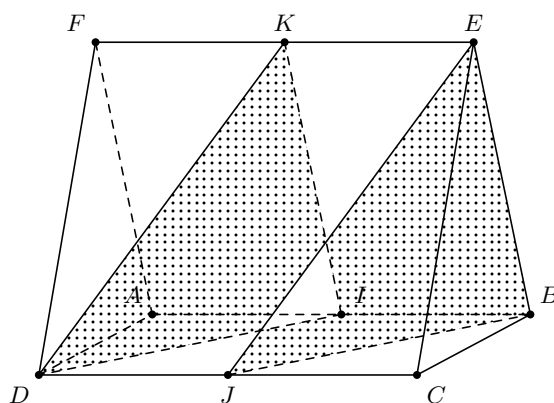
Do $ABCD$ là hình bình hành nên $AD \parallel BC$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \Rightarrow AD \parallel (BCE). \\ AD \not\subset (BCE) \end{cases}$$

Tương tự: Do $ABEF$ là hình bình hành nên $AF \parallel BE$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \Rightarrow AF \parallel (BCE). \\ AF \not\subset (BCE) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} AD \parallel (BCE) \\ AF \parallel (BCE) \\ AD, AF \subset (ADF) \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE). \\ AD \cap AF = A \end{cases}$$



b) Chứng minh: $(DIK) \parallel (JBE)$.

Do I, K lần lượt là trung điểm của AB và EF nên trong hình bình hành $ABEF$ ta có $IK \parallel BE$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} IK \parallel BE \\ BE \subset (JBE) \Rightarrow IK \parallel (JBE). \\ IK \not\subset (JBE) \end{cases}$$

Mặt khác ta có $\begin{cases} BI \parallel DJ \\ BI = DJ = \frac{1}{2}AB \end{cases}$ nên tứ giác $DJBI$ là hình bình hành.

Suy ra $DI \parallel BJ$

$$\text{Do } \begin{cases} DI \parallel JB \\ JB \subset (JBE) \Rightarrow DI \parallel (JBE). \\ DI \not\subset (JBE) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} IK \parallel (JBE) \\ DI \parallel (JBE) \\ IK, DI \subset (DIK) \Rightarrow (DIK) \parallel (JBE). \\ IK \cap DI = I \end{cases}$$

□

Bài 6. Cho các hình bình hành $ABCD, ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2AM, NF = 2BN$. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB , cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1 .

- Chứng minh: $MN \parallel DE$.
- Chứng minh: $M_1N_1 \parallel (DEF)$.
- Chứng minh: $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

🗨️ Lời giải.

a) Chứng minh: $MN \parallel DE$.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

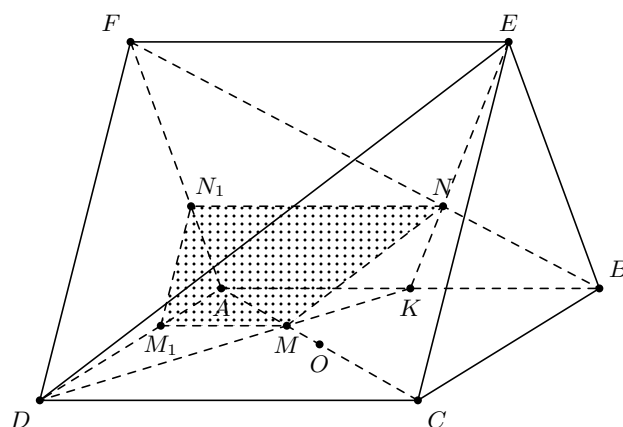
Trong $\triangle ABD$ có AO là đường trung tuyến và $\frac{AM}{AO} = \frac{2AM}{3AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow M$ là trọng tâm $\triangle ABD$.

Tương tự: N là trọng tâm $\triangle ABE$.

Gọi K là trung điểm AB .

Trong $\triangle DKE$ ta có

$$\frac{KM}{KD} = \frac{KN}{KE} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel DE.$$



b) Chứng minh: $M_1N_1 \parallel (DEF)$.

Trong $\triangle DAB$ ta có $MM_1 \parallel AK \Rightarrow \frac{DM_1}{DA} = \frac{DM}{DK} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AM_1}{AD} = \frac{1}{3}$.

Tương tự: Trong $\triangle FAB$ ta có $NN_1 \parallel AB \Rightarrow \frac{FN_1}{FA} = \frac{FN}{FB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AN_1}{AF} = \frac{1}{3}$.

Suy ra trong $\triangle ADF$ có

$$\frac{AM_1}{AD} = \frac{AN_1}{AF} = \frac{1}{3} \Rightarrow M_1N_1 \parallel DF.$$

Do $DF \subset (DEF) \Rightarrow M_1N_1 \parallel (DEF)$.

c) Chứng minh: $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel DE \\ DE \subset (DEF) \Rightarrow MN \parallel (DEF). \\ MN \not\subset (DEF) \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} NN_1 \parallel AB \\ AB \parallel EF \end{cases} \Rightarrow NN_1 \parallel EF.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} NN_1 \parallel EF \\ EF \subset (DEF) \Rightarrow NN_1 \parallel (DEF). \\ NN_1 \not\subset (DEF) \end{cases}$$

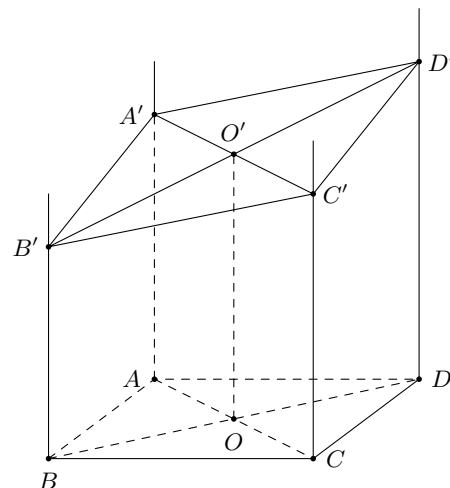
$$\text{Khi đó: } \begin{cases} MN \parallel (DEF) \\ NN_1 \parallel (DEF) \\ MN, NN_1 \subset (MNM_1N_1) \\ MN \cap NN_1 = N \end{cases} \Rightarrow (MNM_1N_1) \parallel (DEF).$$

□

Bài 7.

Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song nhau, cùng nằm một phía đối với (P) đồng thời đi qua các điểm A, B, C, D . Mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' như hình vẽ bên.

- Chứng minh $\text{mp}(AA', BB')$ song song với $\text{mp}(CC', DD')$.
- Chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$.



Lời giải.

- Chứng minh $\text{mp}(AA', BB')$ song song với $\text{mp}(CC', DD')$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AA' \parallel DD' \\ AB \parallel CD \text{ (do } ABCD \text{ là hình bình hành)} \\ AA', AB \subset (AA', BB') \\ DD', CD \subset (CC', DD') \\ AA' \cap AB = A \end{cases} \Rightarrow (AA', BB') \parallel (CC', DD').$$

- Chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (AA', BB') \parallel (CC', DD') \\ (P') \cap (AA', BB') = A'B' \Rightarrow A'B' \parallel C'D'. \\ (P') \cap (CC', DD') = C'D' \end{cases}$$

Chứng minh tương tự ta được $A'D' \parallel B'C'$.

Do đó tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

- Chứng minh $AA' + CC' = BB' + DD'$.

Xét hình thang $ACC'A'$ ta có $AA' + CC' = 2OO'$ (Đường trung bình hình thang).

Xét hình thang $BDD'B'$ ta có $BB' + DD' = 2OO'$ (Đường trung bình hình thang).

Khi đó ta suy ra được $AA' + CC' = BB' + DD'$.

□

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm của tam giác ABC . Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

- a) Chứng minh: $GM \parallel (SBC)$.
 b) Gọi D là điểm đối xứng của A qua G . Chứng minh: $(MCD) \parallel (NBG)$.
 c) Gọi $H = DM \cap (SBC)$. Chứng minh H là trọng tâm $\triangle SBC$.

Lời giải.

- a) Chứng minh: $GM \parallel (SBC)$.

Gọi I là trung điểm cạnh BC .

Trong $\triangle SAI$ có $\frac{AM}{AS} = \frac{AG}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel SI$.

$$\text{Do } \begin{cases} GM \parallel SI \\ SI \subset (SBC) \\ GM \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow GM \parallel (SBC).$$

- b) Gọi D là điểm đối xứng của A qua G . Chứng minh: $(MCD) \parallel (NBG)$.

Do D là điểm đối xứng của A qua G .

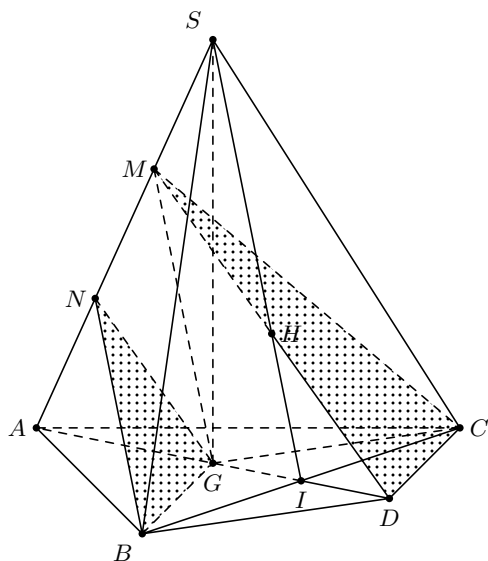
Khi đó tứ giác $BGCD$ là hình bình hành do BC và GD cắt nhau tại I là trung điểm của mỗi đường.

Suy ra $DC \parallel BG$.

Mặt khác trong $\triangle MAD$ ta có

$$\frac{AN}{AM} = \frac{AG}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow NG \parallel MD.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} CD \parallel BG \\ MD \parallel NG \\ CD, MD \subset (MCD) \Rightarrow (MCD) \parallel (NBG). \\ BG, NG \subset (NBG) \\ CD \cap MD = D \end{cases}$$



- c) Gọi $H = DM \cap (SBC)$. Chứng minh H là trọng tâm $\triangle SBC$.

Gọi $H = DM \cap SI$ trong (SAI) .

Do $SI \subset (SBC) \Rightarrow H$ là giao điểm của MD và (SBC) .

$$\text{Do } HI \parallel MG \Rightarrow \frac{HI}{MG} = \frac{DI}{DG} = \frac{1}{2} \Rightarrow HI = \frac{1}{2}MG.$$

$$\text{Mặt khác } MG \parallel SI \Rightarrow \frac{MG}{SI} = \frac{AM}{AS} = \frac{2}{3} \Rightarrow MG = \frac{2}{3}SI.$$

Suy ra H là trọng tâm $\triangle SBC$.

7

b) Chứng minh $(MNP) \parallel (SBC)$.

📄 Toán 11 theo chương trình GDPT2018

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi G, H lần lượt là trọng tâm tam giác SAB, SCD và O là giao điểm của AC và BD . Gọi I là trung điểm cạnh AD .

- a) Chứng minh $IG \parallel (SCD)$.
b) Chứng minh $(OGH) \parallel (SBC)$.

Lời giải.

- a) Chứng minh $IG \parallel (SCD)$.

Gọi M là trung điểm SA . Khi đó IM là đường trung bình của tam giác SAD nên $IM \parallel SD$.

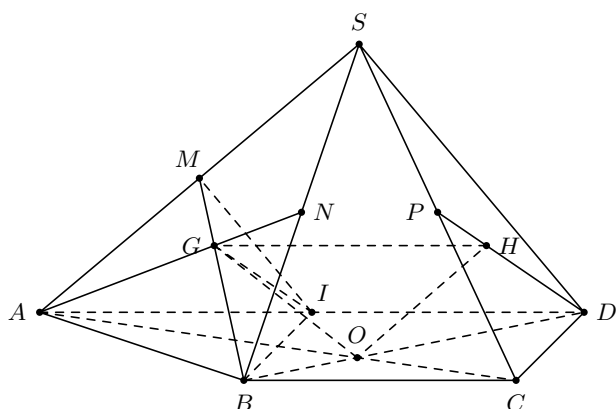
Mặt khác xét tứ giác $BIDC$ có

$$\begin{cases} ID \parallel BC \\ ID = BC = \frac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow BIDC \text{ là hình bình hành.}$$

Do đó $BI \parallel CD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BI \parallel CD \\ IM \parallel SD \\ IB, IM \subset (IBM) \Rightarrow (IBM) \parallel (SCD). \\ SD, CD \subset (SCD) \\ IM \cap IB = I \end{cases}$$

Mà $IG \subset (IBM)$ nên $IG \parallel (SCD)$.



- b) Chứng minh $(OGH) \parallel (SBC)$.

Gọi N, P lần lượt là trung điểm SB và SC .

Xét hai tam giác OAD và OBC có

$$\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD = 2BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = 2OC \\ OD = 2OB \end{cases} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{DO}{DB} = \frac{2}{3}.$$

Do G, H lần lượt là trọng tâm hai tam giác SAB và SCD nên $\frac{AG}{AN} = \frac{DH}{DP} = \frac{2}{3}$.

Xét tam giác ANC có $\frac{AG}{AN} = \frac{AO}{AC} = \frac{2}{3}$ nên $GO \parallel CN$.

Xét tam giác DPB có $\frac{DH}{DP} = \frac{DO}{DB} = \frac{2}{3}$ nên $OH \parallel BP$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} GO \parallel CN \\ HO \parallel BP \\ GO, HO \subset (OGH) \Rightarrow (OGH) \parallel (SBC). \\ CN, BP \subset (SBC) \\ GO \cap HO = O \end{cases}$$

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi I là trung điểm AD , M là trung điểm SD và H, K lần lượt nằm trên cạnh SA, SB sao cho $SH = 2HA$ và $3BK = SB$.

- Chứng minh $(IMC) \parallel (SAB)$.
- Tìm giao điểm G của (MAB) và SC .
- Chứng minh $(GHK) \parallel (ABCD)$.

Lời giải.

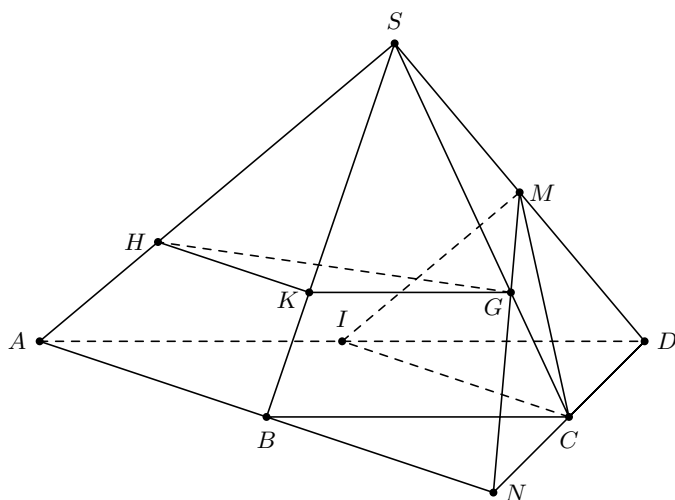
- Chứng minh $(IMC) \parallel (SAB)$.
Xét tứ giác $AICB$ có

$$\begin{cases} AI \parallel BC \\ AI = BC = \frac{1}{2}AD \end{cases}$$

Suy ra tứ giác $AICB$ là hình bình hành và do đó $AB \parallel CI$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} CI \parallel AB \\ IM \parallel SA \text{ (tính chất đường trung bình } \triangle SAD) \\ IC, IM \subset (IMC) \\ SA, AB \subset (SAB) \\ IM \cap IC = I \end{cases}$$

Suy ra $(IMC) \parallel (SAB)$.



- Tìm giao điểm G của (MAB) và SC .

Trong $(ABCD)$, gọi $N = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} N \in AB, AB \subset (MAB) \\ N \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MAB) \cap (SCD)$.

Mà $M \in (MAB) \cap (SCD)$ nên $MN = (MAB) \cap (SCD)$.

Trong (SCD) , gọi $G = MN \cap SC \Rightarrow \begin{cases} G \in MN, MN \subset (MAB) \\ G \in SC \end{cases} \Rightarrow G = (MAB) \cap SC$.

- Chứng minh $(GHK) \parallel (ABCD)$.

Xét tam giác NAD có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ AD = 2BC \end{cases} \Rightarrow ND = 2NC$ hay C là trung điểm đoạn thẳng ND .

Khi đó trong tam giác SDN có hai đường trung tuyến NM và SC cắt nhau tại G nên G là trọng tâm tam giác SDN .

Suy ra $\frac{SG}{SC} = \frac{2}{3}$.

Mà $\frac{SK}{SB} = \frac{2}{3}$ (do $SB = 3BK$) nên $\frac{SK}{SB} = \frac{SG}{SC} \Rightarrow GK \parallel BC$.

Trong tam giác SAB ta có $\frac{SH}{SA} = \frac{SK}{SB} = \frac{2}{3}$ nên $HK \parallel AB$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} HK \parallel AB \\ GK \parallel BC \\ HK, GK \subset (GHK) \Rightarrow (GHK) \parallel (ABCD). \\ AB, BC \subset (ABCD) \\ GK \cap HK = K \end{cases}$$

□

Bài 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm $AD, BC, A'D'$.

a) Chứng minh $(MNM') \parallel (DCC'D')$.

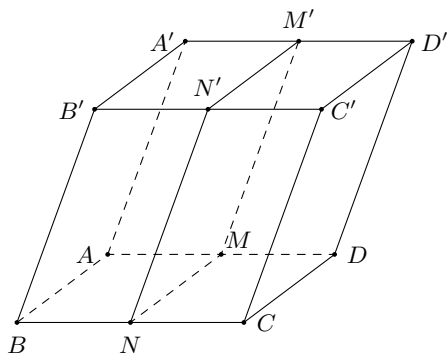
b) Tìm giao điểm N' của (MNM') và $B'C'$. Chứng minh $ABNM.A'B'N'M'$ là hình hộp.

Lời giải.

a) Chứng minh $(MNM') \parallel (DCC'D')$.

Ta có

$$\begin{cases} MM' \parallel DD' \text{ (tính chất đường trung bình hình bình hành } AA'D'D) \\ MN \parallel CD \text{ (tính chất đường trung bình hình bình hành } ABCD) \\ MM', MN \subset (MNM') \\ DD', CD \subset (DCC'D') \\ MN \cap MM' = M \end{cases} \Rightarrow (MNM') \parallel (DCC'D').$$



b) Tìm giao điểm N' của (MNM') và $B'C'$. Chứng minh $DCNM.D'C'N'M'$ là hình hộp.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (MNM') \parallel (DCC'D') \\ (A'B'C'D') \cap (DCC'D') = C'D' \\ M' \in (A'B'C'D') \cap (MNM') \end{cases}$$

Suy ra $(A'B'C'D') \cap (MNM') = x'M'x \parallel C'D'$.

$$\text{Trong } (A'B'C'D'), \text{ gọi } N' = B'C' \cap x'M'x \Rightarrow \begin{cases} N' \in B'C' \\ N' \in x'M'x \subset (MNM') \end{cases} \Rightarrow N' = B'C' \cap (MNM').$$

Lại do M' là trung điểm $A'B'$ nên N' là trung điểm $B'C'$.

Ta có hai tứ giác $CDMN$ và $C'D'M'N'$ nằm trong hai mặt phẳng song song. (1)

Mà NN', MM' lần lượt là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ và $ADD'A'$ nên $NN' \parallel CC'$ và $MM' \parallel DD'$.

Lại do $CC' \parallel DD'$ nên $NN' \parallel CC' \parallel DD' \parallel MM'$. (2)

$$\text{Xét tứ giác } D'C'N'M' \text{ có } \begin{cases} M'N' \parallel D'C' \\ C'N' \parallel D'M' \end{cases} \Rightarrow D'C'N'M' \text{ là hình bình hành. (3)}$$

Tương tự, ta chứng minh được tứ giác $DCNM$ là hình bình hành. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta suy ra $DCNM.D'C'N'M'$ là hình hộp.

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) Qua một điểm có vô số mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.
- (B) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
- (C) Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.
- (D) Qua một điểm tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải.

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Chọn đáp án (C) □

Câu 2. Cho các mệnh đề sau:

1. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
2. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
3. Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề **sai** là

- (A) 0.
- (B) 1.
- (C) 3.
- (D) 2.

Lời giải.

- + Mệnh đề “ Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.” là một khẳng định sai vì chúng có thể cắt nhau.
- + Mệnh đề “Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.” là một mệnh đề sai vì hai mặt này có thể trùng nhau.
- + Mệnh đề “Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.” là một mệnh đề đúng.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

- (A) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .
- (B) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β) .
- (C) Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(\alpha) \parallel (\beta)$.
- (D) Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong (α) .

Lời giải.

Mệnh đề: “Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) .” là đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4. Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

- (A) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.
- (B) Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
- (C) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
- (D) Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Lời giải.

Hình lăng trụ là một đa diện có hai mặt đáy là các đa giác bằng nhau và những mặt bên là các hình bình hành.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $mp(\alpha) \parallel mp(\beta)$?

- (A) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β) .
- (B) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β) .

(C) $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β) .

(D) $(\alpha) \parallel \gamma$ và $(\beta) \parallel \gamma$ (γ là mặt phẳng nào đó).

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \\ a, b \text{ cắt nhau trong } (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ACD, ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BD, CD, BC . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

(A) $(DJK) \parallel (ABC)$.

(B) $(IJK) \parallel (BCD)$.

(C) $(KMN) \parallel (ABC)$.

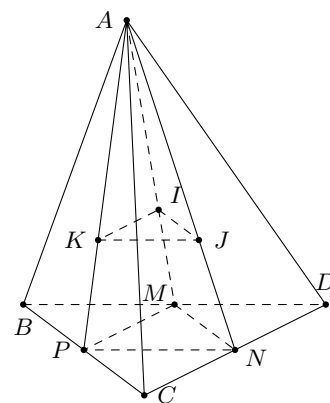
(D) $(IJK) \parallel (AMD)$.

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \frac{AK}{AP} = \frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \text{ nên } KJ \parallel PN \text{ và } IJ \parallel MN.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} KJ \parallel PN \\ IJ \parallel MN \\ KJ, IJ \subset (KIJ) \\ PN, MN \subset (BCD) \\ KJ \cap IJ = J \end{cases}$$

Suy ra $(KIJ) \parallel (BCD)$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, AC cắt BD tại O còn $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O' . Khi đó $(AB'D')$ sẽ song song mặt phẳng nào dưới đây?

(A) $(A'OC')$.

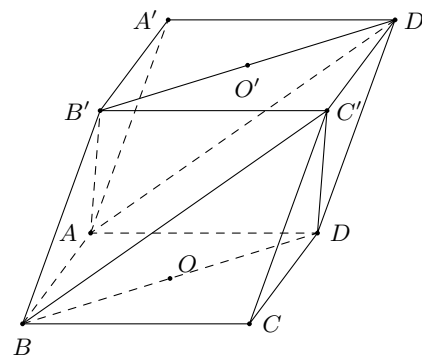
(B) (BDA') .

(C) (BDC') .

(D) (BCD) .

🗨️ **Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} B'D' \parallel BD \\ AB' \parallel DC' \\ B'D', AB' \subset (AB'D') \Rightarrow (AB'D') \parallel (BDC') \\ DC', BD \subset (BDC') \\ B'D' \cap AB' = B' \end{cases}$$



Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $(AA'B'B) \parallel (DD'C'C)$.

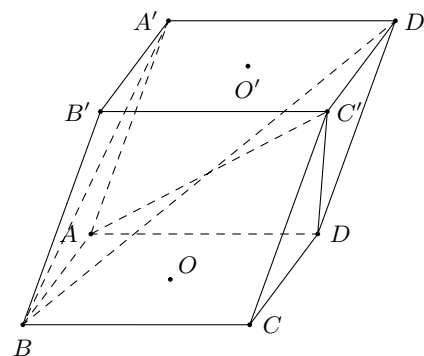
(B) $(BA'D') \parallel (ADC')$.

(C) $A'B'CD$ là hình bình hành.

(D) $BB'D'D$ là một tứ giác.

🗨️ **Lời giải.**

Ta có
$$\begin{cases} BD' \subset (BA'D') \\ AC' \subset (ADC') \Rightarrow (BA'D') \parallel (ADC') \\ AC' \cap BD' \neq \emptyset \end{cases}$$



Chọn đáp án (B)

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB . Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD) ?

- (A) (BCI) . (B) (BIJ) . (C) (CIJ) . (D) (SJC) .

Lời giải.

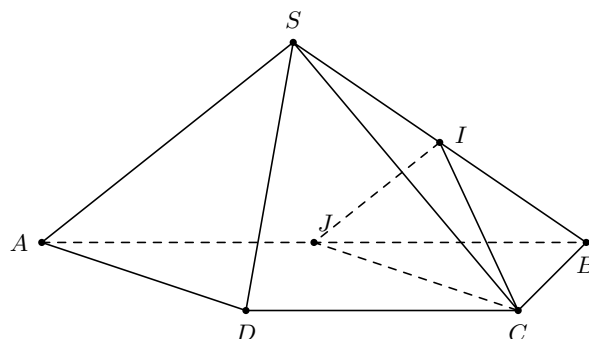
Vì I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB nên $IJ \parallel SA$.

Do J là trung điểm AB và $AB = 2CD$ nên $AJ = CD$.

Mà $AJ \parallel CD$ nên $AJCD$ là hình bình hành.

Bởi vậy $CJ \parallel AD$.

Ta có
$$\begin{cases} IJ \parallel SA \\ IC \parallel AD \\ IJ, IC \subset (CIJ) \Rightarrow (CIJ) \parallel (SAD) \\ SA, AD \subset (SAD) \\ CI \cap IJ = I \end{cases}$$



Chọn đáp án (C)

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$, $\triangle ACC'$ và $\triangle AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK) ?

- (A) $(BC'A)$. (B) $(AA'B)$. (C) $(BB'C)$. (D) $(CC'A)$.

Lời giải.

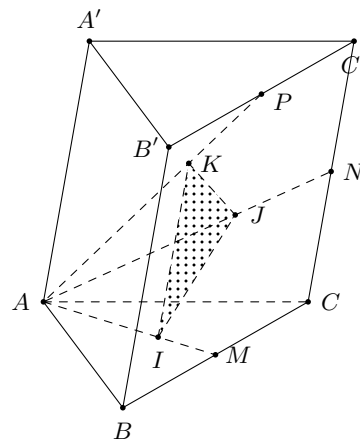
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CC' và $B'C'$.

Ta có
$$\frac{AK}{AP} = \frac{AJ}{AN} = \frac{AI}{AM} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $IK \parallel PM$ và $KJ \parallel PN$.

Khi đó
$$\begin{cases} IK \parallel PM \\ KJ \parallel PN \\ IK, KJ \subset (IJK) \\ PM, PN \subset (BCC'B') \\ IK \cap KJ = K \end{cases}$$

Suy ra $(IJK) \parallel (BCC'B')$ hay $(IJK) \parallel (BB'C)$.



Chọn đáp án (C)

Câu 11. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn $AB', AC', B'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{C'N}{AC'} = \frac{CP}{CB'} = x$. Để $(MNP) \parallel (A'BC')$ thì x bằng bao nhiêu?

- (A) $x = \frac{1}{2}$. (B) $x = \frac{1}{3}$. (C) $x = \frac{2}{3}$. (D) $x = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Gọi $O = AB' \cap A'B$.

Ta có $\frac{AM}{AB'} = \frac{CP}{CB'} = x$, suy ra $MP \parallel AC \parallel A'C'$, do đó $(MNP) \cap (ACC')$ là đường thẳng qua N và song song với $A'C'$ cắt CC' , AA' lần lượt tại R , S .

Vậy (MNP) chính là mặt phẳng $(MPRS)$.

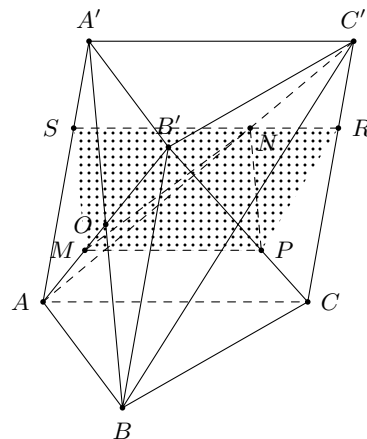
Để $(MNP) \parallel (A'BC')$ thì cần $MS \parallel A'B$.

Suy ra $\frac{AM}{AO} = \frac{AS}{AA'}$.

$$\text{Mà } \begin{cases} \frac{AM}{AO} = 2 \cdot \frac{AM}{AB'} = 2x \\ \frac{AS}{AA'} = 1 - x \end{cases}$$

Do đó ta có $2x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B)



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O và $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD đều. Gọi (P) là mặt phẳng đi động đi qua điểm I trên đoạn OC , song song với (SBD) . Đặt $AI = x$ ($\frac{a}{2} < x < a$), cắt các cạnh BC , CD , SC lần lượt tại E , F , G . Diện tích tam giác EFG bằng

(A) $\frac{b^2(a-x)^2\sqrt{2}}{a^2}$.

(B) $\frac{b^2(a+x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

(C) $\frac{b^2(a+x)^2}{a^2\sqrt{3}}$.

(D) $\frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (P) \cap (ABCD) = EF \\ (SBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases} \Rightarrow EF \parallel BD$.

Suy ra $\frac{EF}{BD} = \frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD}$. (*)

Chúng minh tương tự ta được $\begin{cases} EG \parallel SB \Rightarrow \frac{EG}{SB} = \frac{CE}{CB} \\ GF \parallel SD \Rightarrow \frac{GF}{SD} = \frac{CF}{CD} \end{cases}$ (**)

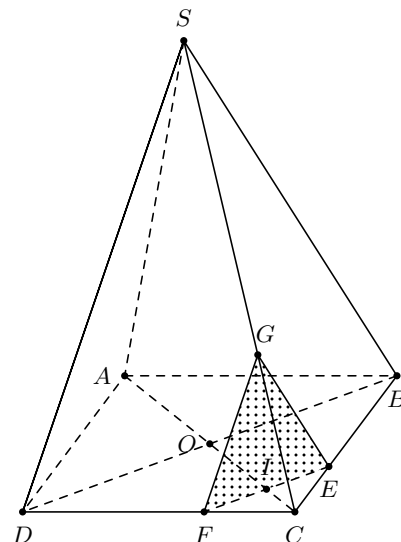
Từ (*) và (**) ta suy ra $\frac{EF}{BD} = \frac{EG}{SB} = \frac{GF}{SD}$.

Lại do $SB = SD = BD$ nên $EG = GF = EF$ hay tam giác GEF đều.

Ta có $\frac{EF}{BD} = \frac{CI}{CO} \Rightarrow EF = \frac{CI}{CO} \cdot BD = \frac{2(a-x)}{a} \cdot b$.

Vậy $S_{GEF} = \frac{EF^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2 \cdot (a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Chọn đáp án (D)



Dạng 2. Tìm giao tuyến bằng cách kẻ song song

Sử dụng tính chất $\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \Rightarrow a \parallel b \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{cases}$

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H . Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB) . Tìm giao tuyến của

- Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

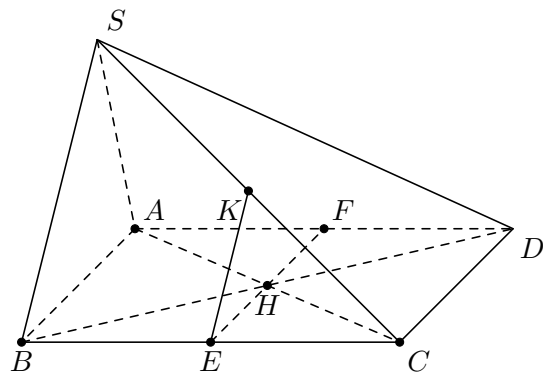
$$\begin{cases} (P) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ (P) \cap (ABCD) = H \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P) \cap (ABCD) = EF \text{ với } \begin{cases} EF \text{ qua } H \\ EF \parallel AB \\ E \in BC, F \in AD \end{cases}.$$

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .

$$\begin{cases} (P) \parallel (SAB) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (P) \cap (SBC) = E \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P) \cap (ABCD) = EK \text{ với } \begin{cases} EK \cap SC = K \\ EK \parallel SB \end{cases}.$$



Ví dụ 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ trên AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC) . Tìm giao tuyến của (α) với cắt mặt của hình chóp.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (\alpha) \parallel (SBC) \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (\alpha) \cap (ABCD) = M \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \text{ với } \begin{cases} MN \cap CD = N \\ MN \parallel BC \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (\alpha) \parallel (SBC) \\ (SBC) \cap (SCD) = SC \\ (\alpha) \cap (SCD) = N \end{cases} \\ & \Leftrightarrow (\alpha) \cap (SCD) = NP \text{ với } \begin{cases} NP \cap SD = P \\ NP \parallel SC \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (\alpha) \parallel (SBC) \\ (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (\alpha) \cap (SAB) = M \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MQ \text{ với } \begin{cases} MQ \cap SA = Q \\ MQ \parallel BC \end{cases}. \end{aligned}$$

☑

Suy ra, $(P) \cap (SAD) = PQ$.

Ví dụ 14. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và các mặt $(A'B'C'D')$, $(AA'B'B)$.

Lời giải.

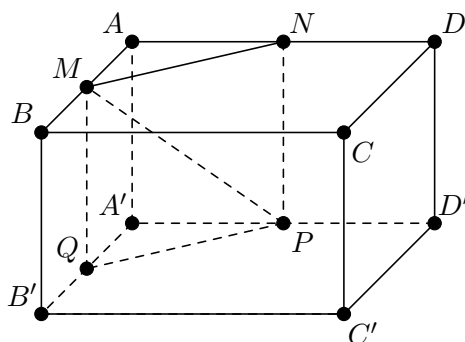
Ta có M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, A'D'$.

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel BD \parallel B'D' \\ NP \parallel AA' \parallel DD' \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (BDD'B')$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} (MNP) \parallel (BDD'B') \\ (BDD'B') \cap (A'B'C'D') = B'D' \\ (MNP) \cap (A'B'C'D') = P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (MNP) \cap (A'B'C'D') = PQ \text{ với } \begin{cases} PQ \cap A'B' = Q \\ PQ \parallel B'D' \end{cases}.$$

Suy ra $(MNP) \cap (ABB'A') = MQ$.



2. Bài tập tự luận

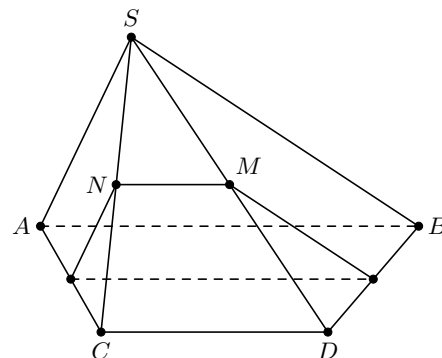
Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$. Gọi M là trung điểm của SD , (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB) . Xác định giao điểm của (P) và SC .

Lời giải.

Hai mặt phẳng (P) và (SCD) có điểm M chung.

Giả sử (P) cắt SC tại điểm N . Khi đó $MN = (P) \cap (SCD)$. Do $(P) \parallel (SAB)$ nên $AB \parallel (P)$. Lại có $CD \parallel AB$, $CD \not\subset (P)$ nên $CD \parallel (P)$.

Từ đó suy ra $MN \parallel CD$, mà M là trung điểm của SD nên N là trung điểm của SC .



Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H . Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB) . Tìm giao tuyến của

- Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) .
- Thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (P) .

Lời giải.

