

§1_SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1_ TÌM KHOẢNG ĐB, NB KHI BIẾT BBT CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$

PHƯƠNG PHÁP

♦ Quan sát dấu $y' > 0$ hay $y' < 0$.

- Nếu $y' > 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
- Nếu $y' < 0$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				3				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 1 1

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; 0)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng $(0; 2)$ ta thấy $y' < 0$ Suy ra hàm số đã cho nghịch biến.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				4		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 1

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; +\infty)$. **B.** $(-2; 3)$. **C.** $(3; +\infty)$. **D.** $(1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng $(-2; 3)$ ta thấy $y' > 0$. Suy ra hàm số đồng biến.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như

sau. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -1 $-\infty$ $-\infty$

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng $(0;1)$ ta thấy $y' > 0$. Suy ra hàm số đồng biến.

B – BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$			3	$+\infty$

The diagram illustrates a path in the (x, y) plane. It starts at $y = +\infty$ for $x < -1$, moves down to $y = 0$ at $x = -1$, then up to $y = 3$ at $x = 0$, then down to $y = 0$ at $x = 1$, and finally up to $y = +\infty$ for $x > 1$. The path is symmetric about the line $x = 0.5$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;0)$. B. $(-1;+\infty)$. C. $(-\infty;-1)$. D. $(0;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3			1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

- A. $(0;+\infty)$. B. $(0;2)$. C. $(-2;0)$. D. $(-\infty;-2)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		3			
	$-\infty$			-1				$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;0)$. B. $(-\infty;-2)$. C. $(0;2)$. D. $(0;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		3		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$
y								
	$-\infty$	2	-1	3	2			

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 1$	

Hãy chọn mệnh đề đúng.

- A. $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 B. $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 C. $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 D. $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		3		-3		$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 3)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	3	2	

Mệnh đề nào sau đây đúng.

- A.** Hàm số nghịch biến trên $(-2; 1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

☒ DẠNG 2_TÌM KHOẢNG ĐB, NB KHI BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Dáng đồ thị tăng (đi lên) trên khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số ĐB trên $(a; b)$.
- ◆ Dáng đồ thị giảm (đi xuống) trên khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số NB trên $(a; b)$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

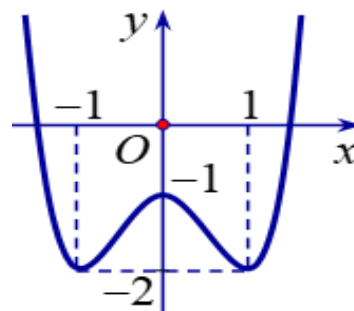
Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(-\infty; 1)$.
C. $(-1; 1)$. **D.** $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Trong khoảng $(-1; 0)$ ta thấy dáng đồ thị đi lên. Suy ra hàm số đã cho đồng biến.



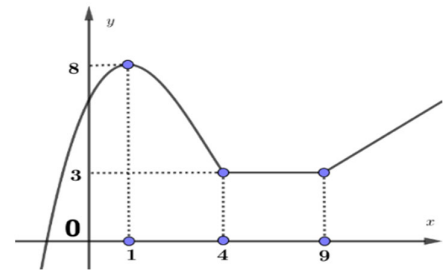
Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 8)$. B. $(1; 4)$.
C. $(4; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng $(1; 4)$ ta thấy dáng đồ thị đi xuống. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến.



Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

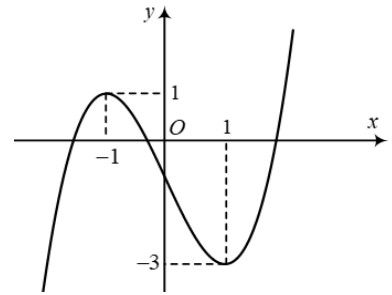
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy dáng đồ thị đi lên. Suy ra hàm số đã cho đồng biến.

Trong các khoảng khác đồ thị hàm số có dáng đi lên và có cả đi xuống

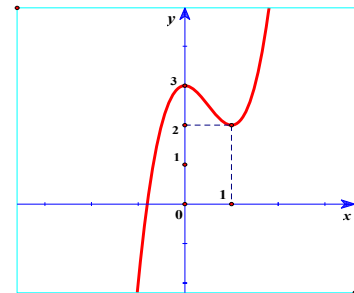


B - BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khẳng định nào sau đây là sai?

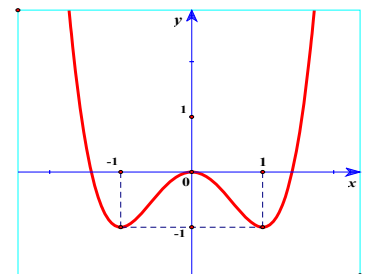
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và $(1; +\infty)$.
D. Hàm số đi qua điểm $(1; 2)$.



Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

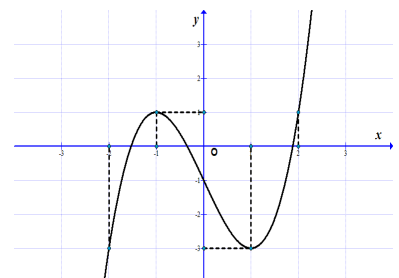
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.



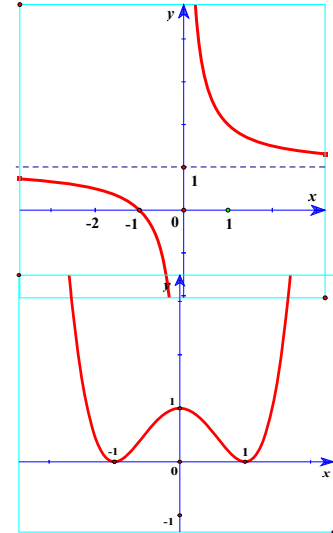
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-1; 1)$.
C. $(0; 2)$. D. $(-2; -1)$.



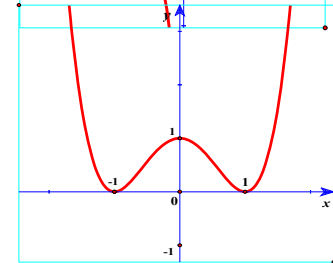
Câu 14. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số chỉ có tiệm cận đứng.
- C. Hàm số có hai cực trị.
- D. Hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.



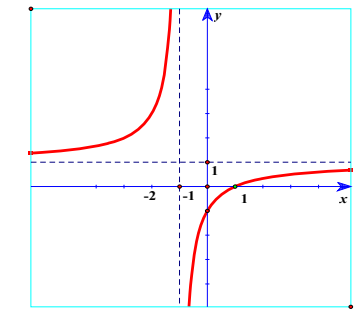
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Chọn khẳng định sai về hàm số $f(x)$:

- A. Hàm số $f(x)$ tiếp xúc với Ox .
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
- D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có đường tiệm cận.



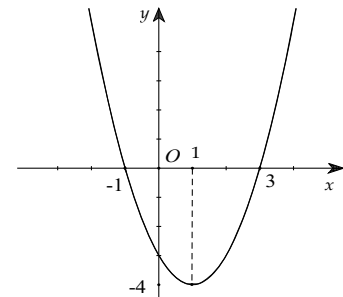
Câu 16. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ hình bên. Khẳng định nào đúng?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -1$.
- B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- D. Hàm số có một cực đại và một cực tiểu.



Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

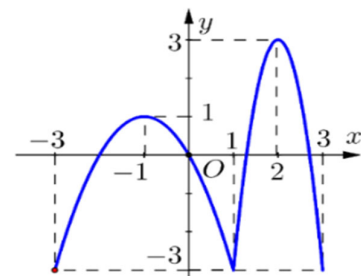
- A. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-4; 3)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.



Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

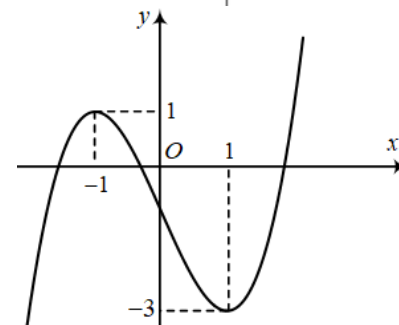
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- A. $(0; 2)$.
- B. $(-2; 0)$.
- C. $(-3; -1)$.
- D. $(2; 3)$.



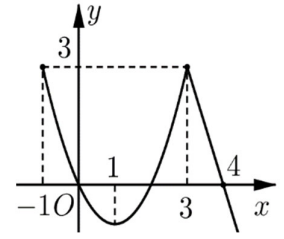
Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.



Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(2;4)$. B. $(0;3)$.
C. $(2;3)$. D. $(-1;4)$.



☒ DẠNG 3 _TÌM KHOẢNG ĐB, NB KHI CHO HÀM SỐ $Y = F(X)$ TUỜNG MINH

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Tìm tập xác định.
- ◆ Tính y' , giải phương trình $y' = 0$ hoặc y' không xác định.
- ◆ Lập BBT.
- ◆ Dựa vào BBT kết luận nhanh khoảng ĐB, NB.

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(1; 3)$. D. $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + 3 = 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		1		$+\infty$

BBT $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$.

Ví dụ 2. Hỏi hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn A

$y = x^4 - 2x^2 + 2020 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

BBT

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				2020				$+\infty$

$\swarrow$ 2019 $\nearrow$ 2019 $\swarrow$ 2019 $\nearrow$ 2019

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{-2x-3}{x+1}$ (C), chọn phát biểu **đúng**

- A. Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định.
- B. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- D. Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng xác định.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{-2x-3}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn đồng biến trên các khoảng xác định.

B - BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 21. Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ đồng biến trên các khoảng

- A. $(-\infty; 1)$.
- B. $(0; 2)$.
- C. $(2; +\infty)$.
- D. $\mathbb{R}$.

Câu 22. Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x - 1$ là

- A. $(-\infty; -1)$.
- B. $(1; +\infty)$.
- C. $(-1; 1)$.
- D. $(0; 1)$.

Câu 23. Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ nghịch biến trên

- A. $(-\infty; -1)$ và $(0, 1)$.
- B. $(-1, 0)$ và $(1, +\infty)$.
- C. $\mathbb{R}$.
- D. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Câu 24. Hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 4$ đồng biến trên các khoảng

- A. $(-\infty; 0)$.
- B. $(0; +\infty)$.
- C. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 25. Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+3}$ đồng biến trên

- A. $\mathbb{R}$.
- B. $(-\infty; 3)$.
- C. $(-3; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -3); (-3; +\infty)$.

Câu 26. Hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ nghịch biến trên các khoảng

- A. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- B. $(1; +\infty)$.
- C. $(-1; +\infty)$.
- D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{-2x-3}{x+1}$ (C). Chọn phát biểu đúng?

- A. Hàm số luôn nghịch biến trên miền xác định.
- B. Hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.
- C. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 28. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

- A. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$.
- B. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$.
- C. $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$.
- D. $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. B. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
 C. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$. D. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

- A. $y = \frac{x-3}{x-1}$. B. $y = \frac{x^2-4x+8}{x-2}$. C. $y = 2x^2 - x^4$. D. $y = x^2 - 4x + 5$.

☒ DẠNG 4_TÌM KHOẢNG ĐB, NB KHI BIẾT HÀM SỐ $y = f(x)$

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Lập BBT
- ◆ Dựa vào BBT tìm khoảng ĐB, NB

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$. B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$. D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Do $f'(x) = x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x) = (x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn D

Do $f'(x) = (x-2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chú ý: Mệnh đề sai.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A. $(1;+\infty)$. B. $(-\infty;+\infty)$. C. $(0;1)$. D. $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B - BÀI TẬP ÁP DỤNG:

- Câu 31.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?
- A. $(-1; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 32.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
 C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.
- Câu 33.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2021}(x-2)^{2020}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$ và đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$.
 B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$.
 C. Hàm số có ba điểm cực trị.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- Câu 34.** Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2(x-5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Hàm số đồng biến trên $(5; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(5; +\infty)$.
- Câu 35.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
 B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.
- Câu 36.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x+5)(x+1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
 D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- Câu 37.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?
- A. $f(-1) \geq f(1)$. B. $f(-1) = f(1)$. C. $f(-1) > f(1)$. D. $f(-1) < f(1)$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-2)^3(x+3)^{2021}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.

☒ DẠNG 5_ TÌM KHOẢNG ĐB, NB ĐỀ CHO ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f'(x)$

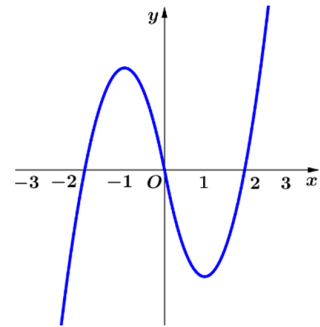
PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục Ox trên khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$.
- ◆ Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía dưới trục Ox trong khoảng $(a; b)$. Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.
- ◆ Nếu cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ mà hỏi sự biến thiên của hàm số hợp $y = f(u)$ thì sử dụng đạo hàm của hàm số hợp và xét dấu hàm số $y = f'(u)$ dựa vào dấu của hàm $y = f'(x)$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
- C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.



Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$				$+\infty$

y_{CT}
 y_{CB}

y_{CT}
 y_{CB}

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng:

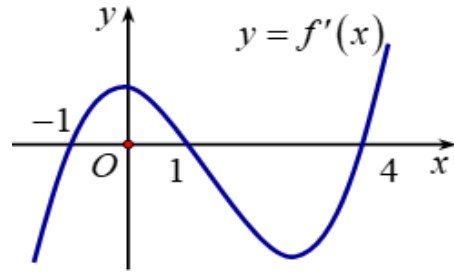
- A. $(1;3)$. B. $(2;+\infty)$.
 C. $(-2;1)$. D. $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$

Hàm số đồng biến khi $(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$



Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(2;3)$. B. $(-2;-1)$. C. $(-1;0)$. D. $(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow -2xf'(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow 2xf'(3-x^2) < 0$.

$$\begin{cases} x < 0 \\ f'(3-x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3-x^2 > 2 \\ -6 < 3-x^2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < 1 \\ 4 < x^2 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -3 < x < -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(3-x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3-x^2 < -6 \\ -1 < 3-x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 9 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

So sánh với đáp án Chọn C.

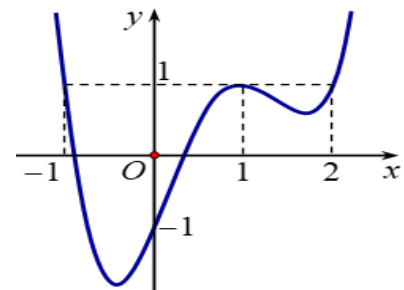
Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình sau. Đặt $g(x) = f(x) - x$, hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng:

- A. $(1;+\infty)$. B. $(-1;2)$.
 C. $(2;+\infty)$. D. $(-\infty;-1)$.

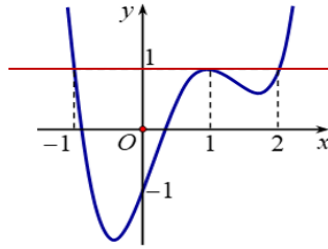
Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.



Dựa vào đồ thị đã cho ta thấy $\forall x \in (-1; 2)$ thì

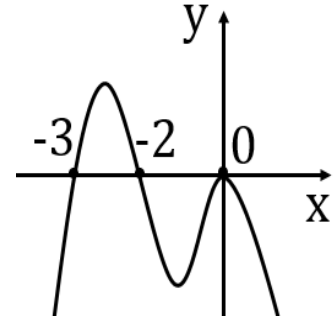


$f'(x) < 1 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 2)$.

B - BÀI TẬP ÁP DỤNG:

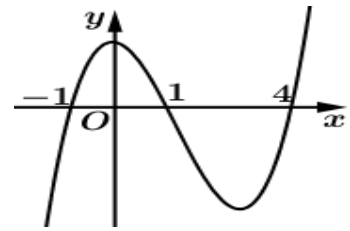
Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên R và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.



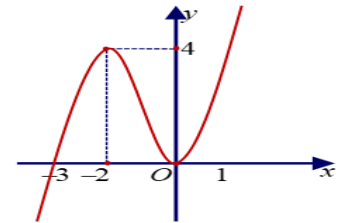
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(3 - 2x) + 2020$ nghịch biến trên khoảng?

- A. $(1; 2)$.
- B. $(2; +\infty)$.
- C. $(-\infty; 1)$.
- D. $(-1; 1)$.



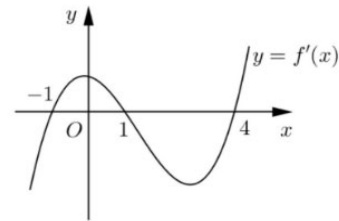
Câu 41. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

- A. $(-\infty; 0)$.
- B. $(-\infty; 4)$.
- C. $(-3; +\infty)$.
- D. $(-4; 0)$.



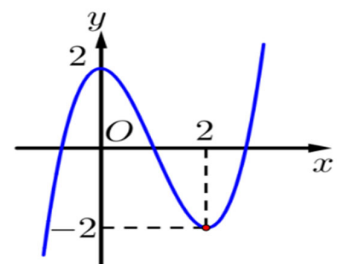
Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; -1)$.
- B. $(2; +\infty)$.
- C. $(-1; 1)$.
- D. $(1; 4)$.

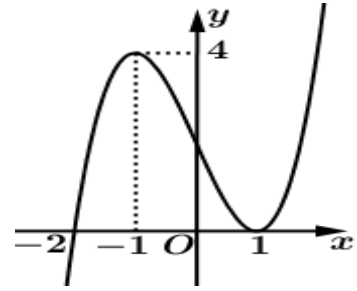


Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = -2f(x)$ đồng biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$.
- B. $(2; 3)$.
- C. $(-1; 0)$.
- D. $(-1; 1)$.

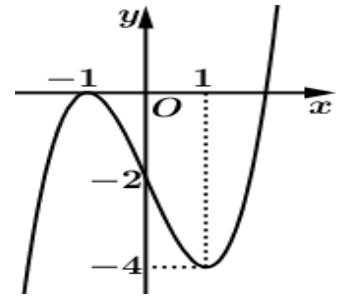


Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây sai?



- A. Hàm $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B. Hàm $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Trên $(-1; 1)$ thì hàm số $f(x)$ luôn tăng.
- D. Hàm $f(x)$ giảm trên đoạn có độ dài bằng 2.

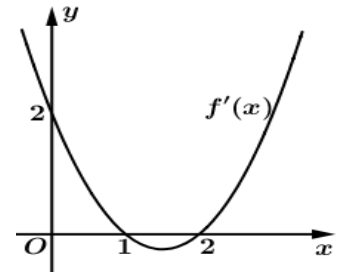
Câu 45. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên M và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào sau đây sai?



- A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.
- B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.
- D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$.

Câu 46. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $y = f(2 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây



- A. $(-\infty; 0)$.
- B. $(0; 1)$.
- C. $(1; 2)$.
- D. $(0; +\infty)$.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$.
- B. $(1; +\infty)$.
- C. $(-1; 0)$.
- D. $(0; 2)$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$.
- B. $(-2; -1)$.
- C. $(-2; 1)$.
- D. $(-4; -3)$.

☒ DẠNG 6_TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN TỪNG KHOẢNG XÁC ĐỊNH, TRÊN KHOẢNG $(A; B)$ HAY TRÊN $\mathbb{R}$.

PHƯƠNG PHÁP

1. Hàm đa thức.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- ◆ Nếu trên K , $f'(x) \geq 0$ và dấu “=” xảy ra tại một số hữu hạn điểm thì $f(x)$ đồng biến trên K .
- ◆ Nếu trên K , $f'(x) \leq 0$ và dấu “=” xảy ra tại một số hữu hạn điểm K thì $f(x)$ nghịch biến trên K .
- ◆ Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$. Ta có:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \quad f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

- ◆ Xét bài toán: “Tìm m để hàm số $y = f(x, m)$ đồng biến trên K ”. Ta thường thực hiện theo các bước sau:

- Tính đạo hàm $f'(x, m)$
- Lý luận: Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow f'(x, m) \geq 0, \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq g(x), \forall x \in K$ ($m \leq g(x)$)
- Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên K , từ đó suy ra giá trị cần tìm của m .

- ◆ Hàm số bậc 3: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

⚡. Chú ý: Xét hệ số $a = 0$ khi nó có chứa tham số.

2. Hàm phân thức hữu tỷ: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

- ◆ Xét tính đơn điệu trên tập xác định:

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- Nếu $y' > 0, \forall x \in D$, suy ra hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c} \right)$ và $\left(-\frac{d}{c}; +\infty \right)$.
- Nếu $y' < 0, \forall x \in D$, suy ra hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{d}{c} \right)$; $\left(-\frac{d}{c}; +\infty \right)$.

- ◆ Xét tính đơn điệu trên khoảng $(a; b)$ thuộc tập xác định D :

- Nếu hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} ad-bc > 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \notin (a; b) \end{cases}$.
- Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ thì $\begin{cases} ad-bc < 0, \forall x \in (a; b) \\ -\frac{d}{c} \notin (a; b) \end{cases}$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$ (với m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 0.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5.$$

TXĐ: $\mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 - 2mx + 4m + 9.$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (dấu “=” xảy ra tại hữu hạn điểm)

$$\Leftrightarrow -3x^2 - 2mx + 4m + 9 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \quad (\text{do } a = -3 < 0)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3(4m + 9) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + 4x - 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-1 \leq m \leq 1$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có, $y' = x^2 - 4mx + 4$.

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta = (-4m)^2 - 4.1.4 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Ví dụ 3. Tìm m để hàm số $y = x^2(m - x) - 2018$ (1) đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $m \in [3; +\infty)$.

B. $m \in [0; +\infty)$.

C. $m \in [-3; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -1]$.

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 2mx$. Để hàm số (1) đồng biến trên $(1; 2)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (1; 2)$.

$$\text{Khi đó } -3x^2 + 2mx \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \geq \frac{3x}{2} \quad \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Ví dụ 4. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

A. 1.

B. 3.

C. Vô số.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x \neq -4m$.

$$\text{Để hàm số xác định trên } (2; +\infty) \text{ thì } -4m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{4m-3}{(x+4m)^2}$$

Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi

$$y' < 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \frac{4m-3}{(x+4m)^2} < 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 4m-3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } -\frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{4} \text{ nên có 1 số nguyên } m = 0 \text{ thỏa mãn.}$$

Ví dụ 5. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $m \in [-1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -1)$.

C. $m \in (-1; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -1]$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{1+m}{(x+1)^2}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định của nó khi $y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow \frac{1+m}{(x+1)^2} > 0; \forall x \in D$

$\Leftrightarrow 1+m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Ví dụ 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \frac{m^2-9}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-9 < 0 \\ -m \leq 1 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 3$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

B - BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 49. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3(m^2+4m)x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 50. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Câu 51. Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m-1)x + 5$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $m \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

B. $m \in \left[1; \frac{7}{4}\right)$.

C. $m \in (-\infty; 1) \cup \left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[1; \frac{7}{4}\right]$.

Câu 52. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (-m^2 + 2m)x^3 + (m-2)x^2 + x + 10$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 53. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

- Câu 54.** Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = \frac{x+2}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(5; +\infty)$
- A. 7. B. 8. C. 9. D. 10.
- Câu 55.** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+16}{x+m}$ đồng biến trên $(0; 10)$.
- A. $m \in (-\infty; -10] \cup (4; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.
 C. $m \in (-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
- Câu 56.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$.
- A. 5. B. 3. C. 4. D. Vô số.
- Câu 57.** Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .
- A. 3. B. 4. C. 5. D. 1.
- Câu 58.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{mx-3}{2x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.
- A. $[-6; 6]$. B. $(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. C. $[-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. D. $(-\sqrt{6}; 6]$.

☑ -BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.C	5.B	6.D	7.A	8.D	9.A	10.C
11.C	12.C	13.D	14.D	15.B	16.C	17.A	18.B	19.B	20.C
21.B	22.C	23.B	24.B	25.D	26.A	27.B	28.A	29.C	30.A
31.B	32.D	33.D	34.A	35.A	36.D	37.D	38.D	39.B	40.A
41.C	42.C	43.A	44.D	45.D	46.B	47.C	48.B	49.B	50.C
51.D	52.C	53.B	54.A	55.A	56.C	57.A	58.B		

§2_CỰC TRỊ HÀM SỐ

DẠNG 1_TÌM CỰC TRỊ KHI BIẾT BBT, BẢNG DẤU CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$.

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Qua x_0 , $f'(x)$ đổi dấu từ $(+) \rightarrow (-)$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- ◆ Qua x_0 , $f'(x)$ đổi dấu từ $(-) \rightarrow (+)$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 4 5 $-\infty$

A. $y_{CD} = 5$.

B. .

C. $x_{CD} = 5$.

D. $x_{CT} = 1$.

Lời giải

Chọn A

Từ BBT suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, giá trị cực đại $y_{CD} = y(1) = 5$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 1 5 $-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 1$.

B. $x = 0$.

C. $x = 5$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

Qua bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1; x = 4$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại:

- A. $x = 5$. B. $x = 3$. C. $x = -2$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Qua bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		3		0		$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ 3 0 $+\infty$

- A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$. B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$.
 C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$. D. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				1		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $+\infty$ -3 1 $-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = -3$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $+\infty$ -2 2 $-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 5$. B. $x = 3$. C. $x = -2$. D. $x = 2$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $+\infty$ 1 5 $-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 5. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Giá trị cực tiểu của hàm số là

- A. $x = 3$. B. $x = 1$.
C. $y = -2$. D. $y = 2$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$			2		-2		$+\infty$
		$-\infty$					

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

- A. $x = 3$. B. $(1; 3)$.
C. $(2; -2)$. D. $x = 2$.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			3		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 0.

x	$-\infty$	2	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$+$	
y	-2	$+\infty$	$-\infty$	-2

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu

- A. 1. B. 3.
C. 2. D. 0.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		3		$+\infty$	

Phase line diagram showing the flow of the system. The horizontal axis represents y and the vertical axis represents y' . The equilibrium points are at $y=3$ and $y=-2$. The flow is indicated by arrows: from $y=-\infty$ to $y=3$, from $y=3$ to $y=-2$, and from $y=-2$ to $y=+\infty$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như hình vẽ

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số có điểm cực đại là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

☒ DẠNG 2_TÌM CỰC TRỊ KHI BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $Y = F(X)$.

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Nếu đồ thị “đi lên” rồi “đi xuống” thì đây là điểm cực đại của đồ thị hàm số.
- ◆ Nếu đồ thị “đi xuống” rồi “đi lên” thì đây là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

A – VÍ DỤ MINH HỌA

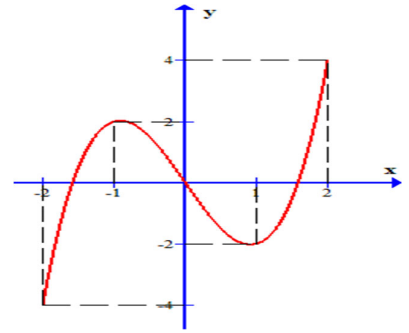
Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A.** $x = -2$. **B.** $x = -1$.
C. $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.



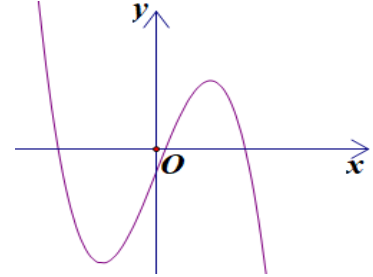
Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A.** 3. **B.** 0.
C. 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 2 cực trị.



Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

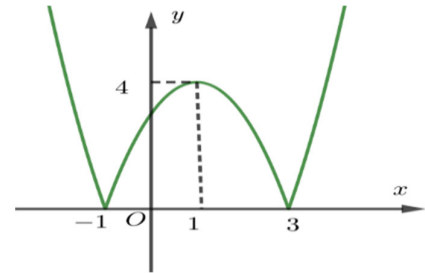
Đồ thị hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 1. **B.** 3.
C. 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 3 cực trị.

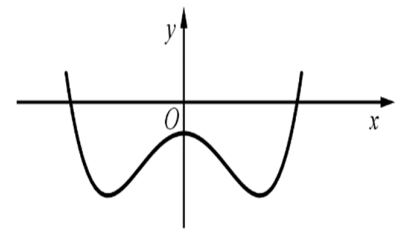


Ví dụ 4. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 3. **B.** 0.
C. 2. **D.** 1.

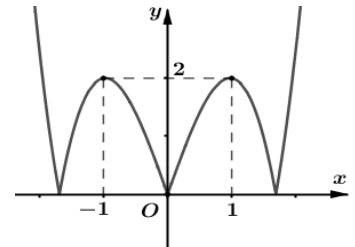
Chọn A

Qua đồ thị hàm số ta có hàm số có 3 cực trị

**B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.**

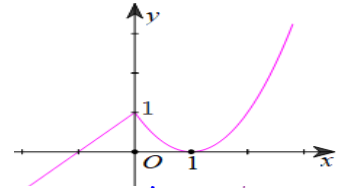
Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 4. **B.** 5.
C. 2. **D.** 3.



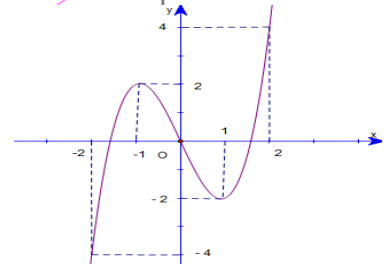
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số đó có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 3.
C. 1. D. 2.



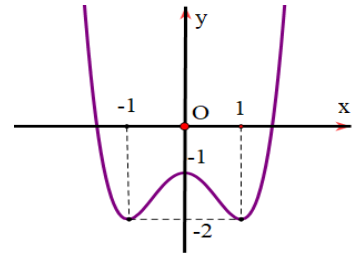
Câu 13. Hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = -1$. B. $x = -2$.
C. $x = 1$. D. $x = 2$.



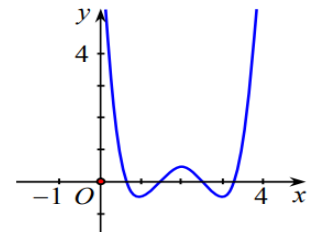
Câu 14. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ. Giá trị cực đại của hàm số bằng

- A. -1. B. -2.
C. 1. D. 0.



Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

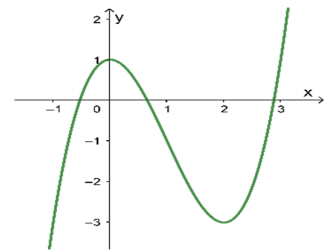
- A. 1. B. 2.
C. 4. D. 3.



Câu 16. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Điểm cực đại của hàm số đã cho bằng

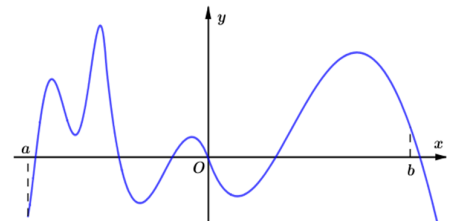
- A. -3. B. 0.
C. 2. D. 1.



Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

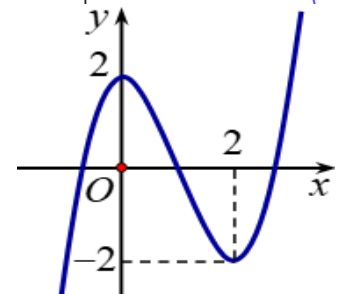
Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(a; b)$?

- A. 4. B. 2.
C. 7. D. 3.



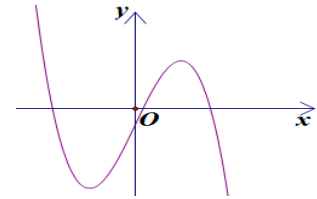
Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số có ba cực trị.
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.