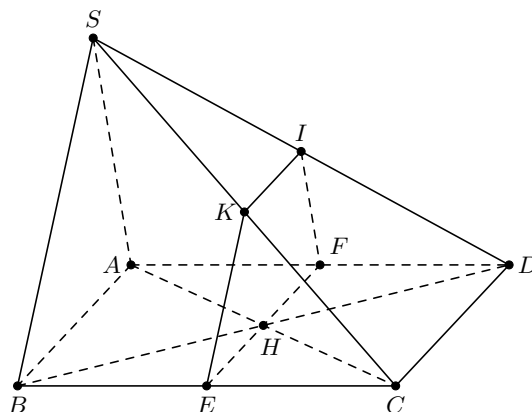
- Ta có H là một điểm chung của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$, $(P) \parallel (SAB)$, $(ABCD) \cap (SAB) = AB$ nên giao tuyến của (P) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua H , song song với AB , cắt BC và AD lần lượt tại E, F .
Do H là tâm hình bình hành $ABCD$ nên E, F là trung điểm của BC và AD .

- Theo cách dựng trên ta có (P) và (SBC) có điểm chung E . Mà $(P) \parallel (SAB)$, $(SBC) \cap (SAB) = SB$ nên giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua E , song song với SB , cắt SC tại K . Khi đó EK là đường trung bình của tam giác SBC nên K là trung điểm của SC .

- Tương tự ta có giao tuyến của (P) và (SAD) là đường thẳng qua F , song song với SA , cắt SD tại I . Khi đó I là trung điểm của SD .

Từ các kết quả trên ta có $(P) \cap (ABCD) = EF$, $(P) \cap (SAD) = FI$, $(P) \cap (SCD) = IK$, $(P) \cap (SBC) = KE$ nên thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $EFIK$.

Lại do $EF \parallel CD$, $IK \parallel CD$ (do IK là đường trung bình của tam giác SCD) nên $IK \parallel EF$. Vậy $EFIK$ là hình thang.



Dạng 3. Xác định giao điểm của một đường thẳng với mặt phẳng (dùng tính chất song song)

Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) . Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng Δ . Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 15. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với AC . Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α) .

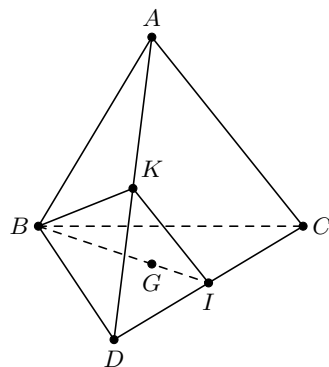
Lời giải.

Gọi I là trung điểm của CD .

$$\text{Ta có } \begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ACD) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = Ix \parallel AC.$$

Trong mặt phẳng (ACD) , gọi $Ix \cap AD = K$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} K \in AD \\ K \in Ix \subset (\alpha) \Rightarrow K \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K = AD \cap (\alpha).$$



□

Ví dụ 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA . Tìm giao điểm K của mặt phẳng (α) và SC .

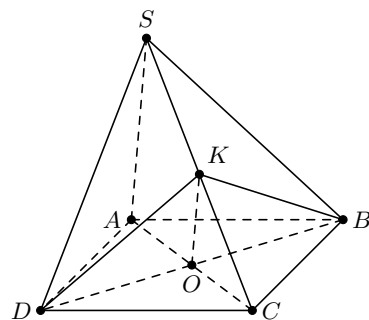
Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó, $O \in (\alpha) \cap (SAC)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ O \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = Ox \parallel SA.$$

Trong mặt phẳng (SAC) , gọi $K = SC \cap Ox$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} K \in SC \\ K \in Ox \subset (\alpha) \Rightarrow K \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (\alpha).$$



□

Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là một điểm trên CD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC . Tìm giao điểm Q của SC và (α) .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \parallel BC, BC \subset (ABCD) \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$$

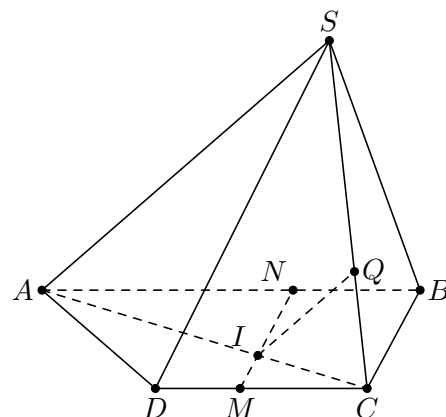
$$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \parallel BC \text{ và } N \in AB.$$

Gọi I là giao điểm của AC và MN ta có

$$\begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ I \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = Ix \parallel SA.$$

Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của Ix và SC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} Q \in SC \\ Q \in Ix \subset (\alpha) \Rightarrow Q \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (\alpha).$$



□

2. Bài tập tự luận

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB .

- Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.
- Tìm giao điểm của (MNP) với BC .
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) .

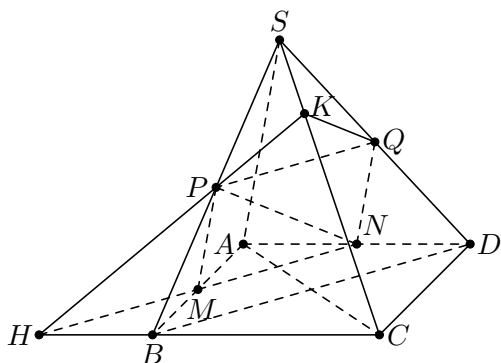
Lời giải.

- a) $\triangle ABD$ có MN là đường trung bình nên $MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \parallel MN \\ MN \subset (MNP) \Rightarrow BD \parallel (MNP). \\ BD \not\subset (MNP) \end{cases}$$

- b) Trong $(ABCD)$, dựng $H = MN \cap BC$, ta có

$$\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = (MNP) \cap BC.$$



- c) Gọi $\Delta = (MNP) \cap (SBD)$, ta có $\begin{cases} P \in (SBD) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in \Delta$.

Ta có

$$\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (MNP), (BD) \subset (SBD) \Rightarrow \Delta \parallel MN. \\ (MNP) \cap (SBD) = \Delta \end{cases}$$

Vậy Δ là đường thẳng qua P và song song với MN .

Gọi $Q = \Delta \cap SD$, ta được $(MNP) \cap (SBD) = PQ$.

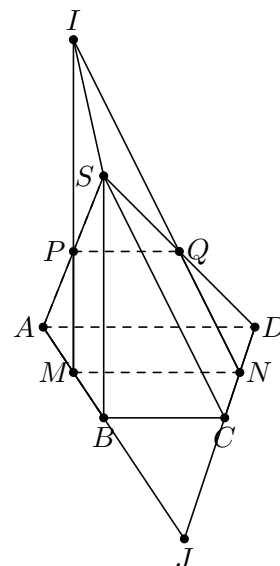
□

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình thang với đáy lớn AD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA .

- Xác định giao điểm Q của cạnh SD với (MNP) .
- Chứng minh SB, SC cùng song song với (MNP) .
- Chứng minh MP và NQ cắt nhau. Chứng minh giao điểm của MP và NQ , giao điểm của AB và CD và điểm S thẳng hàng.

Lời giải.

- a) Ta có $AD \parallel MN$ nên $AD \parallel (MNP)$. Mà $AD \subset (SAD)$ nên giao tuyến của (MNP) và (SAD) là đường thẳng qua P , song song với AD , cắt SD tại Q . Suy ra Q là giao điểm của SD và (MNP) .
- b) Tam giác SAB có MP là đường trung bình nên $SB \parallel MP$, do đó $SB \parallel (MNP)$. Theo cách dựng điểm Q , suy ra Q là trung điểm của SD . Do đó NQ là đường trung bình của tam giác SCD , suy ra $SC \parallel NQ$. Suy ra $SC \parallel (MNP)$.
- c) Ta có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với AD). Mặt khác ta có $PQ = \frac{1}{2}AD$, $MN = \frac{AD + BC}{2} > \frac{AD}{2} = PQ$ nên $MNQP$ là hình thang. Vậy MP và NQ có thể cắt nhau tại I .
Theo cách dựng thì I là một điểm chung của (SAB) và (SCD) . Tương tự, giao điểm J của AB và CD cũng là điểm chung của (SAB) và (SCD) . Do đó I, S và J cùng thuộc giao tuyến của (SAB) và (SCD) .
Vậy I, S, J thẳng hàng.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 13. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

- (A) Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P) thì trong (P) có duy nhất một đường thẳng a song song với d .
 (B) Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì d song song với mọi đường thẳng nằm trong (P) .
 (C) Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d .
 (D) Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P) , đường thẳng a bất kỳ nằm trong (P) thì a và d chéo nhau.

Lời giải.

Khẳng định đúng là “Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d ”.

Chọn đáp án (C)

Câu 14. Trong không gian, đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu

- (A) $a \not\subset (P)$.
 (B) $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases}$.
 (C) $\begin{cases} a \parallel b \\ b \not\subset (P) \end{cases}$.
 (D) $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi a không nằm trong (P) , đồng thời a song song với một đường thẳng b nằm trong (P) .

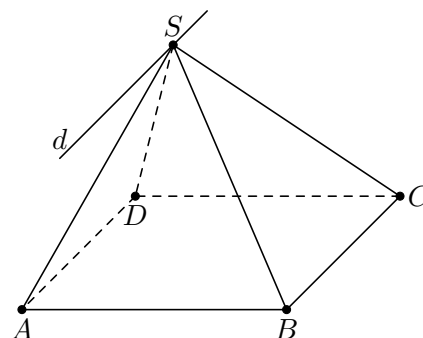
Chọn đáp án (D)

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- (A) AC .
 (B) DC .
 (C) BD .
 (D) AD .

Lời giải.

Giao tuyến của 2 mặt phẳng chứa 2 đường thẳng song song với nhau là đường thẳng đi qua 1 điểm chung của 2 mặt phẳng đó và song song với 2 đường thẳng song song trên. Mà $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD .



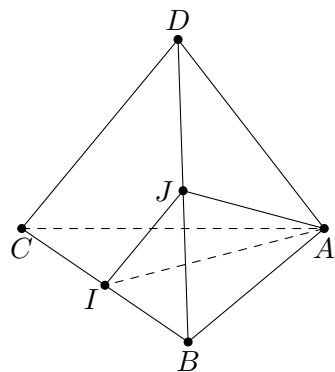
Chọn đáp án (D)

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là đường nào sau đây?

- (A) Đường thẳng d đi qua A và $d \parallel BC$.
 (B) Đường thẳng d đi qua A và $d \parallel BD$.
 (C) Đường thẳng d đi qua A và $d \parallel CD$.
 (D) Đường thẳng d đi qua A và giao điểm của IJ và CD .

Lời giải.

I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD nên $IJ \parallel CD$. Do đó giao tuyến của (AIJ) với (ACD) là đường thẳng đi qua A và song song với CD .



Chọn đáp án (C)

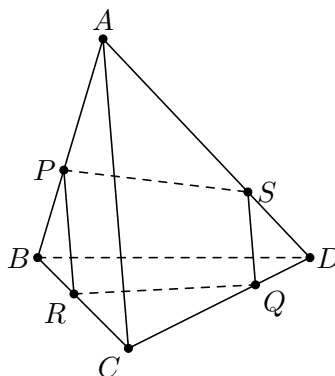
Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên cạnh các AB, CD, BC (không trùng với các đỉnh của tứ diện $ABCD$) sao cho $PR \parallel AC$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

- (A) BD . (B) CD . (C) CB . (D) AC .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} Q \in (PQR) \cap (ACD) \\ PR \subset (PQR) \\ AC \subset (ACD) \\ PR \parallel AC \end{cases} \quad \text{nên } (PQR) \cap (ACD) = Qx \parallel AC.$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) song song với đường thẳng AC .



Chọn đáp án (D)

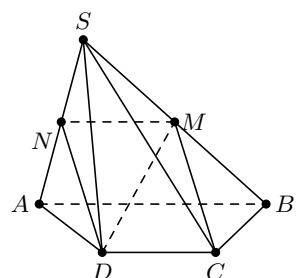
Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi M là trung điểm của SB . Mặt phẳng qua DM , song song với AB cắt đường thẳng SC tại Q . Tính tỉ số $\frac{SC}{SQ}$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) 2. (C) 1. (D) $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Gọi (α) là mặt phẳng qua DM và song song với AB .

Vì $AB \parallel (\alpha)$ và $AB \subset (ABCD)$ nên giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua D và song song với AB . Ta có $DC \parallel AB$ nên DC chính là giao tuyến của (α) và $(ABCD)$. Do đó (α) cắt SC tại C , tức là Q trùng với C . Vì vậy $\frac{SC}{SQ} = 1$.



Chọn đáp án (C)

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$. Khẳng định nào sau đây là sai?

(A) $GG' \parallel (ACD)$.

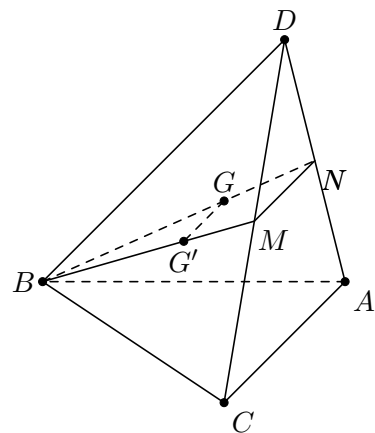
(B) $GG' \parallel BD$.

(C) $GG' \parallel (ABC)$.

(D) $GG' \parallel AC$.

Lời giải.

Ta có GG' cắt mặt phẳng (ABD) tại G . Do đó GG' không thể song song được với BD nằm trong mặt phẳng (ABD) .



Chọn đáp án (B)

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SB , mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) cắt SA, SC lần lượt tại N, P . Khẳng định nào đúng?

(A) $(\alpha) \neq (MNP)$.

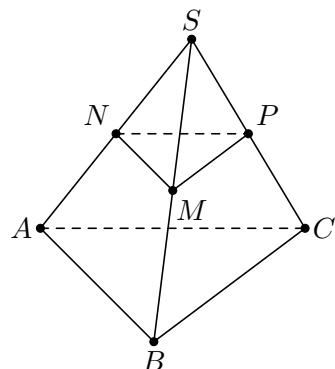
(B) MP cắt BC .

(C) MN cắt AC .

(D) $MP \parallel BC$.

Lời giải.

Theo cách xác định mặt phẳng (α) , ta có $MP \parallel BC$.



Chọn đáp án (D)

Câu 21. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC' . Đường thẳng qua đi qua trọng tâm I của tam giác ABC cắt $A'B$ và MN lần lượt tại P, Q . Khi đó tỉ số $\frac{IP}{IQ}$ bằng

(A) $\frac{3}{5}$.

(B) $\frac{5}{2}$.

(C) $\frac{2}{5}$.

(D) $\frac{5}{3}$.

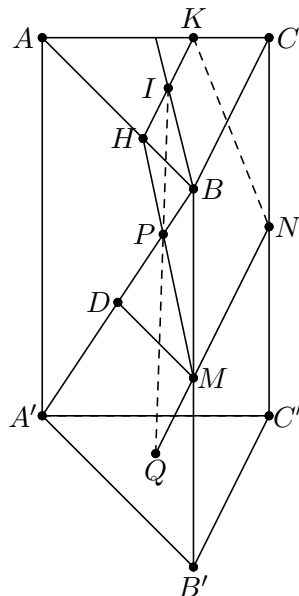
Lời giải.

Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC, AB tại H, K . Suy ra $KH \parallel MN$, do đó M, N, K, H, I đồng phẳng.

Gọi $P = A'B \cap MH, Q = IP \cap MN$.

$$\text{Kẻ } MD \parallel A'B' \ (D \in A'B) \text{ ta được } \frac{HP}{PM} = \frac{HB}{DM} = \frac{\frac{1}{3} \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot A'B'} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{IP}{PQ} = \frac{HP}{PM} = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } \frac{IP}{PQ} = \frac{2}{5}.$$



Chọn đáp án (C)

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC , H là giao điểm của DG và (SAC) . Tỉ số $\frac{GH}{GD}$ bằng

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\frac{3}{5}$.

(C) $\frac{2}{5}$.

(D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC , N là giao điểm của AC và MD .

Khi đó, $(SMD) \cap (SAC) = SN$.

Vì $DG \subset (SMD)$ và $DG \cap (SAC) = H$ nên $H \in SN$.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua C thì tứ giác $ABED$ là hình bình hành. Suy ra $EM \parallel AC$. Do đó, N là trung điểm của MD .

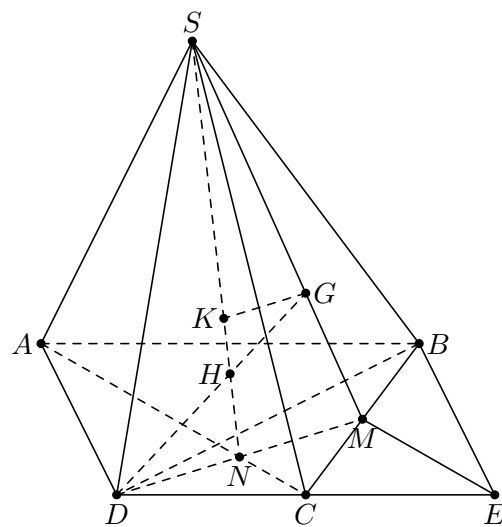
Dựng đường thẳng đi qua G song song với MN và cắt SN tại K .

$$\text{Khi đó, } \frac{SG}{SM} = \frac{KG}{NM} \text{ và } \frac{HD}{HG} = \frac{DN}{KG}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{SG}{SM} \cdot \frac{NM}{ND} \cdot \frac{HD}{HG} = \frac{KG}{NM} \cdot \frac{NM}{ND} \cdot \frac{ND}{KG} = 1.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{SG}{SM} = \frac{1}{3} \text{ và } \frac{NM}{ND} = 1 \text{ nên } \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{HD}{HG} = 1 \Leftrightarrow \frac{HD}{HG} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \frac{GH}{GD} = \frac{2}{5}.$$



Chọn đáp án (C)

Dạng 4. Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Để xác định được thiết diện của một hình chóp hoặc hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) ta thường dựng các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp hoặc hình lăng trụ đó. Khi ấy, ta sử dụng định lý sau:

Định lý 4.5. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia theo hai giao tuyến song song với nhau.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm SA . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) .

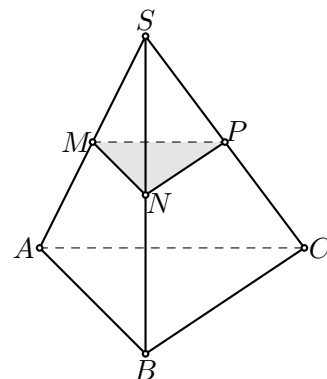
Lời giải.

Vì $\begin{cases} (P) \parallel (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ M \text{ là một điểm chung của } (P) \text{ và } (SAB) \end{cases}$ nên giao tuyến của (P) và (SAB) là

đường thẳng đi qua M , song song với AB , cắt SB tại trung điểm N của SB .

Tương tự, giao tuyến của (P) và (SAC) là đường thẳng đi qua M , song song với AC , cắt SC tại trung điểm P của SC .

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác MNP .



Ví dụ 19. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tìm thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'C'C)$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải.

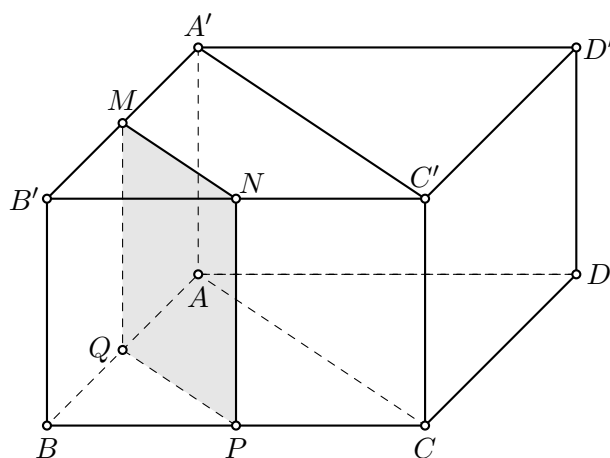
Vì (P) song song với $(A'C'C)$ nên (P) song song với $(A'C'CA)$.

Suy ra giao tuyến của (P) với $(A'B'C'D')$ là đường thẳng đi qua M , song song với $A'C'$ và cắt $B'C'$ tại trung điểm N của $B'C'$.

Tương tự, giao tuyến của (P) với $(B'C'CB)$ là đường thẳng đi qua N , song song với $C'C$ và cắt BC tại trung điểm P của BC .

Giao tuyến của (P) với $(A'B'BA)$ là đường thẳng đi qua M , song song với $A'A$ và cắt AB tại trung điểm Q của AB .

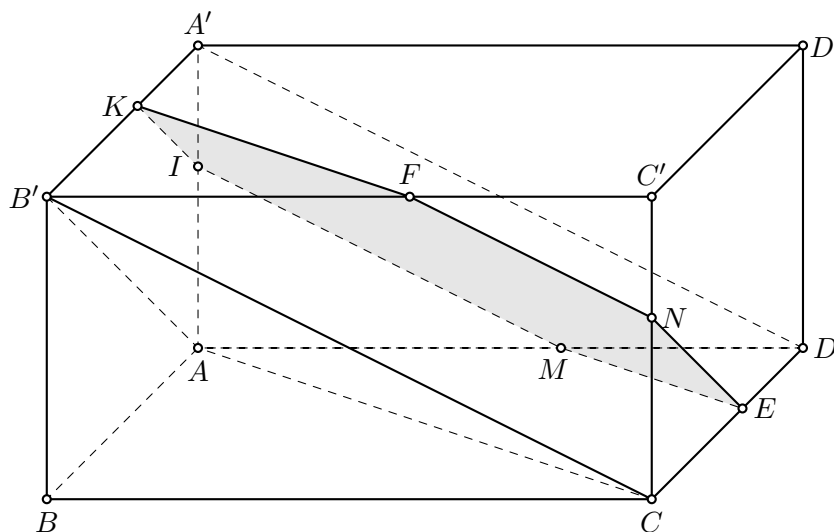
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.



Do NP song song và bằng CC' ; MQ song song và bằng AA' nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Ví dụ 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua MN và song song với (ACB')

Lời giải.



Gọi I là điểm trên AA' sao cho $\frac{AI}{IA'} = \frac{AM}{MD}$ suy ra $IM \parallel A'D$ suy ra $IM \parallel CB'$

Lại có $\frac{AI}{IA'} = \frac{CN}{NC'}$ suy ra $IN \parallel AC$ suy ra $(MNI) \parallel (ACB')$. Do đó, mặt phẳng (MNI) là mặt phẳng đi qua M, N và song song với mặt phẳng (ACB') .

Qua M kẻ $ME \parallel AC$; qua N kẻ $NF \parallel B'C'$, qua F kẻ $FK \parallel A'C'$.

Khi đó, thiết diện cần tìm là đa giác $MENFKI$. □

Ví dụ 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\triangle SAD$ đều. Đáy $ABCD$ là hình thang có $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD = 1$, $AD = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với (SAD) . Đặt $BM = x$, $(0 < x < 1)$. Tìm x để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD .

Lời giải.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AD , cắt CD tại N .

Qua M kẻ đường thẳng song song với SA , cắt SB tại Q .

Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC , cắt SC tại P .

Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng qua M và song song với (SAD) .

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

Bởi vì MN và PQ cùng song song với BC (hoặc AD) nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Tam giác SAD đều, cạnh $AD = 2$ nên $SA = SD = 2$.

Áp dụng định lý Thales trong các tam giác SAB , SBC , SCD ta được

$$x = \frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CP}{CS} = \frac{CN}{CD} = \frac{NP}{SD} \text{ và } \frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = 1 - x.$$

Suy ra $MQ = NP = 2x$, $CN = x$ và $PQ = 1 - x$.

Tiếp tục áp dụng định lý Thales trong các tam giác ABC , ACD ta được

$$1 - x = \frac{AM}{BC} = \frac{MI}{BC}, x = \frac{CN}{CD} = \frac{IN}{AD}, \Rightarrow MI = 1 - x \text{ và } IN = 2x \\ \Rightarrow MN = x + 1.$$

Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của P , Q trên MN .

$$\text{Ta có } MK = HN = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{(x + 1) - (1 - x)}{2} = x.$$

$$\text{Suy ra } QK = \sqrt{QM^2 - MK^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{(PQ + MN) \cdot QK}{2} = \frac{(1 - x + 1 + x) \cdot \sqrt{3}x}{2} = \sqrt{3}x.$$

$$\text{Từ giả thiết ta có } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{SBD} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = \frac{1}{2} \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3}x = \frac{x^2 \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (vì } 0 < x < 1).$$

$$\text{Vậy } x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

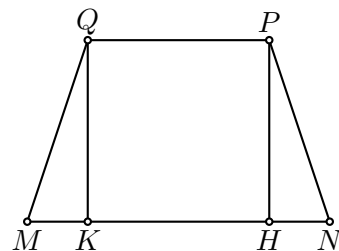
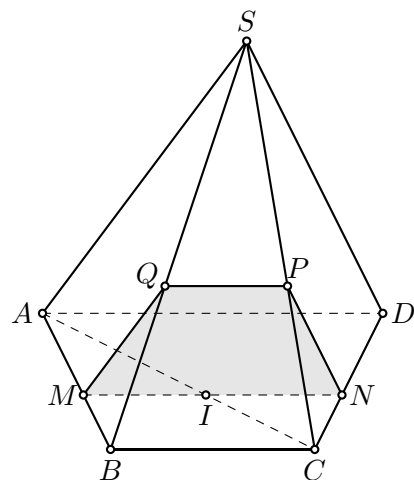
Ví dụ 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a$, $BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC .

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

Lời giải.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) .

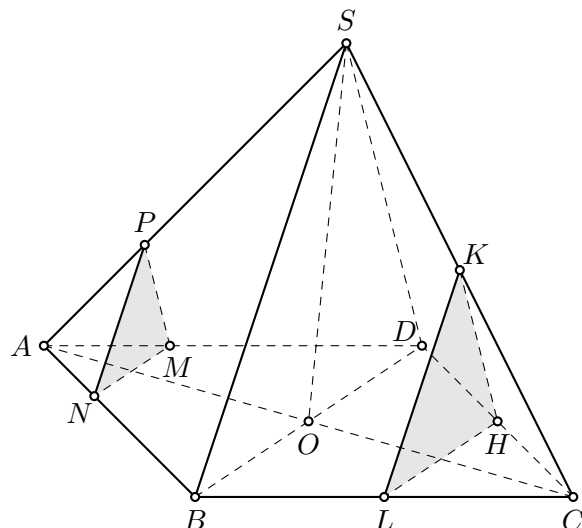


Nếu $I \in OA$ thì ta có

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN. \\ I \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases}$$

với MN qua I và $MN \parallel BD$.

Tương tự (α) cắt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP song song với SB , cắt (SAD) theo đoạn giao tuyến $NP \parallel SD$. Thiết diện là tam giác đều MNP (vì đồng dạng với tam giác đều SBD)



Nếu $I \in OC$ thì thiết diện là tam giác đều HKL có các cạnh tương ứng song song với cạnh tam giác SBD .

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

Ta có $S_{\triangle BCD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

Nếu I nằm giữa O và A thì $0 < x < \frac{a}{2}$.

Khi đó $\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\frac{MN}{BD}\right)^2$. Do $MN \parallel BD$, suy ra $\frac{MN}{BD} = \frac{AI}{AO} = \frac{2x}{a} \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Nếu I nằm giữa O và C thì $\frac{a}{2} < x < a$.

Khi đó $\frac{S_{\triangle HKL}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\frac{HL}{BD}\right)^2$. Do $HL \parallel BD \Rightarrow \frac{HL}{BD} = \frac{CI}{CO} = \frac{2(a-x)}{a} \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 17. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi K là trung điểm CD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C' và song song với $(A'AK)$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) .

🗨️ **Lời giải.**

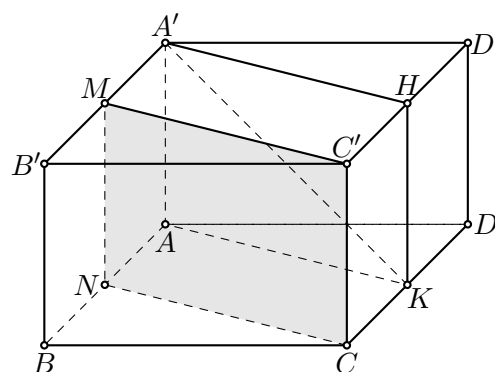
Gọi H là trung điểm $C'D' \Rightarrow KH \parallel AA' \Rightarrow H \in (A'AK)$.

Qua C' kẻ đường thẳng song song với $A'H$, cắt $A'B'$ tại M .

Qua C kẻ đường thẳng song song với AK , cắt AB tại N .

Suy ra mặt phẳng $(CC'MN)$ là mặt phẳng đi qua C' và song song với $(A'AK)$.

Thiết diện cần tìm là hình bình hành $CC'MN$.



□

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AD = 3a$, $AB = BC = a$. Mặt bên (SAD) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AB và không trùng với A, B . Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAD) . Xác định thiết diện của chóp với mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?

🗨️ **Lời giải.**

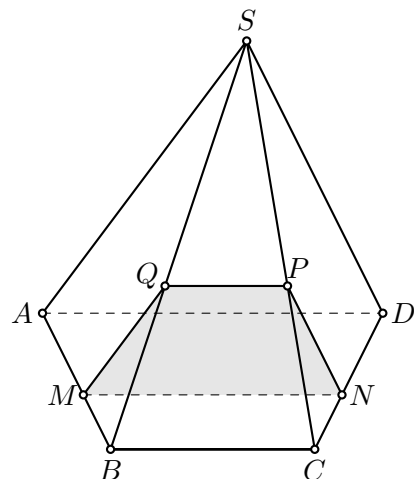
Qua M kẻ đường thẳng song song với AD , cắt CD tại N .
 Qua M kẻ đường thẳng song song với SA , cắt SB tại Q .
 Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC , cắt SC tại P .
 Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng qua M và song song với (SAD) .
 Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.
 Bởi vì MN và PQ cùng song song với BC (hoặc AD) nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Áp dụng định lý Thales trong các tam giác SAB, SBC, SCD ta được $\frac{BM}{BA} =$

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CP}{CS} = \frac{CN}{CD} = \frac{NP}{SD}.$$

Suy ra $\frac{MQ}{SA} = \frac{NP}{SD}$, mà tam giác SAD cân tại S . Do đó $MQ = NP$.

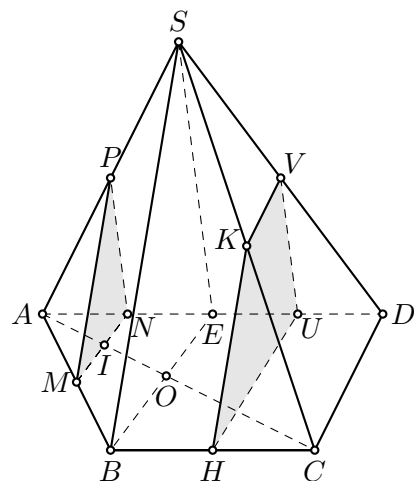
Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.



Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC, AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O giao điểm của AC và BE ; I là một điểm di động trên cạnh AC khác A và C . Qua I vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBE) . Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

- ☑ Trường hợp 1: Điểm I nằm giữa A và O .
 Qua I kẻ đường thẳng song song với BE , cắt AB, AD lần lượt tại M và N .
 Qua M kẻ đường thẳng song song với SB , cắt SA tại P .
 Suy ra (MNP) là mặt phẳng đi qua I và song song với (SBE) . Do đó, thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác MNP .
- ☑ Trường hợp 2: Điểm I nằm giữa C và O .
 Qua I kẻ đường thẳng song song với BE , cắt BC, AD lần lượt tại H và U .
 Qua H kẻ đường thẳng song song với SB , cắt SC tại K .
 Qua U kẻ đường thẳng song song với SE , cắt SD tại V .
 Suy ra $(HKVU)$ là mặt phẳng đi qua I và song song với (SBE) . Do đó, thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $HKVU$.



Bài 20. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AG . Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (ABC) là tam giác MNP . Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai tam giác MNP và ABC . Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

Lời giải.

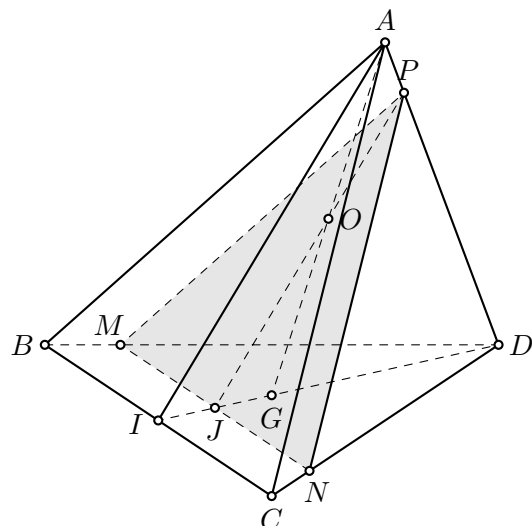
Gọi I là trung điểm BC . Trong mặt phẳng (AID) , qua O kẻ đường thẳng song song với AI , cắt AD tại P và cắt DI tại J .
 Qua J , kẻ đường thẳng song song với MN , cắt CD tại N và cắt BD tại M .

Thiết diện cần tìm là tam giác MNP .

Trong tam giác AIG có $OJ \parallel AI$, hơn nữa O là trung điểm AG nên J là trung điểm IG . Do đó $IJ = \frac{1}{2}IG = \frac{1}{6}ID \Rightarrow \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}$.

Suy ra hai tam giác MNP và BCA đồng dạng theo tỉ số $k = \frac{MN}{BC} = \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{25}{36}$.



Bài 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có M là điểm di động trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$, với $0 < k < 1, k \in \mathbb{R}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) . Tìm k để mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABC$ theo một thiết diện có diện tích bằng nửa diện tích của tam giác ABC .

Lời giải.

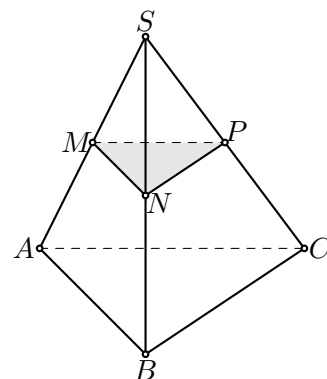
Qua M kẻ đường thẳng song song với AB , cắt SB tại N .

Qua M kẻ đường thẳng song song với AC , cắt SC tại P .

Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác MNP .

Ta có hai tam giác MNP và ABC đồng dạng theo tỉ số $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = k$.

$$\text{Suy ra } \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Bài 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , tam giác SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AB , $AM = x$ với $0 < x < a$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với (SAD) . Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) .

Lời giải.

Do mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với (SAD) nên cắt các cạnh của hình chóp bằng các giao tuyến đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD) .

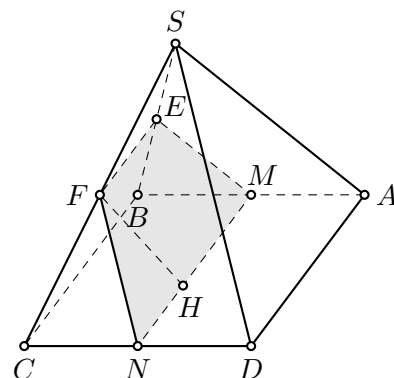
Do $ABCD$ là hình thoi và tam giác SAD đều nên thiết diện thu được là hình thang cân $MNFE$ với $MN \parallel EF$, $ME = NF$.

$$\text{Khi đó } MN = a, \frac{EF}{BC} = \frac{SF}{SC} = \frac{MA}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EF = x \text{ và } MF = a - x.$$

Kẻ đường cao FH , $H \in MN$.

$$\text{Ta có } FH = \sqrt{MF^2 - \left(\frac{MN - EF}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x).$$

$$\text{Vậy diện tích hình thang là } S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2).$$



Bài 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. Điểm M thuộc cạnh AD (M không trùng với A và D) sao cho $\frac{MA}{MD} = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB) . Tìm x để diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng một nửa diện tích tam giác SAB .

Lời giải.

Để thấy thiết diện là hình thang $MNPQ$ (như hình vẽ) với $MN \parallel SA$, $NP \parallel CD$, $PQ \parallel SB$, $QM \parallel AB$.