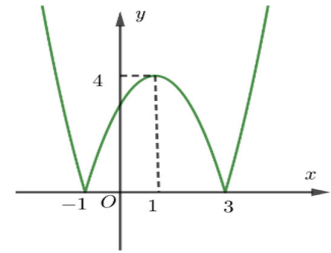
Câu 19. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 0.
C. 2. D. 1.



Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4.
C. 2. D. 1.



☒ DẠNG 3_TÌM CỰC TRỊ ĐỀ CHO HÀM SỐ $Y = F(X)$ TƯỜNG MINH

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Lập BBT
- ◆ Dựa vào BBT kết luận cực trị

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. 1. B. 4. C. 0. D. -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y(-1) = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						
	$-\infty$		4		0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -2$ (là nghiệm kép)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y							

Suy ra hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

Ví dụ 3. Hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ có bao nhiêu cực

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{-3}{(-x+2)^2} < 0, \forall x \neq 2$$

Suy ra hàm số không có cực trị.

Ví dụ 4. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị.

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}, \text{ các nghiệm này đều là nghiệm đơn.}$$

Vậy hàm số có 3 cực trị.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 21. Gọi x_1 và x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 2x$. Giá trị của $x_1^2 + x_2^2$ bằng?

A. 13.

B. 32.

C. 40.

D. 36.

Câu 22. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$ đạt cực trị tại x_1 và x_2 thì tích các giá trị cực trị bằng?

A. -302.

B. 25.

C. -207.

D. -82.

Câu 23. Giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 12x + 20$ là

A. $y_{CD} = -4$.

B. $y_{CD} = -2$.

C. $y_{CD} = 36$.

D. $y_{CD} = 2$.

Câu 24. Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2} - x$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 25. Hàm số $y = \frac{2x-5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 3)^2(x + 2)^{2021}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

- Câu 27.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)^{2020} (x - 5)(x + 2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 28.** Hàm số $y = x^4 + x^2 - 2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 29.** Hàm số $y = x^3 - 3x + 2020$ đạt cực tiểu tại
- A. $x = -1$. B. $x = 3$. C. $x = 1$. D. $x = 0$.
- Câu 30.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)^2 (x + 2)^3 (2x - 3)$. Tìm số điểm cực trị của $f(x)$
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

☒ DẠNG 4_TÌM CỰC TRỊ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $y = f'(x)$

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Xác định số giao điểm mà đồ thị $f'(x)$ cắt trục Ox .
- ◆ Kết luận số cực trị của hàm số $f(x)$ bằng số giao điểm với trục Ox .
- ◆ Chú ý nếu đồ thị tiếp xúc với trục Ox thì điểm ấy không là cực trị.

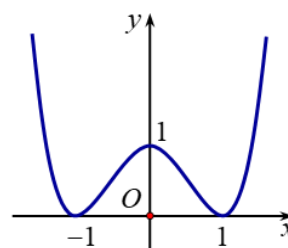
👉 A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 4. B. 0.
C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B



Dựa vào hình vẽ ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$, và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên trục

hoành.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 6.

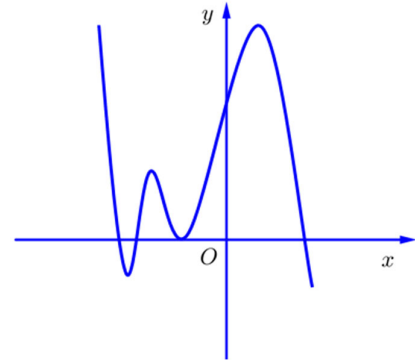
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình

$f'(x) = 0$ có 4 nghiệm nhưng giá trị $f'(x)$ chỉ đổi dấu 3 lần.

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.



Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Do đó hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 4.

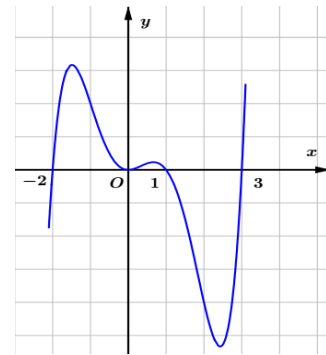
Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ đồ thị } y = f'(x) \text{ ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

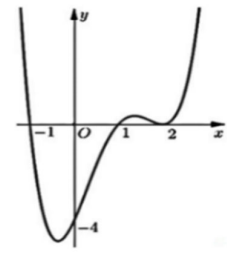
$$\text{Ta có } g'(x) = 2xf'(x^2) \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.



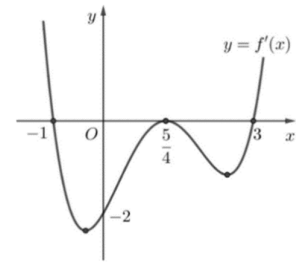
B - BÀI TẬP ÁP DỤNG.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $y = f(x)$ Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



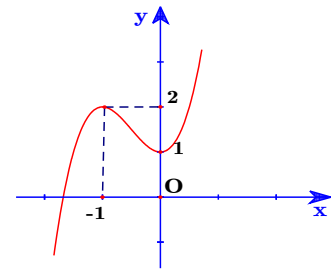
- A. 4. B. 0.
C. 2. D. 3.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là



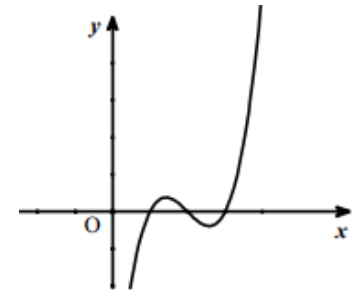
- A. 3. B. 4.
C. 2. D. 1.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



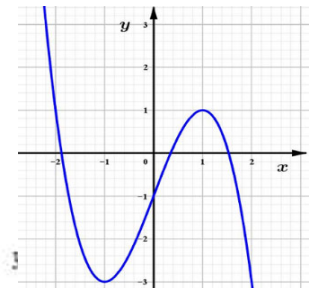
- A. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực tiểu và không có cực đại.
B. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.
C. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và không có cực tiểu.
D. Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ: Mệnh đề nào dưới đây đúng?



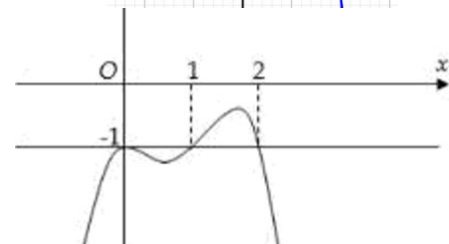
- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực đại.
B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu cực trị?



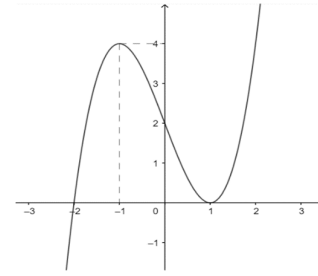
- A. 1. B. 0.
C. 3. D. 2.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)$. Biết đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Xác định điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + x$

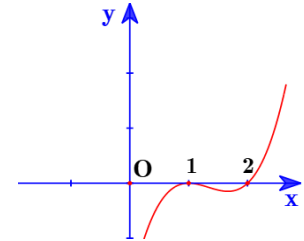


- A. Không có cực tiểu. B. $x = 0$.
C. $x = 1$. D. $x = 2$.

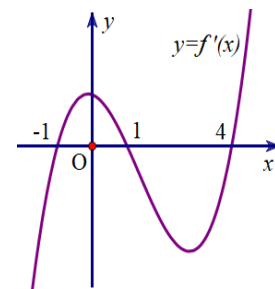
- Câu 38.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là
- A. 3. B. 4.
C. 1. D. 2.



- Câu 39.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực đại?
- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 0.



- Câu 40.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây: Cho bốn mệnh đề sau:
- Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.
 - Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
 - Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.
 - Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.
- Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



☒ DẠNG 5_TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI ĐIỂM CHO TRƯỚC.

PHƯƠNG PHÁP

- ♦ Tìm $f'(x); f''(x)$.
- ♦ Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$.
- ♦ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

- Ví dụ 1.** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- A. $m = 0$. B. $m = 3$. C. $m \in \emptyset$. D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m - 1$.

$y'' = 2x - 2m$.

$$\text{Hàm số đạt cực đại tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m + m^2 - m - 1 = 0 \\ 1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Ví dụ 2. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ khi

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ $D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + m$, $y'' = 6x - 6$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Với $m = 0$ ta có $y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 41. Hàm số $y = 2x^3 - (4 - 2m)x^2 + (m - 5)x - 4$ đạt cực đại tại $x = 0$ thì giá trị của m là?

A. -5 .

B. 5 .

C. -2 .

D. 13 .

Câu 42. Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi

A. $m = 3$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = -3$.

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$.

B. $m = -4$.

C. $m = 1$.

D. $m > -\frac{1}{3}$.

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 4x^3 + mx^2 - 4x + 3$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 2$.

B. $m = 4$.

C. $m = 6$.

D. $m = 1$.

Câu 45. Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ thì tham số thực m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $m \in (3; 5)$.

B. $m \in (-3; -1)$.

C. $m \in (1; 3)$.

D. $m \in (-1; 1)$.

- Câu 46.** Tìm giá trị thực của m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 4)x$ đạt cực đại tại $x = 1$?
- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = -1$. D. $m = -3$.
- Câu 47.** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- A. $m = 4$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = -4$.
- Câu 48.** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.
- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = -7$. D. $m = 5$.
- Câu 49.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2x + 1$ nhận điểm $x = 1$ làm điểm cực tiểu.
- A. $\nexists m$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. Vô số m . D. $m = \frac{5}{6}$.
- Câu 50.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 + (m - 1)x^2 + m^2$ đạt cực tiểu tại $x = 0$
- A. $m = 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \leq 1$.

☒ DẠNG 6_TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ BẬC BA CÓ CỰC TRỊ THỎA ĐIỀU KIỆN.

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Tính $f'(x)$.
- ◆ Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Biện luận m để thỏa điều kiện.

A – VÍ DỤ MINH HỌA.

Ví dụ 1. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 2020$ có cực trị.

- A. $m \in (-\infty; 1]$. B. $m \in (-\infty; 1)$.
- C. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$. D. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 + 2x + m$.

Hàm bậc ba có cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Cách hỏi hàm bậc 3 có cực trị hoặc có hai điểm cực trị, đều như nhau.

Có thể ta dùng công thức: $b^2 - 3ac$.

Có cực trị; hai cực trị: $b^2 - 3ac > 0$.

Không có cực trị $b^2 - 3ac \leq 0$.

Với a, b, c là hệ số của y .

Ví dụ 2. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 2017$ có cực trị.

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$. B. $m \in (-\infty - 2) \cup (2; +\infty)$.
- C. $m \in (-2; 2)$. D. $m \in [-2; 2]$.

Lời giải

Chọn B

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 5 \Rightarrow y' = x^2 - 2mx + 4$$

Điều kiện cần và đủ của để hàm số có hai điểm cực trị là

$$\Delta' > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$$

Hay $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Ví dụ 3. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

A. $y(-1) = 7$.

B. $y(-1) = 11$.

C. $y(-1) = -11$.

D. $y(-1) = -35$.

Lời giải**Chọn D**

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Theo đề bài ta có hệ

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -7 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - (a + b + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12 \Rightarrow y(-1) = -35.$$

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 51. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m^2 - 6)x$. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có cực trị.

A. 5.

B. Vô số.

C. 4.

D. 6.

Câu 52. Điều kiện cần và đủ của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 4x + 5$ có hai điểm cực trị là.

A. $m \in \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$.

B. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-2; 2)$.

D. $m \in [-2; 2]$.

Câu 53. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1$ không có cực trị là.

A. $m < 1$.

B. $m > 1$.

C. $m \leq 1$.

D. $m \geq 1$.

Câu 54. Tìm các số thực m để hàm số $y = (m - 2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực trị.

A. $\begin{cases} m \neq 2 \\ -3 < m < 1 \end{cases}$.

B. $-3 < m < 1$.

C. $\begin{cases} m < -3 \\ 1 < m \end{cases}$.

D. $-2 < m < 1$.

Câu 55. Điều kiện cần và đủ của tham số m để hàm số $y = x^3 - x^2 + mx - 5$ có cực trị là

A. $m > \frac{1}{3}$.

B. $m < \frac{1}{3}$.

C. $m \leq \frac{1}{3}$.

D. $m \geq \frac{1}{3}$.

- Câu 56.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx - 1$ không có cực trị
A. $m > 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m \leq 3$.
- Câu 57.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x + m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu
A. $m \in \{-2; 2\}$. **B.** $m < -2$ hoặc $m > 2$.
C. $-2 < m < 2$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 58.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị
A. $m \in [-6; 0)$. **B.** $m \in [0; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$. **D.** $m \in [-6; 0]$.
- Câu 59.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính tổng $S = a + b$
A. $S = 34$. **B.** $S = -14$. **C.** $S = 14$. **D.** $S = -20$.
- Câu 60.** Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là
A. $m = -3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = 3$.

☒ DẠNG 7_TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA ĐIỀU KIỆN

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Tính $f'(x)$.
- ◆ Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Biện luận m để thỏa điều kiện.
- † Hoặc xét hệ số $a; b$.
- ◆ Hàm trùng phương có:
 - 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b < 0$.
 - 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow a.b \geq 0$.
- ◆ Từ đó ta có thêm:
 - Có cực đại không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.
 - Có cực tiểu không có cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA

- Ví dụ 1.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^4 - 2(2m+1)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?
A. 20. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4(2m+1)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(2m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \end{cases}$$

Để hàm số có ba điểm cực trị thì $2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Vậy các giá trị nguyên của m trên miền $[-10; 10]$ là $m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Ví dụ 2. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có 3 điểm cực trị.

A. 6.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow 2(m^2 - m - 6) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3$.

Do m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 - 3 + m$ có đúng một điểm cực trị.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m > 1$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Chọn B

$ab \geq 0 \Leftrightarrow -2(m-1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

B – BÀI TẬP RÈN LUYỆN.

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ chỉ có một cực trị.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 0$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Câu 62. Tập hợp các số thực m thỏa mãn hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$ có đúng một điểm cực trị là

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-\infty; 0]$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $[0; +\infty)$.

Câu 63. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 - 10$ có ba điểm cực trị.

A. $m = 0$.

B. $m \neq 0$.

C. $m > 0$.

D. $m < 0$.

Câu 64. Có bao nhiêu số nguyên m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + (6-m)x^2 + m$ có đúng 1 cực trị.

A. 5.

B. 1.

C. 6.

D. 0.

Câu 65. Hàm số $y = x^4 - mx^2 + 1$ có ba cực trị khi và chỉ khi

A. $m < 0$.

B. $m > 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq 0$.

Câu 66. Hàm số $y = x^4 + mx^2 - m - 5$ (m là tham số) có 3 điểm cực trị khi các giá trị của m là

A. $4 < m < 5$.

B. $m < 0$.

C. $m > 8$.

D. $m = 1$.

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + mx^2 + m - 2$ chỉ có một điểm cực đại và không có điểm cực tiểu

A. $-\frac{3}{2} < m \leq 0$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $0 \leq m < 1$.

D. $-1 < m < \frac{1}{2}$.

Câu 68. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{2}x^4 - 2mx^2 + \frac{7}{3}$ có cực tiểu mà không có cực đại

- A.** $m \geq 0$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m \leq 0$.

Câu 69. Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có cực tiểu mà không có cực đại.

- A.** $m = -1$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m \geq 0$.

Câu 70. Xác định các hệ số a, b, c của đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ biết $A(1;4), B(0;3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số?

- A.** $a = 1; b = 0; c = 3$. **B.** $a = -\frac{1}{4}; b = 3; c = -3$.
C. $a = 1; b = 3; c = -3$. **D.** $a = -1; b = 2; c = 3$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.B	4.A	5.C	6.B	7.B	8.D	9.A	10.B
11.B	12.C	13.B	14.B	15.D	16.A	17.B	18.A	19.C	20.A
21.B	22.C	23.C	24.B	25.D	26.B	27.D	28.D	29.C	30. B
31.A	32.B	33.C	34.A	35.B	36.C	37.C	38.C	39.D	40. C
41.B	42.B	43.C	44.C	45.D	46.A	47.A	48.D	49.D	50.B
51.A	52.B	53.D	54.A	55.B	56.B	57.C	58.D	59.C	60.A
61.D	62.B	63.D	64.C	65.B	66.B	67.C	68.D	69.C	70.D

§3_GIÁ TRỊ LỚN NHẤT-NHỎ NHẤT

☒ DẠNG 1 _ TÌM GTLN-NN KHI BIẾT CHO ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$

PHƯƠNG PHÁP

◆ Quan sát giá trị điểm cao nhất và giá trị điểm thấp nhất của đồ thị hàm số.

A - VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A.** 1. **B.** 4.
C. 5. **D.** 0

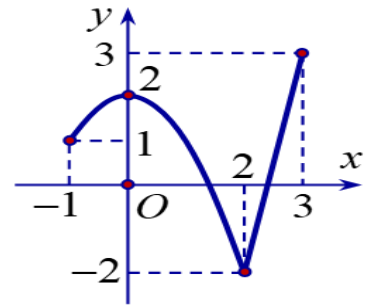
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$M = \max_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 3 \text{ v\`a } m = \min_{[-1;3]} f(x) = f(2) = -2$$

Vậy $M - m = 5$.



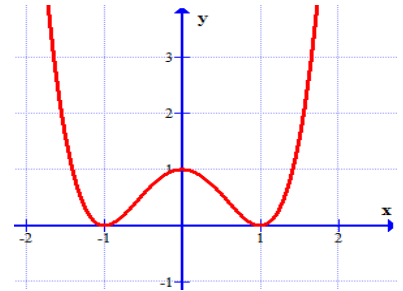
Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

- A.** 0. **B.** 1.
C. 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $M = 1, m = 0$ nên $M - m = 1$.



Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của

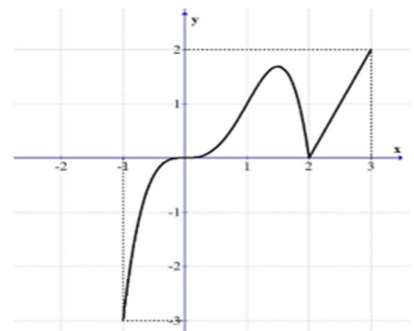
 $M^2 + m^2$ bằng

- A.** 15. **B.** 11.
C. 4. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

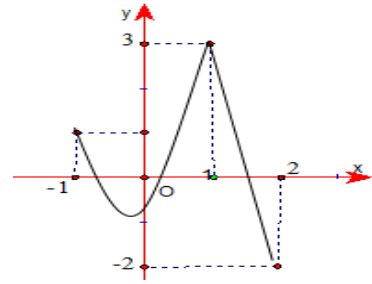
Từ đồ thị ta thấy $M = 2, m = -3$ nên $M^2 + n^2 = 13$



B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

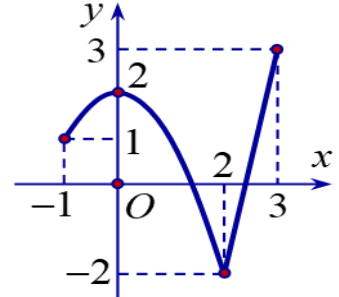
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Ta có $2M + m$ bằng

- A. 4. B. 0.
C. 3. D. 5.



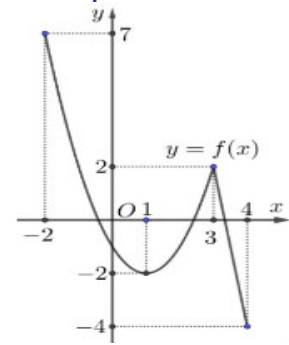
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $2M + m$ bằng

- A. 1. B. 4.
C. 5. D. 0.



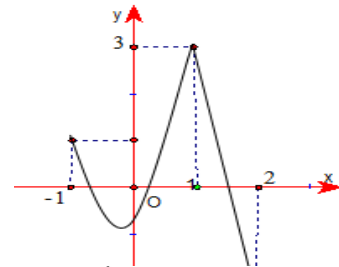
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 4]$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

- A. 8. B. 20.
C. 53. D. 65.



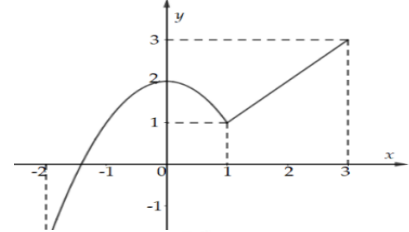
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Ta có $M + m$ bằng

- A. 1. B. 4.
C. 2. D. 0.



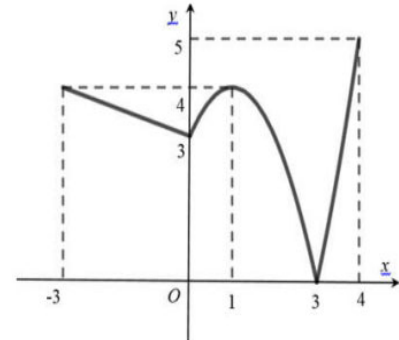
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x), x \in [-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị $M + m$ là

- A. 6. B. 1.
C. 5. D. 3.



Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 4]$. Tính $M + m$.

- A. 5. B. 8.
C. 7. D. 1.



Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 khi $x = 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+		-	
y	$+\infty$		4		5		$-\infty$

A. $y_{CD} = 5$.

B. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$.

C. $y_{CT} = 0$.

D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Lời giải

Chọn A

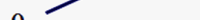
Dựa vào bảng biến thiên

+ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ ($y_{CT} = 4$).

+ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ ($y_{CD} = 5$).

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	+	0	-	0	+
y					

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$.

B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$.

C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$.

D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = -2$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3		-1		0		1		2
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	-2		3		0		2		1

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	+	0	-	0	+
y	0	2	-2	$2\sqrt{5}$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0$. B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2$. C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$. D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 1$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	3	0		$+\infty$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng:

- A. 1. B. 3. C. -1. D. 0.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$		3		2	
	-2		0		1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 4$. B. $\max_{[-2; 3]} f(x) = 4$. C. $\min_{\mathbb{R}} f(x) = -2$. D. $\min_{[1; 3]} f(x) = -1$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M - m$.

x	-3	0	1	2
$f(x)$		2		1
	-4		0	

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên là

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
		+	0	+	0	-	0	+	
					$\frac{9}{20}$		$-\frac{3}{5}$		
									$+\infty$

$-\infty$ $+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$.

B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$ và giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{3}{5}$.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{20}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{3}{5}$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên là

x	$+\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0		+	0
y					

1 3 $-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1.

B. Hàm số có giá trị nhỏ nhất 3.

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x = 1$.

D. Tổng của giá trị nhỏ nhất và nhỏ nhất bằng 4.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	0	$-1/2$	$1/2$	0	

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$ trên R . Tính $M - m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. -2 .

C. 1.

D. 0.

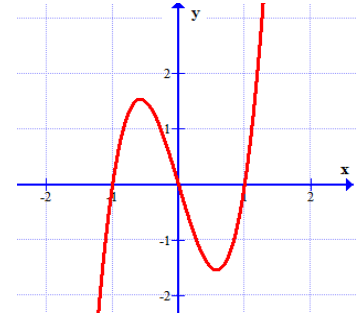
☒ DẠNG 3 _ TÌM GTLN-NN KHI BIẾT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f'(x)$

PHƯƠNG PHÁP

◆ Dựa vào đồ thị của $f'(x)$ để suy ra dấu của đạo hàm, từ đó lập bảng biến thiên của hàm $f(x)$.

A - VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0; 2]$ tại x bằng bao nhiêu?



A. $x = \frac{3}{2}$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

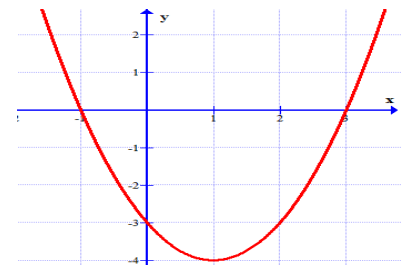
Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				0				$+\infty$

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[0; 2]$ tại $x = 1$.

Ví dụ 2. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[-1; 4]$ tại x bằng bao nhiêu?



A. $x = 3$.

B. $x = 0$.

C. $x = 4$.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

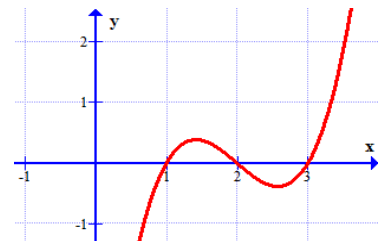
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	-1		3		4
y'	0	-	0	+	
y					

BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $[-1; 4]$ tại $x = 3$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại x_0 . Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2020$ bằng bao nhiêu?



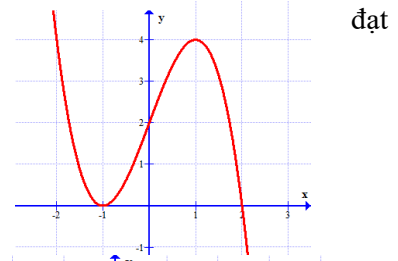
A. 2020.

B. 2022.

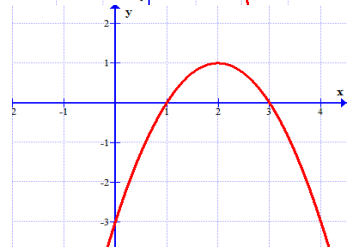
C. 2018.

D. 2024.

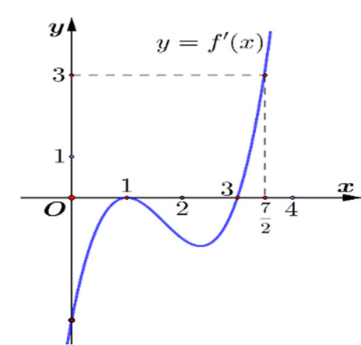
- Câu 22.** Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 2]$ tại x bằng bao nhiêu?
- A. $x = 2$. B. $x = 0$.
C. $x = -2$. D. $x = 1$.



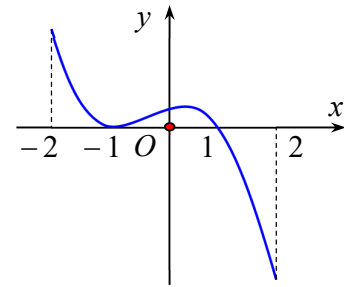
- Câu 23.** Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-2; 2]$ tại x bằng bao nhiêu?
- A. $x = 3$. B. $x = 0$.
C. $x = 2$. D. $x = 1$.



- Câu 24.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau: Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?
- A. $x = 0$. B. $x = \frac{7}{2}$.
C. $x = 3$. D. $x = 1$.



- Câu 25.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 2]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị x_0 để hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $[-2; 2]$.
- A. $x = 2$. B. $x = -1$.
C. $x = -2$. D. $x = 1$.



☒ DẠNG 4 _ TÌM GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN $[A; B]$

PHƯƠNG PHÁP: Dùng quy tắc tìm GTLN-GTNN

♦ Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_m$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

♦ Tính $f(x_1); f(x_2); f(x_3); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$

♦ So sánh các giá trị tìm được ở bước 2. Số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của f trên đoạn $[a; b]$; số nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là GTNN của f trên đoạn $[a; b]$.

• Đặc biệt:

• Nếu $f(x)$ **đồng biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$

• Nếu $f(x)$ **nghịch biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$

A – VÍ DỤ MINH HỌA:**Ví dụ 1.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng**A.** 0.**B.** -16.**C.** 20.**D.** 4.**Lời giải****Chọn B**

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$f(-3) = -16; f(-1) = 4; f(1) = 0; f(3) = 20.$$

$$\min_{[-3; 3]} f(x) = -16$$

Ví dụ 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng**A.** -2.**B.** 18.**C.** 2.**D.** -18.**Lời giải****Chọn B**

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-3; 3] \\ x = -1 \in [-3; 3] \end{cases}$$

$$f(-3) = -18; f(-1) = 2; f(1) = -2; f(3) = 18.$$

$$\max_{[-3; 3]} f(x) = 18$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.**A.** $M = 5$.**B.** $M = -5$.**C.** $M = \frac{1}{3}$.**D.** $M = -\frac{1}{3}$.**Lời giải****Chọn C**Hàm số đã cho xác định trên $[0; 2]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0, \forall x \in [0; 2].$$

$$y(0) = \frac{1}{3}, y(2) = -5$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là } M = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là**A.** $\min_{[2; 4]} y = 6$.**B.** $\min_{[2; 4]} y = \frac{13}{2}$.**C.** $\min_{[2; 4]} y = \frac{25}{4}$.**D.** $\min_{[2; 4]} y = -6$.**Lời giải****Chọn A**

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

$$\begin{cases} y' = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

$$f(2) = \frac{13}{2}, f(3) = 6, f(4) = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Vậy } \min_{[2;4]} y = f(3) = 6.$$

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 26. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. 6. B. 0. C. -2. D. 2.

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$.

- A. $\max_{[1;3]} f(x) = -7$. B. $\max_{[1;3]} f(x) = -4$.
C. $\max_{[1;3]} f(x) = -2$. D. $\max_{[1;3]} f(x) = \frac{67}{27}$.

Câu 28. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ lần lượt tại hai điểm x_1 và x_2 . Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 29. Cho hàm số $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4. B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.
C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4$. D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 4.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 4]$. Tính $M + m$.

- A. $M + m = 17$. B. $M + m = \frac{16}{3}$. C. $M + m = \frac{13}{3}$. D. $M + m = 5$.

Câu 31. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng

- A. 1. B. 50. C. 5. D. 122.

Câu 32. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+5}{x-7}$ trên đoạn $[8; 12]$ là

- A. 15. B. $\frac{17}{5}$. C. 13. D. $\frac{13}{2}$.

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 34. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ trên $[0; 2]$ bằng

- A. 2. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{10}{3}$. D. 3.

- Câu 35.** Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+9}{x+3}$ trên $[0; 3]$. Khi đó $M + m$ bằng
- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{15}{2}$.

☒ DẠNG 5 _ TÌM GTLN-GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG (A; B)

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ cho trước
- Từ bảng biến thiên, tùy theo sự thay đổi giá trị của hàm số suy ra kết quả cần tìm

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

- Ví dụ 1.** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \frac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4; -2)$.

- A. $\min_{[-4; 2)} y = 4$. B. $\min_{[-4; 2)} y = 7$. C. $\min_{[-4; 2)} y = 5$. D. $\min_{[-4; 2)} y = \frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -1 + \frac{1}{(x+2)^2}$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-4		-3		-2
y'		-	0	+	
y	$\frac{15}{2}$		7		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[-4; 2)} y = 7$.

- Ví dụ 2.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- A. $\min_{(1; +\infty)} y = 3$. B. $\min_{(1; +\infty)} y = -1$. C. $\min_{(1; +\infty)} y = 5$. D. $\min_{(1; +\infty)} y = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$

x	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$		$+\infty$

3

Từ đó $\min_{(1;+\infty)} y = 3$.

Ví dụ 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{2}{x} - (1 + \sqrt{2})^2$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là

- A. Không tồn tại. B. -3 . C. $-1 + \sqrt{2}$. D. 0 .

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định và liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$y' = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y				$+\infty$	-3	$+\infty$

Vậy $\min_{(0;+\infty)} y = f(\sqrt{2}) = -3$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 36. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

- A. 2 . B. $\sqrt{2}$. C. 0 . D. 1 .

Câu 37. Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

- A. Có giá trị lớn nhất là $\max y = 1$. B. Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = -1$.
C. Có giá trị lớn nhất là $\max y = 3$. D. Có giá trị nhỏ nhất là $\min y = 3$.

Câu 38. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$

- A. $\max_D f(x) = 0$ không tồn tại $\min_D f(x)$. B. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.
C. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$. D. $\min_D f(x) = 0$ không tồn tại $\max_D f(x)$.