Gọi E là giao điểm của MN và PQ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } QM &= \frac{MD}{AD} \cdot AB + \frac{AM}{AD} \cdot CD \\ &= \frac{1}{x+1}AB + \frac{x}{x+1}CD = \frac{2(x+1)}{2(x+1)}AB. \end{aligned}$$

Hai tam giác SAB và EMQ đồng dạng nên

$$\frac{S_{EMQ}}{S_{SAB}} = \left(\frac{MQ}{AB}\right)^2 = \frac{(x+2)^2}{4(x+1)^2}.$$

$$\text{Vì } \frac{NP}{CD} = \frac{NS}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \text{ suy ra } NP = \frac{x}{x+1}CD = \frac{x}{2(x+1)}AB.$$

$$\text{Do đó } \frac{NP}{QM} = \frac{x}{x+2} \text{ và } \frac{S_{EPN}}{S_{EMQ}} = \left(\frac{NP}{MQ}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2}$$

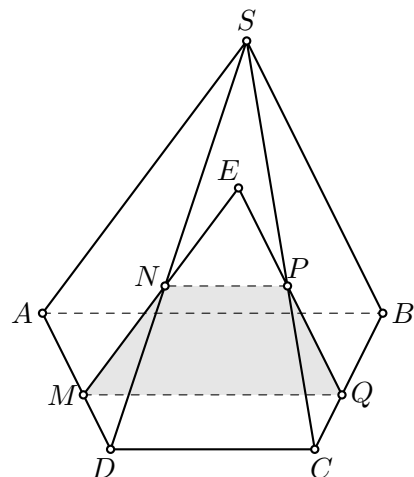
$$\Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{EMQ}} = 1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{4x+4}{(x+2)^2}.$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \frac{4x+4}{4(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{1}{2}S_{SAB} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

(1)

(2)



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB . Mặt phẳng (α) qua M song song với (SBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

(A) Hình tam giác.

(B) Hình vuông.

(C) Hình bình hành.

(D) Hình thang.

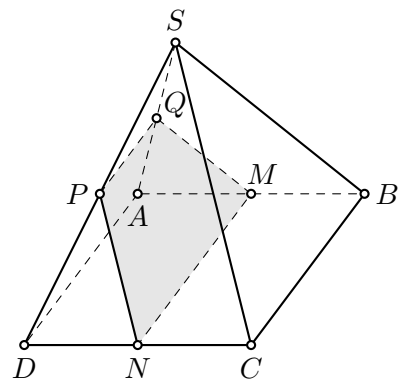
Lời giải.

Do $(\alpha) \parallel (SBC)$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến $MN \parallel BC$, ($N \in CD$).

Hoàn toàn tương tự, ta có (α) cắt các mặt phẳng (SAB) và (SCD) theo các giao tuyến MQ, NP ở đó $Q \in SA$ và $MQ \parallel SB$; $P \in SD$ và $NP \parallel SC$.

Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Để thấy $PQ \parallel AD$, $PQ \neq AD$ từ đó suy ra $MNPQ$ là hình thang.



Chọn đáp án (D)

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng SO . Mặt phẳng (α) qua M và song song với $(ABCD)$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

(A) Hình bình hành.

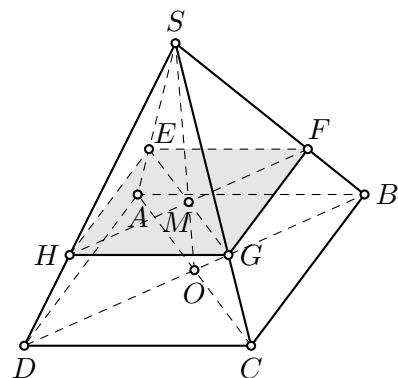
(B) Hình tam giác.

(C) Hình ngũ giác.

(D) Hình thang cân.

Lời giải.

Xét mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (α) , có M là điểm chung và $AC \parallel (\alpha)$ nên giao tuyến là đường thẳng đi qua M và song song với AC cắt SA, SC lần lượt tại E, G . Tương tự (α) cắt SB, SD lần lượt tại F, H . Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác $EFGH$. Ta có $EF \parallel GH$ và $FG \parallel EH$ nên thiết diện là hình bình hành.



Chọn đáp án (A)

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , $AB = 8$, $SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và song song với (SAB) . Tính diện tích của thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$.

(A) 12.

(B) $5\sqrt{5}$.

(C) $6\sqrt{5}$.

(D) 13.

Lời giải.

Qua O dựng đường thẳng $PQ \parallel AB \Rightarrow P, Q$ lần lượt là trung điểm của AD và BC .

Qua P dựng đường thẳng $PN \parallel SA \Rightarrow N$ là trung điểm của SD .

Qua Q dựng đường thẳng $QM \parallel SB \Rightarrow M$ là trung điểm của SC .

Nối M và $N \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Vì $PQ \parallel CD, MN \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel MN$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Ta có $PQ = AB = 8$, $MN = \frac{1}{2}AB = 4$, $MQ = NP = \frac{1}{2}SA = 3$. Suy ra

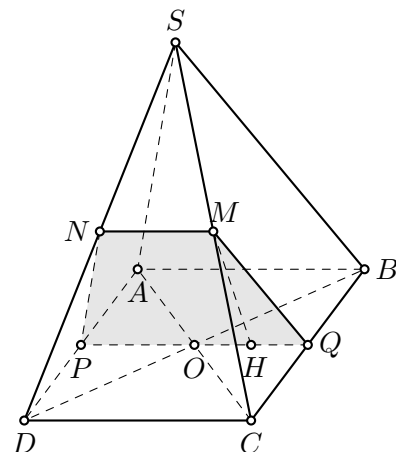
$MNPQ$ là hình thang cân.

Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh M của hình thang $MNPQ$. Khi đó ta có

$$HQ = \frac{1}{4}PQ = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{MQ^2 - HQ^2} = \sqrt{5}.$$

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm là

$$S = \frac{(MN + PQ) \cdot MH}{2} = 6\sqrt{5}.$$



Chọn đáp án (C)

Câu 26. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của cạnh AB , (α) là mặt phẳng đi qua I và song song với mặt phẳng (BDD') . Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

(A) Hình tam giác.

(B) Hình bình hành.

(C) Hình ngũ giác.

(D) Hình thang.

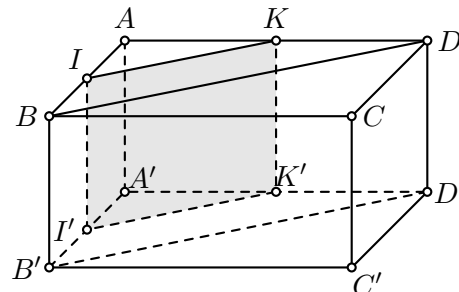
Lời giải.

Qua I kẻ đường thẳng song song với BD , cắt AD tại K .

Qua K kẻ đường thẳng song song với DD' , cắt $A'D'$ tại K' .

Qua I kẻ đường thẳng song song với BB' , cắt $A'B'$ tại I' .

Thiết diện cần tìm là hình bình hành $IKK'I'$.



Chọn đáp án (B)

Câu 27. Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB , M là điểm di động trên đoạn AI . Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC) . Thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$ là

(A) tam giác cân tại M .

(B) hình bình hành.

(C) tam giác đều.

(D) hình thoi.

Lời giải.

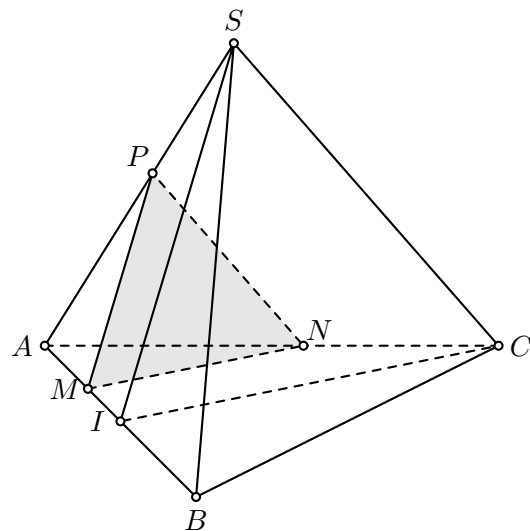
Trong mặt phẳng (SAB) , qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P .

Trong mặt phẳng (ABC) , qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại N .

Thiết diện là tam giác MNP . Ta có

$$\frac{MP}{SI} = \frac{MN}{CI} \Rightarrow MP = MN \quad (\text{vì } SI = CI).$$

Vậy thiết diện là tam giác MNP cân tại M .



Chọn đáp án (A)

Câu 28. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và G là trọng tâm tam giác ABC . Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua G và song song với mặt phẳng (BCD) thì diện tích thiết diện bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

(B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

(C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

(D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải.

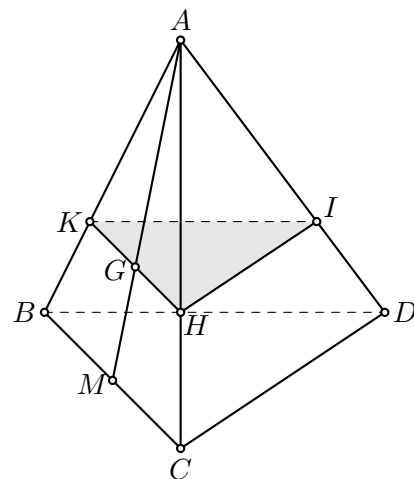
Trong mặt phẳng (ABC) kẻ đường thẳng qua G và song song với BC cắt AC, AB lần lượt tại H, K .

Trong mặt phẳng (ACD) kẻ đường thẳng qua H và song song với CD cắt AD tại I .

Thiết diện cần tìm là tam giác KHI .

Ta có $\triangle HKI \sim \triangle BCD$ theo tỉ số đồng dạng bằng $\frac{2}{3}$.

$$\text{Do đó } S_{KHI} = \frac{4}{9} S_{BCD} = \frac{4}{9} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}.$$



Chọn đáp án (C)

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

(A) Hình bình hành.

(B) Tam giác đều.

(C) Tam giác vuông.

(D) Tam giác cân không đều.

Lời giải.

TH1: Điểm I thuộc đoạn OC . Gọi M, N, E lần lượt là giao điểm của (P) với các đường thẳng CD, BC, SC . Ta có thiết diện của (P) và hình chóp là tam giác EMN .

$$\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \Rightarrow MN \parallel BD \\ (P) \cap (ABCD) = MN \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CD} = t \Rightarrow MN = t \cdot BD.$$

$$\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (SCD) \cap (SBD) = SD \Rightarrow ME \parallel SD \\ (P) \cap (SCD) = ME \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{SD} = \frac{CM}{CD} = t \Rightarrow ME = t \cdot SD.$$

Tương tự $EN \parallel SB$ và $EN = t \cdot SB$

Mà $SB = BD = SD \Rightarrow MN = EM = EN$, suy ra tam giác MNE là tam giác đều.

TH2: Điểm I thuộc OA . Làm tương tự như trên ta được thiết diện của (P) và hình chóp cũng là một tam giác đều.

Chọn đáp án (B)

Câu 30. Cho tứ diện đều $S.ABC$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và SC . Xét M là một điểm di động trên đoạn thẳng AI . Qua M kẻ mặt phẳng (α) song song với (CIJ) . Khi đó thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện $S.ABC$ là hình gì?

- (A) Tam giác đều. (B) Hình bình hành. (C) Tam giác cân tại M . (D) Hình thang cân.

Lời giải.

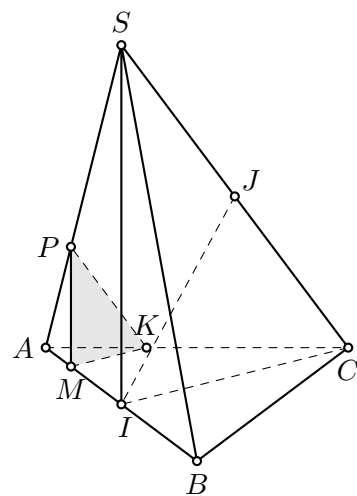
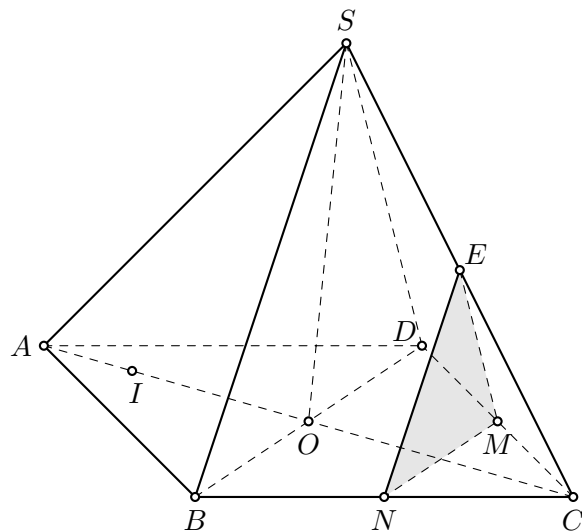
Nhận xét mặt phẳng (CIJ) chính là mặt phẳng (SCI) .
 Qua M kẻ đường thẳng song song với IC , cắt AC tại K .
 Qua M kẻ đường thẳng song song với SI , cắt SA tại P .
 Thiết diện là tam giác MPK .
 Ta có $CI = SI \neq SC$ nên tam giác SCI cân tại I .
 Mặt khác $\triangle PKM \sim \triangle SCI$.
 Do đó tam giác PKM cân tại M .

Chọn đáp án (C)

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

- (A) $\frac{20}{3}$. (B) $\frac{400}{9}$. (C) $\frac{4}{9}$. (D) $\frac{16}{9}$.

Lời giải.



$$\begin{aligned} \text{Từ } \begin{cases} AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (SAB) \end{cases} &\Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = Mx \parallel AB. \\ &M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ \text{Từ } \begin{cases} AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (SAD) \end{cases} &\Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = My \parallel AD. \\ &M \in (SAD) \cap (\alpha) \end{aligned}$$

Mx, My cắt SB, SD lần lượt tại N, Q .

$$\text{Từ } \begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = Qz \parallel CD. \\ Q \in (SCD) \cap (\alpha)$$

Qz cắt SC tại P .

Thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.

$$\text{Dễ thấy } \frac{2}{3} = \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA}. \\ \Rightarrow MN = NP = PQ = QM = \frac{20}{3}.$$

Mặt khác $MN \parallel AB, NP \parallel BC \Rightarrow \widehat{(MN, NP)} = \widehat{(AB, BC)} = 90^\circ \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông với cạnh $\frac{20}{3} \Rightarrow$

$$S_{MNPQ} = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400}{9}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 3$, hai đáy $AB = 8$, $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

(A) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$.

(B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

(C) $\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

☞ **Lời giải.**

Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB, SC, SD .

Suy ra thiết diện của (P) với hình chóp là tứ giác $MNPQ$.

$$\text{Do } (P) \parallel (ABCD) \text{ nên } \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } MN = \frac{8}{3}, NP = 1, PQ = \frac{4}{3}, QM = 1.$$

Gọi H là hình chiếu của P trên cạnh MN .

Do $MNPQ$ là hình thang cân nên

$$HN = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow PH = \sqrt{PN^2 - HN^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot (MN + PQ) = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 33. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và điểm M nằm giữa hai điểm A và B . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng $(AB'D')$. Mặt phẳng (P) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

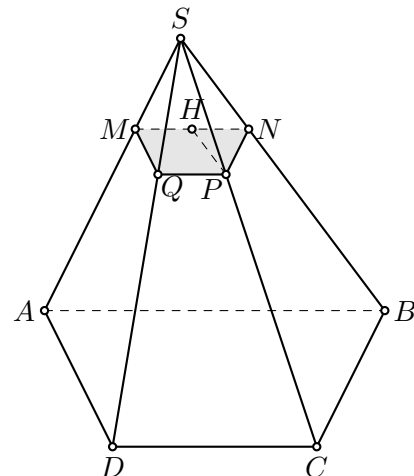
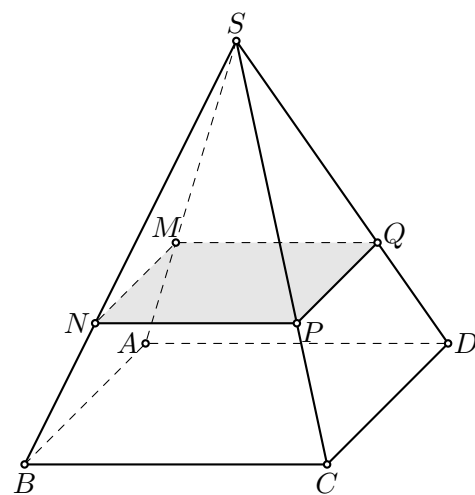
(A) Hình tứ giác.

(B) Hình tam giác.

(C) Hình lục giác.

(D) Hình ngũ giác.

☞ **Lời giải.**



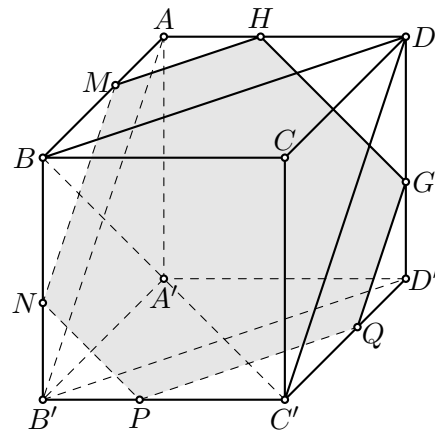
Nhận thấy $(BC'D) \parallel (AB'D') \Rightarrow (BC'D) \parallel (AB'D') \parallel (P)$. (1)

Do (1), ta giả sử (P) cắt BB' tại N , suy ra $(P) \cap (ABB'A') = MN$, kết hợp với $(AB'D') \cap (ABB'A') = AB'$ suy ra $MN \parallel AB'$, suy ra N thuộc cạnh BB' .

Tương tự, giả sử $(P) \cap B'C' = P$ suy ra $(P) \cap (BCC'B') = NP$. Kết hợp với (1) suy ra $NP \parallel BC'$.

Tương tự, $(P) \cap C'D' = Q$ sao cho $PQ \parallel B'D'$; $(P) \cap DD' = G$ sao cho $QG \parallel C'D$; $(P) \cap AD = H$ sao cho $GH \parallel AD'$.

Từ đó suy ra thiết diện là lục giác $MNPQGH$.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, M là điểm thuộc cạnh AD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB) . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB , tính tỉ số $x = \frac{MA}{MD}$.

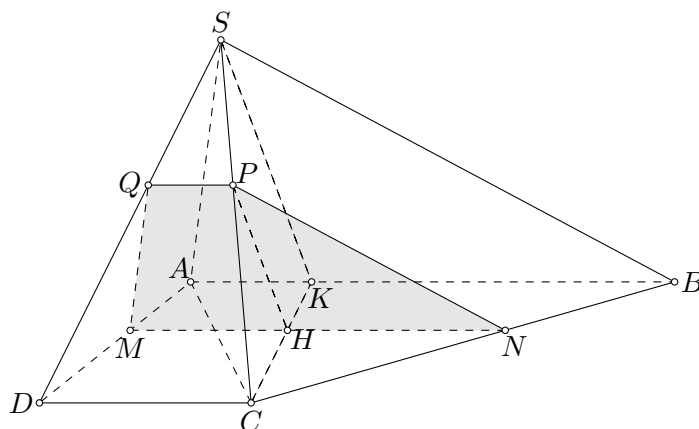
(A) $x = 1$.

(B) $x = \frac{2}{3}$.

(C) $x = \frac{3}{2}$.

(D) $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \end{cases}$ suy ra giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua M và song song với AB , đường thẳng này cắt BC tại N .

Tương tự giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng qua N song song SB cắt SC tại P , giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua P song song CD cắt SD tại Q . Thiết diện của $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình thang $MNPQ$.

Đặt $CD = a$, ta có $\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow PQ = \frac{ax}{x+1}$.

Trong hình thang $ABCD$ ta có $MN = \frac{x}{x+1}CD + \frac{1}{x+1}AB = \frac{a(x+2)}{x+1}$.

Gọi K là hình chiếu của S lên AB , H là giao của MN và CK , khi đó $PH \parallel SK$ và do đó $PH \perp MN$, thêm nữa $\frac{PH}{SK} = \frac{CH}{CK} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{x+1}$ nên $\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \frac{(PQ + MN) \cdot PH}{SK \cdot AB} = \frac{1}{x+1}$.

Theo giả thiết $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , cạnh a , các cạnh bên đều bằng $2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (SBC) . Tính chu vi P của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$.

(A) $P = \frac{7a}{2}$.

(B) $P = \frac{11a}{2}$.

(C) $P = \frac{9a}{2}$.

(D) $P = \frac{5a}{2}$.

Lời giải.

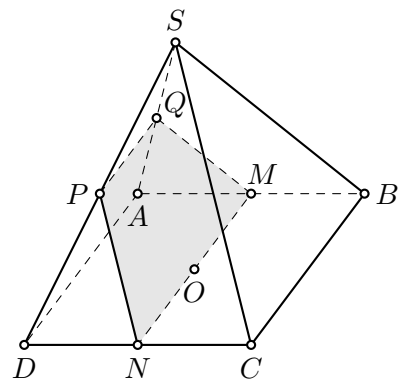
Do $(\alpha) \parallel (SBC)$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến đi qua O , song song với BC và cắt AB tại M , cắt CD tại N .

Hoàn toàn tương tự, ta có (α) cắt các mặt phẳng (SAB) và (SCD) theo các giao tuyến MQ, NP ở đó $Q \in SA$ và $MQ \parallel SB$; $P \in SD$ và $NP \parallel SC$.

Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Lại có O là trung điểm AC nên M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, SD, SA .

$$\text{Suy ra } MN = a, NP = \frac{1}{2}SC = a, MQ = \frac{1}{2}SB = a, PQ = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}.$$



$$\text{Vậy chu vi của thiết diện là } P = MN + NP + PQ + QM = a + a + \frac{a}{2} + a = \frac{7a}{2}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. M là điểm thuộc cạnh AD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB) . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB . Tính tỉ số $x = \frac{MA}{MD}$.

(A) $x = 1$.

(B) $x = \frac{3}{2}$.

(C) $x = \frac{2}{3}$.

(D) $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Dễ thấy, thiết diện là hình thang $MNPQ$ (như hình vẽ) với $MN \parallel AB$, $MQ \parallel SA$, $PQ \parallel CD$, $NP \parallel SB$.

Gọi $E = AD \cap BC$ và $F = MQ \cap NP$.

Đặt $MD = 1$, vì $x = \frac{MA}{MD}$ nên $MA = x$, $AD = x + 1$.

$$\frac{QP}{DC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{QP}{AB} = \frac{x}{2(x+1)}.$$

$$\text{Mà } \frac{MN}{AB} = \frac{EM}{EA} = \frac{x+2}{2x+2}.$$

$$\Rightarrow \frac{QP}{MN} = \frac{x}{x+2}.$$

$$\frac{S_{FPQ}}{S_{FMN}} = \frac{FQ}{FM} \cdot \frac{FP}{FN} = \left(\frac{QP}{MN}\right)^2 = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2}.$$

$$\frac{S_{FMN}}{S_{SAB}} = \frac{FM}{SA} \cdot \frac{FN}{SB} = \frac{EM}{EA} \cdot \frac{EN}{EB} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \left(\frac{x+2}{2x+2}\right)^2.$$

$$\Rightarrow S_{FMN} = \frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{FPQ}}{S_{SAB}} = \left(\frac{x}{x+2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x+2}{2x+2}\right)^2 = \frac{x^2}{(2x+2)^2}.$$

$$\Rightarrow S_{FPQ} = \frac{x^2}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB} \Rightarrow S_{MNPQ} = S_{FMN} - S_{FPQ}$$

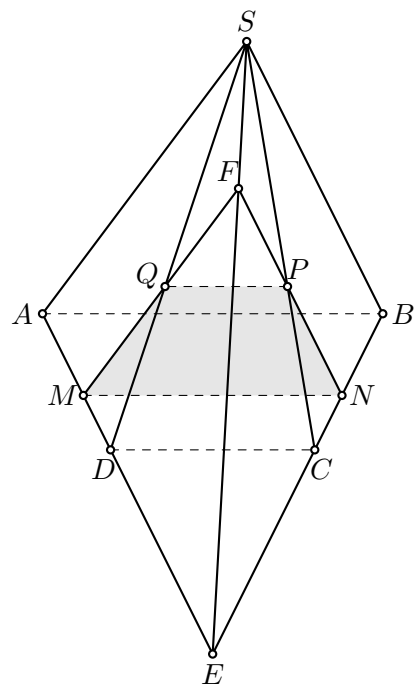
$$= \left[\frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2} - \frac{x^2}{(2x+2)^2} \right] \cdot S_{SAB} = \frac{4x+4}{(2x+2)^2} \cdot S_{SAB}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{4x+4}{(2x+2)^2}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có } \frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4x+4}{(2x+2)^2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 8x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } x = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (D)



Bài số 5

HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

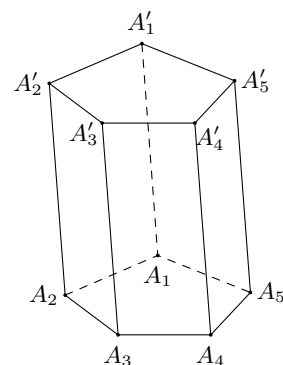
1. Hình lăng trụ

❖ **Định nghĩa 5.1.** Hình gồm hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$, $A'_1A'_2 \dots A'_n$ và các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là hình lăng trụ, kí hiệu là $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$.

⚠ Nếu đáy của lăng trụ là một tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình lăng trụ tương ứng gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, ...

Trong hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$:

- ☑ Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$ gọi là hai mặt đáy;
- ☑ Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các mặt bên;
- ☑ Các cạnh của hai mặt đáy gọi là các cạnh đáy;
- ☑ Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ gọi là các cạnh bên;
- ☑ Các đỉnh của hai mặt đáy gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.



☉ Tính chất 5.1.

- ☑ Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau.
- ☑ Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- ☑ Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

2. Hình hộp

❖ **Định nghĩa 5.2.** Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

⚠ Trong mỗi hình hộp, ta gọi

- ☑ Hai mặt không có đỉnh chung là hai mặt đối diện;
- ☑ Hai cạnh song song không nằm trong một mặt là hai cạnh đối diện;
- ☑ Hai đỉnh không thuộc cùng một mặt là hai đỉnh đối diện;
- ☑ Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện là đường chéo.

☉ Tính chất 5.2.

- ☑ Hình hộp là một hình lăng trụ nên hình hộp có các tính chất của hình lăng trụ.
- ☑ Các mặt của hình hộp là các hình bình hành.
- ☑ Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp song song với nhau.

🔴 **Nhận xét.** Ta có thể coi hai mặt đối diện bất kì của một hình hộp là hai mặt đáy của nó.

B – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Hình lăng trụ

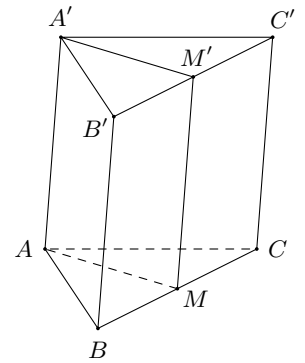
- ☑ Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau.
- ☑ Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- ☑ Hai mặt đáy của hình lăng trụ là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (Cánh Diều).

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$. Chứng minh rằng

- a) $AA' \parallel (BCC'B')$;
- b) $AM \parallel A'M$.



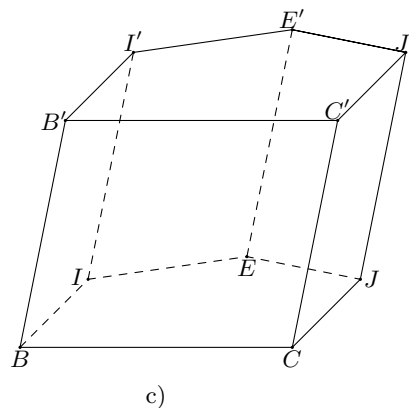
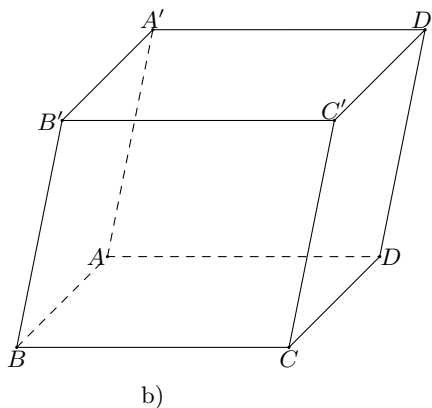
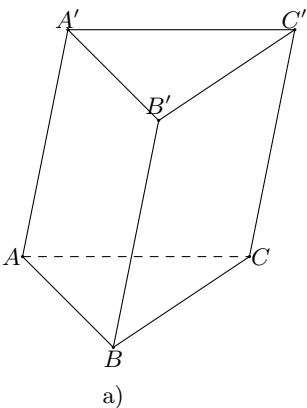
🗨️ Lời giải.

- a) Trong hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, ta có $AA' \parallel BB'$ và $BB' \subset (BCC'B')$, suy ra $AA' \parallel (BCC'B')$.
- b) Vì $MM' \parallel BB'$, $MM' = BB'$ và $BB' \parallel AA'$, $BB' = AA'$ nên $MM' \parallel AA'$, $MM' = AA'$. Suy ra $AMM'A'$ là hình bình hành. Vậy $AM \parallel A'M$.

□

Ví dụ 2 (CTST).

- a) Gọi tên các hình lăng trụ trong các hình sau đây.
- b) Gọi tên các thành phần của hình lăng trụ trong hình đầu tiên.



🗨️ Lời giải.

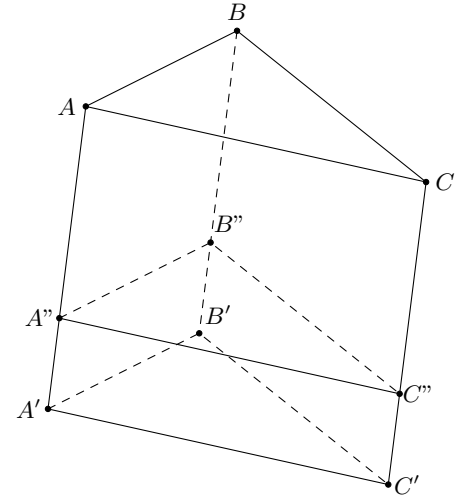
- a) Hình a) là hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$.
Hình b) là hình lăng trụ tứ giác $ABCD \cdot A'B'C'D'$.
Hình c) là hình lăng trụ ngũ giác $IBCJE \cdot I'B'C'J'E'$.
- b) Hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ trong Hình 15a có
— Hai mặt đáy là các tam giác $ABC, A'B'C'$.

- Sáu đỉnh A, B, C, A', B', C' .
- Ba mặt bên là các hình bình hành $AA'B'B, BB'C'C, CC'A'A$.
- Ba cạnh bên AA', BB', CC' .



Ví dụ 3 (KNTT).

Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ (hình vẽ bên). Một mặt phẳng song song với mặt đáy của hình lăng trụ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'', B'', C'' . Chứng minh rằng $ABC.A''B''C''$ là hình lăng trụ.



Lời giải.

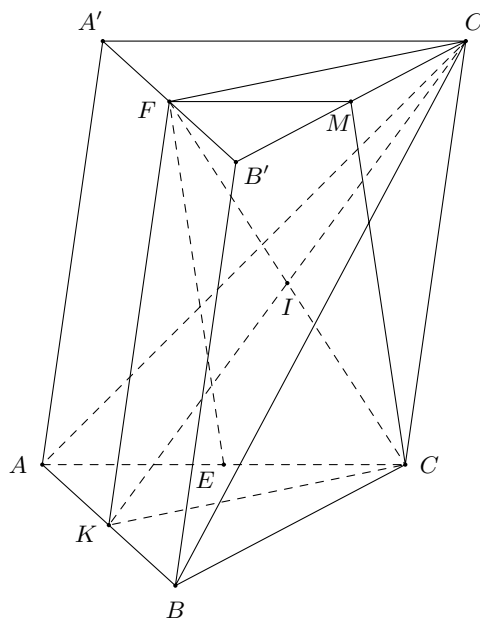
Vì các cạnh bên của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đôi một song song nên AA'', BB'', CC'' đôi một song song. Mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng $(A''B''C'')$ nên $ABC.A''B''C''$ là hình lăng trụ. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 1. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và $A'B'$.

- a) Chứng minh rằng $EF \parallel (BCC'B')$.
- b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng CF với mặt phẳng $(AC'B)$. Chứng minh rằng I là trung điểm đoạn thẳng CF .

Lời giải.



- a) Gọi M là trung điểm $B'C'$, ta có FM là đường trung bình của $\triangle A'B'C'$ nên FM song song và độ dài bằng nửa đoạn $A'C'$.

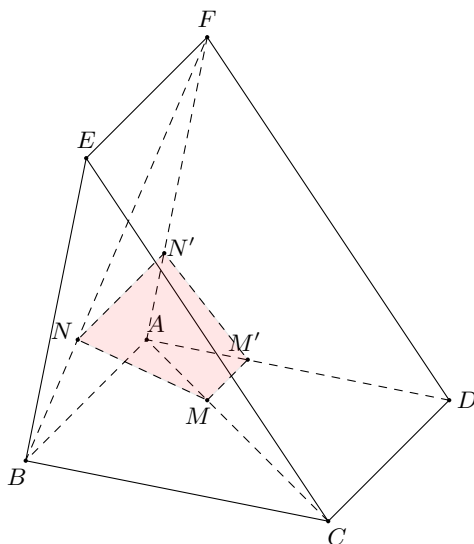
Lại có E là trung điểm AC , AC song song và bằng $A'C'$ nên EC song song và độ dài bằng nửa $A'C'$.
Suy ra FM song song và bằng EC , nên $CEFM$ là hình bình hành. Do đó EF song song với MC .
Mà MC nằm trong $(BCC'B')$ nên EF song song với $(BCC'B')$.

- b) Gọi K là trung điểm AB , vì F là trung điểm $A'B'$ và $ABB'A'$ là hình bình hành nên FK song song và bằng AA' . Do đó FK song song và bằng CC' , suy ra $CC'FK$ là hình bình hành.
Khi đó, gọi I là giao điểm của CF và KC' thì I là trung điểm CF .
Mặt khác $KC' \subset (AC'B)$ nên điểm I xác định như trên chính là giao điểm của CF và $(AC'B)$ theo yêu cầu đề bài. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

- a) Chứng minh $(CBE) \parallel (ADF)$.
b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

Lời giải.



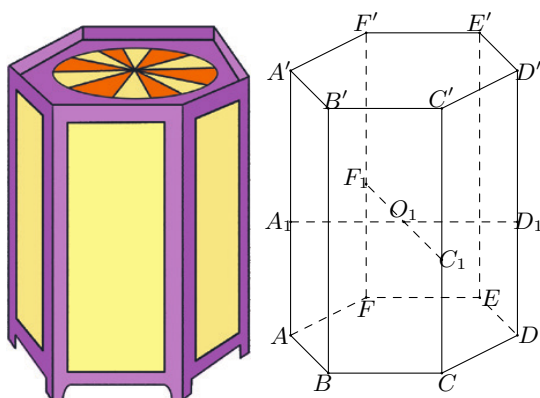
a) Vì $\begin{cases} BC \parallel AD \\ BE \parallel AF \end{cases}$ nên $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Ta có $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{AN'}{AF}$. Suy ra $MN' \parallel CF$.

Mặt khác, lại có $EF \parallel NN'$ (do cùng song song với AB).