Câu 39. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Điểm cực đại của hàm số là $x = 0$. B. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(0; 1)$.

- C.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất. **D.** Hàm số không có giá trị lớn nhất.
- Câu 40.** Tìm x để hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1; +\infty)$.
A. $x = -2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 3$.
- Câu 41.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 2}$ là
A. 10. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.
- Câu 42.** Tìm x để hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(1; +\infty)$.
A. $x = -2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 3$.
- Câu 43.** Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$ trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$
A. $\max_D f(x) = 0$ không tồn tại $\min_D f(x)$. **B.** $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -\sqrt{5}$.
C. $\max_D f(x) = 0; \min_D f(x) = -1$. **D.** $\min_D f(x) = 0$ không tồn tại $\max_D f(x)$.
- Câu 44.** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Khi đó, tích mM bằng bao nhiêu?
A. $\frac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 1.
- Câu 45.** Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m . Tính giá trị biểu thức $P = M^2 + m^2$.
A. $P = \frac{1}{4}$. **B.** $P = \frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

☒ DẠNG 6 _ TÌM THAM SỐ M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT GTLN-GTNN BẰNG K

PHƯƠNG PHÁP: Dùng quy tắc tìm GTLN-GTNN

◆ Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_m$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

◆ Tính $f(x_1); f(x_2); f(x_3); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$

◆ So sánh các giá trị tìm được ở bước 2. số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của f trên đoạn $[a; b]$; số nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là GTNN của f trên đoạn $[a; b]$.

• Đặc biệt:

• Nếu $f(x)$ **đồng biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$

• Nếu $f(x)$ **nghịch biến** trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$; $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + a$ (a là tham số) trên đoạn $[-1; 2]$.

A. $\min_{[-1;2]} y = 1 + a.$

B. $\min_{[-1;2]} y = a.$

C. $\min_{[-1;2]} y = 4 + a.$

D. $\min_{[-1;2]} y = 0.$

Lời giải**Chọn B**

Hàm số liên tục và xác định trên $[-1; 2]$.

Ta có $y' = 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$y(-1) = 1 + a.$

$y(0) = a.$

$y(2) = 4 + a.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng a đạt được khi $x = 0$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x+m-1}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 1

A. $m = 1.$

B. $m = -2.$

C. $m = 2.$

D. Không có giá trị m .

Lời giải**Chọn A**

Ta có $f'(x) = \frac{3-m}{(x+1)^2}$

Nếu $m < 3$: $f'(x) = \frac{3-m}{(x+1)^2} > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(1; 2) \Rightarrow \min_{[1;2]} f(x) = f(1) = 1.$

Vậy $\min_{[1;2]} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

Nếu $m > 3$: $f'(x) = \frac{3-m}{(x+1)^2} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$

$\Rightarrow \min_{[1;2]} f(x) = f(2) = 1.$

Vậy $\min_{[1;2]} f(x) = 1 \Leftrightarrow f(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{3+m}{3} = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (loại).

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 46. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0; 1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0.$

B. $2m_0 - 1 < 0.$

C. $6m_0 - m_0^2 < 0.$

D. $2m_0 + 1 < 0.$

Câu 47. Gọi A, B là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$. Tìm

tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{13}{2}.$

A. $m = 1; m = -2.$

B. $m = -2.$

C. $m = \pm 2.$

D. $m = -1; m = 2.$

- Câu 48.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 2, với m là tham số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m = -3$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.
- Câu 49.** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x}$ thỏa $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = 8$, với m là tham số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m > 4$. **B.** $0 < m \leq 2$. **C.** $2 < m \leq 4$. **D.** $m \leq 0$.
- Câu 50.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[0; 5]$ bằng 5 khi m là
A. 6. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 5.
- Câu 51.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$, với m là tham số. Giá trị lớn nhất của m để $\min_{[0;3]} f(x) = -2$ là
A. $m = 5$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 3$.
- Câu 52.** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m .
A. $m = -6$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = -5$.
- Câu 53.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{mx-1}{2x+m}$ trên đoạn $[3; 5]$ bằng 2 khi và chỉ khi:
A. $m = 7$. **B.** $m \in \{7; 13\}$. **C.** $m \in \emptyset$. **D.** $m = 13$.
- Câu 54.** Tìm m để hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + m$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2021.
A. $m = 2022$. **B.** $m = 2020$. **C.** $m = 2018$. **D.** $m = 2017$.
- Câu 55.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2}{x-1}$ trên $[2; 4]$ bằng 2.
A. $m = 0$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -4$.

☒ DẠNG 7 _ ỨNG DỤNG GTLN-GTNN VÀO PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PT CHỨA THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP

1. Tìm đk của tham số để phương trình $f(x, m) = 0$ có nghiệm $x \in K$?

- ◆ Chuyển trạng thái tương giao: $g(x) = h(m), x \in I$.
- ◆ Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên I .
- ◆ Ycbt $\Leftrightarrow x \in E$ (Miền giá trị của $g(x)$ trên I).

☞ **Đặc biệt:** Phương trình $g(x) = h(m)$ có nghiệm $x \in [a; b] \Leftrightarrow \min_{[a; b]} f(x) \leq h(m) \leq \max_{[a; b]} f(x)$

2. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình $f(x, m) \geq 0$ có nghiệm (nghiệm đúng với mọi) $x \in K$?

- ◆ Biến đổi bpt về dạng: $g(x) \geq h(m)$ (1), $(g(x) \leq h(m), g(x) > h(m), g(x) < h(m))$, $x \in I$.

- ◆ Bất pt (1) có nghiệm $x \in I \Leftrightarrow \max_I f(x) \geq h(m)$.
- ◆ Bất pt (1) nghiệm đúng với mọi $x \in I \Leftrightarrow \min_I f(x) \geq h(m)$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

- A. Không có m . B. $m \in \{4; 0\}$. C. $m \in \{-4; 0\}$. D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^3 - 3x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m$.

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2$:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y			0			$+\infty$
	$-\infty$			-4		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m = 0$ hoặc $m = -4$.

Vậy $m \in \{-4; 0\}$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3; 4]$?

- A. $\frac{-51}{4} \leq m \leq \frac{19}{4}$. B. $\frac{-51}{4} < m < \frac{19}{4}$. C. $-51 < m < 19$. D. $-51 \leq m \leq 19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 1 = 4m$.

Đặt $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $[-3; 4]$.

$$f'(x) = -3x^2 + 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f(-3) = 19, f(4) = -51, f(-1) = -1, f(1) = 3.$$

Suy ra $\max_{[-3; 4]} f(x) = 19$ khi $x = -3$. $\min_{[-3; 4]} f(x) = -51$ khi $x = 4$.

Phương trình $x^3 - 3x + 4m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong $[-3; 4]$ khi

$$\min_{[-3; 4]} f(x) \leq 4m \leq \max_{[-3; 4]} f(x) \Leftrightarrow \frac{-51}{4} \leq m \leq \frac{19}{4}.$$

Ví dụ 3. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = \frac{m}{2}$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 10.

B. 6.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $x + \sqrt{4-x^2} = \frac{m}{2}$ (*) điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 2$.

Xét hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-2; 2]$.

Có $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in [-2; 2]$$

Hàm số $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ liên tục trên $[-2; 2]$; có đạo hàm trên $(-2; 2)$.

$$f(-2) = -2; f(2) = 2; f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}. \text{ Suy ra } \min_{[-2; 2]} f(x) = -2; \max_{[-2; 2]} f(x) = 2\sqrt{2}.$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \leq \frac{m}{2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4\sqrt{2}$.

Mặt khác m nguyên âm nên $S = \{-4; -3; -2; -1\}$

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 56. Tìm m để phương trình $x^3 - 3x - m = 0$ có nghiệm $x \in [0; 2]$?

A. $m \in (-\infty; -2]$.B. $[-2; 2]$.C. $[2; +\infty)$.

D. Đáp án khác.

Câu 57. Tìm m để phương trình $-2x^3 + 3x^2 + 2m = 0$ có nghiệm $x \in [1; +\infty)$?

A. $m \geq -\frac{1}{2}$.B. $m \leq \frac{1}{2}$.C. $m \leq 1$.D. $m \geq -1$.

Câu 58. Biết $m \in [a; b]$ thì phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 0]$. Tính $T = b - a$?

A. 1.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Câu 59. Tìm m để bất phương trình $2x - 1 \geq m(x - 1)$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 0]$?

A. $m \leq 1$.B. $m \leq \frac{1}{2}$.C. $m \geq \frac{2}{3}$.D. $m \geq \frac{3}{2}$.

Câu 60. Tìm m để bất phương trình $x^2 - 5mx + 9 \geq 0$ có nghiệm $x \in [1; 9]$?

A. $m \leq 2$.B. $m \leq \frac{6}{5}$.C. $m \geq 2$.D. $m \geq \frac{6}{5}$.

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $x^3 + 5x + 7 \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-5; 0]$?

A. $m \geq 7$.B. $m \geq -143$.C. $m \leq -143$.D. $m \leq 7$.

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\frac{2x+1}{x-1} \geq m$ có nghiệm $[-2; 0]$?

- A. $m \leq 1$. B. $m \leq \frac{5}{3}$. C. $m \geq -1$. D. $m \geq -\frac{5}{3}$.

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^4 + 2x^2 - 1 = 2m$ có nghiệm $x \in [1; +\infty)$?

- A. $m \geq 1$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq 2$. D. Đáp án khác.

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $2x^4 - 4x^2 - 10 \geq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (-\infty; -1]$?

- A. $m \leq -12$. B. $m \leq 12$. C. $m \leq -8$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 3 = m$ có nghiệm?

- A. $m \geq 5$. B. $m \leq 5$. C. $m \leq 3 + \sqrt{5}$. D. $m \geq 0$.

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\sqrt{5 - 4x} + 1 \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 1]$?

- A. $m \geq 4$. B. $m \geq 2$. C. $m \leq 3$. D. $m \geq 1 + \sqrt{5}$.

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình $\sqrt{4 - x^2} + 2018 < m$ có nghiệm?

- A. $m > 2018$. B. $m > 2020$. C. $m < 2021$. D. $m < 2022$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.D	4.A	5.B	6.A	7.C	8.D	9.C	10.B
11.D	12.A	13.C	14.D	15.A	16.A	17.C	18.C	19.C	20.C
21.A	22.A	23.D	24.C	25.D	26.A	27.C	28.D	29.A	30.D
31.B	32.C	33.D	34.B	35.C	36.B	37.C	38.B	39.C	40.C
41.D	42.C	43.B	44.D	45.B	46.A	47.A	48.A	49.C	50.A
51.C	52.C	53.A	54.B	55.A	56.B	57.A	58.C	59.D	60.C
61.A	62.A	63.A	64.A	65.A	66.A	67.A			

§4_ ĐƯỜNG TIỆM CẬN

☒ DẠNG 1_TÌM TIỆM CẬN BẰNG ĐỊNH NGHĨA, BẢNG BIẾN THIÊN HOẶC ĐỒ THỊ.

PHƯƠNG PHÁP

1. Định nghĩa:

♦ Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn 1 trong các ĐK: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = y_0 \end{cases} \Rightarrow y = y_0$ được gọi là **TCN**.

♦ Hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn 1 trong các ĐK: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} y = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = x_0$ được gọi là **TCD**.

2. Dựa vào bảng biến thiên hay đồ thị suy ra tiệm cận:

- ♦ Nếu $x \rightarrow \pm\infty$ mà $y \rightarrow y_0$ (một số) thì $y = y_0$ là TCN.
- ♦ Nếu $x \rightarrow x_0$ (một số) mà $y \rightarrow \pm\infty$ thì $x = x_0$ là TCD.

A - BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Đồ thị hàm số nằm phía trên trục hoành.
- B. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng $y = 0$.
- C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là trục hoành.
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Lời giải

Chọn C

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ tức trục hoành là TCN.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$
y	1	$\nearrow 3$	$\nwarrow 2$	$\searrow -1$	$-\infty$

Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.
- C. Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.
- D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Lời giải

Chọn A

Khi $x \rightarrow -\infty \Rightarrow y \rightarrow 1$ nên $y = 1$ là TCN.

Khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow -1$ nên $y = -1$ là TCN.

Ví dụ 3. Cho đồ thị một hàm số có hình vẽ như hình dưới đây.

Hỏi đồ thị trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. Không có tiệm cận.

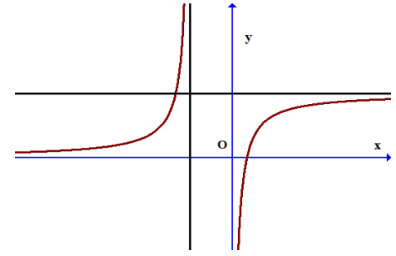
C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có 2 TCN là $y = 0$; $y = b$ và 2 TCD là $x = a$.



Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
y'				+		
y				$+\infty$	1	0

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$+\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$, suy ra đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$+\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$+\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$. Số tiệm cận ngang của (C) là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.

C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'			0	-
y		3	2	-1

Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.
 B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$.
 C. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=-1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bảng dưới đây

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$	-1		$+\infty$
	$-\infty$		1

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đúng 2 tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.
 B. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.
 C. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ có đúng 2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.
 D. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.
- Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
y'	$-$			$+$ 0 $-$	
y	$+\infty$			2	
	-1	$-\infty$			$-\infty$

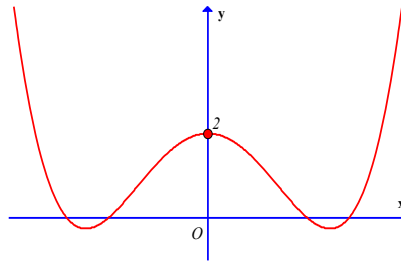
Hỏi đồ thị hàm số trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
y'	$-$	$ $	$+$	0	$+$	$ $	$-$
y	$+\infty$				2		

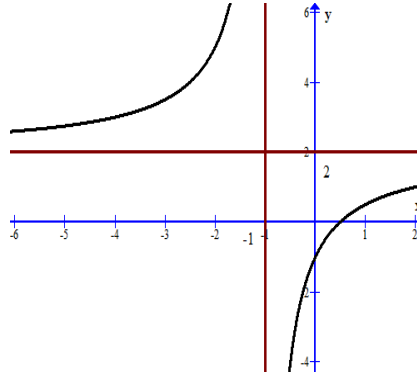
Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hàm số có hai điểm cực trị.
 B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
 C. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận.
 D. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$.
- Câu 7.** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $f(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



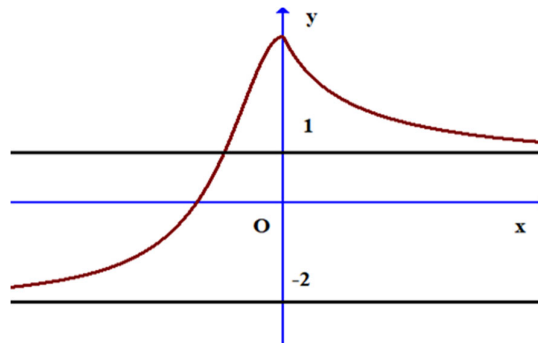
- A. 0. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 8. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Chọn khẳng định **sai**?



- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$. B. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
C. Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận. D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận ngang là?



- A. $y = 1$ và $y = -2$. B. $y = -1$ và $y = -2$.
C. $y = 1$ và $y = 2$. D. $y = 2$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$
$f(x)$	-5	1	-5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1

☒ DẠNG 2_TÌM SỐ TIỆM CẬN CỦA NHỮNG HÀM SỐ TUỜNG MINH THƯỜNG GẶP.**PHƯƠNG PHÁP:****1. Đồ thị hàm đa thức không có tiệm cận.****2. Hàm phân thức dạng** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad-bc \neq 0$)Đồ thị hàm số luôn có **1 TCN** là $y = \frac{a}{c}$ và **1 TCD** $x = -\frac{d}{c}$.**3. Tìm tiệm cận ngang của hàm phân thức** $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

- ♦ Nếu bậc tử bé hơn bậc mẫu có TCN là $y = 0$.
- ♦ Nếu bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu thì đồ thị có TCN.
- ♦ Nếu bậc của tử $>$ bậc của mẫu hoặc có tập xác định là 1 khoảng hữu hạn $(a;b)$ hoặc $[a;b]$ thì không có TCN.