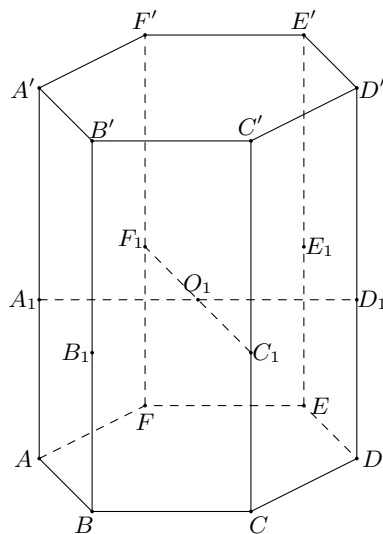
Do đó $(DEF) \parallel (MNN'M')$. □

Bài 3. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (hình bên dưới).



- a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.
- b) Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70$ cm, tính CC_1 và C_1C' .

Lời giải.



- a) Qua O_1 kẻ B_1C_1 song song với mặt phẳng đáy như hình vẽ, khi đó ta có

- ☑ $(A_1D_1, F_1C_1) \cap (ABB'A') = A_1B_1$.
- ☑ $(A_1D_1, F_1C_1) \cap (BCC'B') = B_1C_1$.
- ☑ $(A_1D_1, F_1C_1) \cap (CDD'C') = C_1D_1$.
- ☑ $(A_1D_1, F_1C_1) \cap (DEE'D') = D_1E_1$.
- ☑ $(A_1D_1, F_1C_1) \cap (EFF'E') = E_1F_1$.
- ☑ $(A_1D_1, F_1C_1) \cap (AFF'A') = A_1F_1$.

- b) Ta có $\begin{cases} A'A_1 = 6AA_1 \\ A'A_1 + AA_1 = AA' = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A'A_1 = 60 \\ AA_1 = 10. \end{cases}$
 Suy ra $CC_1 = AA_1 = 10$ cm và $C_1C' = A_1A' = 60$ cm.

□

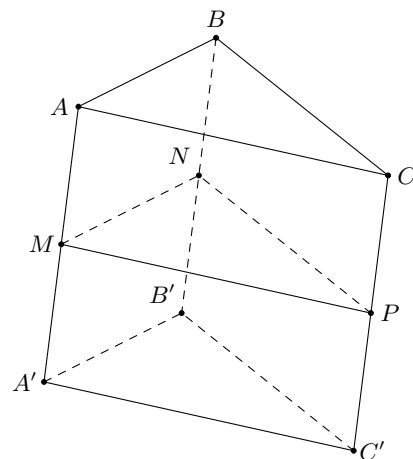
Bài 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AA', BB', CC' . Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

Vì $ABB'A'$ là hình bình hành, có M, N lần lượt là trung điểm AA' và BB' nên $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel (ABC)$.

Vì $ACC'A'$ là hình bình hành, có M, P lần lượt là trung điểm AA' và CC' nên $MP \parallel AC \Rightarrow MP \parallel (ABC)$.

Mặt phẳng (MNP) chứa hai đường thẳng cắt nhau MN, MP và cùng song song với mặt phẳng (ABC) nên (MNP) song song với (ABC) .



□

Bài 5. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'', B'', C'', D'' . Hỏi hình tạo bởi các điểm $A, B, C, D, A'', B'', C'', D''$ là hình gì?

Lời giải.

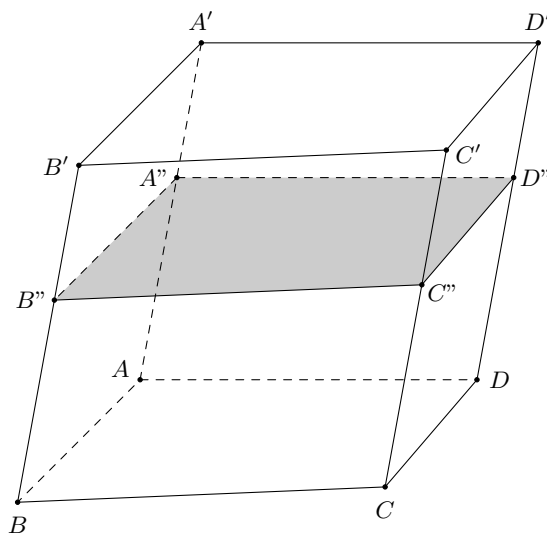
Ta có $(A''B''C''D'') \parallel (A'B'C'D') \Rightarrow (A''B''C''D'') \parallel (ABCD)$.

Vì mặt phẳng $(ABB'A')$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABCD)$, $(A''B''C''D'')$ theo hai giao tuyến AB và $A''B''$ nên $AB \parallel A''B''$.

Do đó $ABB''A''$ là hình bình hành.

Tương tự như trên ta cũng có các tứ giác $BCC''B''$, $CDD''C''$, $DAA''D''$ là các hình bình hành.

Vậy $ABCD.A''B''C''D''$ là hình lăng trụ tứ giác.



Bài 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AGG'A'$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ.

Lời giải.

a) Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$.

Vì $BCC'B'$ là hình bình hành, nên $MM' \parallel BB'$ và $MM' = BB'$.

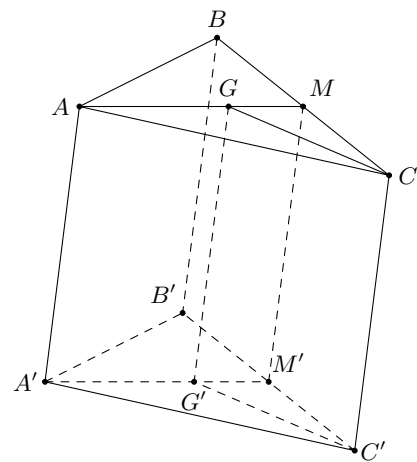
Suy ra $MM' \parallel AA'$ và $MM' = AA'$. Do đó $AMM'A'$ là hình bình hành.

Mặt khác $AG = \frac{2}{3}AM$, $A'G' = \frac{2}{3}A'M'$.

Vậy $AG = A'G'$ và $AG \parallel A'G'$, suy ra $ADD'A'$ là hình bình hành.

b) Tương tự phần a) ta cũng có $CGG'C'$ là hình bình hành.

Vậy $AGC.A'G'C'$ là hình lăng trụ.

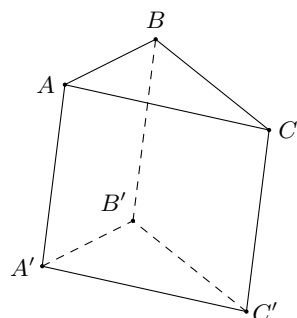


3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1.

Cho hình lăng trụ tam giác (xem hình bên), chọn khẳng định **sai**?

- (A)** Các cạnh bên song song với nhau.
- (B)** Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- (C)** Hai tam giác đáy bằng nhau.
- (D)** Hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song.



Lời giải.

Theo định nghĩa hình lăng trụ thì các mặt bên là hình bình hành. Vậy khẳng định “Các mặt bên là hình chữ nhật” là **sai**.

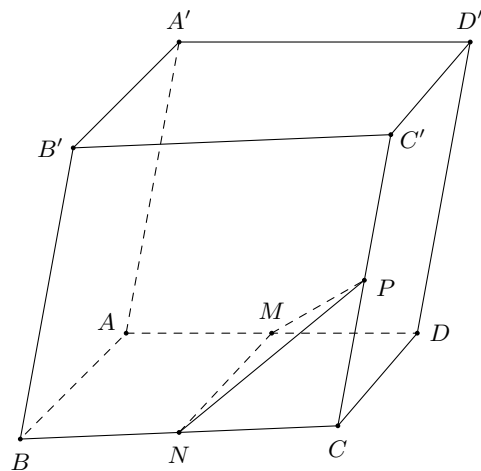
Chọn đáp án **(B)**

Câu 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh AD, BC, CC' (tham khảo hình vẽ). Xét các khẳng định sau:

- Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh $A'D'$.
- Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại trung điểm của DD' .
- Mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABC'D')$.

Trong các khẳng định trên, số khẳng định đúng là

- (A)** 4. **(B)** 3. **(C)** 2. **(D)** 1.



Lời giải.

Mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại trung điểm Q của DD' . Từ đó thấy rằng ba khẳng định trong đề bài đều đúng.

Chọn đáp án **(B)**

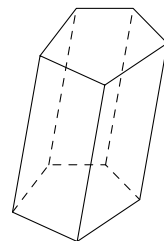
Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.
- Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

Lời giải.

Theo tính chất của hình lăng trụ thì

- ☒ Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song nhau.
- ☒ Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- ☐ Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành nhưng chưa chắc chúng bằng nhau.



Chọn đáp án **(B)**

Câu 4. Lăng trụ tam giác có bao nhiêu mặt?

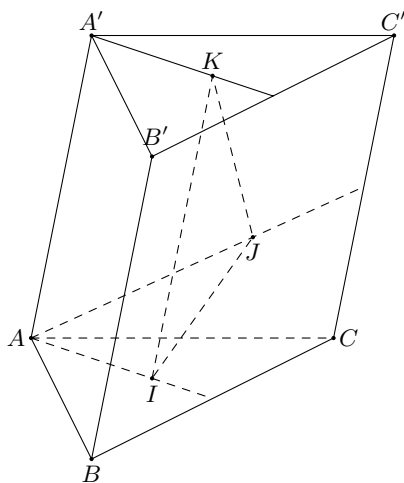
- (A)** 3. **(B)** 9. **(C)** 5. **(D)** 6.

Lời giải.

Theo lý thuyết.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, ACC', A'B'C'$ như hình vẽ.



Mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng (IJK) ?

(A) (ABB') .

(B) (ACC') .

(C) (ABC') .

(D) $(BB'C')$.

Lời giải.

Dựa vào quan hệ song song ta có $(IJK) \parallel (BCC'B')$ suy ra $(IJK) \parallel (BB'C')$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 6. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$, M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) $GG' \parallel (ABB'A')$.

(B) $GG' \parallel (ACC'A')$.

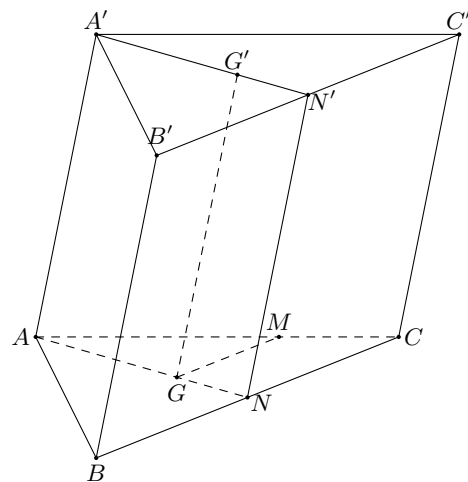
(C) Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$.

(D) $(MGG') \parallel (BCC'B')$.

Lời giải.

Ta có $GG' \parallel AA'$ và $MG \parallel BC$ nên

- ☒ $GG' \parallel (ACC'A')$ là mệnh đề đúng,
- ☒ $GG' \parallel (ABB'A')$ là mệnh đề đúng,
- ☒ $(MGG') \parallel (BCC'B')$ là mệnh đề đúng,
- ☒ Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$ là mệnh đề sai.



Chọn đáp án **(C)**

Dạng 2. Hình hộp

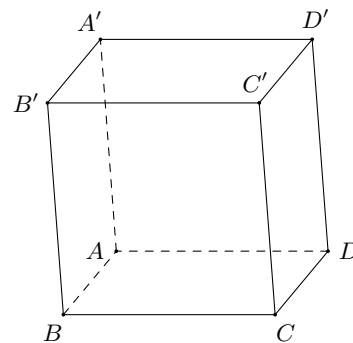
Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.

- ☒ Hình hộp là một hình lăng trụ nên hình hộp có các tính chất của hình lăng trụ.
- ☒ Các mặt của hình hộp là các hình bình hành.
- ☒ Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp song song với nhau.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 4 (Cánh Diều).

Hãy liệt kê các cặp mặt đối diện, các cặp cạnh đối diện và các cặp đỉnh đối diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Lời giải.

Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có

- ☑ Ba cặp mặt đối diện: $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$; $(ABB'A')$ và $(DCC'D')$; $(ADD'A')$ và $(BCC'B')$.
- ☑ Sáu cặp cạnh đối diện: AB và $D'C'$; BC và $A'D'$; CD và $B'A'$; DA và $C'B'$; AA' và CC' ; BB' và DD' .
- ☑ Bốn cặp đỉnh đối diện: A và C' ; B và D' ; C và A' ; D và B' .

□

Ví dụ 5 (Cánh Diều). Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

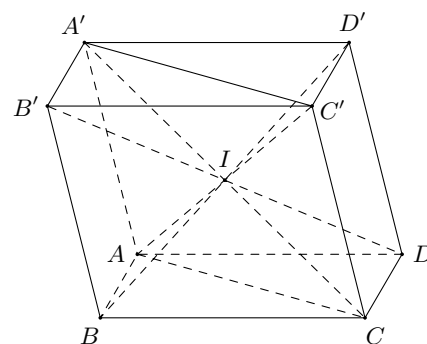
Lời giải.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các đường chéo $A'C$; AC' ; BD' và $B'D$. Tứ giác $ACC'A'$ có $AA' \parallel CC'$ và $AA' = CC'$ (tính chất hình hộp) nên tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC' và $A'C$. Khi đó I là trung điểm của mỗi đường chéo AC' và $A'C$.

Tương tự, hai tứ giác $A'B'CD$ và $BCD'A'$ cũng là các hình bình hành nên I là trung điểm của $B'D$ và BD' .

Vậy các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



□

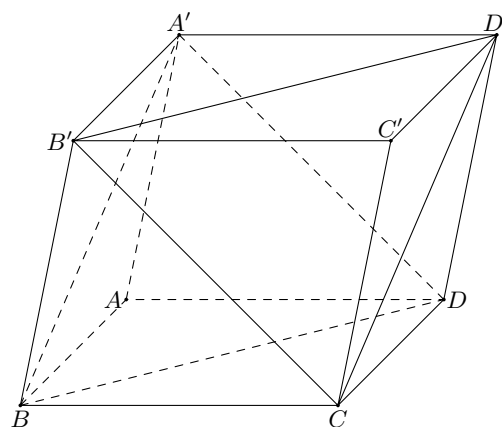
Ví dụ 6 (CTST). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh (BDA') và $(B'D'C)$ là các mặt phẳng song song.

Lời giải.

Ta có $BB' \parallel DD'$ và $BB' = DD'$, suy ra $BB'D'D$ là hình bình hành, do đó $BD \parallel B'D'$.

Tương tự ta cũng có $A'B \parallel D'C$.

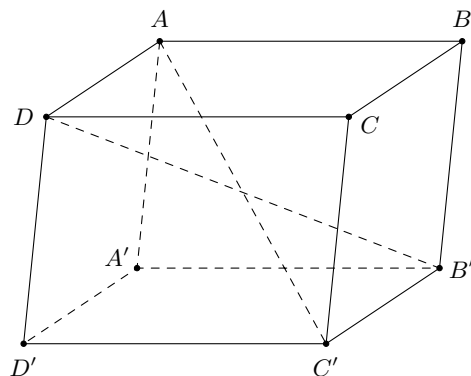
Từ đó suy ra $(BDA') \parallel (B'D'C)$.



□

Ví dụ 7 (KNTT).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên). Chứng minh rằng các đường chéo AC' , BD' , CA' và DB' của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường.



Lời giải.

Đáy $ABCD$ của hình hộp là hình bình hành nên $AD \parallel BC$ và $AD = BC$. Mặt bên $BCC'B'$ của hình hộp là hình bình hành nên $BC \parallel B'C'$ và $BC = B'C'$. Vậy $AD \parallel B'C'$ và $AD = B'C'$, suy ra $ADC'B'$ là hình bình hành. Từ đó AC' và DB' cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Tương tự AC' và BD' , AC' và CA' cũng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

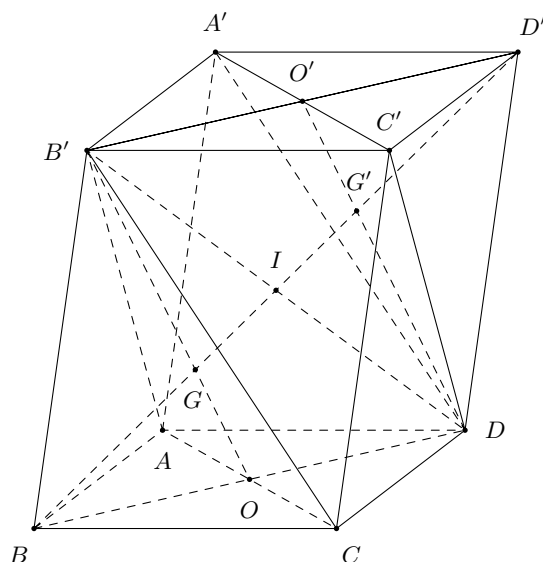
Vậy bốn đường chéo của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường. □

2. Bài tập rèn luyện

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- Chứng minh rằng $(ACB') \parallel (A'C'D)$.
- Gọi G , G' lần lượt là giao điểm của BD' với các mặt phẳng (ACB') và $(A'C'D)$. Chứng minh rằng G , G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACB' và $A'C'D$.
- Chứng minh rằng $BG = GG' = D'G'$.

Lời giải.



- Ta có $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AC \parallel A'C'$.
Mà $A'C' \subset (A'C'D) \Rightarrow AC \parallel (A'C'D)$. (1)
Lại có $A'B'CD$ là hình bình hành nên $B'C \parallel A'D$.
Mà $A'D \subset (A'C'D) \Rightarrow B'C \parallel (A'C'D)$. (2)
Mặt khác $AC, B'C \subset (ACB')$ và $AC, B'C$ cắt nhau. (3)
Từ (1), (2) và (3) suy ra $(ACB') \parallel (A'C'D)$.
- Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$.
Trong $(BDD'B')$ gọi G là giao điểm của BD' với $B'O$ và DO' .
Do $B'O \subset (ACB')$, $DO' \subset (A'C'D)$ nên điểm G và G' xác định như trên chính là giao điểm của BD' với

các mặt phẳng (ACB') và $(A'C'D)$.

Gọi I là giao điểm của BD' và $B'D$. Vì $BDD'B'$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BD' và $B'D$.

Xét $\triangle BDB'$ có $B'O$ và BI là trung tuyến nên G là trọng tâm $\triangle BDB'$. Suy ra $B'G = \frac{2}{3}BO$.

Xét $\triangle ACB'$ có $B'O$ là trung tuyến và $B'G = \frac{2}{3}BO$ suy ra G là trọng tâm $\triangle ACB'$.

Một cách tương tự ta cũng chứng minh được G là trọng tâm $\triangle BDD'$ và từ đó suy ra G là trọng tâm $\triangle A'C'D$.

c) Xét $\triangle BDG'$ có O là trung điểm BD và $OG \parallel DG'$ nên G là trung điểm BG' . (4)

Xét $\triangle B'D'G$ có O' là trung điểm $B'D'$ và $O'G' \parallel B'G$ nên G' là trung điểm $D'G$. (5)

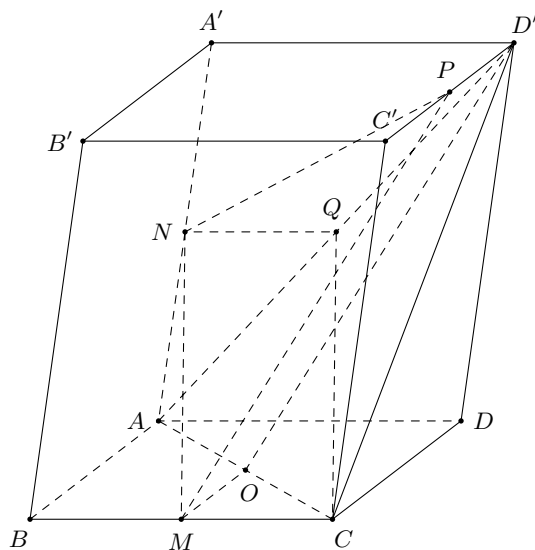
Từ (4) và (5) suy ra $BG = GG' = D'G'$.



Bài 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, AA', C'D', AD'$. Chứng minh rằng

- $NQ \parallel A'D'$ và $NQ = \frac{1}{2}A'D'$;
- Tứ giác $MNQC$ là hình bình hành;
- $MN \parallel (ACD')$;
- $(MNP) \parallel (ACD')$.

Lời giải.



- Ta có NQ là đường trung bình của $\triangle AA'D'$ nên $NQ \parallel A'D'$ và $NQ = \frac{1}{2}A'D'$.
- Ta có M là trung điểm BC , BC lại song song và bằng $A'D'$ nên MC song song và độ dài bằng nửa $A'D'$. Kết hợp với kết quả câu (1) suy ra MC song song và bằng NQ . Do đó $MNQC$ là hình bình hành.
- Do $MNQC$ là hình bình hành nên MN song song với QC . Mà QC nằm trong (ACD') nên MN song song với (ACD') .
- Trước tiên ta sẽ chứng minh $MOD'P$ là hình bình hành. Thật vậy, gọi O là trung điểm AC , suy ra MO là đường trung bình của $\triangle ABC$. Do đó OM song song và có độ dài bằng nửa đoạn AB . (1)
Lại có P là trung điểm $C'D'$, mà $C'D'$ song song và bằng AB nên PD' song song và độ dài bằng nửa đoạn AB . (2)

Từ (1) và (2) suy ra OM song song và bằng PD' , do đó $MOD'P$ là hình bình hành.

Từ đó ta có MP song song với $D'O$, mà $D'O \subset (ACD')$ nên MP song song với (ACD') .

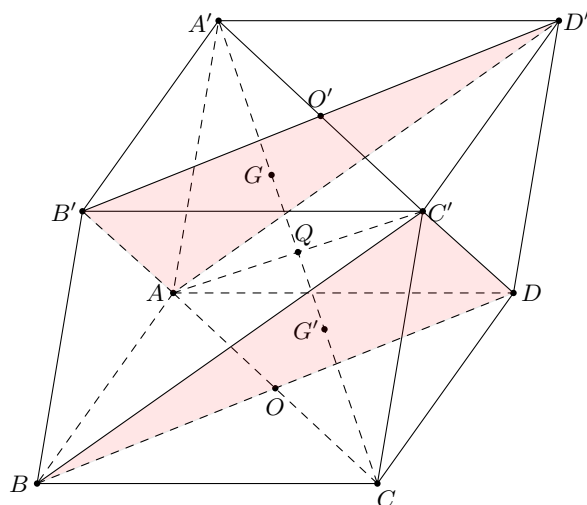
Theo câu (2) ta đã chứng minh được MN song song (ACD') .

Mặt khác MP, MN nằm trong (MNP) và MP, MN cắt nhau.

Vậy (MNP) song song với (ACD') .

Bài 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $B'D'A$ và BDC' . Chứng minh G và G' chia đoạn $A'C$ thành ba phần bằng nhau.

Lời giải.



Gọi O , O' và Q lần lượt là tâm các hình bình hành $ABCD$, $A'B'C'D'$ và $AA'C'C$.

Vì G là trọng tâm tam giác $AB'D' \Rightarrow A'Q$ đi qua G .

Vì G' là trọng tâm tam giác $BDC' \Rightarrow CQ$ đi qua G' .

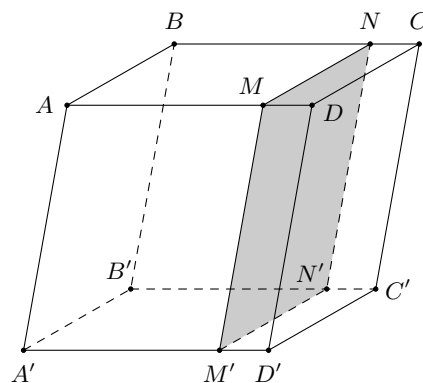
Do đó $A'C$ qua G và G' .

$$\text{Lại có } \frac{A'G}{A'Q} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{A'G}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'G = \frac{1}{3}A'C; \quad \frac{CG'}{CQ} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CG'}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow CG' = \frac{1}{3}A'C.$$

$$\text{Do đó } A'G = GG' = G'C = \frac{1}{3}A'C.$$

Bài 10.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt bên $(ABB'A')$ của hình hộp và cắt các cạnh AD , BC , $A'D'$, $B'C'$ lần lượt tại M , N , M' , N' . Chứng minh rằng $ABNM.A'B'N'M'$ là hình hộp.



Lời giải.

Vì mặt phẳng $(ABCD)$ cắt hai mặt phẳng song song $(ABB'A')$, $(MNN'M')$ theo hai giao tuyến AB và $MN \Rightarrow AB \parallel MN$.

Mà $AM \parallel BN$ nên $ABNM$ là hình bình hành.

Tương tự ta cũng có các tứ giác $A'B'N'M'$, $AA'M'N'$, $BB'N'M'$, $MNN'M'$ là các hình bình hành.

Vậy $ABNM.A'B'N'M'$ là hình hộp

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (IBD) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

(A) Hình thang.

(B) Hình chữ nhật.

(C) Tam giác.

(D) Hình bình hành.

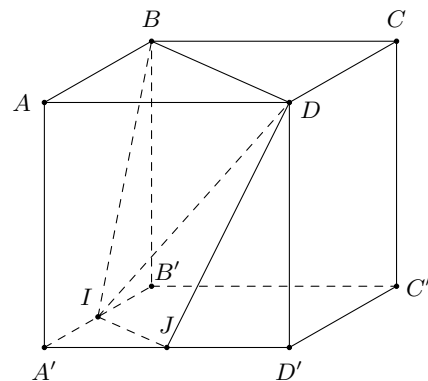
Lời giải.

Gọi $J = A'D' \cap (IBD)$. Ta có thiết diện của mặt phẳng (IBD) và hình hộp là tứ giác $IJDB$.

Mặt khác

$$\begin{cases} (ABCD) \parallel (A'B'C'D') \\ (IBD) \cap (A'B'C'D') = IJ \\ (IBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases}$$

$\Rightarrow IJ \parallel BD \Rightarrow IJDB$ là hình thang.



Chọn đáp án (A)

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB . Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là

(A) tam giác.

(B) hình bình hành.

(C) hình chữ nhật.

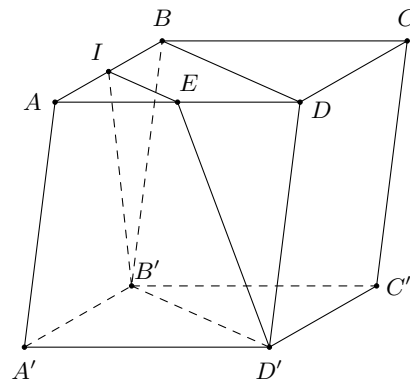
(D) hình thang.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} B'D' \subset (IB'D') \\ BD \subset (ABCD) \text{ nên giao tuyến của } (IB'D') \text{ với } (ABCD) \text{ là đường} \\ BD \parallel B'D' \end{cases}$

thẳng IE qua I và song song với BD ($E \in AD$).

Vì $IE \parallel B'D'$ nên thiết diện là hình thang $IED'B'$.



Chọn đáp án (D)

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD' . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $A'B'CD$ là hình bình hành.

(B) $(AA'B'B) \parallel (DD'C'C)$.

(C) $(BA'D') \parallel (ADC')$.

(D) $BB'D'D$ là một tứ giác.

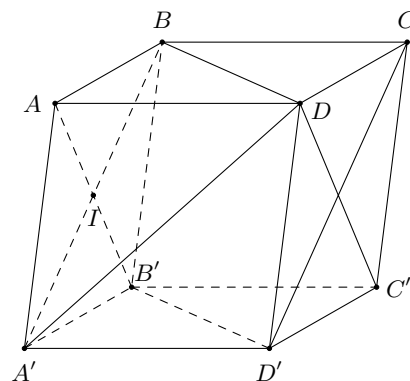
Lời giải.

Ta có

☑ $BB'D'D$ là hình bình hành.

☑ $A'B' \parallel CD$ và $A'B' = CD$ (cùng song song và bằng AB) nên $A'B'CD$ là hình bình hành.

☑ Ta có



$$\begin{cases} AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (DD'C'C) \\ AA' \parallel DD' \Rightarrow AA' \parallel (DD'C'C) \end{cases} \Rightarrow (AA'B'B) \parallel (DD'C'C).$$

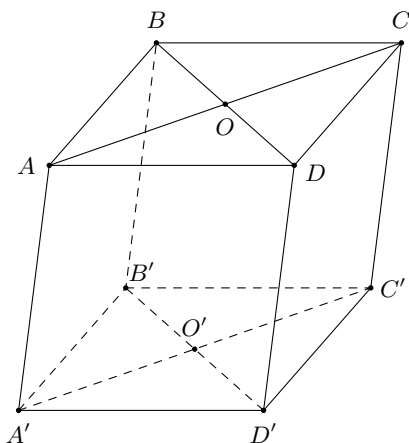
☑ Ta có $(ADC') \equiv (ADC'B')$. Trong $(AA'B'B)$, gọi I là giao điểm của $A'B$ và AB' . Khi đó I là điểm chung của $(BA'D')$ và (ADC') , do đó $(BA'D')$ không song song với (ADC') .

Chọn đáp án (C)

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- Ⓐ $(BA'D') \parallel (ADC')$. Ⓑ $(ABB') \parallel (CDD')$. Ⓒ $(ABO') \parallel (OC'D')$. Ⓓ $(B'AC) \parallel (DA'C')$.

🗨️ **Lời giải.**



Ta có $(BA'D') \parallel (ADC')$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án Ⓐ

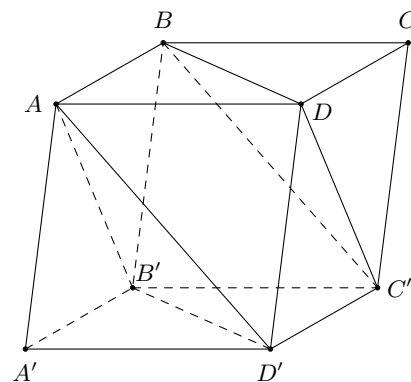
Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

- Ⓐ (BDC') . Ⓑ (BCA') . Ⓒ (BDA') . Ⓓ $(A'C'C)$.

🗨️ **Lời giải.**

Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng (BDC') .

Thật vậy, ta có $AB' \parallel DC'$ và $AD' \parallel BC'$, có điều cần chứng minh.



Chọn đáp án Ⓐ

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ).

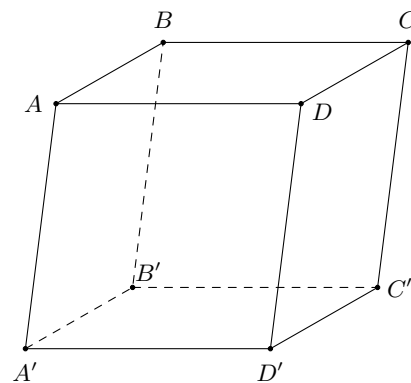
Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $AM = \frac{1}{2}AD$,

$CN = \frac{1}{2}CC'$. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng chứa đường thẳng

MN và song song với mặt phẳng (ACB') là

- Ⓐ hình lục giác. Ⓑ hình tam giác.
Ⓒ hình tứ giác. Ⓓ hình ngũ giác.

🗨️ **Lời giải.**



Gọi mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với mặt phẳng (ACB') là (α) .

Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng qua M và song song với AC , đường thẳng này cắt CD tại P là trung điểm CD .

Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(BCC'B')$ là đường thẳng qua N và song song với $B'C$, đường thẳng này cắt $B'C'$ tại E là trung điểm $B'C'$.

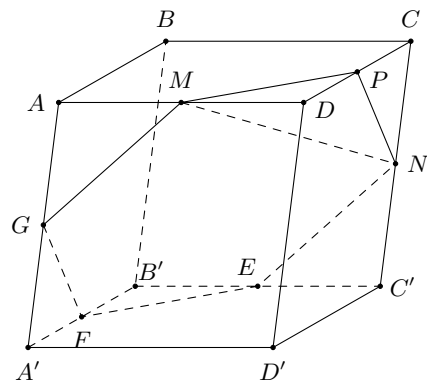
Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là đường thẳng qua E và song song với $A'C'$, đường thẳng này cắt $A'B'$ tại F là trung điểm $A'B'$.

Giao tuyến của (α) với mặt phẳng $(ABB'A')$ là đường thẳng qua F và song song với AB' , đường thẳng này cắt AA' tại G là trung điểm AA' .

Do đó $MPNEFG$ là thiết diện cần tìm.

Vậy thiết diện là một hình lục giác.

Chọn đáp án (A)



Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) $(BA'C')$.

(B) (ACD') .

(C) (BDA') .

(D) $(C'BD)$.

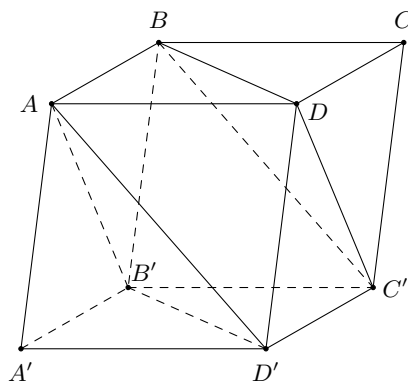
Lời giải.

Ta có $BDB'D'$ là hình bình hành nên $BD \parallel B'D'$.

Tương tự ta có $AD' \parallel BC'$.

Từ đó suy ra $BD \parallel (AB'D')$ và $BC \parallel (AB'D')$.

Vậy $(AB'D') \parallel (C'BD)$.



Chọn đáp án (D)

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác T . Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) T là hình thoi.

(B) T là hình chữ nhật.

(C) T là hình vuông.

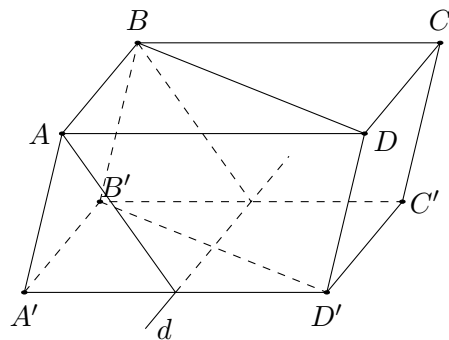
(D) T là hình bình hành.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và cắt hình hộp theo tứ giác T .

Gọi d là đường thẳng giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Ta

chứng minh được $AB \parallel d$ suy ra tứ giác T là một hình bình hành.



Chọn đáp án (D)

Câu 15. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

(A) $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.

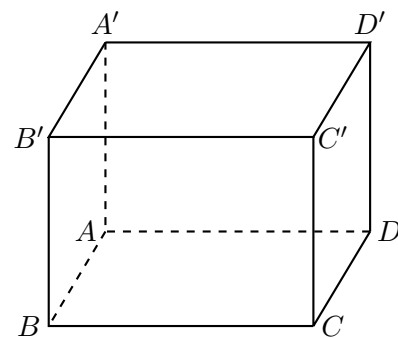
(B) $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$.

(C) $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.

(D) $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$.

Lời giải.

Ta thấy $\begin{cases} (ABCD) \parallel (A'B'C'D') \\ (AA'D'D) \parallel (BCC'B') \\ (ABB'A') \parallel (CDD'C') \end{cases}$ luôn đúng.
và hai mặt phẳng $(BDD'B')$, $(ACC'A')$ là cắt nhau.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB , mặt phẳng $(MA'C')$ cắt cạnh BC tại N . Tính tỉ số $k = \frac{MN}{A'C'}$.

(A) $k = \frac{1}{2}$.

(B) $k = \frac{1}{3}$.

(C) $k = \frac{2}{3}$.

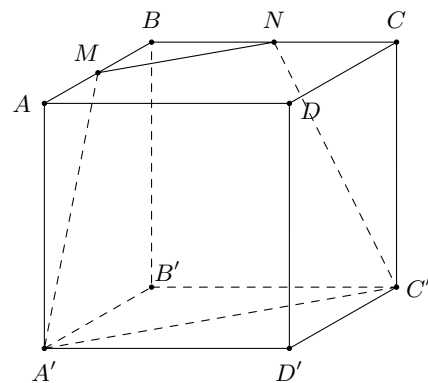
(D) $k = 1$.

Lời giải.