4. Tìm tiệm cận đứng của hàm phân thức $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.♦ Hàm phân thức mà mẫu có nghiệm $x = x_0$ nhưng không là nghiệm của tử thì đồ thị có tiệm cận đứng $x = x_0$ (với đk hàm số xác định trên khoảng $K \setminus \{x_0\}$; $x_0 \in K$).

- ♦ Tìm nghiệm mẫu $g(x) = 0$.
- ♦ Mẫu $g(x) = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có **TCD**.
- ♦ Mẫu $g(x) = 0$ có nghiệm x_0 .

- Thay x_0 vào tử, nếu $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là **TCD**.- Thay x_0 vào tử, nếu $f(x_0) = 0$ (tức là x_0 là nghiệm của cả tử và mẫu thì ta tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (dùng máy tính Casio để tính giới hạn).♦ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là **TCD**.♦ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \pm\infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ **không là TCD**.**A - BÀI TẬP MINH HỌA:****Ví dụ 1.** Đồ thị hàm số $y = \frac{-3x+1}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là**A.** $x = -2$ và $y = -3$.**B.** $x = -2$ và $y = 1$.**C.** $x = -2$ và $y = 3$.**D.** $x = 2$ và $y = 1$.**Lời giải****Chọn A**

$$\text{TCD } x = \frac{-2}{1} = -2; \text{ TCN } y = \frac{-3}{1} = -3.$$

Ví dụ 2. Số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-3x-2}$ bằng

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-3x-2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là TCN.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x^2-3x-2} = -1; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-3x-2} = +\infty$$

Suy ra $x = 2$ là TCD.

Ví dụ 3. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng?

- A. $y = -\frac{1}{x}$. B. $y = \frac{1}{x^2+2x+1}$. C. $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$. D. $y = \frac{3x-1}{x^2-1}$.

Lời giải

Chọn C

Mẫu có nghiệm $x = -2$ nhưng nó không phải giá trị xác định của hàm số nên đồ thị hàm số không có TCD.

Ví dụ 4. Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right] = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right] = -\infty.$$

Do đó đường $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{4}.$$

Do đó đường $x = 0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng là đường $x = -1$

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 11. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+3}$ là

- A. $x = 2$. B. $x = -3$. C. $y = -1$. D. $y = -3$.

Câu 12. Đường thẳng $x = 3$, $y = 2$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

- A. $y = \frac{2x-3}{x+3}$. B. $y = \frac{x-3}{x+3}$. C. $y = \frac{3x-1}{x-3}$. D. $y = \frac{2x-3}{x-3}$.

Câu 13. Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là

A. $x = -2$ và $y = -3$.

B. $x = -2$ và $y = 1$.

C. $x = -2$ và $y = 3$.

D. $x = 2$ và $y = 1$.

Câu 14. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có cả tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. $y = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

B. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.

C. $y = x + 2018$.

D. $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

Câu 15. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{-x+3}$ có phương trình là

A. $y = 0$.

B. $y = -2$.

C. $x = 3$.

D. $x = -2$.

Câu 16. Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$.

A. $(2; 1)$.

B. $(-2; 2)$.

C. $(-2; -2)$.

D. $(-2; 1)$.

Câu 17. Đồ thị của hàm số nào sau đây không có đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. $y = \log_2 x$.

B. $y = \frac{3x-2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x^2 - 2x}{x-2}$.

D. $\frac{1}{x^2 + 1}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$.

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$.

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 19. Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 20. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 21. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Câu 22. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3}$.

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 23. Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}$ là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

- Câu 24.** Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-7}}{x^2+3x-4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 25.** Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{4-x^2}$ là
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 26.** Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:
A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.
- Câu 27.** Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 28.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 29.** Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}-1}{x^2-3x-2}$ là
A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 30.** Số các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ là
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

☒ DẠNG 3_TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ SỐ TIỆM CẬN THỎA ĐIỀU KIỆN.

PHƯƠNG PHÁP

◆ Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận, các tính chất về tiệm cận của hàm số thường gặp và các kiến thức liên quan để giải quyết bài toán.

◆ Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad-bc \neq 0)$ có tâm đối xứng là giao điểm của 2 tiệm cận.

A - BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $A(3;2)$.

- A.** $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

Chọn D

Vì $ad-bc = m^2+1 \neq 0$ nên có TCD $x = -m$.

$A(3;2) \in x = -m \Rightarrow m = -3$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2x+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.

A. $m > 1$.

B. $m < 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \leq 1$.

Lời giải

Chọn A

Đths có TCN $y = 0$.

Đths không có TCD $x^2 - 2x + m$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

B. $m < 0$.

C. $m = 0$.

D. $m > 0$

Lời giải

Chọn D

Xét các trường hợp sau:

Với $m = 0$: hàm số trở thành $y = x + 1$ nên không có tiệm cận ngang.

Với $m < 0$:

$$\text{hàm số } y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \frac{x+1}{\sqrt{1-|m|x^2}} \text{ có tập xác định là } D = \left(-\frac{1}{\sqrt{|m|}}; \frac{1}{\sqrt{|m|}} \right)$$

suy ra không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ hay hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m > 0$:

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Vậy hàm số có hai tiệm cận ngang là: $y = \frac{1}{\sqrt{m}}; y = -\frac{1}{\sqrt{m}}$ khi $m > 0$.

Ví dụ 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2-8x+2}}$ có đúng bốn đường tiệm cận?

A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $mx^2 - 8x + 2 > 0$.

Nhận thấy đồ thị hàm số đã cho có đúng bốn đường tiệm cận khi đồ thị có đúng hai đường tiệm cận ngang và hai đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận đứng khi $mx^2 - 8x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 16 - 2m > 0 \\ m - 8 + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0; m \neq 6 \\ m < 8 \end{cases}.$$

$y = \frac{x-1}{|x|\sqrt{m-\frac{8}{x}+\frac{2}{x^2}}}$ nên đồ thị có đúng hai đường tiệm cận ngang khi $m > 0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có đúng bốn đường tiệm cận khi đồ thị có đúng hai đường tiệm cận ngang và hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 8 \\ m \neq 6 \end{cases}$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ có đồ thị (C) . Tọa độ giao điểm I của hai đường tiệm cận của (C) là

- A. $I(-2; 3)$. B. $I(1; 3)$. C. $I(3; -2)$. D. $I(3; 1)$.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-2}$ có đồ thị (C) . Tọa độ tâm đối xứng I của (C) là

- A. $I(2; 2)$. B. $I(-1; 2)$. C. $I(2; -1)$. D. $I(1; 2)$.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-9}{x+m}$ có tiệm cận đứng.

- A. $m \neq -3$. B. $m \neq 3$. C. $m = 3$. D. $m = -3$.

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-8}{x+2}$ có tiệm cận đứng.

- A. $m = 4$. B. $m \neq -4$. C. $m = -4$. D. $m \neq 4$.

Câu 35. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{4-2x}$ nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang.

- A. $m = 4$. B. $m \neq -4$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Câu 36. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{m-2x}$ nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng.

- A. $m = 3$. B. $m = -3$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung.

- A. $m < 0$. B. $m > 0$ và $m \neq \frac{5}{4}$. C. $m > 0$. D. $m > 0$ và $m \neq -\frac{5}{4}$.

Câu 38. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $A(2; -3)$.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = -3$.

- Câu 39.** Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \frac{(1-m)x-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận ngang đi qua điểm $A(2;-1)$.
A. $m = -4$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -3$.
- Câu 40.** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-m}$ có đường tiệm cận đứng cắt đường thẳng $d: y = -x+1$ tại điểm $A(1;0)$
A. $m = -4$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 2$.
- Câu 41.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Hiệu $a-2b$ có giá trị là
A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 5.
- Câu 42.** Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
A. $2x+y=0$. **B.** $y=2x$. **C.** $x-2y=0$. **D.** $x+2y=0$.
- Câu 43.** Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x+2}{x-n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Tính giá trị biểu thức $P = m+n$.
A. $P = 2$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = 3$.
- Câu 44.** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$, (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.
A. -6. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.
- Câu 45.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-4x+m}$ có tiệm cận ngang mà không có tiệm cận đứng.
A. $m > 4$. **B.** $m < 4$. **C.** $m \geq 4$. **D.** $m \leq 4$.
- Câu 46.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có đường tiệm cận đứng.
A. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **B.** Không có m thỏa mãn.
C. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.
- Câu 47.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+m}$ có hai tiệm cận đứng
A. $m < 0; m \neq -1$. **B.** $m < 0$. **C.** $m > 0; m \neq 1$. **D.** $m < -1$.
- Câu 48.** Tính tổng S các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có 3 tiệm cận.
A. $S = 6$. **B.** $S = 19$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 15$.

Câu 49. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = \pm 1$.

Câu 50. Đồ thị hàm số $y = x + 3 + \sqrt{x^2 + x + 1}$

A. Có tiệm cận đứng $x = -3$.

B. Có tiệm cận ngang $y = \frac{5}{2}$.

C. Có tiệm cận ngang $y = -3$.

D. Không có tiệm cận.

BẢNG ĐÁP ÁN

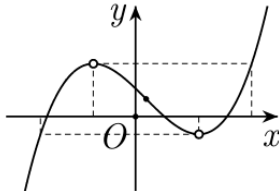
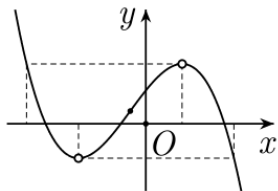
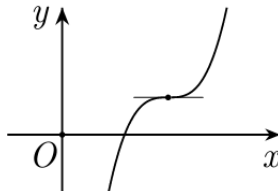
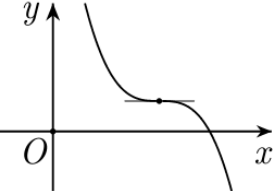
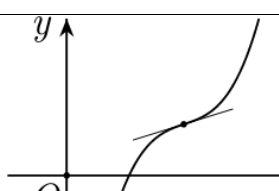
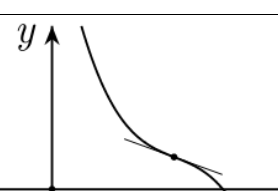
1.C	2.B	3.D	4.C	5.B	6.B	7.A	8.C	9.A	10.B
11.B	12.D	13.A	14.B	15.A	16.D	17.C	18.A	19.D	20.B
21.D	22.D	23.C	24.C	25.A	26.A	27.C	28.C	29.D	30.B
31.D	32.A	33.A	34.B	35.C	36.D	37.B	38.A	39.C	40.D
41.C	42.C	43.C	44.B	45.A	46.C	47.A	48.C	49.D	50.B

§5_ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC BA

☒ DẠNG 1_NHẬN DẠNG HÀM SỐ BẬC BA KHI CHO ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

PHƯƠNG PHÁP: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

- ◆ Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$
- ◆ Chú ý điểm cực trị: $ac < 0$: có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung Oy .
- ◆ Điểm uốn nằm bên phải trục Oy khi $ab < 0$ và bên trái trục Oy khi $ab > 0$.
- ◆ Các giao điểm đặc biệt với trục Ox, Oy .

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)		$a > 0$	$a < 0$
❶	$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
❷	$y' = 0$ có nghiệm kép		
❸	$y' = 0$ vô nghiệm		

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = -x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = x^4 - x^2 + 3$.
C. $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = x^2 - 3x + 1$.

Lời giải

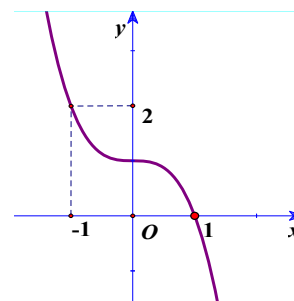
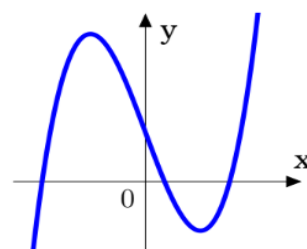
Chọn C

Đồ thị hàm số đã cho là của hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên phương án đúng là hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

Ví dụ 2. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A.** $y = -x^3 + 1$. **B.** $y = -4x^3 + 1$.
C. $y = 3x^2 + 1$. **D.** $y = -2x^3 + x^2$.

Lời giải



Chọn A

Ta thấy đồ thị chứa $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;2)$ nên thay toạ độ các điểm này vào đáp án có kết luận đồ thị là của hàm số $y = -x^3 + 1$.

Ví dụ 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x$.

B. $y = x^4 - x^2 + 1$.

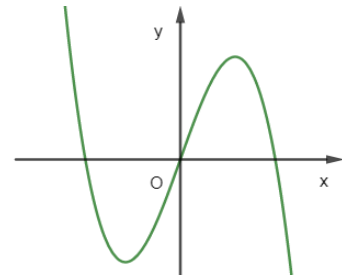
C. $y = -x^3 + 3x - 1$.

D. $y = x^3 - 3x$.

Lời giải**Chọn A**

Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra hàm bậc ba có hệ số $a < 0$. Loại đáp án B và D.

Vì đồ thị đi qua gốc tọa độ nên loại đáp án C.

**B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:**

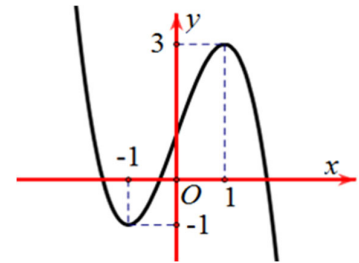
Câu 1. Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 - 3x + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.



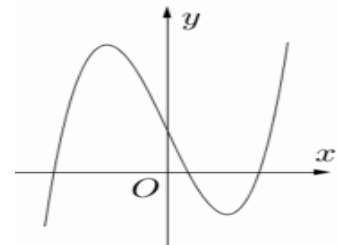
Câu 2. Đường cong trong hình bên là hình dạng đồ thị của hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = x^4 - x^2 + 1$.

C. $y = -x^2 + x - 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.



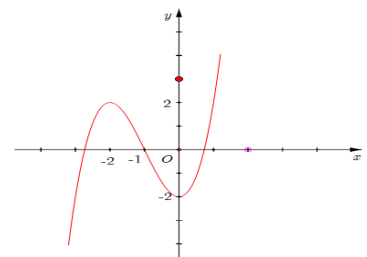
Câu 3. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$.



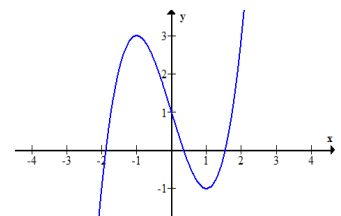
Câu 4. Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

B. $y = x^3 - 3x - 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.



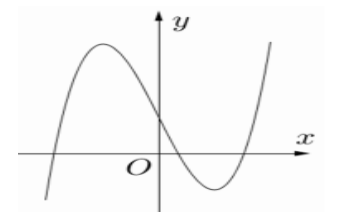
Câu 5. Đường cong trong hình bên là hình dạng đồ thị của hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = x^4 - x^2 + 1$.

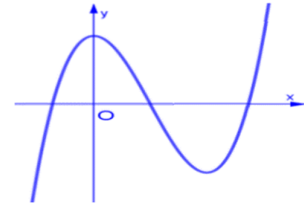
C. $y = -x^2 + x - 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.



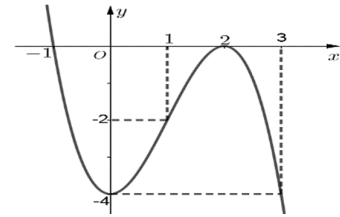
Câu 6. Đường cong ở hình vẽ bên dưới là của đồ thị hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 3x - 4$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
 C. $y = -x^3 - 4$. D. $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.