Ba mặt phẳng phân biệt $(ABCD)$, $(ACC'A')$, $(MA'C')$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến AC , $A'C'$ và MN . Theo tính chất hình hộp ta có $AC \parallel A'C'$ nên $MN \parallel AC \parallel A'C'$.

Lại có M là trung điểm của AB nên MN là đường trung bình trong tam giác ABC .

Vì vậy $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A'C' \Rightarrow k = \frac{MN}{A'C'} = \frac{1}{2}$.



Chọn đáp án **(A)**

Bài số 6

PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

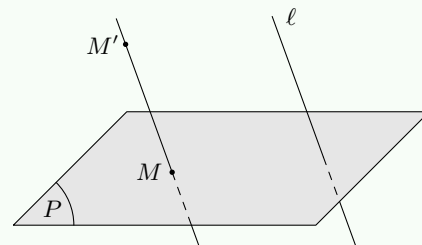
A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phép chiếu song song

Định nghĩa 6.1.

Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) . Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) sao cho MM' song song hoặc trùng với ℓ gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ .

Mặt phẳng (P) gọi là *mặt phẳng chiếu*, đường thẳng ℓ gọi là *phương chiếu*, điểm M' gọi là *hình chiếu song song* (hoặc ảnh) của điểm M qua phép chiếu song song nói trên.



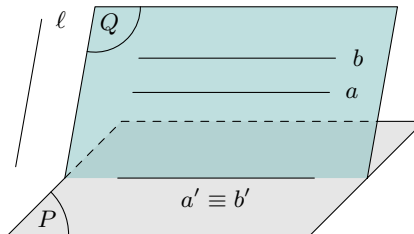
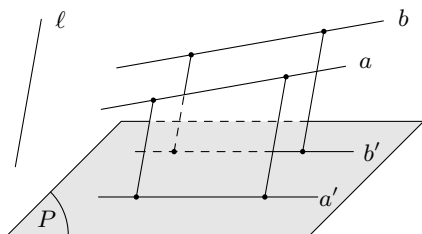
Cho hình $\mathcal{H}$. Tập hợp $\mathcal{H}'$ gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc $\mathcal{H}$ gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của hình $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song nói trên.

Tính chất 6.1.

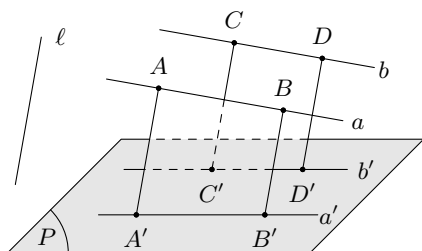
- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng; biến tia thành tia; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

Tính chất 6.2.

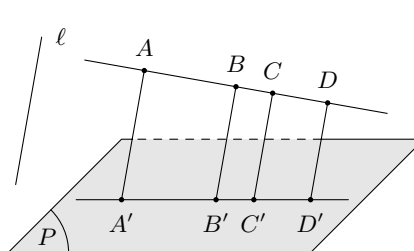
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$



Đối với hình chiếu song song của đường tròn, người ta chứng minh được rằng: Hình chiếu song song của một đường tròn trên một mặt phẳng theo phương ℓ cho trước là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

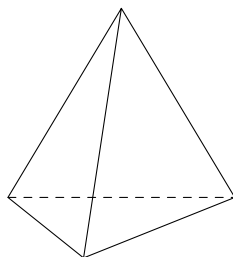
2. Hình biểu diễn của một hình không gian

❖ **Định nghĩa 6.2.** Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

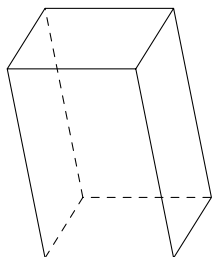
⚠ Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của một hình không gian ta phải áp dụng các tính chất của phép chiếu song song.

3. Hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

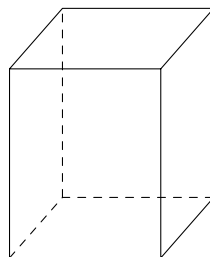
Các hình sau đây thường được sử dụng làm hình biểu diễn của: hình tứ diện (Hình a); hình hộp (Hình b); hình hộp chữ nhật (Hình c); hình lăng trụ tam giác (Hình d).



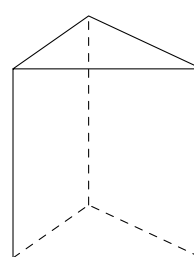
a)



b)

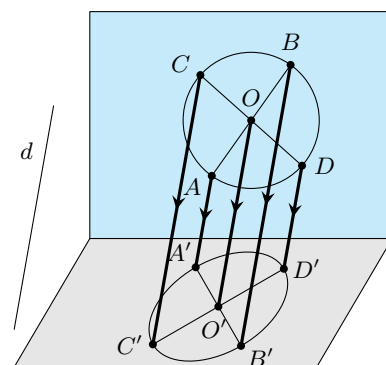


c)



d)

- ⚠ a) ☒ Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, ...).
- ☒ Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, ...).
- ☒ Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn cho một hình thang tùy ý cho trước, sao cho tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.
- ☒ Ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn.



- b) Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc. Từ đó suy ra nếu trên hình $\mathcal{H}$ có hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song thì tỉ số của chúng không nhất thiết phải giữ nguyên trên hình biểu diễn. Cũng như vậy, độ lớn của một góc trên hình $\mathcal{H}$ không nhất thiết được giữ nguyên trên hình biểu diễn.

B – CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Chú ý phần lý thuyết.

1. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1 (KNTT). Những mệnh đề nào trong các mệnh đề sau đây là đúng?

- Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
- Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.

d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

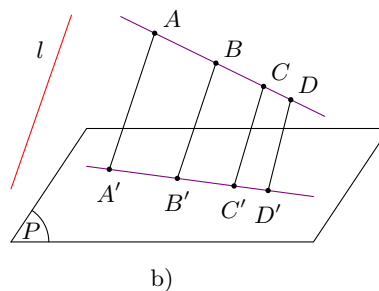
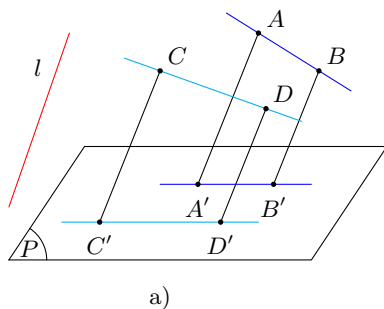
Lời giải.

- Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng nên mệnh đề 1 đúng.
- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau nên mệnh đề 2 sai.
- Phép chiếu song song có thể biến tam giác đều thành một tam giác bất kì, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng nên mệnh đề 3 sai.
- Phép chiếu song song có thể biến hình vuông thành hình bình hành, hoặc đặc biệt là một đoạn thẳng nên mệnh đề 4 sai.

□

Ví dụ 2 (CTST).

- Tìm hình chiếu song song của đoạn thẳng AC , tia AB và đường thẳng AD trong Hình b).
- Quan sát Hình a) và so sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}, \frac{A'B'}{C'D'}$.
- Quan sát Hình b) và so sánh hai tỉ số $\frac{DA}{DB}, \frac{D'A'}{D'B'}$.



Lời giải.

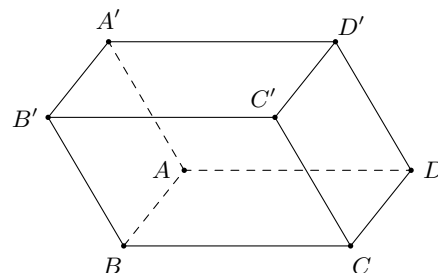
- Trong Hình b), hình chiếu song song của đoạn thẳng AC , tia AB và đường thẳng AD lần lượt là đoạn thẳng $A'C'$, tia $A'B'$ và đường thẳng $A'D'$.
- Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song nên trong Hình a), ta có $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.
- Do phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng thuộc một đường thẳng nên trong Hình b), ta có $\frac{DA}{DB} = \frac{D'A'}{D'B'}$.

□

2. Bài tập rèn luyện

Bài 1 (CD).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 77). Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'A$.

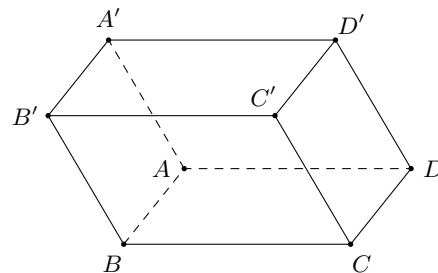


Lời giải.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau. Do đó, các điểm A, B, C, D lần lượt là ảnh của A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'A$. $\square$

Bài 2 (CD).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình 77). Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'A$.

**Lời giải.**

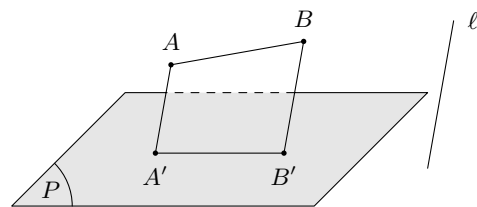
Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau. Do đó, các điểm A, B, C, D lần lượt là ảnh của A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'A$. $\square$

Bài 3 (CD). Cho mặt phẳng (P) , đoạn thẳng AB và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) . Giả sử đường thẳng AB không song song với ℓ . Nêu cách xác định hình chiếu song song của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ .

Lời giải.

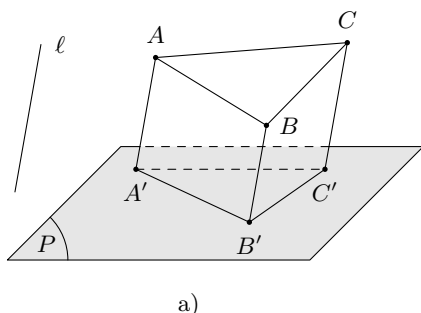
Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu song song của A, B trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ .

Khi đó, hình chiếu song song của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ là đoạn thẳng $A'B'$.

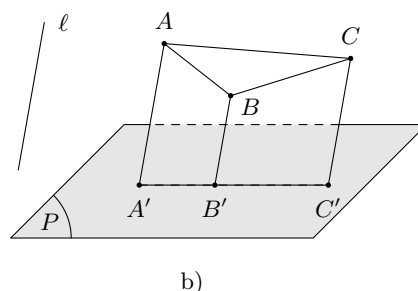


Bài 4 (CD). Cho mặt phẳng (P) , tam giác ABC và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng AB, BC, CA đều không song song hoặc trùng với đường thẳng ℓ . Xác định hình chiếu song song của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ trong mỗi trường hợp sau:

- Mặt phẳng (ABC) không song song với ℓ ;
- Mặt phẳng (ABC) song song hoặc chứa ℓ .

Lời giải.

a)



b)

Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu song song của ba điểm A, B, C trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ .

- Hình chiếu của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là tam giác $A'B'C'$ (Hình a).
- Ba điểm A', B', C' thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (P) nên ba điểm A', B', C' thẳng hàng và có một điểm nằm giữa hai điểm còn lại. Giả sử điểm B' nằm giữa hai điểm A' và C' . Khi đó, hình chiếu song song của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) là đoạn thẳng $A'C'$ (Hình b).

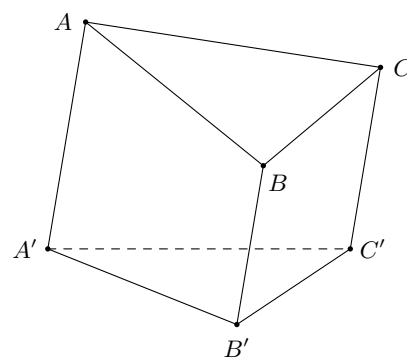
 $\square$

Bài 5 (CD). Nếu tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC qua một phép chiếu song song thì tam giác ABC có phải là hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ qua một phép chiếu song song hay không? Hãy giải thích.

Lời giải.

Theo giả thiết, tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng AA' lên mặt phẳng $(A'B'C')$. Chú ý rằng $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

Khi đó, ta có thể coi tam giác ABC là hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng AA' lên mặt phẳng (ABC) .



Bài 6 (CTST). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
- b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
- c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

Lời giải.

- a) Đúng.
- b) Đúng.
- c) Đúng.
- d) Sai, vì hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau cắt nhau hoặc song song.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Qua phép chiếu song song, tính chất nào **không** được bảo toàn?

- (A) Chéo nhau.
- (B) Đồng qui.
- (C) Song song.
- (D) Thẳng hàng.

Lời giải.

Qua phép chiếu song song ảnh của hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng.

Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.

Chọn đáp án (A)

Câu 2. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- (A) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- (B) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.
- (C) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- (D) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Lời giải.

Phương án “Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song” sai vì chúng có thể trùng nhau.

Chọn đáp án (B)

Câu 3. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b' . Khi đó:

- (A) a và b phải song song với nhau. (B) a và b phải cắt nhau.
(C) a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau. (D) a và b không thể song song.

Lời giải.

Nếu $a' \parallel b'$ suy ra mặt phẳng (a, a') song song mặt phẳng (b, b') .

Khi đó a và b có thể song song hoặc chéo nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là 2 đường thẳng a' và b' . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- (A) a' và b' luôn cắt nhau. (B) a' và b' có thể trùng nhau.
(C) a' và b' không thể song song. (D) a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Lời giải.

Gọi d là phương chiếu, $a \subset (P)$, $b \subset (Q)$ và $d \parallel (P)$, $d \parallel (Q)$.

- ☑ Nếu $(P) \cap (Q)$ thì a' và b' cắt nhau.
☑ Nếu $(P) \parallel (Q)$ thì $a' \parallel b'$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 5. Phép chiếu song song theo phương l không song song với a hoặc b , mặt phẳng chiếu là (P) , hai đường thẳng a và b biến thành a' và b' . Quan hệ nào giữa a và b **không được bảo toàn** trong phép chiếu song song?

- (A) Cắt nhau. (B) Trùng nhau. (C) Song song. (D) Chéo nhau.

Lời giải.

Do a' và b' cùng được chứa trong mặt phẳng chiếu (P) . Suy ra tính chất chéo nhau không được bảo toàn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6. Qua phép chiếu song song, trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- (A) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
(B) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
(C) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.
(D) Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

Lời giải.

- ☑ Phương án “Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau” đúng vì khi đó hình chiếu của chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.
☑ Phương án “Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó” đúng vì mặt phẳng chiếu chứa đường thẳng đã cho.
☑ Phương án “Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau” sai vì hình chiếu của chúng chỉ có thể song song hoặc cắt nhau.
☑ Phương án “Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân” đúng do tính chất phép chiếu song song.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7. Phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song

- (A) Thành ba đường thẳng đôi một song song với nhau.
(B) Thành một đường thẳng.
(C) Thành hai đường thẳng song song.
(D) Thành một đường thẳng hoặc hai đường thẳng song song hoặc thành ba đường thẳng đôi một song song với nhau.

Lời giải.

Dựa theo tính chất phép chiếu song song.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 8. Qua phép chiếu song song, các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- (A)** Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.
- (B)** Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.
- (C)** Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
- (D)** Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

Lời giải.

Khi mặt phẳng chiếu song song với đường thẳng đã cho thì đường thẳng đó song song với hình chiếu của nó.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 9. Qua phép chiếu song song, các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

- (A)** Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.
- (B)** Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác vuông.
- (C)** Một đường thẳng có thể cắt hình chiếu của nó.
- (D)** Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.

Lời giải.

- ☒ Phương án “Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau” đúng theo tính chất của phép chiếu song song.
- ☒ Phương án “Một đường thẳng có thể cắt hình chiếu của nó” đúng vì khi đường thẳng đã cho cắt mặt phẳng chiếu.
- ☒ Phương án “Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau” đúng vì phương chiếu song song với mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau đó.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 10. Qua phép chiếu song song, mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A)** Hình chiếu song song của 2 đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- (B)** Hình chiếu song song của 2 đường thẳng cắt nhau thì song song.
- (C)** Hình chiếu song song của 1 hình vuông là 1 hình vuông.
- (D)** Hình chiếu song song của 1 lục giác đều là 1 lục giác đều.

Lời giải.

- ☒ Phương án “Hình chiếu song song của 2 đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau” đúng.
- ☒ Khi phương chiếu song song với mặt phẳng chứa hình vuông/lục giác thì các phương án liên quan hình vuông/lục giác đúng.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 11. Qua phép chiếu song song, mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A)** Hình chiếu song song của 2 đường thẳng cắt nhau là 2 đường thẳng song song.
- (B)** Hình chiếu song song của 1 hình bình hành là 1 hình bình hành.
- (C)** Phép chiếu song song biến 1 tam giác thành 1 tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.
- (D)** Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của 2 đoạn thẳng.

Lời giải.

Phương án “Hình chiếu song song của 2 đường thẳng cắt nhau là 2 đường thẳng song song” sai vì nếu a', b' là hình chiếu song song của a, b cắt nhau tại M thì điểm M' là hình chiếu của M qua phép chiếu song song phải thuộc a' và b' suy ra a', b' cắt nhau hoặc trùng nhau.

Phương án “Hình chiếu song song của 1 hình bình hành là 1 hình bình hành” sai nếu phương chiếu song song với

mặt phẳng chứa hình bình hành.

Phương án “Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của 2 đoạn thẳng” sai nếu 2 đoạn thẳng đó không nằm trên 1 đường thẳng hoặc 2 đường thẳng song song.

Chọn đáp án (C)

Câu 12. Hình chiếu của hình chữ nhật **không** thể là hình nào trong các hình sau?

- (A) Hình thang. (B) Hình bình hành. (C) Hình chữ nhật. (D) Hình thoi.

Lời giải.

Phép chiếu chiếu song song giữ nguyên tỉ lệ độ đoạn thẳng giữa hai đoạn thẳng song song. Hình chữ nhật có hai cặp cạnh đối bằng nhau. Nên qua phép chiếu song song hình vuông không thể là hình thang. Vì hình thang có một cặp cạnh đối có thể không bằng nhau.

Chọn đáp án (A)

Câu 13. Hình chiếu của hình vuông không thể là hình nào trong các hình sau?

- (A) Hình vuông. (B) Hình bình hành. (C) Hình thang. (D) Hình thoi.

Lời giải.

Phép chiếu chiếu song song giữ nguyên tỉ lệ độ đoạn thẳng giữa hai đoạn thẳng song song. Hình vuông có hai cặp cạnh đối bằng nhau. Nên qua phép chiếu song song hình vuông không thể là hình thang. Vì hình thang có một cặp cạnh đối có thể không bằng nhau.

Chọn đáp án (C)

Câu 14. Hình chiếu song song của hình thang $ABCD$ không thể là hình nào dưới đây?

- (A) Hình bình hành. (B) Hình tam giác cân. (C) Đoạn thẳng. (D) Bốn điểm thẳng hàng.

Lời giải.

- ☑ Hình bình hành cũng là 1 hình thang nên phương án này đúng.
- ☑ Khi phương chiếu song song với mặt phẳng chứa hình thang thì phương án “Đoạn thẳng” và “Bốn điểm thẳng hàng” đúng.

Chọn đáp án (B)

Câu 15. Qua phép chiếu song song, khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình tam giác.
 (B) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một đoạn thẳng.
 (C) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình chóp cắt.
 (D) Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một điểm.

Lời giải.

Phép chiếu song song biến hình chóp cắt thành một đa giác.

Chọn đáp án (A)

Câu 16. Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D có hình chiếu song song lên mặt phẳng (P) lần lượt là 4 điểm A', B', C', D' . Những khẳng định nào sau đây **không** xảy ra?

- (A) A', B', C', D' là 4 đỉnh của 1 hình bình hành. (B) D' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.
 (C) D' là trung điểm cạnh $A'B'$. (D) Hai điểm B', C' nằm giữa 2 điểm A' và D' .

Lời giải.

4 điểm A', B', C', D' không thể thẳng hàng vì A, B, C, D không đồng phẳng.

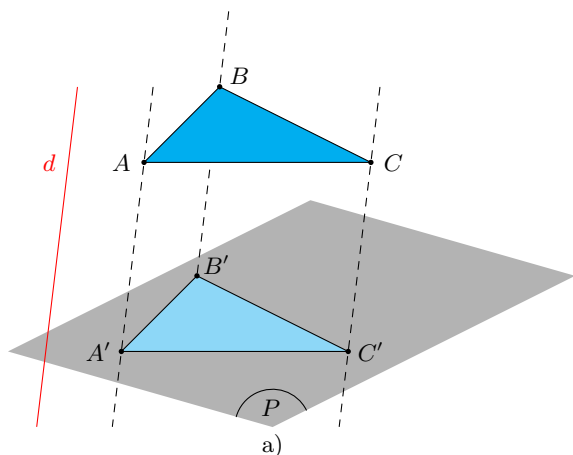
Chọn đáp án (D)

Dạng 2. Hình biểu diễn của một hình không gian

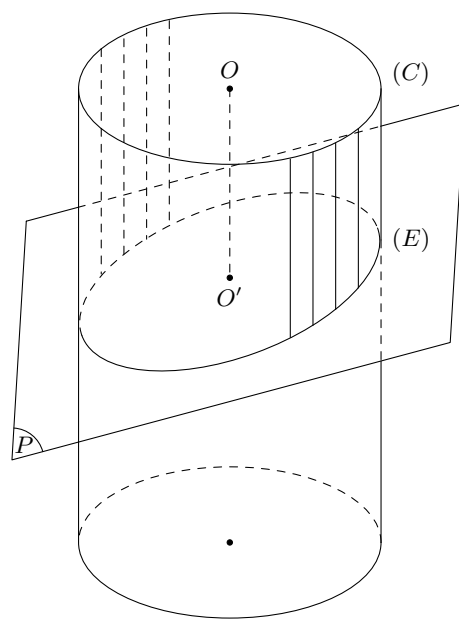
Chú ý phần lý thuyết về hình biểu diễn một hình trong không gian.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 3 (CTST). Quan sát bên dưới và tìm hình biểu diễn của

a) đoạn thẳng AB .b) tam giác ABC .c) đường tròn (C) tâm O .

a)



b)

Lời giải.

- a) Hình biểu diễn của đoạn thẳng AB là đoạn thẳng $A'B'$ với A' và B' lần lượt là ảnh của A và B .
 b) Hình biểu diễn của tam giác ABC là tam giác $A'B'C'$ với A', B', C' lần lượt là ảnh của A, B, C .
 c) Hình biểu diễn của đường tròn (C) là elip (E) với tâm O' là ảnh của O .

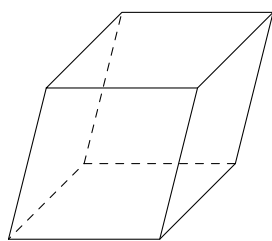


Ví dụ 4 (CTST). Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau

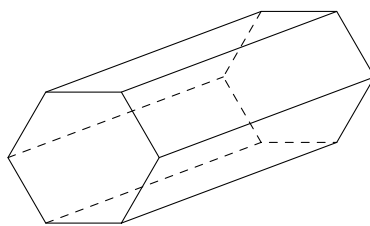
a) Hình hộp.

b) Lăng trụ có đáy là lục giác đều.

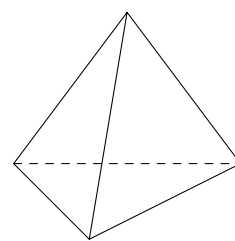
c) Tứ diện.

Lời giải.

a)



b)



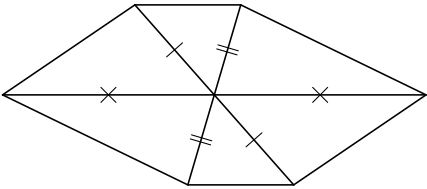
c)

- a) Hình biểu diễn của các mặt là các hình bình hành.
 b) Hình biểu diễn của mặt đáy là lục giác có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau, đồng thời song song với đường chéo nối hai đỉnh còn lại. Hình biểu diễn của mặt bên là hình bình hành.
 c) Hình biểu diễn của bốn mặt là bốn tam giác.
 d) Hình biểu diễn của mặt đáy là elip, hình biểu diễn của các đường sinh là các đoạn thẳng song song và bằng nhau.



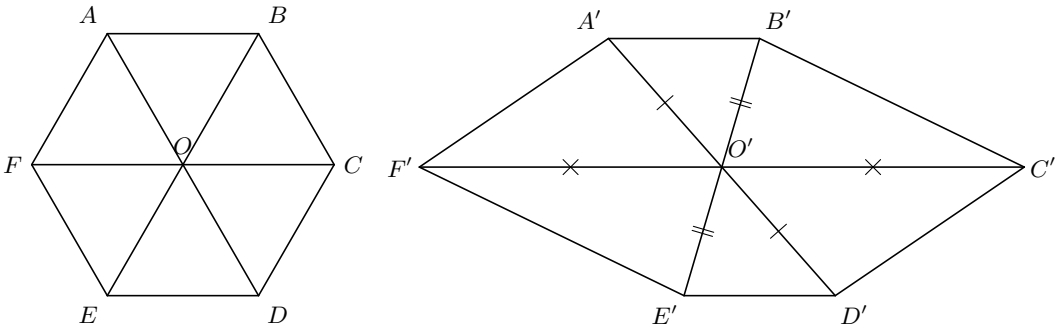
Ví dụ 5 (KNTT).

Hình bên có thể là hình biểu diễn của một hình lục giác đều hay không? Vì sao?



Lời giải.

Giả sử ta có hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Vì tứ giác $ABCO$ là hình bình hành (và cũng là hình thoi) nên hình biểu diễn tương ứng (tứ giác $A'B'C'O'$) cũng phải là hình bình hành. Nhưng theo hình vẽ, ta thấy $A'O'$ và $B'C'$ không song song với nhau. Vậy hình đã cho không là hình biểu diễn của một hình lục giác đều.

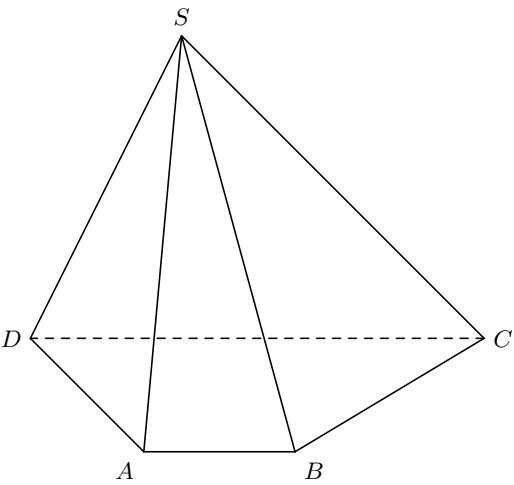


□

Ví dụ 6 (KNTT). Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AB song song với CD và $AB = 2 \text{ cm}$, $CD = 6 \text{ cm}$.

Lời giải.

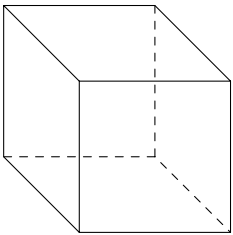
Hình thang $ABCD$ có AB song song với CD và $\frac{CD}{AB} = \frac{6}{2} = 3$ nên với hình biểu diễn, ta vẽ $AB \parallel CD$ và $CD = 3AB$.



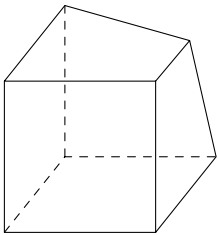
□

2. Bài tập rèn luyện

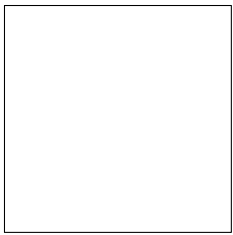
Bài 7 (CD). Trong các Hình a , b , c , hình nào biểu diễn hình lập phương?



a)



b)



c)

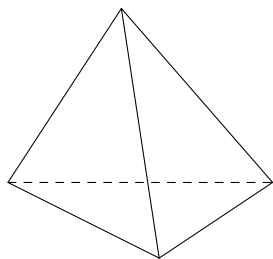
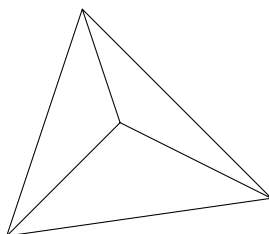
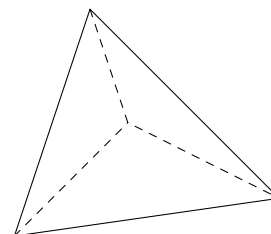
Lời giải.

Hình *a*) là hình biểu diễn của hình lập phương.

Hình *b*) không là hình biểu diễn của hình lập phương vì trong hình này có hai cạnh đối của đáy trên không song song với nhau.

Hình *c*) cũng có thể là hình biểu diễn của hình lập phương. Tuy nhiên hình biểu diễn này không tốt vì không giúp ta hình dung được hình trong không gian. □

Bài 8 (CD). Trong các Hình *a*), *b*), *c*), hình nào là hình biểu diễn cho hình tứ diện?

*a)**b)**c)***Lời giải.**

Các Hình *a*), *b*), *c*) đều là hình biểu diễn cho hình tứ diện. □

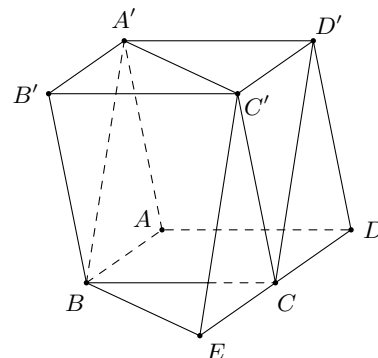
Bài 9 (CD). Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Lời giải.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua C .

Khi đó $E \in (ABCD)$ và $C'E \parallel D'C \parallel A'B$.

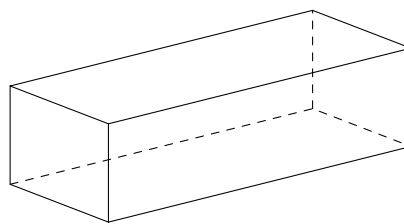
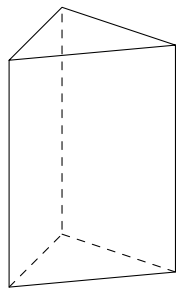
Vậy ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$ là tam giác BEC .



Bài 10 (CD). Vẽ hình biểu diễn của các vật trong Hình 89 và Hình 90.

*Hình 89**Hình 90***Lời giải.**

Hình biểu diễn như sau.

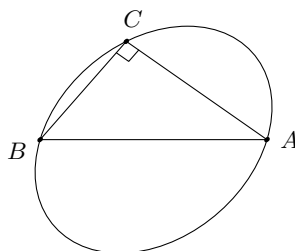


Bài 11 (CD). Vẽ hình biểu diễn của

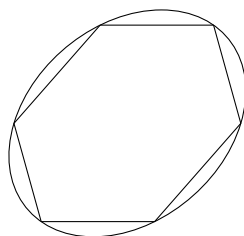
- Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn;
- Một lục giác đều.

Lời giải.

- Một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn có hình biểu diễn như sau



- Hình biểu diễn của một lục giác đều như sau



Bài 12 (CTST). Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

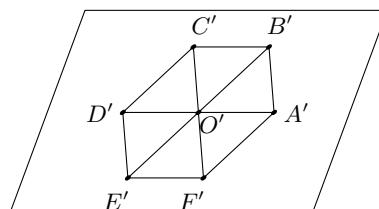
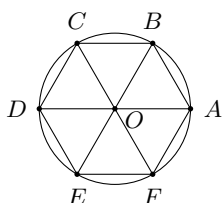
Lời giải.

Xét hình lục giác đều $ABCDEF$, ta nhận thấy

- ☑ Tứ giác $OABC$ là hình thoi.
- ☑ Các điểm D, E, F lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C , qua tâm O .

Từ đó suy ra cách vẽ hình biểu diễn của lục giác đều $ABCDEF$ như sau

- ☑ Vẽ hình bình hành $O'A'B'C'$ biểu diễn cho hình thoi $OABC$.
- ☑ Lấy các điểm D', E', F' lần lượt đối xứng với các điểm A', B', C' qua O , ta được hình biểu diễn $A'B'C'D'E'F'$ của hình lục giác đều $ABCDEF$.





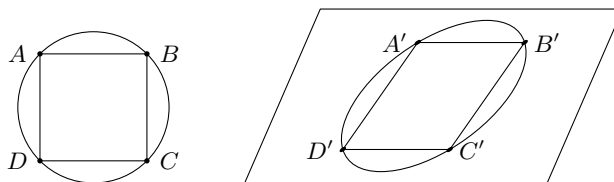
Bài 13 (CTST). Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

Lời giải.

Hình vuông $A'B'C'D'$ nội tiếp (O) khi có hai đường chéo là 2 đường kính vuông góc nhau, do đó $A'C'$ và $B'D'$ song song với hai cạnh của tam giác vuông nội tiếp (O).

Trước hết, vẽ tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác vuông tại nội tiếp trong một đường tròn.

Qua O ta kẻ hai dây $A'C'$ và $B'D'$ của elip lần lượt song song với AC và AB . Khi đó tứ giác $A'B'C'D'$ là hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.

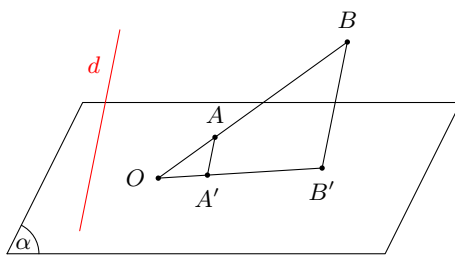


Bài 14 (CTST). Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α). Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O . Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d . Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho

a) $A'B' = AB$.

b) $A'B' = 2AB$.

Lời giải.



Ba điểm O, A', B' thẳng hàng. Vì chúng nằm trên giao tuyến của mặt phẳng α và mặt phẳng qua AB và song song d .

- a) Nếu $A'B' = AB$ thì $ABB'A'$ là hình thang cân $\Rightarrow \triangle OAA'$ cân tại $O \Rightarrow OA' = OA \Rightarrow$ Phương d thỏa mãn d qua A, A' với $A' \in (\alpha)$ sao cho $OA' = OA$.

Ngược lại

Nếu phương d thỏa mãn d qua A, A' với $A' \in (\alpha)$ sao cho $OA' = OA$ thì $\triangle OAA'$ cân tại $O \Rightarrow ABB'A'$ là hình thang cân $\Rightarrow AB = A'B'$.

- b) Nếu $A'B' = 2AB$ thì $\triangle OAA'$ có $OA' = 2OA \Rightarrow$ Phương d thỏa mãn d qua A', A' với $A' \in (\alpha)$ sao cho $OA' = 2OA$.

Ngược lại

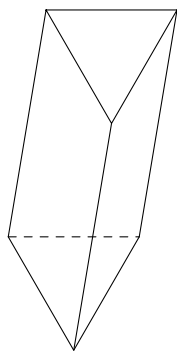
Nếu phương d thỏa mãn d qua A, A' với $A' \in (\alpha)$ sao cho $OA' = 2OA$ thì $\triangle OAA'$ có $OA' = 2OA \Rightarrow A'B' = 2AB$.



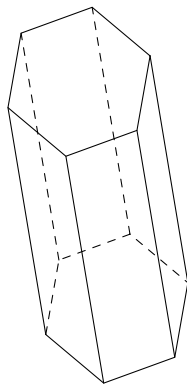
Bài 15 (CTST). Vẽ hình biểu diễn của

- Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.
- Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.
- Hình hộp.

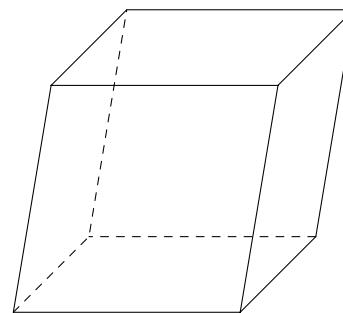
Lời giải.



Hình lăng trụ
có đáy là tam giác đều



Hình lăng trụ
có đáy là lục giác đều



Hình hộp

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 17. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M' . Trong đó M là trung điểm của BC . Chọn mệnh đề **đúng**?

(A) M' là trung điểm của $A'B'$.

(B) M' là trung điểm của $B'C'$.