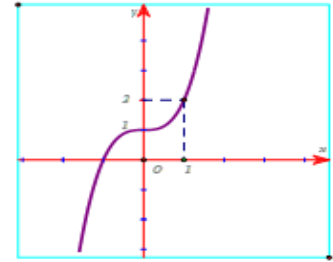
Câu 7. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 4$. B. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.
 C. $y = x^3 - 3x^2 - 4$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.



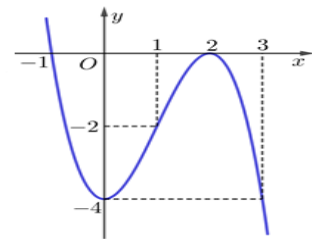
Câu 8. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số được cho bởi các phương án A, B, C, D dưới đây?

- A. $y = 2x^3 + 1$. B. $y = x^3 + x + 1$.
 C. $y = x^3 + 1$. D. $y = -x^3 + 2x + 1$.

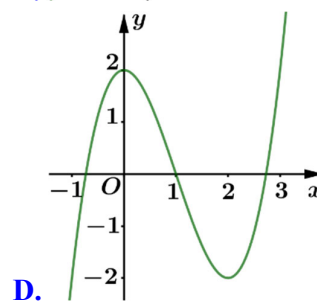
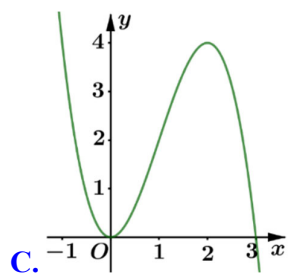
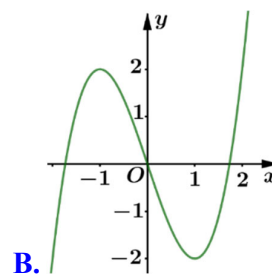
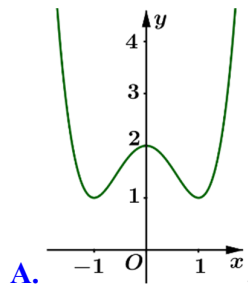


Câu 9. Đồ thị như hình vẽ là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 4$. B. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.
 C. $y = x^3 - 3x^2 - 4$. D. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.

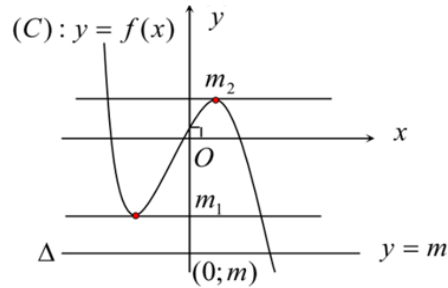


Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Đồ thị của hàm số là hình nào dưới đây?



☒ DẠNG 2_BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ.**PHƯƠNG PHÁP**

♦ Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ được quy về tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) và đường thẳng $(d): y = g(m)$.



♦ Có 2 cách biện luận số nghiệm của phương trình:

- ❶. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng đồ thị (khi bài toán cho sẵn đồ thị): ta dựa vào sự tịnh tiến của đường thẳng $(d): y = g(m)$ theo hướng lên hoặc xuống trên trục tung.
- ❷. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng bảng biến thiên (bài toán cho sẵn bảng biến thiên hoặc tự xây dựng).

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			7		1		

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2$.

Từ bảng biến thiên ta suy ra phương trình $f(x) = 2$ có ba nghiệm phân biệt.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới.

Hỏi phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Phương trình có đúng một nghiệm.

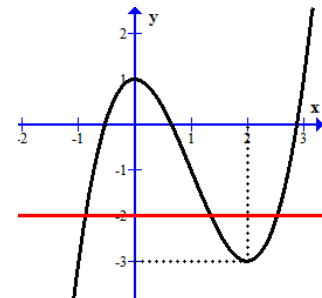
B. Phương trình có đúng hai nghiệm.

C. Phương trình không có nghiệm.

D. Phương trình có đúng ba nghiệm.

Lời giải

Chọn B



Ta có phương trình $\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = -2$.

Số nghiệm phương trình bằng số giao điểm của đường thẳng $y = -2$ và đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Từ đồ thị ta thấy có ba giao điểm. Vậy phương trình có ba nghiệm.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{4}{3}$.

Xét trên đoạn $[-2; 4]$, đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm $y = f(x)$ tại ba điểm.

Vậy phương trình $3f(x) - 4 = 0$ có ba nghiệm trên đoạn $[-2; 4]$.

Ví dụ 4. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

A. $m < -4$.

B. $m \in [-4; 0]$.

C. $m \in (-4; 0)$.

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y		$-m$		$-m-4$		$+\infty$
	$-\infty$					

Yêu cầu bài toán thỏa khi $\begin{cases} -m > 0 \\ -m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2021$ tại bao nhiêu điểm?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y			3		-1		3		$-\infty$

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 0.

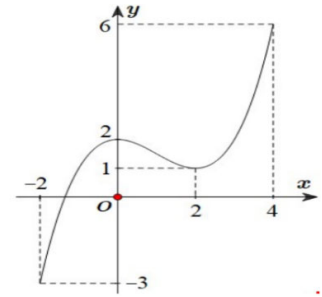
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[0; 4]$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.



Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$		4		$+\infty$
			-2		

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 2 = 0$ là

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

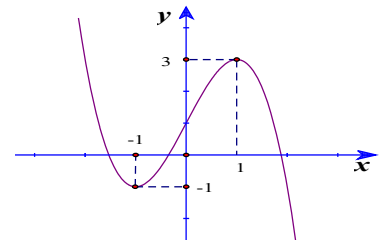
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.



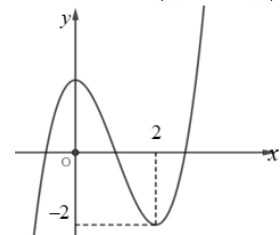
Câu 15. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) + 3 = 0$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.



Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

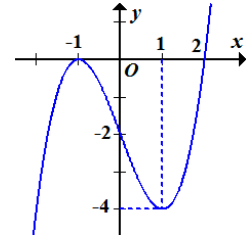
Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt là

A. $(4; +\infty)$.B. $(-\infty; -2)$.C. $[-2; 4]$.D. $(-2; 4)$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực của phương

trình $f^2(x) - 1 = 0$ bằng

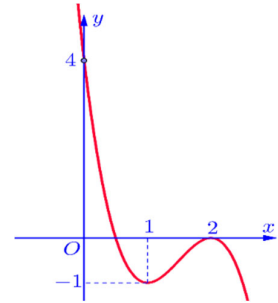
- A. 3. B. 6.
C. 4. D. 1.



Câu 18. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ.

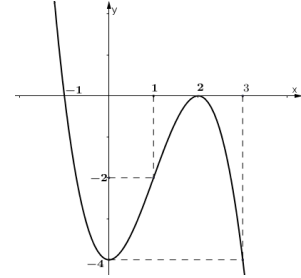
Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 1 = 0$ bằng

- A. 0. B. 1.
C. 2. D. 3.



Câu 19. Đồ thị sau đây là của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hãy chọn câu trả lời đúng.

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = -4 \\ m = 4 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} m = -4 \\ m = 0 \end{cases}$. D. $m = 0$.



Câu 20. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt:

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 0.

☒ DẠNG 3_ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA 2 ĐỒ THỊ (LIÊN QUAN ĐẾN TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM)

PHƯƠNG PHÁP

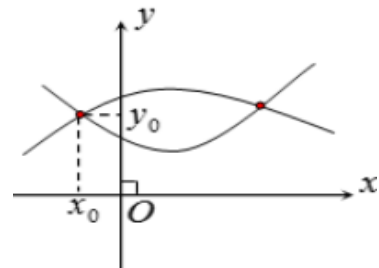
Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C')

◆ Lập phương trình hoành độ giao điểm của và: $f(x) = g(x), (1)$

◆ Giải phương trình (1) tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

◆ Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị

$y = f(x), y = g(x)$.



A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Có bao nhiêu giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 3$ với trục Ox ?

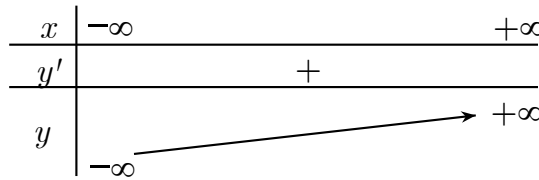
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 + 3 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên



Vậy đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 3$ và trục Ox có 1 giao điểm.

Ví dụ 2. Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

A. $y_0 = 0$.

B. $y_0 = 4$.

C. $y_0 = 2$.

D. $y_0 = -1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = x - 1$. Tìm số giao điểm của (C) và (d) .

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = x - 1 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \\ x_3 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt nên (C) và (d) có 3 giao điểm.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 21. Đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2$ và đồ thị của hàm số $y = x + 2$ có tất cả bao nhiêu điểm chung.

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 22. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - 1$. Số giao điểm của (C) và d là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Câu 23. Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$

A. $x_B + y_B = -5$.

B. $x_B + y_B = -2$.

C. $x_B + y_B = 4$.

D. $x_B + y_B = 7$.

Câu 24. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x + 3)(x^2 + 3x + 2)$ với trục Ox là:

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

- Câu 25.** Biết rằng đường thẳng $y = 2x - 3$ và đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + 2x - 3$ có hai điểm chung phân biệt A và B , biết điểm B có hoành độ âm. Tìm x_B .
- A. $x_B = -1$. B. $x_B = -5$. C. $x_B = -2$. D. $x_B = 0$.
- Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.
- A. $m \in (-\infty; -4)$. B. $m \in (0; +\infty)$.
 C. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$. D. $m \in (-4; 0)$.
- Câu 27.** Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. (C) không cắt trục hoành. B. (C) cắt trục hoành tại 3 điểm.
 C. (C) cắt trục hoành tại 1 điểm. D. (C) cắt trục hoành tại 2 điểm.
- Câu 28.** Tìm tọa độ giao điểm I của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 3x$ với đường thẳng $y = -x + 2$.
- A. $I(2; 1)$. B. $I(2; 2)$. C. $I(1; 2)$. D. $I(1; 1)$.
- Câu 29.** Giả sử A và B là các giao điểm của đường cong $y = x^3 - 3x + 2$ và trục hoành. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A. $6\sqrt{5}$. B. $4\sqrt{2}$. C. 3. D. $5\sqrt{3}$.
- Câu 30.** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - 1$. Giao điểm của (C) và d lần lượt là $A(1; 0)$, B và C . Khi đó độ dài BC là
- A. $BC = \frac{\sqrt{14}}{2}$. B. $BC = \frac{\sqrt{34}}{2}$. C. $BC = \frac{\sqrt{30}}{2}$. D. $BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 31.** Đồ thị của hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?
- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 32.** Đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ và đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 3$ có bao nhiêu điểm chung?
- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.
- Câu 33.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ luôn cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt?
- A. 2. B. 3. C. 7. D. 9.
- Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x - 1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .
- A. $m > -2$. B. $m = -2$. C. $m > -3$. D. $m = -3$.
- Câu 35.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$ (C_m) . Với giá trị nào của tham số m thì đường thẳng $(d): y = 2mx - 4m + 3$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt?
- A. $m \in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{9}; +\infty) \setminus \left\{ \frac{9}{8} \right\}$. B. $m \in (0; \frac{4}{9})$.
 C. $m \in (\frac{4}{9}; +\infty)$. D. Không có giá trị m thỏa mãn.

☒ DẠNG 4_XÁC ĐỊNH HỆ SỐ A, B, C, D TỪ ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3.**PHƯƠNG PHÁP: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:**

- ◆ Hệ số a : Xác định dáng đi lên hay đi xuống của đồ thị
 - Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$.
- ◆ Tích số ab : Xác định vị trí điểm uốn
 - Điểm uốn bên phải trục Oy nếu $ab < 0$; bên trái trục Oy nếu $ab > 0$.
- ◆ Tích số ac : Xác định vị trí hai điểm cực trị
 - $ac < 0$: có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía trục tung Oy .
 - $ac > 0$: có 2 điểm cực trị nằm về 1 phía trục tung Oy .
 - $c = 0$: đồ thị có 1 cực trị nằm trên trục tung.
- ◆ Hệ số d : Xác định giao điểm với trục tung.
 - $d > 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm trên gốc tọa độ O .
 - $d < 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm dưới gốc tọa độ O .
 - $d = 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung trùng với gốc tọa độ O .

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a > 0, b = 0, c > 0, d < 0$.
B. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.
D. $a < 0, b < 0, c = 0, d < 0$.

Lời giải**Chọn B**

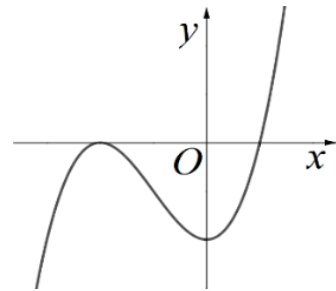
Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \end{cases} \Rightarrow a > 0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$.

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị, ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

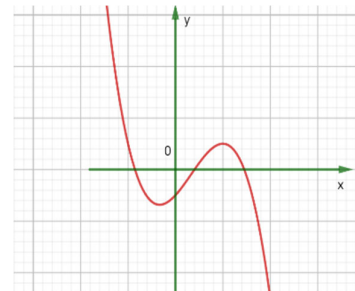
$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{3a} = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Vậy $a > 0; b > 0; c = 0; d < 0$.



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; d)$ nằm dưới trục hoành nên $d < 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu nên $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm trái dấu, mà $a < 0$ nên $c > 0$.

Ví dụ 3. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng trong các mệnh đề sau:

A. $ad < 0, bc < 0$. **B.** $ad > 0, bc > 0$.

C. $ad < 0, bc > 0$. **D.** $ad > 0, bc < 0$.

Lời giải**Chọn D**

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(0; d)$ nên $d > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0 \Rightarrow ad > 0 \quad (1)$$

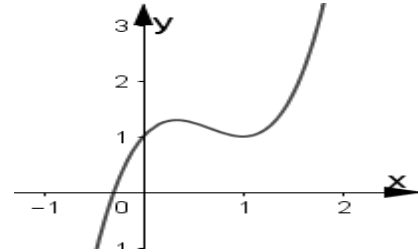
$$\text{Ta có } y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x_{CT} + x_{CD} = -\frac{2b}{3a}$$

Vì hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho nằm ở góc phần tư thứ nhất.

$$\text{Do đó: } -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$$

$$\text{Ta có } y' = 0 \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt nên } x_{CT} \cdot x_{CD} = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$$

Suy ra: $bc < 0$.

**B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:**

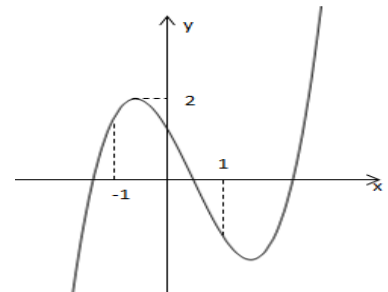
Câu 36. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.



Câu 37. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây

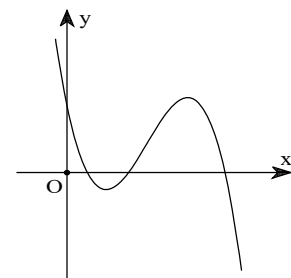
Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

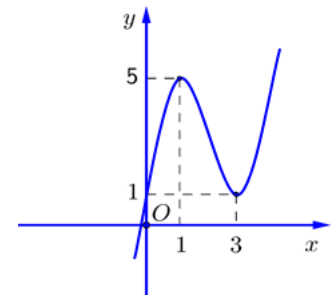
C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



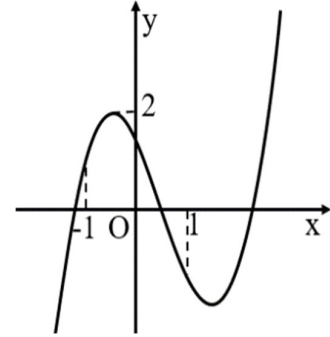
Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



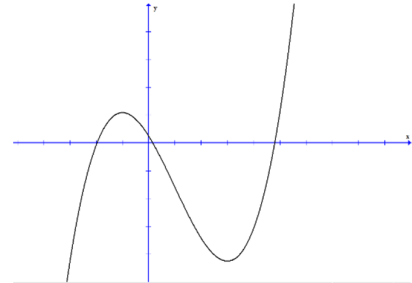
Câu 39. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới: Khẳng định nào là đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.