(C) M' là trung điểm của $A'C'$.

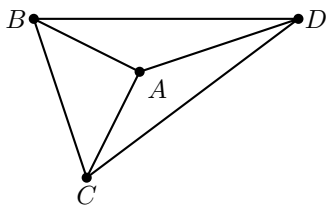
(D) Cả ba đáp án trên đều **sai**.

Lời giải.

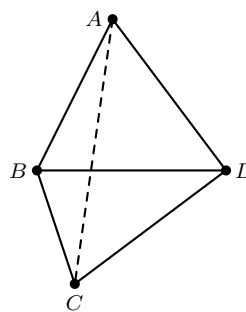
Ta có phép chiếu song song đường thẳng CC' , biến C thành C' , biến B thành B' .
Do M là trung điểm của BC suy ra M' là trung điểm của $B'C'$.

Chọn đáp án (B)

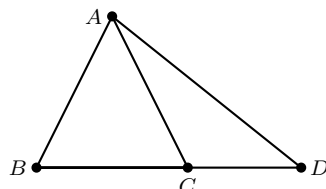
Câu 18. Hình vẽ nào sau đây **không phải** hình biểu diễn của hình tứ diện $ABCD$.



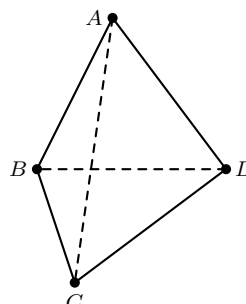
(A)



(B)



(C)

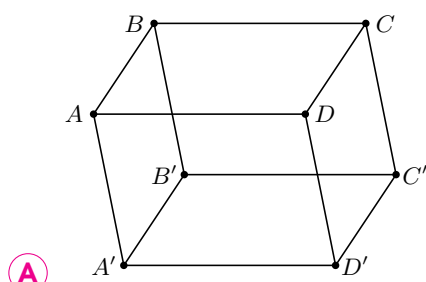


(D)

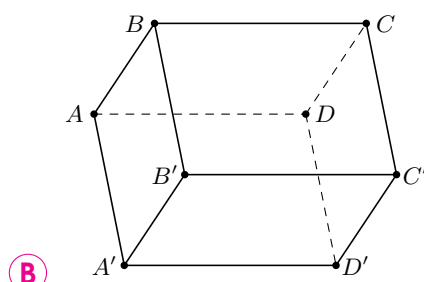
Lời giải.

Chọn đáp án (D)

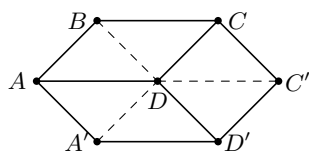
Câu 19. Hình vẽ nào sau đây **không phải** là hình biểu diễn của hình hộp?



(A)



(B)



(C)

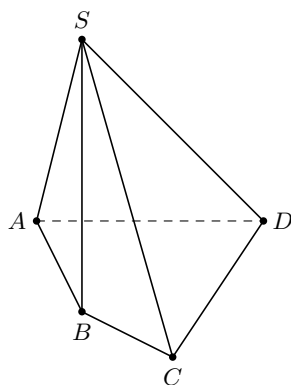
Lời giải.

+ Rõ ràng (B) đúng.

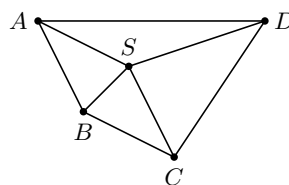
+ (C) đúng vì phương chiếu song song với BD' .+ (D) đúng vì phương chiếu song song với 2 đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

Chọn đáp án (A)

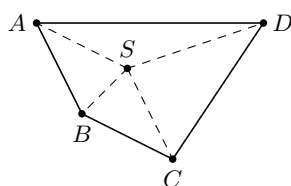
□

Câu 20. Hình vẽ nào sau đây không phải là hình biểu diễn của hình chóp tứ giác $S.ABCD$?

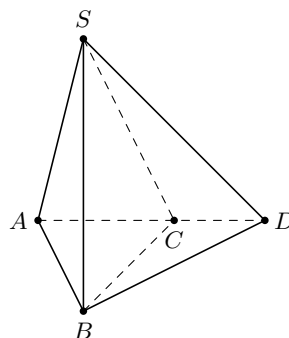
(A)



(B)



(C)



(D)

Lời giải.

Hình (D) có 3 điểm A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow$ Phương chiếu phải song song với mặt phẳng (ABC) , tức là song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó 4 điểm A, B, C, D phải thẳng hàng $\Rightarrow$ (D) sai.

Chọn đáp án (D)

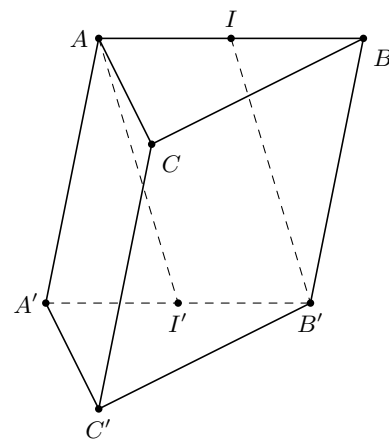
□

Câu 21. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành điểm nào sau đây?(A) A' .(B) B' .(C) C' .(D) I' .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AI \parallel B'I' \\ AI = B'I' \end{cases} \Rightarrow AIB'I'$ là hình bình hành.

Suy ra qua phép chiếu song song đường thẳng AI' , mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến điểm I thành điểm B' .



Chọn đáp án (B)

Câu 22. Cho tam giác ABC ở trong mặt phẳng (α) và phương l . Biết hình chiếu (theo phương l) của tam giác ABC lên mặt phẳng (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) $(\alpha) \parallel (P)$. (B) $(\alpha) \equiv (P)$. (C) $(\alpha) \parallel l$ hoặc $(\alpha) \supset l$. (D) A, B, C đều sai.

Lời giải.

- + Phương án A: Hình chiếu của tam giác ABC vẫn là một tam giác trên mặt phẳng (P) .
- + Phương án B: Hình chiếu của tam giác ABC vẫn là tam giác ABC .
- + Phương án C: Khi phương chiếu l song song hoặc được chứa trong mặt phẳng (α) ta có hình chiếu của tam giác là đoạn thẳng trên mặt phẳng (P) .
Do đó giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (P) là một trong ba cạnh của tam giác ABC .

Chọn đáp án (C)

Câu 23. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình bình hành.
 (B) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông.
 (C) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình thoi.
 (D) Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là một tam giác.

Lời giải.

Qua phép chiếu song song đường thẳng AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ sẽ biến A' thành A , biến B' thành B , biến C' thành C , biến D' thành D .

Do đó hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là hình vuông.

Chọn đáp án (B)

Câu 24. Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là

- (A) điểm A . (B) trùng với phương chiếu.
 (C) đường thẳng đi qua A . (D) đường thẳng đi qua A hoặc chính A .

Lời giải.

- + Nếu phương chiếu song song hoặc trùng với đường thẳng a thì hình chiếu là điểm A .
- + Nếu phương chiếu không song song hoặc không trùng với đường thẳng a thì hình chiếu là đường thẳng đi qua điểm A .

Chọn đáp án (D)

Câu 25. Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là

- (A) giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác ABC .
 (B) giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC .
 (C) giao điểm của hai đường đường cao của tam giác ABC .
 (D) giao điểm của hai đường phân giác của tam giác ABC .

Lời giải.

Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao của ba đường trung trực.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC . Hình chiếu song song của điểm M theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?

- (A) S . (B) Trung điểm của SD . (C) A . (D) D .

Lời giải.

Giả sử N là ảnh của M theo phép chiếu song song đường thẳng AB lên mặt phẳng (SAD) .

Suy ra $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$. Do M là trung điểm của $SC \Rightarrow N$ là trung điểm của SD .

Chọn đáp án (B) □

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm nào sau đây?

- (A) S . (B) Trung điểm của BC . (C) B . (D) C .

Lời giải.

Do $AB \cap (SBC) = \{A\}$ suy ra hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm B .

Chọn đáp án (C) □

Dạng 3. Xác định yếu tố song song

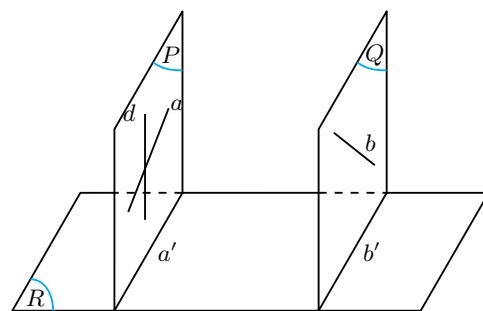
Ví dụ mẫu

Ví dụ 7. Hãy chọn phép chiếu song song sao cho hình chiếu của hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng song song.

Lời giải.

- + Vì a, b chéo nhau nên có duy nhất 1 cặp mặt phẳng $(P), (Q)$ sao cho $a \subset (P), b \subset (Q), (P) \parallel (Q)$.
- + Gọi (R) là mặt phẳng cắt $(P), (Q)$ theo 2 giao tuyến là a' và b' . Vì $(P) \parallel (Q)$ nên $a' \parallel b'$.
- + Gọi d là 1 đường thẳng nằm trong (P) nhưng không song song với a, b và cắt (R) .

Khi đó qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (R) theo phương d , hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là a' và b' song song với nhau. □



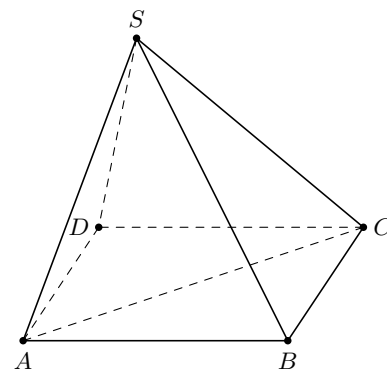
Ví dụ 8. Hãy chọn phép chiếu song song với phương chiếu và mặt phẳng chiếu thích hợp để hình chiếu song song của một tứ diện cho trước là một hình bình hành.

Lời giải.

Cho tứ diện $SABC$.

Trên mặt phẳng (ABC) , dựng điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó qua phép chiếu song song đường thẳng SD và mặt phẳng chiếu (ABC) biến tứ diện $SABC$ thành hình bình hành $ABCD$.

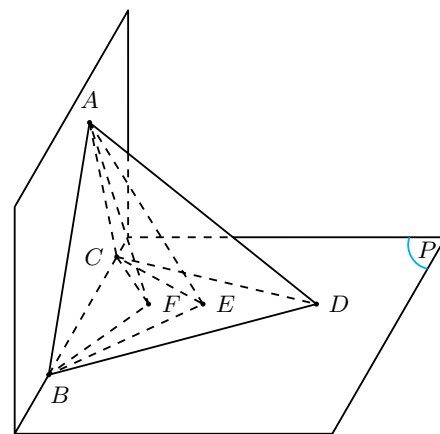


Ví dụ 9. Cho tam giác ABC . Hãy chọn mặt phẳng chiếu (P) và phương chiếu d để hình chiếu của tam giác ABC trên (P) là

- a) một tam giác cân.
- b) một tam giác đều.
- c) một tam giác vuông.

Lời giải.

- a) Qua BC ta dựng mặt phẳng (P) không đi qua A . Trong mặt phẳng (P) ta dựng tam giác cân DBC ($DB = DC$). Khi đó phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu AD biến tam giác ABC thành tam giác DBC cân.
- b) Trong mặt phẳng (P) ở câu a), ta dựng tam giác đều EBC . Khi đó phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AE biến tam giác ABC thành tam giác đều EBC .
- c) Trong mặt phẳng (P) ở câu a), ta dựng tam giác FBC vuông tại F . Khi đó phép chiếu song song lên (P) theo phương chiếu AF biến tam giác ABC thành tam giác vuông FBC .



2. Bài tập rèn luyện

Bài 16. Hãy chọn phép chiếu song song với phương chiếu và mặt phẳng chiếu thích hợp để hình chiếu song song của 1 tứ diện cho trước là

- a) một hình bình hành.
- b) một tam giác.

Lời giải.

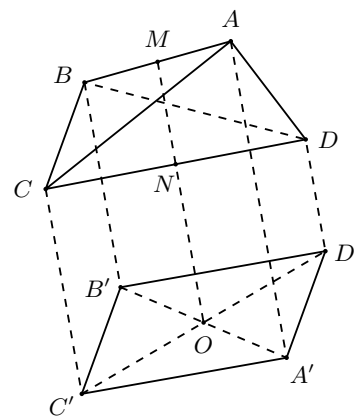
- a) Giả sử $A'C'B'D'$ là hình chiếu song song của tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Muốn cho $A'C'B'D'$ là hình bình hành ta chỉ cần chọn phương chiếu sao cho hình chiếu của M, N trùng nhau. Như vậy nếu chọn phương chiếu d là phương của đường thẳng MN và mặt phẳng chiếu (P) cắt d thì hình chiếu song song của tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $A'C'B'D'$.

Tóm lại ta có thể chọn phương chiếu d là phương của 1 trong 3 đường thẳng đi qua trung điểm 2 cạnh đối diện của hình tứ diện.

Mặt phẳng chiếu (P) là mặt phẳng tùy ý cắt đường thẳng d .

- b) Muốn có hình chiếu song song của 1 tứ diện là 1 tam giác ta chỉ cần Phương chiếu d trùng với phương của cạnh tứ diện. Như vậy có 6 cách lựa chọn phương chiếu khác nhau và khi đó ta sẽ có 2 đỉnh của tứ diện có chung 1 hình chiếu. Mặt phẳng chiếu (P) là mặt phẳng tùy ý cắt đường thẳng d .



Bài 17. Cho 2 hình bình hành $ABCD$ và $BCEF$ nằm trong 2 mặt phẳng phân biệt.

- a) Tìm điểm M trên đoạn DF và điểm N trên đoạn AC sao cho $MN \parallel BE$.

- b) Tính tỉ số $\frac{MD}{MF}$.

Lời giải.

- a) Giả sử đã tìm được $M \in DF, N \in AC$ sao cho $MN \parallel BE$

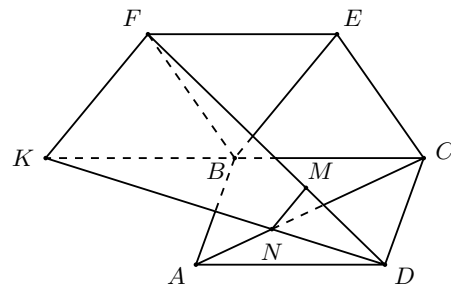
Xét phép chiếu song song theo phương chiếu BE lên mặt phẳng $(ABCD)$. Khi đó qua phép chiếu này, hình chiếu của các điểm D, M, F lần lượt là D, N, K . Vì D, M, F thẳng hàng nên D, N, K cũng thẳng hàng. Do đó $N = DK \cap AC$. Từ đó ta có cách dựng sau:

Cách dựng:

+ Dựng K là hình chiếu của F qua phép chiếu theo phương BE lên mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $BEFK$ là hình bình hành.

+ Dựng $N = DK \cap AC$.

+ Trong mặt phẳng (DFK) kẻ $MN \parallel FK$ cắt DF tại M . Vậy M, N là các điểm cần tìm.



- b) Xét tam giác DFK có $MN \parallel FK \Rightarrow \frac{MD}{MF} = \frac{ND}{NK}$ (1).

$$\text{Ta có } \triangle NAD \sim \triangle NCK \Rightarrow \frac{ND}{NK} = \frac{AD}{CK} = \frac{1}{2} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Rightarrow \frac{MD}{MF} = \frac{1}{2}.$$

Bài 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC' .

- a) Xác định đường thẳng d qua M cắt AN và cắt $A'B$.

- b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d với AN và $A'B$. Tính $\frac{EM}{EF}$.

Lời giải.

- a) Giả sử ta dựng được đường thẳng d thỏa mãn yêu cầu bài toán tức là $d \cap AN = E$, $d \cap A'B = F$ và d đi qua M .

+ Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$. Khi đó 3 điểm M , E , F lần lượt có hình chiếu là M , G , B suy ra M , G , B thẳng hàng.

Gọi H là hình chiếu của N suy ra AH là hình chiếu của AN . Vì $E \in AN$ nên $G \in AH$ suy ra $G = AH \cap BM$.

Lưu ý rằng $A'B \parallel D'C \parallel NH$ suy ra $H \in DC$.

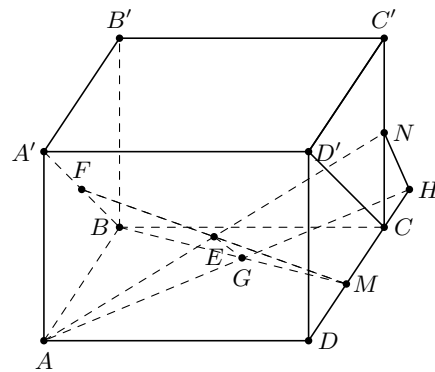
Cách dựng:

+ Kẻ $NH \parallel D'C$, cắt DC tại H .

+ Dựng $G = AH \cap BM$.

+ Trong mặt phẳng (ANH) kẻ $GE \parallel HN$, $E \in AN$.

+ Vẽ đường thẳng ME , đó là đường thẳng d cần tìm. Dễ thấy d cắt $A'B$.



- b) Ta có $CM = CH$, $MH = CD = AB \Rightarrow ABHM$ là hình bình hành $\Rightarrow G$ là trung điểm của BM .

Mà $GE \parallel BF \Rightarrow E$ là trung điểm của MF .

$$\text{Vậy } \frac{EM}{EF} = 1.$$

□

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 28. Xét phép chiếu theo phương d lên mặt phẳng (P) . $AB \parallel CF$ và $AB = DF$.

Gọi A' , B' , C' , D' , E' , F' lần lượt là hình chiếu của A , B , C , D , E , F qua phép chiếu nói trên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\frac{DF}{AB} = \frac{D'F'}{A'B'} = 1.$

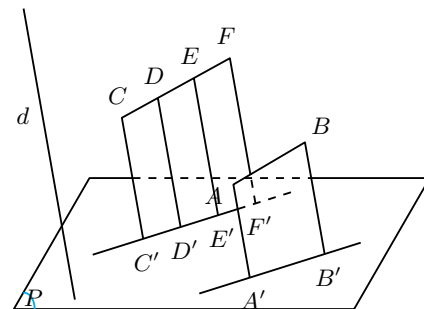
(B) $\frac{C'D'}{C'E'} = \frac{CD}{CE}.$

(C) $D'F' = A'B'.$

(D) Tất cả (A), (B), (C) đều đúng.

Lời giải.

Vận dụng các tính chất của phép chiếu song song.



Chọn đáp án (D)

□

Bài số 7

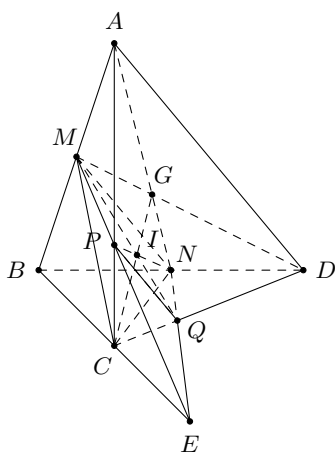
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

A – BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD . Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.

- Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD) .
- Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) .
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP) .
- Gọi I là giao điểm của MQ và NP , G là trọng tâm của tam giác ABD . Chứng minh C, I, G thẳng hàng.

Lời giải.



- Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD) .

$$\begin{aligned} \text{Trong } (ABC) \text{ gọi } E = MP \cap BC &\Rightarrow \begin{cases} E \in MP \\ E \in BC, BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E \in MP \\ E \in (BCD) \end{cases} \\ &\Rightarrow E = MP \cap (BCD). \end{aligned}$$

- Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) .

$$\begin{aligned} \text{Trong } (BCD) \text{ gọi } Q = CD \cap NE &\Rightarrow \begin{cases} Q \in CD \\ Q \in NE, NE \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \in CD \\ Q \in (MNP) \end{cases} \\ &\Rightarrow Q = CD \cap (MNP). \end{aligned}$$

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACD) với mặt phẳng (MNP) .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } Q = CD \cap (MNP) &\Rightarrow \begin{cases} Q \in CD, CD \subset (ACD) \\ Q \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \in (ACD) \\ Q \in (MNP) \end{cases} \\ &\Rightarrow Q \in (ACD) \cap (MNP). \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in AC, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow P \in (ACD) \cap (MNP).$$

$$\text{Do đó } QP = (ACD) \cap (MNP).$$

- Gọi I là giao điểm của MQ và NP , G là trọng tâm của tam giác ABD . Chứng minh C, I, G thẳng hàng.

$$\begin{aligned} \text{Trong } (MNE): I = MQ \cap NP &\Rightarrow \begin{cases} I \in MQ, MQ \subset (MCD) \\ I \in NP, NP \subset (ACN) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I \in (MCD) \\ I \in (ACN) \end{cases} \\ &\Rightarrow I \in (MCD) \cap (ACN). \end{aligned}$$

$$\text{Lại có } G = MD \cap AN \Rightarrow \begin{cases} G \in (MCD) \\ G \in (ACN) \end{cases} \Rightarrow G \in (MCD) \cap (ACN).$$

Vậy C, I, G thẳng hàng.

Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD . Xác định giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với mỗi mặt phẳng sau

- a) (SCD) ;
b) (SBC) .

Lời giải.

- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với (SCD) .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} N \in (AMN) \\ N \in SD, SD \subset (SCD) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} N \in (AMN) \\ N \in (SCD) \end{cases} \\ &\Rightarrow N \in (AMN) \cap (SCD). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Trong } (ABCD) \text{ gọi } E = AM \cap CD &\Rightarrow \begin{cases} E \in AM, AM \subset (AMN) \\ E \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} E \in (AMN) \\ E \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (SCD). \end{aligned}$$

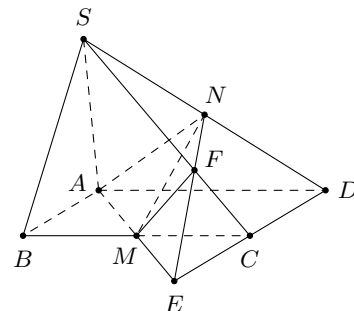
$$\text{Vậy } NE = (AMN) \cap (SCD).$$

- b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (AMN) với (SBC) .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} M \in (AMN) \\ M \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} M \in (AMN) \\ M \in (SBC) \end{cases} \\ &\Rightarrow M \in (AMN) \cap (SBC). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Trong } (SCD) \text{ gọi } F = NE \cap SC &\Rightarrow \begin{cases} F \in NE, NE \subset (AMN) \\ F \in SC, SC \subset (SBC) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} F \in (AMN) \\ F \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (SBC). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } MF = (AMN) \cap (SBC).$$



Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB . Chứng minh rằng

- a) $MN \parallel (SCD)$;
b) $DM \parallel (SBC)$;
c) Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $\frac{SI}{SD} = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng $SB \parallel (AIC)$.

Lời giải.

a) Chứng minh $MN \parallel (SCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel AB \\ CD \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} MN \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD).$$

b) Chứng minh $DM \parallel (SBC)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel CD \\ MN = CD \left(= \frac{AB}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow MNCD \text{ là hình bình hành.}$$

Do đó $DM \parallel CN$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} DM \parallel CN \\ CN \subset (SBC) \\ DM \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow DM \parallel (SBC).$$

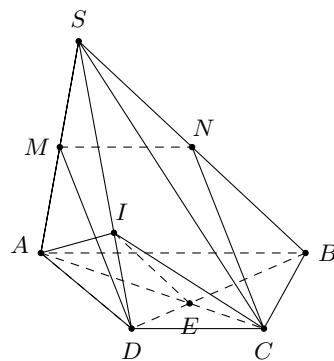
c) Chứng minh $SB \parallel (AIC)$.

Gọi $E = AC \cap BD$.

$$\text{Ta có } \frac{DE}{EB} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{DI}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IE \parallel SB.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SB \parallel IE \\ IE \subset (AIC) \\ SB \not\subset (AIC) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (AIC).$$



Bài 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Lấy M, M' lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $BC, B'C'$; lấy các điểm G, G', K lần lượt thuộc các đoạn $AM, A'M', A'B$ sao cho $\frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{A'K}{A'B} = \frac{2}{3}$.

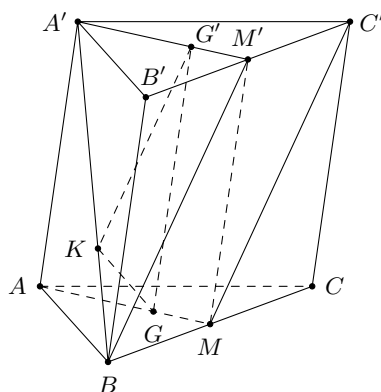
a) Chứng minh rằng $C'M \parallel (A'BM')$.

b) Chứng minh rằng $G'K \parallel (BCC'B')$.

c) Chứng minh rằng $(GG'K) \parallel (BCC'B')$.

d) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua K và song song với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (α) cắt cạnh CC' tại điểm I . Tính $\frac{IC}{IC'}$.

Lời giải.



a) Chứng minh $C'M \parallel (A'BM')$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BM \parallel M'C' \\ BM = M'C' \left(= \frac{BC}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow BMC'M' \text{ là hình bình hành.}$$

Do đó $C'M \parallel BM'$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} C'M \parallel BM' \\ BM' \subset (A'BM') \Rightarrow C'M \parallel (A'BM'). \\ C'M \not\subset (A'BM') \end{cases}$$

b) Chứng minh $G'K \parallel (BCC'B')$.

$$\text{Xét tam giác } A'BM' \text{ có } \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{A'K}{AB} = \frac{2}{3}, \text{ suy ra } G'K \parallel BM'.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} G'K \parallel BM' \\ BM' \subset (BCC'B') \Rightarrow G'K \parallel (BCC'B'). \\ G'K \not\subset (BCC'B') \end{cases}$$

c) Chứng minh $(GG'K) \parallel (BCC'B')$.

$$\text{Trong } (AMM'A') \text{ có } \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}, \text{ suy ra } GG' \parallel MM'.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} GG' \parallel MM' \\ MM' \subset (BCC'B') \Rightarrow GG' \parallel (BCC'B'). \\ GG' \not\subset (BCC'B') \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} G'K \parallel (BCC'B') \\ GG' \parallel (BCC'B') \\ G'K, GG' \subset (GG'K) \Rightarrow (GG'K) \parallel (BCC'B'). \\ G'K \cap GG' = G' \end{cases}$$

d) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua K và song song với mặt phẳng (ABC) . Mặt phẳng (α) cắt cạnh CC' tại điểm I . Tính $\frac{IC}{IC'}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\alpha) \parallel (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (\alpha).$$

$$\text{Tương tự, } \begin{cases} (\alpha) \parallel (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (\alpha).$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} K \in (\alpha) \cap (ABB'A') \\ AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (ABB'A') \end{cases}, \text{ suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng } (\alpha) \text{ và } (ABB'A') \text{ là đường thẳng } d \text{ qua } K \text{ và song song } AB.$$

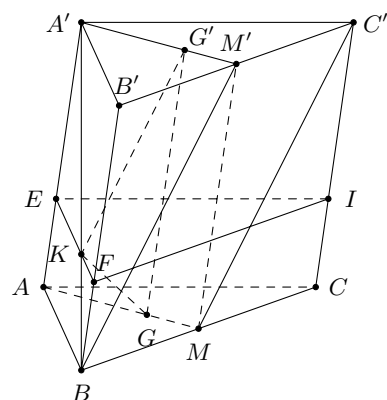
Đường thẳng này cắt AA' tại E , cắt BB' tại F .

$$\text{Khi đó } \frac{A'E}{A'A} = \frac{A'K}{A'B} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EA}{EA'} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự, } \begin{cases} E \in (\alpha) \cap (ACC'A') \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ACC'A') \end{cases}, \text{ suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng } (\alpha) \text{ và } (ACC'A') \text{ là đường thẳng đi}$$

qua E và song song AC , đường này cắt CC' tại I .

$$\text{Khi đó } \frac{IC}{IC'} = \frac{EA}{EA'} = \frac{1}{2}.$$



Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(A'DN) \parallel (B'CM)$.

- b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng $D'B$ với các mặt phẳng $(A'DN)$, $(B'CM)$. Chứng minh rằng $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

Lời giải.

- a) Chứng minh $(A'DN) \parallel (B'CM)$.

Gọi M' là trung điểm $A'B'$.

Ta có $MM' \parallel CC'$ và $MM' = CC'$ nên $CMM'C'$ là hình bình hành, suy ra $CM \parallel C'M'$.

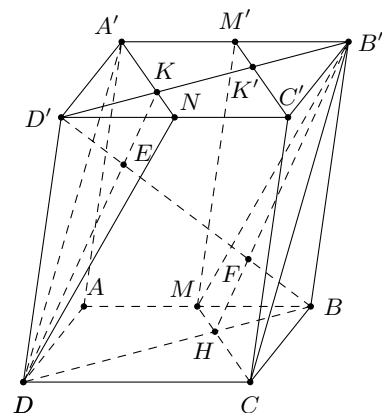
Lại có $A'M' = C'N$ và $A'M' \parallel C'N$ nên $A'M'C'N$ là hình bình hành, suy ra $A'N \parallel C'M'$.

Do đó $CM \parallel A'N \Rightarrow CM \parallel (A'DN)$.

Mặt khác $CB' \parallel DA' \Rightarrow CB' \parallel (A'DN)$.

Mà CB' và CM cắt nhau và nằm trong mặt phẳng $(B'CM)$.

Vậy $(B'CM) \parallel (A'DN)$.



- b) Chứng minh $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

Trong $(BDD'B')$: gọi $H = BD \cap CM \Rightarrow (B'MC) \cap (BDD'B') = B'H$.

Trong $(BDD'B')$: $F = B'H \cap BD' \Rightarrow F = BD' \cap (B'CM)$.

Trong $(BDD'B')$: gọi $K = B'D' \cap A'N \Rightarrow (A'DN) \cap (BDD'B') = DK$.

Trong $(BDD'B')$: $E = DK \cap BD' \Rightarrow E = BD' \cap (A'DN)$.

Gọi $K' = C'M' = B'D'$. Ta có $M'K' \parallel A'K$ và M' là trung điểm $A'B'$ nên K' là trung điểm $B'K$.

Tương tự, K là trung điểm $D'K'$. Suy ra $D'B' = 3D'K$.

Xét tam giác $D'FB'$ có $\frac{D'E}{D'F} = \frac{D'K}{D'B'} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = 2D'E$.

Tương tự $\frac{BF}{BE} = \frac{BH}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = 2BF$.

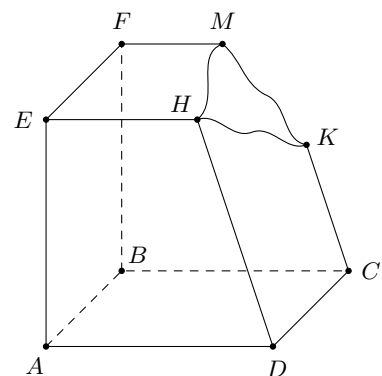
Vậy $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

□

Bài 6.

Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) \parallel (EFMH)$, $CK \parallel DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (hình bên). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

- a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.
- b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R) . Biết $BF = 60$ cm, $DH = 75$ cm, $CK = 40$ cm. Tính FJ .



Lời giải.

- a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ.

Do $(R) \parallel (ABCD)$ nên $(R) \parallel CD$, $(R) \parallel AD$, $(R) \parallel AB$,
 $(R) \parallel BC$.

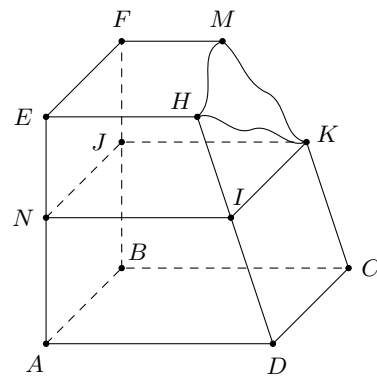
Gọi I, N, J lần lượt là giao điểm của (R) với DH, AE, BF .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (R) \cap (CDHK) = KI \\ CD \parallel (R) \\ CD \subset (CDHK) \end{cases} \Rightarrow KI \parallel CD.$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} (R) \cap (ADHE) = IN \\ AD \parallel (R) \\ AD \subset (ADHE) \end{cases} \Rightarrow IN \parallel AD.$$

$$\text{Và } \begin{cases} (R) \cap (BCKF) = KJ \\ BC \parallel (R) \\ BC \subset (BCKF) \end{cases} \Rightarrow KJ \parallel BC.$$

Khi đó $(R) \cap (ABFE) = NJ$.



- b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R) . Biết $BF = 60$ cm, $DH = 75$ cm, $CK = 40$ cm. Tính FJ .

Ta có $DCKI$ là hình bình hành nên

$$DI = CK = 40 \Rightarrow HI = DH - DI = 75 - 40 = 35.$$

Áp dụng định lý Thales trong không gian ta có

$$\frac{FJ}{BF} = \frac{HI}{DH} \Rightarrow \frac{FJ}{60} = \frac{35}{75} \Rightarrow FJ = \frac{35 \cdot 60}{75} = 28 \text{ (cm)}.$$

□

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

- (A) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
- (B) Hai đường thẳng không có điểm chung.
- (C) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- (D) Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

Lời giải.

Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian thì có các vị trí tương đối sau

- ☑ a và b cắt nhau.
- ☑ a và b song song.
- ☑ a và b chéo nhau.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 3. Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi

- (A) Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
- (B) Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
- (C) Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.

(D) Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Lời giải.

Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 4. Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi

(A) Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.

(B) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.

(C) Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.

(D) Hai mặt phẳng không có điểm chung.

Lời giải.

Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi hai mặt phẳng không có điểm chung.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 5. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

(A) Hình biểu diễn của một đường tròn có thể là một elip.

(B) Hình biểu diễn của một hình thang (không phải là hình bình hành) có thể là một hình bình hành.

(C) Hình biểu diễn của một tam giác đều có thể là một tam giác.

(D) Hình biểu diễn của một hình vuông có thể là một hình bình hành.

Lời giải.

Hình biểu diễn của một hình không gian là hình chiếu song song của nó lên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó. Do đó hình biểu diễn của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau. Vậy phát biểu “Hình biểu diễn của một hình thang (không phải là hình bình hành) có thể là một hình bình hành” là sai.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 6. Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a song song với b ?

(A) 1.

(B) 0.

(C) 2.

(D) Vô số.

Lời giải.

Có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với b vì có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang, đáy lớn AB , giao tuyến của mặt (SAD) và (SBC) là

(A) Sx với $Sx \parallel AB$.

(B) SK với $K = AC \cap BD$.

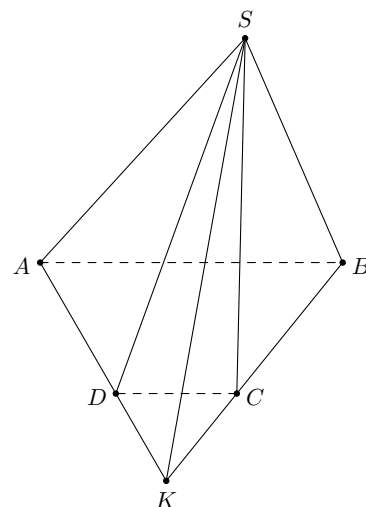
(C) SK với $K = AD \cap BC$.

(D) SK với $K = AB \cap CD$.

Lời giải.

Kéo dài AD và BC . Gọi K là giao điểm của AD và BC .

Ta có S và K là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên giao tuyến của (SAD) và (SBC) là SK .



Chọn đáp án **(C)**

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

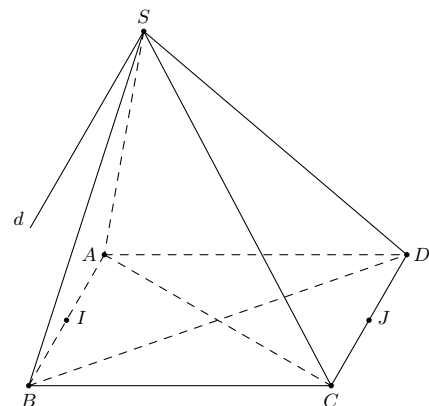
(A) IJ .**(B)** BI .**(C)** BJ .**(D)** AD .**Lời giải.**

Qua S kẻ đường thẳng d song song với AB và CD .

Ta thấy

$$\begin{aligned} \bullet d &\text{ đi qua điểm } S \text{ nằm trong mặt phẳng } (SAB) \text{ và song song với } AB \subset (SAB) \\ &\Rightarrow d \subset (SAB) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet d &\text{ đi qua điểm } S \text{ nằm trong mặt phẳng } (SCD) \text{ và song song với } CD \subset (SCD) \\ &\Rightarrow d \subset (SCD) \end{aligned} \quad (2)$$



Từ (1) và (2), suy ra d chính là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với BI .

Chọn đáp án **(B)**

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

(A) AD song song với mặt phẳng (MNK) .**(B)** Hai đường thẳng MK và AC cắt nhau.**(C)** Giao tuyến của hai mặt phẳng (MNK) và mặt phẳng (ABD) đi qua trung điểm của AD .**(D)** Hai đường thẳng MN và BD cắt nhau.**Lời giải.**

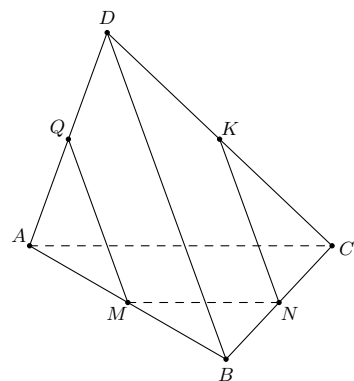
Vì N, K lần lượt là trung điểm của BC, CD suy ra $NK \parallel BD$.

Xét hai mặt phẳng (MNK) và (ABD) có điểm chung M .

Lại có $NK \parallel BD$ nên $(MNK) \cap (ABD) = MQ \parallel BD, (Q \in AD)$.

Mà M là trung điểm của AB suy ra Q là trung điểm của AD .

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (MNK) và mặt phẳng (ABD) đi qua trung điểm của AD .



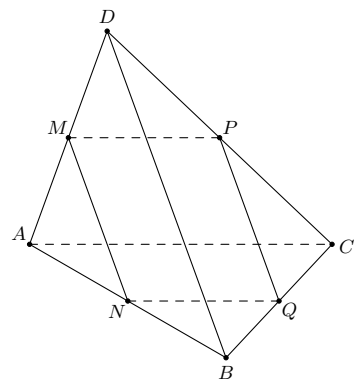
Chọn đáp án **(C)**

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, AB, CD . Khi đó giao điểm của BC với mặt phẳng (MNP) chính là

(A) Trung điểm của AC .**(B)** Trung điểm của BC .**(C)** Giao điểm của MN và CD .**(D)** Giao điểm của MP và BC .**Lời giải.**

Gọi Q là trung điểm BC . Ta có $\begin{cases} MN \parallel BD \\ PQ \parallel BD \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ$.

Do đó $Q \in (MNP)$ mà $Q \in BC$ nên $Q = BC \cap (MNP)$.



Chọn đáp án (B)

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$, gọi các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AC, BD . Khi đó mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) MN, PQ, BC đôi một song song.

(B) $MN \parallel PQ$.

(C) $MP \parallel NQ$.

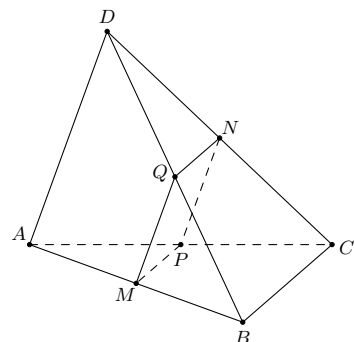
(D) $MP \parallel BD$.

Lời giải.

Vì M, P lần lượt là trung điểm của AB, AC nên MP là đường trung bình trong tam giác ABC , suy ra $MP \parallel BC$.

Vì N, Q lần lượt là trung điểm của CD, BD nên NQ là đường trung bình trong tam giác BCD , suy ra $NQ \parallel BC$.

Vậy $MP \parallel NQ$.



Chọn đáp án (C)

Câu 12. Hãy chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây.

(A) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

(B) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

(C) Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

(D) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng có ba vị trí tương đối là : song song, cắt nhau, trùng nhau.

Do đó, hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

Chọn đáp án (C)

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm các cạnh DC, BC, SA . Giao tuyến của (MKN) với (SAB) là đường thẳng KT , với T được xác định theo một trong bốn phương án được liệt kê dưới đây. Hãy chọn câu đúng.

(A) T là giao điểm của KN với SB .

(B) T là giao điểm của MN với AB .

(C) T là giao điểm của MN với SB .

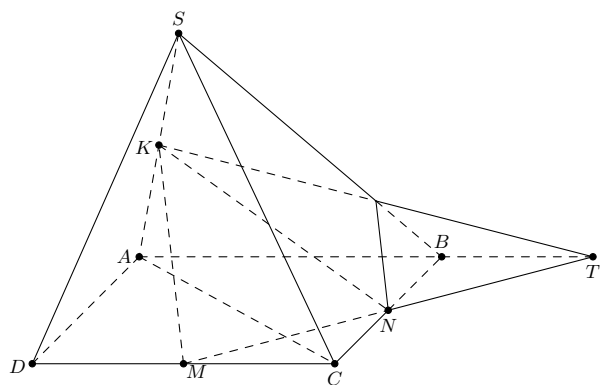
(D) T là giao điểm của KN với AB .

Lời giải.

Ta có K là điểm chung thứ nhất của (SAB) và (KMN) . Ta sẽ tìm điểm chung thứ hai T .

Nhận thấy, trong mặt phẳng (SAB) và (KMN) có đường thẳng AB và MN cùng nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ nên nếu T là giao điểm của AB và MN thì T là điểm chung thứ hai của (SAB) và (KMN) .

Suy ra, KT là giao tuyến của (SAB) và (KMN) .



Chọn đáp án (B)

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. M là điểm thuộc cạnh AD , (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB) . Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB . Tính tỉ số $x = \frac{MA}{MD}$.

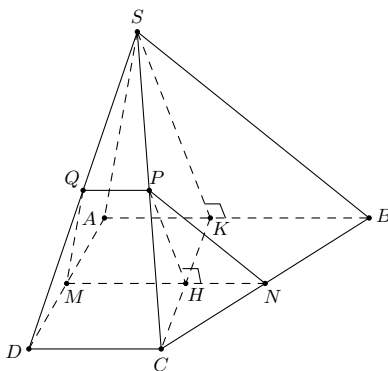
(A) $x = \frac{3}{2}$.

(B) $x = 1$.

(C) $x = \frac{2}{3}$.

(D) $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$ suy ra giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua M và song song

AB , đường thẳng này cắt BC tại N .

Tương tự giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng qua N song song SB cắt SC tại P , giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua P song song CD cắt SD tại Q .

Thiết diện của $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình thang $MNPQ$.

Đặt $CD = a$, ta có $\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow PQ = \frac{ax}{x+1}$.

Trong hình thang $ABCD$ ta có $MN = \frac{x}{x+1}CD + \frac{1}{x+1}AB = \frac{a(x+2)}{x+1}$.

Gọi K là hình chiếu của S lên AB , H là giao của MN và CK , khi đó $PH \parallel SK$ và do đó $PH \perp MN$, thêm nữa

$$\frac{PH}{SK} = \frac{CH}{CK} = \frac{DM}{DA} = \frac{1}{x+1}.$$

Ta có $\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}} = \frac{(PQ + MN)PH}{SK \cdot AB} = \frac{1}{x+1}$.

Theo giả thiết $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- (A)** Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
- (B)** Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.
- (C)** Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
- (D)** Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

Lời giải.

Hai đường thẳng chếp nhau thì không có điểm chung.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Trong các giả thiết sau đây, giả thiết nào kết luận đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) ?

- (A)** $a \cap (\alpha) = \emptyset$.
- (B)** $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$.
- (C)** $a \parallel (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$.
- (D)** $a \parallel b$ và $b \subset (\alpha)$.

Lời giải.

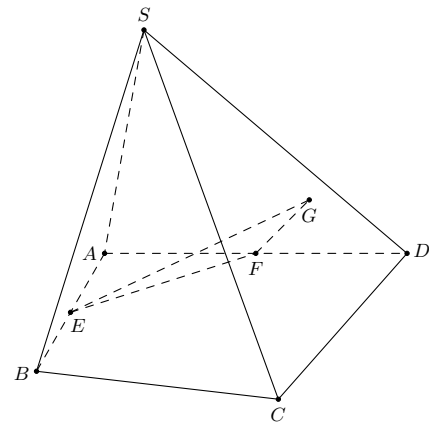
Theo định nghĩa, đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) nếu $a \cap (\alpha) = \emptyset$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là điểm nằm trong tam giác SCD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD (tham khảo hình vẽ bên). Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là

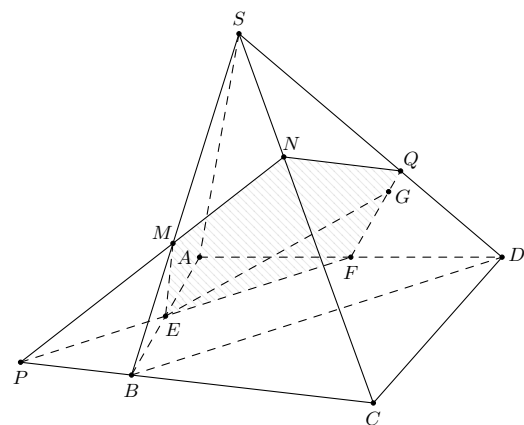
- (A) hình lục giác. (B) hình tam giác.
 (C) hình tứ giác. (D) hình ngũ giác.



Lời giải.

Vì E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $EF \parallel BD$. Kéo dài EF cắt BC tại P .

Gọi Q là giao điểm của FG và SD . Kẻ $QM \parallel BD$ ($M \in SB$). Nối PM cắt SC tại N . Khi đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi (EFG) là ngũ giác $EMNQF$.



Chọn đáp án (D)

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

- (A) $A'B' \parallel (SAD)$. (B) $A'C' \parallel BD$. (C) $(A'C'D') \parallel (ABC)$. (D) $A'C' \parallel (SBD)$.

Lời giải.

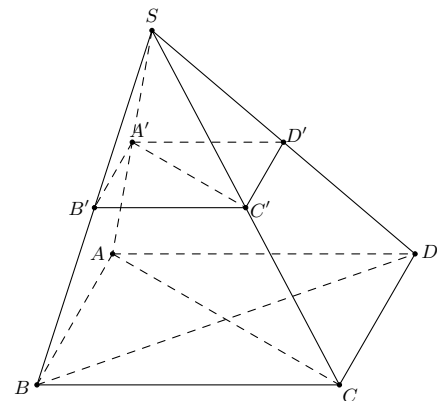
Ta có $A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' \parallel (ABCD)$,

$A'D' \parallel AD \Rightarrow A'D' \parallel (ABCD)$.

Vậy $\begin{cases} A'B' \parallel (ABCD) \\ A'D' \parallel (ABCD) \end{cases}$, suy ra $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$.

Mà $(A'C'D') \equiv (A'B'C'D')$, $(ABC) \equiv (ABCD)$.

Do đó $(A'C'D') \parallel (ABC)$.



Chọn đáp án (C)

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$. Điểm C' nằm trên cạnh SC và không trùng với S . Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ABC') , ta được một đa giác có bao nhiêu cạnh?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

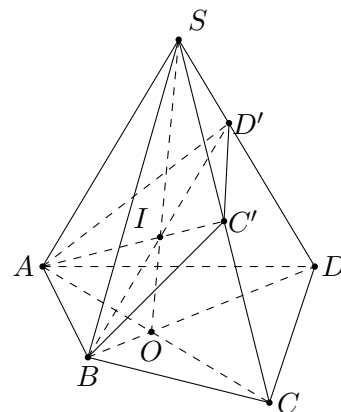
Lời giải.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

Trong tam giác SAC gọi $I = AC' \cap SO$.

Trong tam giác SBD gọi $D' = BI \cap SD$.

Thiết diện tạo được là tứ giác $ABC'D'$.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 20. Cho mặt phẳng (α) chứa hình bình hành $ABCD$, một điểm S nằm ngoài (α) . Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

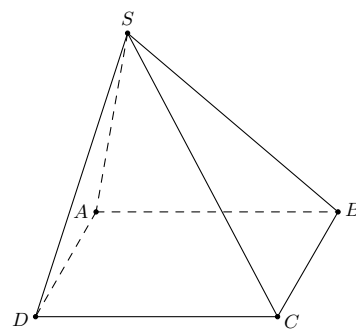
- (A)** d là đường thẳng SK với K là trung điểm của AB .
- (B)** d là đường thẳng qua điểm S và song song với AC .
- (C)** d là đường thẳng SO với $O = AC \cap BD$.
- (D)** d là đường thẳng qua điểm S và song song với AB .

Lời giải.

Ta có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases}$$

Vậy giao tuyến là d với d là đường thẳng qua điểm S và song song với AB .



Chọn đáp án **(D)**

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, CD, BC . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A)** $MNPQ$ là hình bình hành.
- (B)** $BD \parallel PQ$ và $PQ = \frac{1}{2}BD$.
- (C)** MQ và NP chéo nhau.
- (D)** $MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.

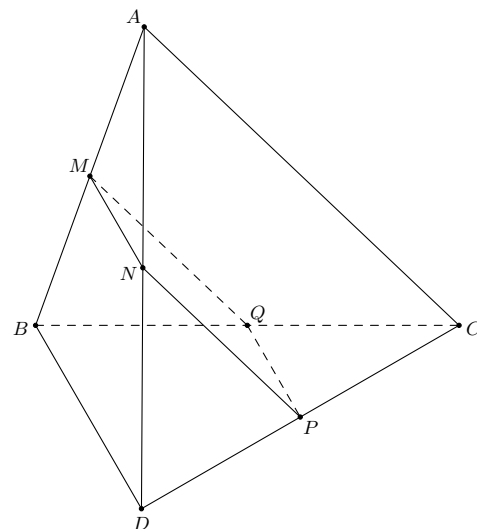
Lời giải.

☑ Do MN là đường trung bình của $\triangle ABD$
 $\Rightarrow MN \parallel BD$ và $MN = \frac{1}{2}BD$.

☑ Do PQ là đường trung bình của $\triangle CBD$
 $\Rightarrow PQ \parallel BD$ và $PQ = \frac{1}{2}BD \Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

☑ Do PQ là đường trung bình của $\triangle BCD$
 $\Rightarrow PQ \parallel BD$ và $PQ = \frac{1}{2}BD$.

☑ Do tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành nên $MQ \parallel NP$.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) AD song song với $(A'B'C'D')$.

(B) DD' song song với $(ABB'A')$.

(C) $B'C'$ song song với (BDD') .

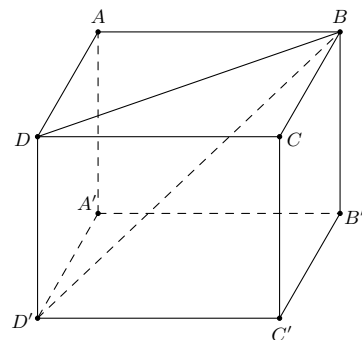
(D) AB song song với $(CDD'C')$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta có

$$\begin{cases} B'C' \parallel BC \\ BC \cap (BDD') = B \end{cases}$$

nên $B'C'$ không song song với (BDD') .



Chọn đáp án (C)

Câu 23. Cho đường thẳng a, d và mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ thỏa mãn $\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) a trùng d .

(B) $a \parallel d$.

(C) a cắt d .

(D) a và d chéo nhau.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow a \parallel d.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 24. Hình lăng trụ có các mặt bên là hình gì?

(A) Hình thoi.

(B) Hình chữ nhật.

(C) Hình bình hành.

(D) Hình vuông.

Lời giải.

Hình lăng trụ có các mặt bên là các hình bình hành.

Chọn đáp án (C)

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB, \triangle SAD$ và E, F là trung điểm của AB, AD . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $IJ \parallel (SBD)$.

(B) $IJ \parallel (SAD)$.

(C) $IJ \parallel (SAB)$.

(D) $IJ \parallel (SFE)$.

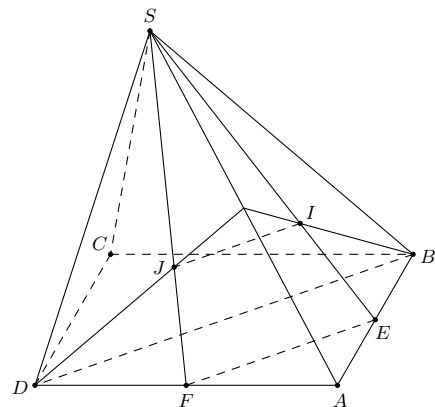
Lời giải.

Xét $\triangle SFE$ có: $\frac{SJ}{SF} = \frac{SI}{SE} = \frac{2}{3}$ (do I, J là trọng tâm của $\triangle SAB, \triangle SAD$).

Áp dụng định lý Thales đảo vào $\triangle SEF$ ta có $IJ \parallel EF$. (1)

Mà $EF \parallel BD \subset (SBD)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IJ \parallel (SBD)$.



Chọn đáp án (A)

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm SA . Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

(A) một hình tứ giác (không là hình thang).

(B) một hình thang (không là hình bình hành).

(C) một hình bình hành.

(D) một tam giác.

Lời giải.

Gọi N là giao của SD và mặt phẳng (MBC) .

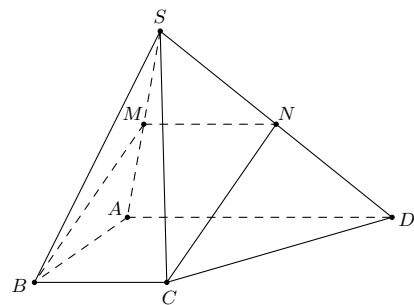
Do các mặt phẳng (MBC) và (SAD) lần lượt chứa hai đường song song là BC và AD , nên giao tuyến của chúng cũng song song với hai đường đó, tức $MN \parallel AD$.

Suy ra N là trung điểm của SD .

Khi đó, MN là đường trung bình của tam giác SAD , suy ra $MN = \frac{1}{2}AD = BC$.

Vậy, thiết diện $BCNM$ là một hình bình hành.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $MN \parallel (ACD)$.

(B) $MN \parallel (SAC)$.

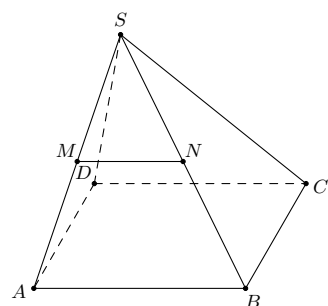
(C) $MN \parallel (SAB)$.

(D) $MN \parallel (SBD)$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB nên MN là đường trung bình trong tam giác SAB , suy ra $MN \parallel AB$.

Mà $AB \subset (ACD)$ nên $MN \parallel (ACD)$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $GE \parallel CD$.

(B) GE cắt AD .

(C) GE cắt BC .

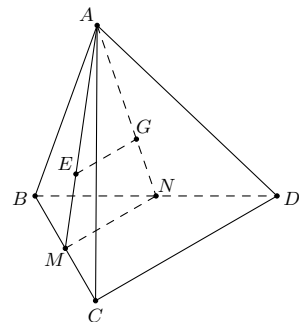
(D) GE và CD chéo nhau.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD .

Vì G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC nên $GE \parallel MN$.

Vậy $GE \parallel CD$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là

(A) Đường thẳng đi qua S và song song với đường thẳng BD .

(B) Đường thẳng đi qua S và song song với đường thẳng CD .

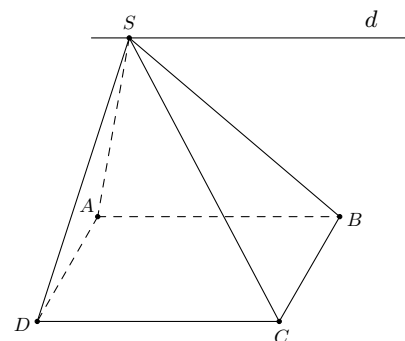
(C) Đường thẳng đi qua S và song song với đường thẳng AC .

(D) Đường thẳng đi qua S và song song với đường thẳng AD .

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases}$$

 $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d, d$ qua S và $d \parallel CD$.



Chọn đáp án (B)

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh DC, BC, SA . Gọi H là giao điểm của AC và MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $MN \parallel (ABCD)$.

(B) MN giao mặt (SAC) tại H .

(C) $MN \parallel (SBD)$.

(D) MN chéo SC .

Lời giải.

☑ Vì $MN \subset (ABCD)$ và SC cắt $(ABCD)$ tại $C \notin MN$ nên MN và SC chéo nhau.

☑
$$\begin{cases} MN \parallel BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SBD).$$

☑ $MN \subset (ABCD)$.

☑
$$\begin{cases} MN \cap AC = H \\ AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow MN \cap (SAC) = H.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chọn khẳng định đúng.

(A) $CD \parallel (SAC)$.

(B) $CD \parallel (SAB)$.

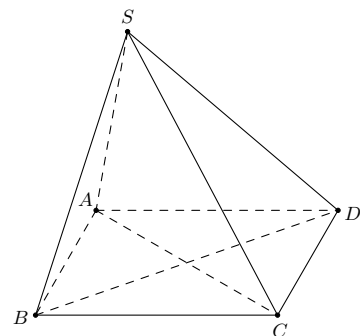
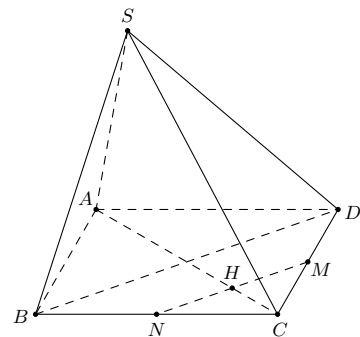
(C) $BD \parallel (SAD)$.

(D) $BD \parallel (SAC)$.

Lời giải.

Ta thấy BD và CD cắt (SAC) .

Do $CD \parallel AB$, mà $AB \subset (SAB)$ và $CD \not\subset (SAB)$ nên suy ra $CD \parallel (SAB)$.



Chọn đáp án (B)

Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh $BC; AD$. Thiết diện thu được là hình gì?

(A) Hình bình hành.

(B) Ngũ giác.

(C) Tam giác vuông.

(D) Tam giác đều.

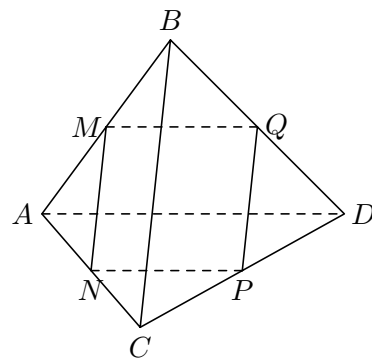
Lời giải.

Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AC, CD, BD .

Khi đó MN và PQ cùng song song với BC và cùng bằng nửa BC .

Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành (đương nhiên lúc đó M, N, P, Q đồng phẳng)

Ngoài ra NP song song với AD nên $(MNPQ)$ là thiết diện qua M và song song với cả BC lẫn AD .



Chọn đáp án (A)

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) $(ABCD)$.

(B) (SBC) .

(C) (SAB) .

(D) (SCD) .

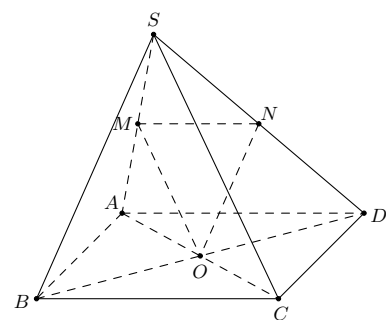
Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC, BD .

Do đó $MO \parallel SC \Rightarrow MO \parallel (SBC)$

Và $NO \parallel SB \Rightarrow NO \parallel (SBC)$

Suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.



Chọn đáp án (B)

Câu 34. Trong không gian, nhận xét nào sau đây là đúng?

(A) Hình biểu diễn của một góc phải là một góc bằng nó.

(B) Qua ba điểm xác định duy nhất một mặt phẳng.

(C) Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng xác định duy nhất một mặt phẳng.

(D) Qua ba điểm phân biệt xác định duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải.

Theo điều kiện xác định mặt phẳng trong không gian.

Chọn đáp án (C)

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$, G là điểm nằm trong tam giác SCD , E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD . Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là

(A) ngũ giác.

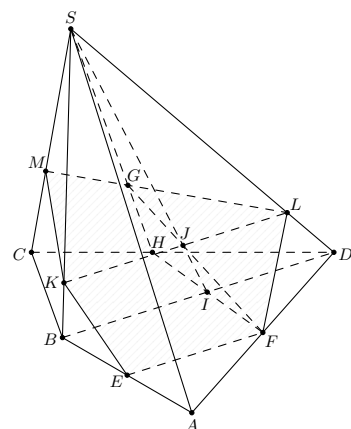
(B) tam giác.

(C) lục giác.

(D) tứ giác.

Lời giải.

Gọi H là giao điểm của SG và CD , I là giao điểm của FH và BD . Nối SI cắt FG tại J . Khi đó, ta có $J \in (EFG) \cap (SBD)$. Gọi K, L lần lượt là giao điểm của (EFG) với SB, SD . Do $EF \parallel BD$ nên giao tuyến KL của hai mặt phẳng $(EFG), (SBD)$ đi qua J và song song với BD . Gọi M là giao điểm của LG và SC , khi đó ngũ giác $EFLMK$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) .



Chọn đáp án (A)

Câu 36. Trong không gian, cho các đường thẳng a, b và mặt phẳng $(P), (Q)$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (A) Nếu $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P), b \subset (Q)$ thì $a \parallel b$.
 (B) Nếu $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \parallel (Q)$.
 (C) Nếu $a \parallel b$ và $a \subset (P), b \subset (Q)$ thì $(P) \parallel (Q)$.
 (D) Nếu $a \parallel (P)$ và $b \parallel (Q)$ thì $a \parallel b$.

Lời giải.

Cho hai mặt phẳng song song nếu đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này thì song song với mặt phẳng còn lại.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) a và b chéo nhau.
 (B) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
 (C) a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
 (D) a và b không có điểm chung.

Lời giải.

Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Giả sử $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$. Khi đó, hai đường thẳng a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) Phép chiếu song song có thể biến một đường tròn thành một điểm.
 (B) Phép chiếu song song có thể biến một đường tròn thành một đường tròn.
 (C) Phép chiếu song song có thể biến một đường tròn thành một đoạn thẳng.
 (D) Phép chiếu song song có thể biến một đường tròn thành một elip.

Lời giải.

Theo tính chất của phép chiếu song song ta có phương án “Phép chiếu song song có thể biến một đường tròn thành một điểm” là phương án sai.

Chọn đáp án (A) □

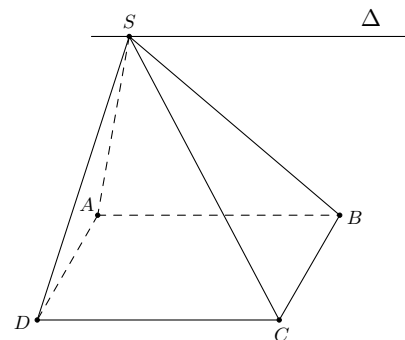
Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .

- (A) Đường thẳng qua điểm S và song song với AB, CD .
 (B) SO với O là giao điểm của AC và BD .
 (C) SA .
 (D) Đường thẳng qua điểm S và song song với AD, BC .

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \text{ nên giao tuyến của hai mặt phẳng } (SAD) \\ AD \parallel BC \end{cases}$$

và (SBC) là đường thẳng Δ đi qua điểm S và song song với AD, BC .



Chọn đáp án (D) □

Câu 40. Chọn mệnh đề sai

- (A) Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.
 (B) Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
 (C) Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

(D) Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Lời giải.

Mệnh đề sai là “Có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng”.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 41. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

(A) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn vô số điểm chung khác nữa.

(B) Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

(C) Nếu một đường thẳng có một điểm thuộc mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

(D) Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Nếu đường thẳng d có một điểm thuộc mặt phẳng (P) thì d cắt (P) hoặc $d \subset (P)$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

(A) AC .

(B) BD .

(C) SC .

(D) AD .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \quad \text{suy ra } (SAD) \cap (SBC) = Sx \text{ với } Sx \parallel AD.$$

Chọn đáp án **(D)**

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn là CD . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là giao điểm của cạnh SB và mặt phẳng (MCD) . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $MN \parallel CD$.

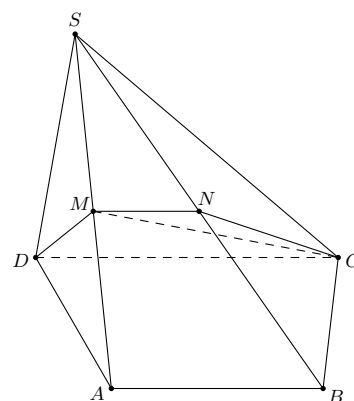
(B) MN và SC cắt nhau.

(C) MN và CD chéo nhau.

(D) MN và SD cắt nhau.

Lời giải.

Hai mặt phẳng (SAB) và (MCD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song AB , CD và MN là giao tuyến của chúng nên $MN \parallel CD$.



Chọn đáp án **(A)**

Câu 44. Cho hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa hai đường thẳng đó?

(A) 2.

(B) 4.

(C) 1.

(D) 3.

Lời giải.

Hai đường thẳng đồng phẳng có 2 vị trí tương đối, đó là cắt nhau và song song.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 45. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M ở trên cạnh BC (khác B và C). Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD . Thiết diện của (α) với tứ diện là

(A) Hình chữ nhật.

(B) Hình thang.

(C) Hình bình hành.

(D) Hình thoi.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ M \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = MN \parallel AB \text{ với } N \in AC.$

$\begin{cases} (\alpha) \parallel CD \\ M \in (\alpha) \cap (DBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (DBC) = MP \parallel CD \text{ với } P \in AC.$

$\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ P \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = PQ \parallel AB \text{ với } Q \in AD.$

Khi đó $(\alpha) \cap (ACD) = QN$. Mà $(\alpha) \parallel CD$ nên $QN \parallel CD$.

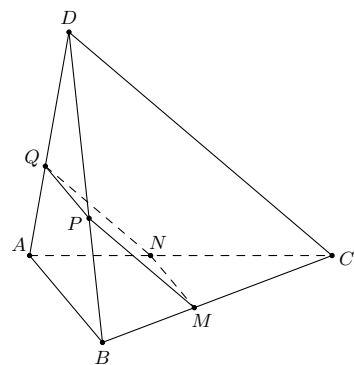
Do đó $MN \parallel PQ, QN \parallel MP$ hay $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có $(AB, CD) = (MN, MP)$ nên $MNPQ$ không thể là hình chữ nhật.

Vì M bất kỳ trên BC nên $MN \neq MP$ hay $MNPQ$ cũng không là hình thoi.

Vậy $MN \parallel PQ, QN \parallel MP$ hay $MNPQ$ là hình bình hành.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 46. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- (A)** Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng.
- (B)** Hai đường thẳng song song thì đồng phẳng.
- (C)** Tồn tại duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng.
- (D)** Hai đường thẳng không đồng phẳng thì không có điểm chung.

Lời giải.

Mệnh đề "Tồn tại duy nhất một đường thẳng qua một điểm và song song với một đường thẳng" sai vì nếu điểm đó thuộc đường thẳng đã cho thì không tồn tại đường thẳng nào đi qua điểm đó và song song với đường thẳng cho trước.

Chọn đáp án **(A)**

Câu 47. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên các cạnh AA', BB', CC' lần lượt lấy ba điểm M, N, P sao cho $\frac{A'M}{AA'} = \frac{1}{3}; \frac{B'N}{BB'} = \frac{2}{3}; \frac{C'P}{CC'} = \frac{1}{2}$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt DD' tại Q . Tính tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$.

- (A)** $\frac{1}{3}$.
- (B)** $\frac{1}{6}$.
- (C)** $\frac{2}{3}$.
- (D)** $\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$, $I = OO' \cap MP$ và cạnh bên $AA' = BB' = CC' = DD' = a$.

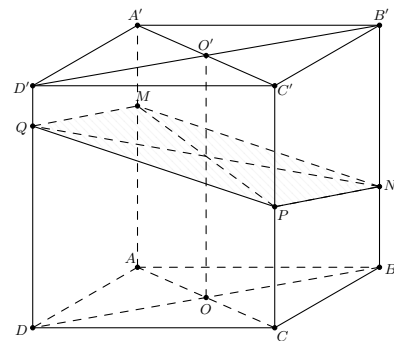
Ta có

$$C'P + A'M = B'N + D'Q = 2O'I$$

$$\Leftrightarrow \frac{C'P}{CC'} + \frac{A'M}{AA'} = \frac{B'N}{BB'} + \frac{D'Q}{DD'}$$

$$\frac{D'Q}{DD'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

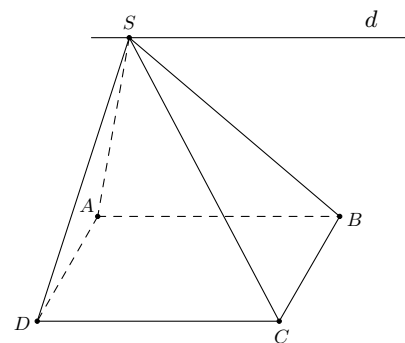
- (A)** d qua S và song song với DC .
- (B)** d qua S và song song với BC .
- (C)** d qua S và song song với BD .
- (D)** d qua S và song song với AB .

Lời giải.

Xét hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có:

- ☑ S là điểm chung.
- ☑ $AD \parallel BC$ ($ABCD$ là hình bình hành).

Vậy $(SAD) \cap (SBC) = d$ và d qua S và song song với BC .



Chọn đáp án (B)

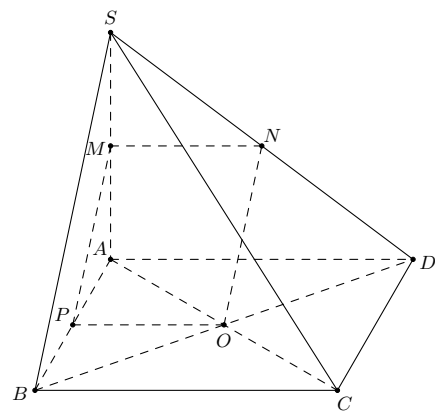
Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $(MON) \parallel (SBC)$.
- (B) $(NMP) \parallel (SBD)$.
- (C) (NOM) cắt (OPM) .
- (D) $(PON) \cap (MNP) = NP$.

🗨️ **Lời giải.**

- ☑ $\begin{cases} MN \parallel AD & (\text{đường trung bình } \triangle SAD) \\ OP \parallel AD & (\text{đường trung bình } \triangle BAD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel OP \Rightarrow$
 O, N, M, P cùng nằm trong một mặt phẳng.

- ☑ $\begin{cases} MN \parallel AD \parallel BC \subset (SBC) \\ OM \parallel SC \subset (SBC) \end{cases}$
 $\Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$.



Chọn đáp án (A)

Câu 50. Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết điều nào sau đây?

- (A) Hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.
- (B) Một điểm và một đường thẳng thuộc nó.
- (C) Ba điểm không thẳng hàng.
- (D) Ba điểm mà nó đi qua.

🗨️ **Lời giải.**

Có ba cách xác định một mặt phẳng

- ☑ Mặt phẳng được hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- ☑ Mặt phẳng được hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- ☑ Mặt phẳng được hoàn toàn xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Chọn đáp án (C)

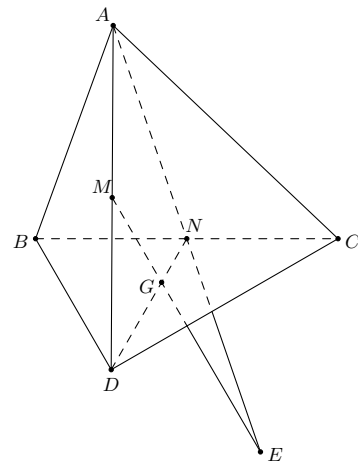
Câu 51. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AD và BC ; G là trọng tâm tam giác BCD . Giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC) là

- (A) Giao điểm của MG và AN .
- (B) Giao điểm của MG và BD .
- (C) Điểm N .
- (D) Giao điểm của MG và BC .

🗨️ **Lời giải.**

Ta có $MG \subset (ADN)$ và $(ADN) \cap (ABC) = AN$.

Do đó, giao điểm của đường thẳng MG và mặt phẳng (ABC) là giao điểm của MG và AN .



Chọn đáp án (A)

Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm $\triangle SAB$. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $AB = \frac{1}{3}CD$.

(B) $AB = \frac{3}{2}CD$.

(C) $AB = 3CD$.

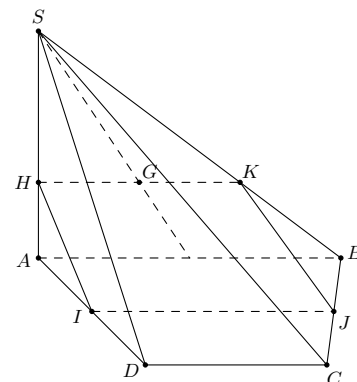
(D) $AB = \frac{2}{3}CD$.

Lời giải.

Qua G kẻ đường thẳng song song với AB cắt SA, SB lần lượt tại H và K . Thiết diện tạo bởi (IJG) với hình chóp là hình thang $IJKH$. Để $IJKH$ là hình bình hành thì $IJ = HK$.

Mà G là trọng tâm $\triangle SAB$ nên $IJ = \frac{2}{3}AB$ và IJ là đường trung bình của $ABCD$ nên $IJ = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Do đó

$$\frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD.$$



Chọn đáp án (C)

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SEF) và (SAC) .

(A) $(SEF) \cap (SAC) = SI$ với I là trung điểm của AB .

(B) $(SEF) \cap (SAC) = SK$ với K là trung điểm của CD .

(C) $(SEF) \cap (SAC) = SG$ với G là tâm hình bình hành $ABCD$.

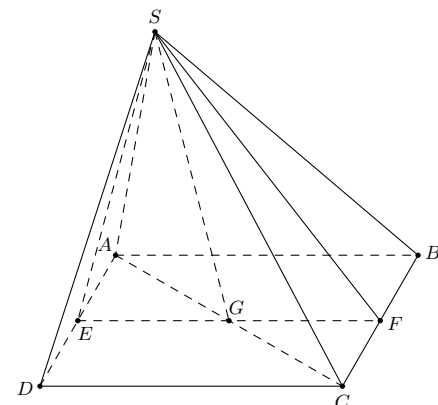
(D) $(SEF) \cap (SAC) = SH$ với H là giao điểm của AC và BE .

Lời giải.

Ta có S là điểm chung thứ nhất.

Gọi G là giao điểm của EF và AC , suy ra G là tâm hình bình hành $ABCD$.

Vậy $(SEF) \cap (SAC) = SG$ với G là tâm hình bình hành $ABCD$.



Chọn đáp án (C)

Câu 54. Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì

(A) cùng thuộc một đường Elip.

(B) cùng thuộc một đường thẳng.

(C) cùng thuộc một nửa đường tròn.

(D) cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải.

Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng.

Chọn đáp án (B)



C – ĐỀ ÔN TẬP

1. Phần Trắc nghiệm (7 điểm)

Câu 1. Cho một điểm A nằm ngoài đường thẳng Δ . Qua A vẽ được bao nhiêu đường thẳng song song với đường thẳng Δ ?

(A) Vô số.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 1.

Lời giải.

Qua điểm A nằm ngoài đường thẳng Δ vẽ được duy nhất một đường thẳng song song với đường thẳng Δ .

Chọn đáp án (D)



Câu 2. Cho tam giác ABC . Số mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tam giác ABC ?

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

Lời giải.

Ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên có một và chỉ một mặt phẳng đi qua chúng.

Chọn đáp án (A)



Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

(A) 2.

(B) 4.

(C) 1.

(D) 3.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian có 3 vị trí tương đối: Cắt nhau, chéo nhau và song song với nhau.

Chọn đáp án (D)



Câu 4. Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi

(A) Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba.

(B) Hai đường thẳng không có điểm chung.

(C) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

(D) Hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng.

Lời giải.

Trong không gian, hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Chọn đáp án (C)



Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ với I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) Bốn điểm I, J, B, C đồng phẳng.

(B) Bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.

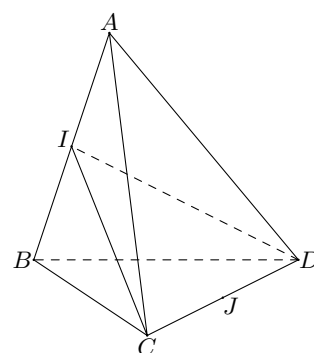
(C) Bốn điểm I, J, B, D đồng phẳng.

(D) Bốn điểm I, J, A, C đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có $J \in CD \subset (CID) \Rightarrow J \in (CID)$.

Vậy bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.



Chọn đáp án (B)

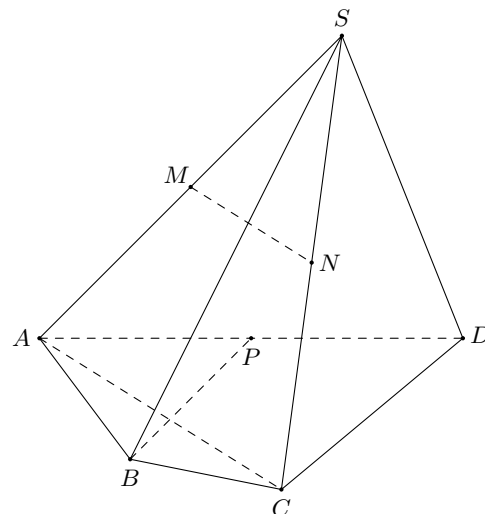


Câu 6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SC, AD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $MN \parallel (ABCD)$. (B) $MN \subset (SCP)$. (C) $MN \parallel (SBD)$. (D) $BP \parallel SD$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC nên $MN \parallel AC$.
Mặt khác $MN \not\subset (ABCD)$ nên suy ra $MN \parallel (ABCD)$.



Chọn đáp án (A) □

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) Qua ba điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
(B) Qua bốn điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
(C) Qua hai điểm phân biệt có duy nhất 1 mặt phẳng.
(D) Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

Lời giải.

Khẳng định đúng là “Qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng”.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8. Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi

- (A) Đường thẳng đó không có điểm chung với hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.
(B) Đường thẳng đó không có điểm chung với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.
(C) Đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.
(D) Đường thẳng đó song song với một đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Lời giải.

Trong không gian, đường thẳng song song với mặt phẳng khi và chỉ khi đường thẳng và mặt phẳng không có điểm chung.

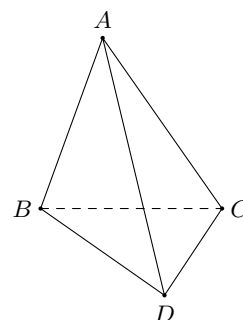
Chọn đáp án (C) □

Câu 9. Trong không gian cho bốn điểm phân biệt không đồng phẳng. Có thể xác định được nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho?

- (A) 6. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Với bốn điểm phân biệt không đồng phẳng, có thể xác định được nhiều nhất 4 mặt phẳng phân biệt từ các điểm đã cho.



Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi

- (A) Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng.
- (B) Hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba.
- (C) Có một mặt phẳng chứa hai đường thẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng còn lại.
- (D) Hai mặt phẳng không có điểm chung.

Lời giải.

Trong không gian, hai mặt phẳng song song với nhau khi và chỉ khi hai mặt phẳng không có điểm chung.

Chọn đáp án (D) □

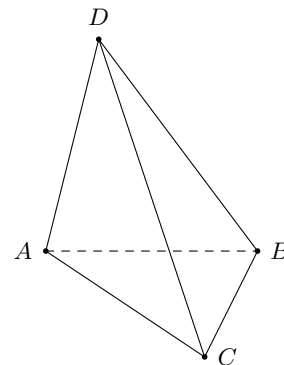
Câu 11. Trong không gian cho tứ diện $ABCD$. Cặp đường thẳng nào sau đây chéo nhau?

- (A) AB và BD .
- (B) AD và BC .
- (C) AD và CD .
- (D) AB và BC .

Lời giải.

Để thấy $AB \cap BC = B$ nên AB và BC là hai đường thẳng cắt nhau.

Tương tự: $AD \cap CD = D$, $AB \cap BD = B$ nên các cặp đường thẳng này cũng cắt nhau.



Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối giữa a và b ?

- (A) 4.
- (B) 1.
- (C) 3.
- (D) 2.

Lời giải.

Hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian thì có các vị trí tương đối sau

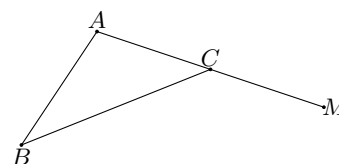
- ☑ a và b cắt nhau.
- ☑ a và b song song.
- ☑ a và b chéo nhau.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13.

Cho tam giác ABC . Lấy điểm M trên cạnh AC kéo dài (Hình bên). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- (A) $C \in (ABM)$.
- (B) $A \in (MBC)$.
- (C) $B \in (ACM)$.
- (D) $M \in (ABC)$.



Lời giải.

Vì ACM thẳng hàng nên $B \in (ACM)$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Quan hệ song song trong không gian có tính chất nào trong các tính chất sau?

- (A) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q) .
- (B) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.
- (C) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q) .
- (D) Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

Lời giải.

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q) .

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 15. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

- (A)** Nếu ba điểm phân biệt M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
- (B)** Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- (C)** Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
- (D)** Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

Lời giải.

Đáp án "Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất" **sai** vì hai mặt phẳng trùng nhau có vô số điểm chung, không nhất thiết phải là đường thẳng chung duy nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của SC . Giao điểm của BC với mặt phẳng (ADM) là

- (A)** giao điểm của BC và AD .
- (B)** giao điểm của BC và SD .
- (C)** giao điểm của BC và AM .
- (D)** giao điểm của BC và DM .

Câu 17. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên là AA', BB', CC' . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BA'C)$.

- (A)** $(AB'C) \cap (BA'C) = OC$ với $O = CB' \cap BC'$.
- (B)** $(AB'C) \cap (BA'C) = OC$ với $O = AB' \cap A'B$.
- (C)** $(AB'C) \cap (BA'C) = MN$ với M là trung điểm của BC' và N là trung điểm của AC' .
- (D)** $(AB'C) \cap (BA'C) = OC$ với $O = AC' \cap A'C$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

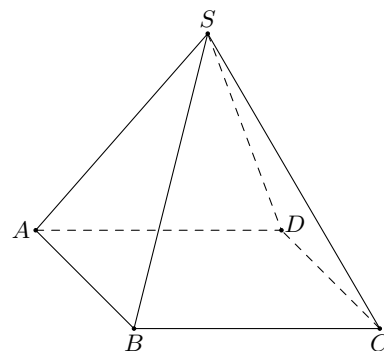
- (A)** AB .
- (B)** SA .
- (C)** AC .
- (D)** BC .

Lời giải.

Ta thấy S là điểm chung thứ nhất.

Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có $AB \parallel CD$.

Vậy giao tuyến là đường thẳng qua S và song song AB .



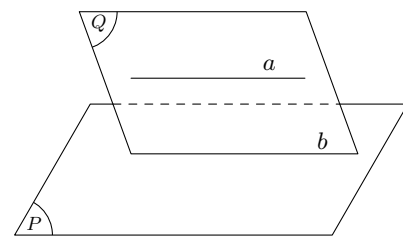
Chọn đáp án **(A)** □

Câu 19. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng b . Vị trí tương đối của hai đường thẳng a và b là

- (A)** chéo nhau.
- (B)** trùng nhau.
- (C)** cắt nhau.
- (D)** song song.

Lời giải.

$$\text{Vì } \begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \quad \text{nên } a \parallel b.$$



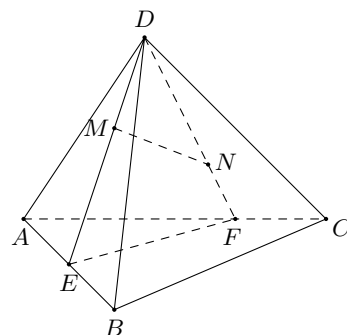
Chọn đáp án (D)

Câu 20. Cho tứ diện $ABCD$, M, N lần lượt là các điểm nằm trong tam giác ABD, ACD , thiết diện của hình tứ diện với mặt phẳng (DMN) là hình gì?

- (A) Tam giác. (B) Tứ giác. (C) Đáp án khác. (D) Ngũ giác.

Lời giải.

Gọi $E = DM \cap AB, F = DN \cap AC$, khi đó thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (DMN) là tam giác DEF .



Chọn đáp án (A)

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

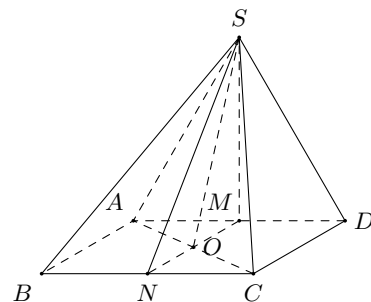
- (A) SG với G là trung điểm AB . (B) SO với O là tâm hình bình hành $ABCD$.
(C) SF với F là trung điểm CD . (D) SD .

Lời giải.

Ta có $S \in (SMN) \cap (SAC)$.

Gọi tâm hình bình hành là O , ta có $O = AC \cap MN$ nên $O \in (SMN) \cap (SAC)$.

Vậy $(SMN) \cap (SAC) = SO$.



Chọn đáp án (B)

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N . Trong các đường thẳng sau đây, đường nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD) ?

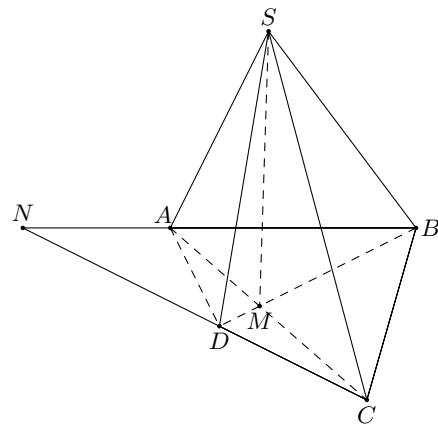
- (A) SB . (B) SM . (C) SC . (D) SN .

Lời giải.

Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$.

$$\text{Mặt khác, } \begin{cases} M = AC \cap BD \\ AC \subset (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAC) \cap (SBD).$$

Suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SM$.



Chọn đáp án (B)

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau, đường nào **không song song** với IJ ?

(A) AD .

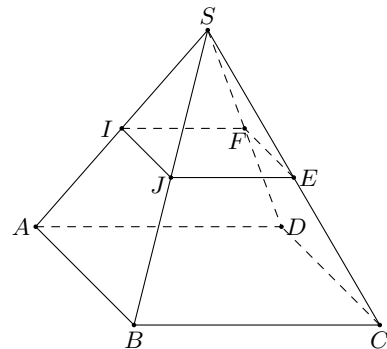
(B) AB .

(C) EF .

(D) CD .

Lời giải.

- ☑ Ta có, IJ là đường trung bình tam giác SAB nên $IJ \parallel AB$.
- ☑ $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel CD$. Mà $IJ \parallel AB$.
Suy ra, $IJ \parallel CD$.
- ☑ EF là đường trung bình tam giác SCD nên $EF \parallel CD$.
Suy ra $IJ \parallel EF$.



Chọn đáp án (A)

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm là O . Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB , M là giao điểm của IC và JD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

(A) $IJ = \frac{1}{2}AB$.

(B) $ID \parallel JC$.

(C) $(SAC) \cap (SBD) = MO$.

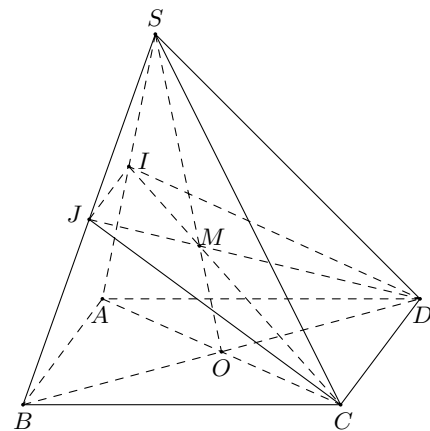
(D) $IJ \parallel CD$.

Lời giải.

Vì I, J lần lượt là trung điểm SA, SB nên $IJ \parallel AB$ và $IJ = \frac{1}{2}AB$. Do đó

$IJ \parallel CD$ và $IJ = \frac{1}{2}AB$, nên ID và JC cắt nhau.

Ta có M và O lần lượt là các điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên $(SAC) \cap (SBD) = MO$.



Chọn đáp án (B)

Câu 25. Trong không gian cho hai đường thẳng phân biệt a, b và hai mặt phẳng phân biệt $(\alpha), (\beta)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Nếu $a \parallel b, b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.

(B) Nếu $a \parallel (\alpha), a \subset (\beta), (\alpha) \cap (\beta) = b$ thì $a \parallel b$.

(C) Nếu $a \parallel (\alpha), b \subset (\alpha)$ thì $a \parallel b$.

(D) Nếu $a \parallel b, b \parallel (\alpha)$ thì $a \parallel (\alpha)$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là “Nếu $a \parallel (\alpha), a \subset (\beta), (\alpha) \cap (\beta) = b$ thì $a \parallel b$ ”.

Chọn đáp án (B)

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SD, K là giao điểm của mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SC . Tỉ số $\frac{SK}{SC}$ bằng

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

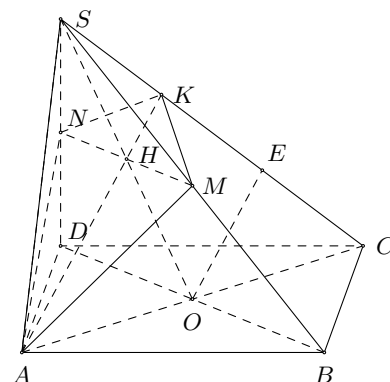
Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Gọi $H = MN \cap SO$, khi đó $K = SC \cap AH$.

Xét $\triangle ABD$ có MN là đường trung bình nên $\frac{SH}{SO} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$. Suy ra H là trung điểm của SO .

Gọi E là trung điểm của CK , xét tam giác AKC có OE là đường trung bình nên $OE \parallel HK$.

Xét $\triangle SOE$ có H là trung điểm của SO và $HK \parallel OE$ nên HK là đường trung bình, suy ra K là trung điểm của SE .

Vậy tỉ số $\frac{SK}{SC} = \frac{1}{3}$.



Chọn đáp án (D)

Câu 27. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A', B', C' . Tỉ số $\frac{A'B'}{B'C'}$ bằng

(A) $\frac{3}{2}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{2}{3}$.

(D) $\frac{2}{5}$.

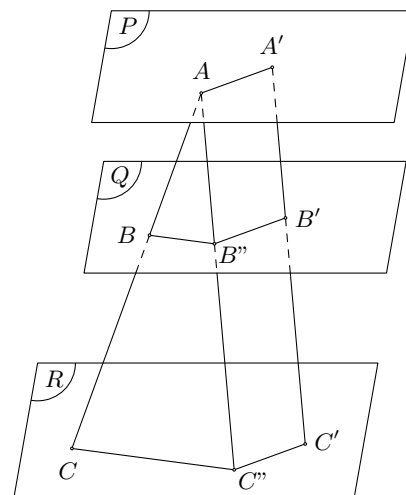
Lời giải.

Kẻ đường thẳng c qua A song song với b . Gọi B'', C'' lần lượt là giao điểm của c với (Q) và (R) .

Xét $\triangle SAC''$ có $BB'' \parallel CC''$ suy ra $\frac{AB''}{B''C''} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ (1).

Lại có $AA''B'B''$ và $B''B'C'C''$ là các hình bình hành nên $AB'' = A'B'$ và $B''C'' = B'C'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$.



Chọn đáp án (C)

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD . Đường thẳng SB song song với mặt phẳng

(A) (ADM) .

(B) (ACM) .

(C) (ACD) .

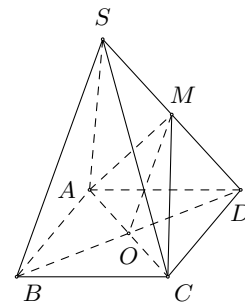
(D) (CDM) .

Lời giải.

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Xét $\triangle SBD$ có MO là đường trung bình nên $SB \parallel MO$.

Ta có $\begin{cases} SB \parallel MO \\ MO \subset (ACM) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (ACM)$.



Chọn đáp án (B)

Câu 29.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD . Biết $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm của SD và N là giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) . Hãy tính tỉ số $\frac{SN}{SC}$.

- (A) $\frac{SN}{SC} = \frac{1}{2}$. (B) $\frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}$. (C) $\frac{SN}{SC} = \frac{3}{4}$. (D) $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Trong $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AB và CD .

Trong (SDO) , gọi N là giao điểm của SC và OM .

Ta có $OM \subset (ABM)$ nên N là giao điểm của SC và (ABM) .

Xét $\triangle OAD$, có $BC \parallel AD$ và $BC = \frac{1}{2}AD$.

Suy ra BC là đường trung bình của $\triangle OAD$.

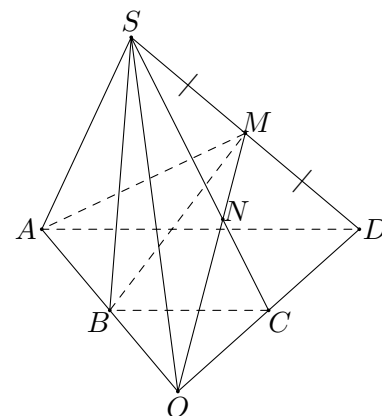
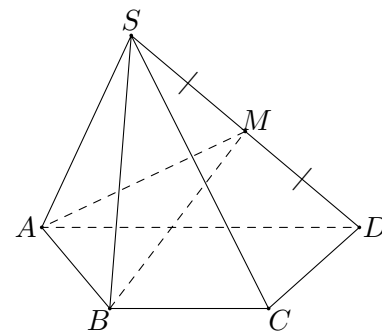
Khi đó C là trung điểm của OD .

Xét SOD , có

- ☑ SC là đường trung tuyến thứ nhất.
- ☑ OM là đường trung tuyến thứ hai.
- ☑ SC cắt OM tại N .

Suy ra N là trọng tâm $\triangle SOD$ hay $\frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$

Chọn đáp án (D)



Câu 30. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng

- (A) $(ABCD)$. (B) $(BCC'B')$. (C) (BDC') . (D) (BDA') .

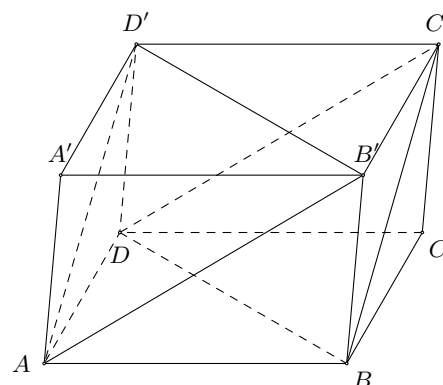
Lời giải.

Do $ABC'D'$ là hình bình hành nên $AB \parallel C'D'$.

Do $ADC'B'$ là hình bình hành nên $AB' \parallel DC'$.

Xét hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ có

$$\begin{cases} AB' \parallel DC' \\ AB \parallel C'D' \end{cases} \text{ nên } (AB'D') \parallel (C'BD).$$



Chọn đáp án (C)

Câu 31. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

(A) $\frac{200}{3}$. (B) $\frac{400}{9}$. (C) $\frac{200}{9}$. (D) $\frac{40}{9}$.

Lời giải.

Qua M dựng đường thẳng song song với AB cắt SB tại N .

Qua M dựng đường thẳng song song với AD cắt SD tại Q .

Qua N dựng đường thẳng song song với BC cắt SC tại P .

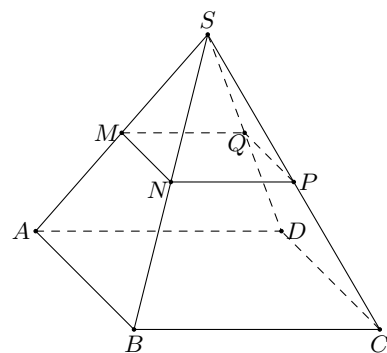
Ta có

$$\begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel (ABCD) \\ NP \parallel BC \Rightarrow NP \parallel (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MNPQ) \parallel (ABCD).$$

Ta có tỉ lệ diện tích $\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Lại có $S_{ABCD} = 10 \cdot 10 = 100 \Leftrightarrow S_{MNPQ} = 100 \cdot \frac{4}{9} = \frac{400}{9}$.

Chọn đáp án (B)

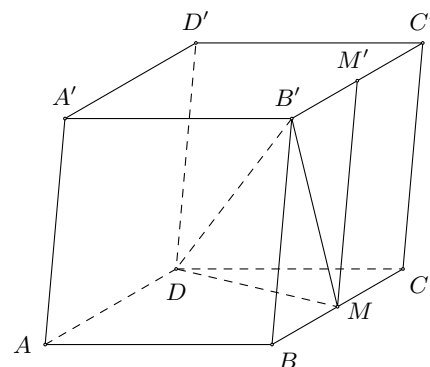


Câu 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$. Hình chiếu của $\triangle B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương AA' là

- (A) $\triangle B'D'M'$. (B) $\triangle C'D'M'$. (C) $\triangle DMM'$. (D) $\triangle B'A'M'$.

Lời giải.

Phép chiếu song song theo phương AA' biến B' thành chính nó, biến D thành D' , biến M thành M' do đó biến $\triangle B'DM$ thành $\triangle B'D'M'$.



Chọn đáp án (A)

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

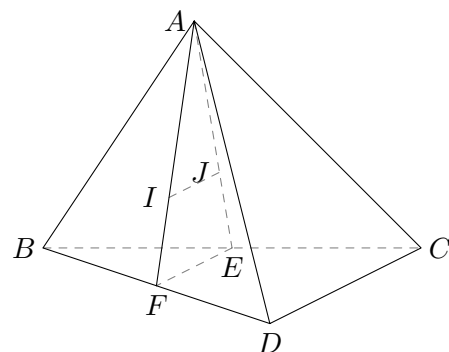
- (A) $IJ \parallel (AEF)$ với E, F là trung điểm của BC và BD .
 (B) $IJ \parallel (ACD)$.
 (C) $IJ \parallel (ABD)$.
 (D) $IJ \parallel (ABC)$.

Lời giải.

Theo đề E, F là trung điểm của BC và BD .

Ta có $\frac{AI}{AF} = \frac{AJ}{AE} = \frac{2}{3}$

suy ra $IJ \parallel EF$ hay $IJ \parallel (AEF)$.



Chọn đáp án (B)

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB . Biết cạnh $CD = 4$ cm, tính độ dài

cạnh AB để thiết diện của mặt phẳng (IJG) và hình chóp $S.ABCD$ là một hình bình hành?

(A) $AB = 8$.

(B) $AB = 10$.

(C) $AB = 12$.

(D) $AB = 16$.

Lời giải.

Do IJ là đường trung bình của hình thang nên $IJ \parallel AB$.

Khi đó $(IJG) \cap (SAB) = d$ với d đi qua G và song song với AB .

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của d với SB, SA .

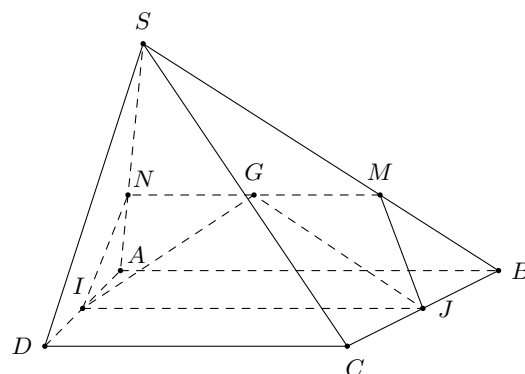
Ta thấy $IJM N$ là hình thang với

$$IJ = \frac{AB + CD}{2} \text{ và } MN = \frac{2}{3}AB.$$

$IJM N$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$MN = IJ \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{2} = \frac{2}{3}AB.$$

Thay $CD = 4$ ta có $AB = 12$.



Chọn đáp án **(C)**

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và P là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $AP = \frac{1}{3}AB$. Gọi Q là giao điểm của SC và (MNP) . Tính tỉ số $\frac{SQ}{SC}$.

(A) $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}$.

(B) $\frac{SQ}{SC} = \frac{2}{3}$.

(C) $\frac{SQ}{SC} = \frac{2}{5}$.

(D) $\frac{SQ}{SC} = \frac{3}{8}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) gọi D là giao điểm của PN và AC .

Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của DM và SC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} Q \in DM \subset (MNP) \\ Q \in SC \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (MNP).$$

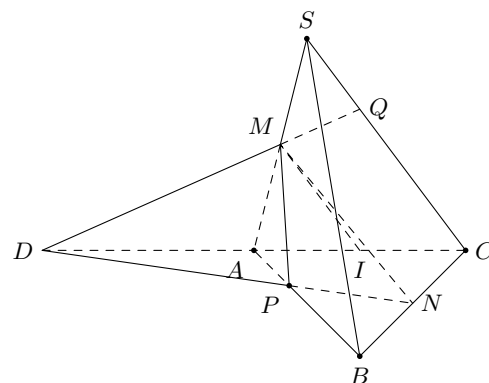
Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AC .

$$\text{Xét tam giác } DIN \text{ với } AP \parallel IN \text{ ta có: } \frac{DA}{DI} = \frac{AP}{IN} = \frac{\frac{1}{3} \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot AB} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } DQC \text{ với } MI \parallel QC \text{ ta có: } \frac{MI}{QC} = \frac{DI}{DC} = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow MI = \frac{3}{4} \cdot QC \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot SC = \frac{3}{4} \cdot QC \Leftrightarrow \frac{QC}{SC} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**



2. Phần Tự luận (3 điểm)

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BD . Điểm P thuộc cạnh AC sao cho $PA = 2PC$.

a) Xác định giao điểm E của đường thẳng MP với mặt phẳng (BCD) .

b) Xác định giao điểm Q của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP) .

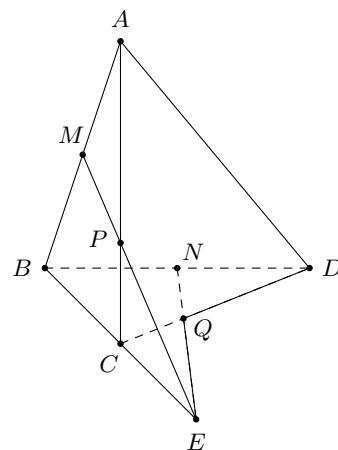
Lời giải.

a) Trong (ABC) gọi $E = MP \cap BC$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} E \in MP \\ E \in BC, BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E \in MP \\ E \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow E = MP \cap (BCD).$$

b) Trong (BCD) gọi $Q = CD \cap NE$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} Q \in CD \\ Q \in NE, NE \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q \in CD \\ Q \in (MNP) \end{cases} \\ \Rightarrow Q = CD \cap (MNP).$$



Bài 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB . Chứng minh rằng

a) $MN \parallel (SCD)$;

b) $DM \parallel (SBC)$;

c) Lấy điểm I thuộc cạnh SD sao cho $\frac{SI}{SD} = \frac{2}{3}$. Chứng minh rằng $SB \parallel (AIC)$.

Lời giải.

a) Chứng minh $MN \parallel (SCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel AB \\ CD \parallel AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel CD.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} MN \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD). \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases}$$

b) Chứng minh $DM \parallel (SBC)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel CD \\ MN = CD \left(= \frac{AB}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow MNCD \text{ là hình bình hành.}$$

Do đó $DM \parallel CN$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} DM \parallel CN \\ CN \subset (SBC) \Rightarrow DM \parallel (SBC). \\ DM \not\subset (SBC) \end{cases}$$

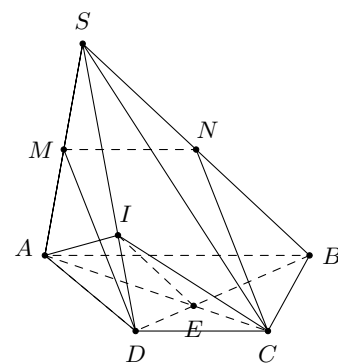
c) Chứng minh $SB \parallel (AIC)$.

Gọi $E = AC \cap BD$.

$$\text{Ta có } \frac{DE}{EB} = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{3}.$$

Theo giả thiết ta có $\frac{DI}{SD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IE \parallel SB$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} SB \parallel IE \\ IE \subset (AIC) \Rightarrow SB \parallel (AIC). \\ SB \not\subset (AIC) \end{cases}$$



Bài 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $AB, C'D'$.

a) Chứng minh rằng $(A'DN) \parallel (B'CM)$.

- b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của đường thẳng $D'B$ với các mặt phẳng $(A'DN)$, $(B'CM)$. Chứng minh rằng $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

Lời giải.

- a) Chứng minh $(A'DN) \parallel (B'CM)$.

Gọi M' là trung điểm $A'B'$.

Ta có $MM' \parallel CC'$ và $MM' = CC'$ nên $CMM'C'$ là hình bình hành, suy ra $CM \parallel C'M'$.

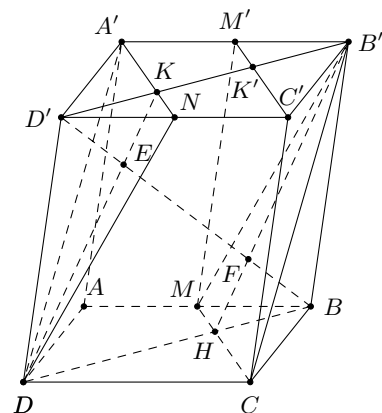
Lại có $A'M' = C'N$ và $A'M' \parallel C'N$ nên $A'M'C'N$ là hình bình hành, suy ra $A'N \parallel C'M'$.

Do đó $CM \parallel A'N \Rightarrow CM \parallel (A'DN)$.

Mặt khác $CB' \parallel DA' \Rightarrow CB' \parallel (A'DN)$.

Mà CB' và CM cắt nhau và nằm trong mặt phẳng $(B'CM)$.

Vậy $(B'CM) \parallel (A'DN)$.



- b) Chứng minh $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

Trong $(BDD'B')$: gọi $H = BD \cap CM \Rightarrow (B'MC) \cap (BDD'B') = B'H$.

Trong $(BDD'B')$: $F = B'H \cap BD' \Rightarrow F = BD' \cap (B'CM)$.

Trong $(BDD'B')$: gọi $K = B'D' \cap A'N \Rightarrow (A'DN) \cap (BDD'B') = DK$.

Trong $(BDD'B')$: $E = DK \cap BD' \Rightarrow E = BD' \cap (A'DN)$.

Gọi $K' = C'M' = B'D'$. Ta có $M'K' \parallel A'K$ và M' là trung điểm $A'B'$ nên K' là trung điểm $B'K$.

Tương tự, K là trung điểm $D'K'$. Suy ra $D'B' = 3D'K$.

Xét tam giác $D'FB'$ có $\frac{D'E}{D'F} = \frac{D'K}{D'B'} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = 2D'E$.

Tương tự $\frac{BF}{BE} = \frac{BH}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF = 2BF$.

Vậy $D'E = BF = \frac{1}{2}EF$.

□