Câu 40. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $a, d > 0; b, c < 0$.
- B. $a, b, d > 0; c < 0$.
- C. $a, c, d > 0; b < 0$.
- D. $a, b, c < 0; d > 0$.



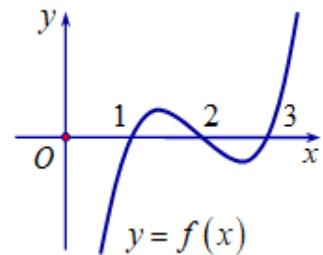
Câu 41. Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị được biểu diễn như hình vẽ bên dưới. Nhận xét đúng về dấu của các hệ số là.

- A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- B. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$.
- D. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



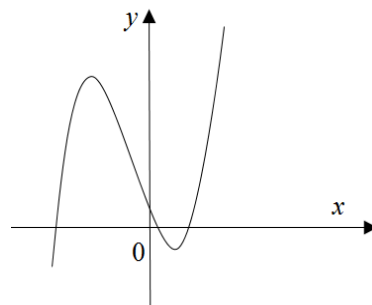
Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $f(1,5) < 0 < f(2,5)$.
- B. $f(1,5) < 0, f(2,5) < 0$.
- C. $f(1,5) > 0, f(2,5) > 0$.
- D. $f(1,5) > 0 > f(2,5)$.



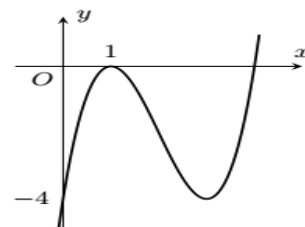
Câu 43. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



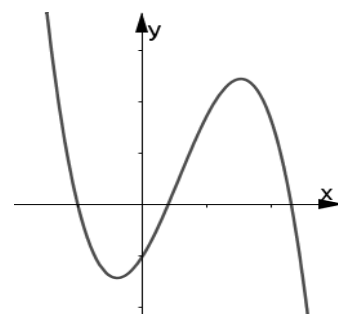
Câu 44. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $a + b + c = -1$.
- B. $a + c > 2b$.
- C. $a + b^2 + c^3 = 11$.
- D. $abc > 0$.



Câu 45. Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.



BẢNG ĐÁP ÁN

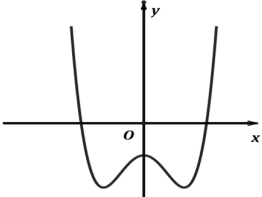
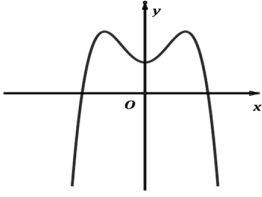
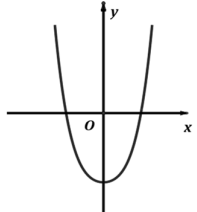
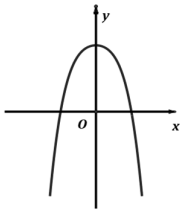
1.B	2.D	3.C	4.C	5.D	6.B	7.D	8.C	9.B	10.D
11.A	12.B	13.B	14.B	15.A	16.D	17.C	18.B	19.A	20.B
21.C	22.B	23.A	24.B	25.A	26.D	27.D	28.D	29.C	30.B
31.B	32.A	33.C	34.C	35.A	36.D	37.A	38.C	39.D	40.A
41.B	42.D	43.B	44.B	45.C					

§6_ĐỒ THỊ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

☒ DẠNG 1 _ NHẬN DẠNG HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG KHI CHO ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

PHƯƠNG PHÁP: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

- ◆ Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$.
- ◆ Chú ý điểm cực trị:
 - $ab < 0$: hàm số có 3 điểm cực trị.
 - $ab \geq 0$: hàm số có 1 điểm cực trị.
- ◆ Các giao điểm đặc biệt với trục Ox, Oy .
 - $c > 0$: giao điểm trục tung nằm trên Oy .
 - $c < 0$: giao điểm trục tung nằm dưới Oy .
 - $c = 0$: giao điểm trục trùng với Oy .

$y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)	$a > 0$	$a < 0$
①. $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nếu $ab < 0$		
②. $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm nếu $ab \geq 0$		

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:

- A.** $y = \frac{x-2}{x+1}$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. **D.** $y = x^3 - 2x^2 - 2$.

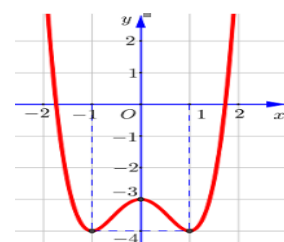
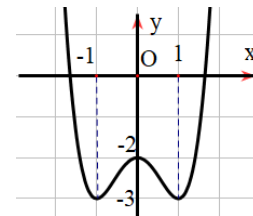
Lời giải

Chọn B

Đồ thị trên là đồ thị của hàm trùng phương có hệ số a dương nên từ các phương án đã cho ta suy ra đồ thị trên là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$.

Ví dụ 2. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

- A.** $y = x^4 + 2x^2 - 3$. **B.** $y = x^4 - 3x^2 - 3$.
C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$. **D.** $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$.



Lời giải

Chọn C

Đồ thị có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow$ D sai.

Hàm số có các điểm cực trị là: $x = 0, x = \pm 1$
 $\Rightarrow$ A, B sai.

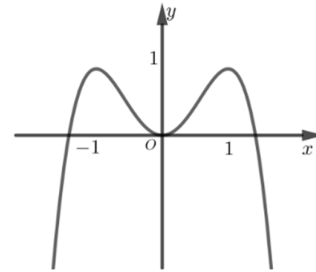
Ví dụ 3. Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. B. $y = -x^4 + 2x^2$.
 C. $y = x^4 - 2x^2$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0, c = 0$
 nên chỉ có đáp án B thỏa mãn.



Ví dụ 4. Đường cong trong hình vẽ sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$. B. $y = x^4 + 2x^2 - 3$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. D. $y = -x^2 + 3$.

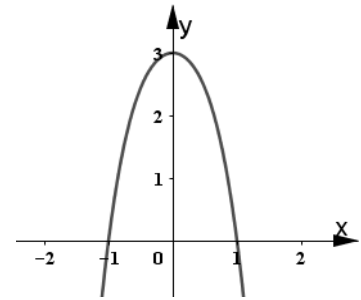
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có nhận xét:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ loại phương án B

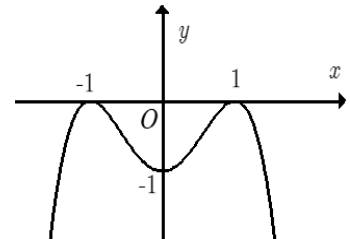
Đồ thị giao với trục hoành tại hai điểm có tọa độ $(-1; 0); (1; 0)$ loại phương án C, D.



B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

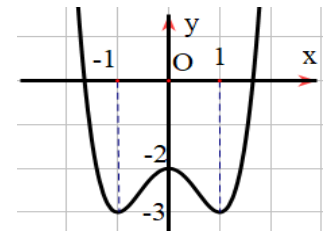
Câu 1. Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -2x^4 + 3x^2 - 5$. B. $y = -x^4 + x^2 - 1$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. D. $y = -x^4 + 3x^2 - 4$.



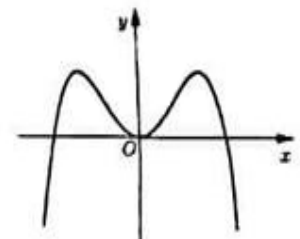
Câu 2. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:

- A. $y = \frac{x-2}{x+1}$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$.
 C. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. D. $y = x^3 - 2x^2 - 2$.



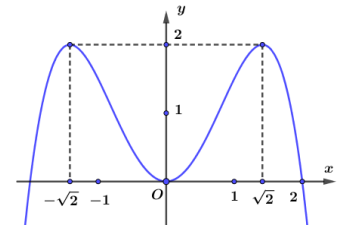
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng $y = f(x)$ là một trong bốn hàm được đưa ra trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Phương án nào trong các phương án dưới đây là đúng?

- A. $f(x) = -x^4 + 2x^2$. B. $f(x) = x^4 + 2x^2$.
 C. $f(x) = x^4 - 2x^2$. D. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$.



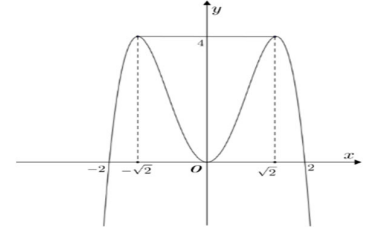
Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Đồ thị (C) nhận Oy làm trục đối xứng.
 B. (C) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt.
 C. Hàm số có 3 điểm cực trị.
 D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \pm\sqrt{2}$.



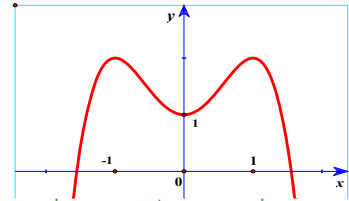
Câu 5. Hình vẽ sau đây là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = -x^4 - 2x^2$. B. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$.
 C. $y = -x^4 + 4x^2$. D. $y = x^4 - 3x^2$.



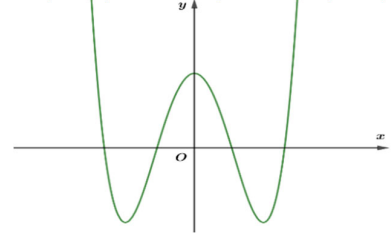
Câu 6. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. B. $y = -x^4 - 2x^2 + 1$.
 C. $y = x^4 - 3x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.



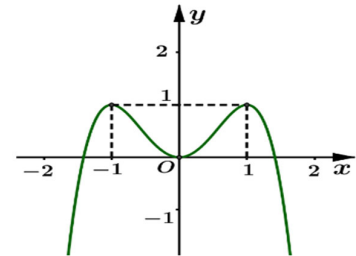
Câu 7. Đường cong ở hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = -x^4 + 4x^2 + 2$. B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
 C. $y = x^4 - 4x^2 + 2$. D. $y = x^4 + 4x^2 + 2$.



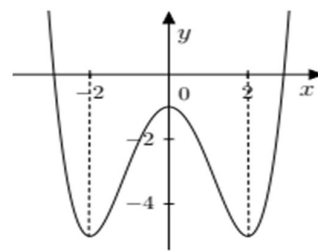
Câu 8. Đồ thị hình bên là của hàm số

- A. $y = x^4 - 2x^2 + 2$. B. $y = -x^4 + 2x^2$.
 C. $y = x^4 + 2x^2$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.



Câu 9. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong 4 hàm số sau:

- A. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - 1$. B. $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 - 1$.
 C. $y = \frac{x^4}{4} - x^2 - 1$. D. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 1$.



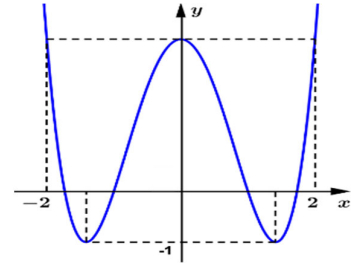
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			-3			-4		$+\infty$

- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 3$. B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$.
 C. $y = x^4 + 2x^2 - 3$. D. $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

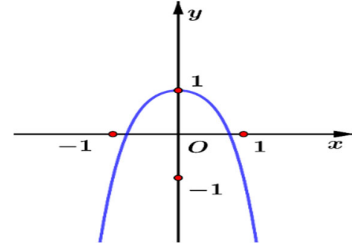
Câu 11. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

- A. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$. B. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.
 C. $y = (x^2 - 2)^2 - 1$. D. $y = (x^2 + 2)^2 - 1$.



Câu 12. Đồ thị hàm số trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

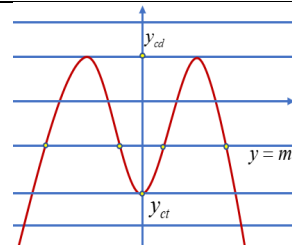
- A. $y = x^4 + x^2 + 1$. B. $y = -x^4 + x^2 + 1$.
 C. $y = -x^4 - x^2 + 1$. D. $y = x^4 - x^2 + 1$.



☒ DẠNG 2 _ BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

PHƯƠNG PHÁP

♦ Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ được quy về tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) và đường thẳng (d): $y = g(m)$.



♦ Có 2 cách biện luận số nghiệm của phương trình:

❶. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng đồ thị (khi bài toán cho sẵn đồ thị): ta dựa vào sự tịnh tiến của đường thẳng (d): $y = g(m)$ theo hướng lên hoặc xuống trên trục tung.

❷. Biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ bằng bảng biến thiên (bài toán cho sẵn bảng biến thiên hoặc tự xây dựng).

A - VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	3	5	7	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	↗ 3 ↘	↖ 1 ↗	↖ 5 ↘	$-\infty$

Phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị ở hình bên.

Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm dương phân biệt của phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ là

số giao điểm có hoành độ dương phân biệt của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\sqrt{3}$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ, đường thẳng $y = -\sqrt{3}$ song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; -\sqrt{3})$.

Suy ra phương trình $f(x) = -\sqrt{3}$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 5 = 0$ là

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$4f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{4}.$$

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x) = \frac{5}{4}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(x) - 1 = 0$ có mấy nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

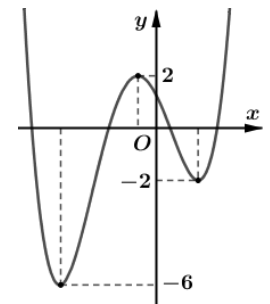
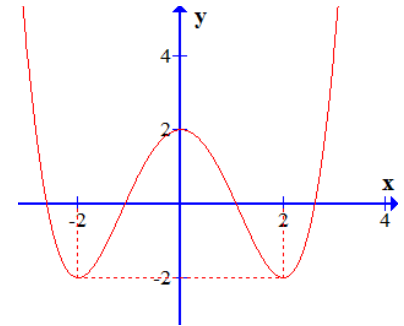
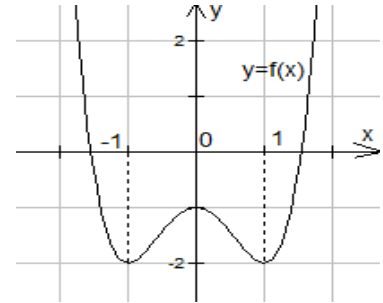
Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1.$$

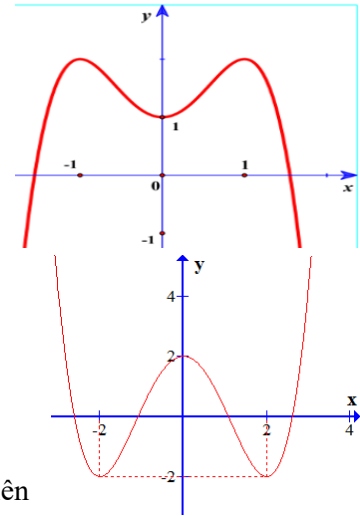
Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại bốn điểm phân biệt.

Vậy phương trình $f(x) - 1 = 0$ có 4 nghiệm.



B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:**Câu 13.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sauSố nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- A. 0. B. 2.
C. 4. D. 1.

**Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $4f(x) - 5 = 0$ là

- A. 4. B. 3.
C. 2. D. 0.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				0				$+\infty$

Arrows indicate the function values at the critical points: from $+\infty$ at $x = -\infty$ to -1 at $x = -1$, then to 0 at $x = 0$, then to -1 at $x = 1$, and finally to $+\infty$ at $x = +\infty$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

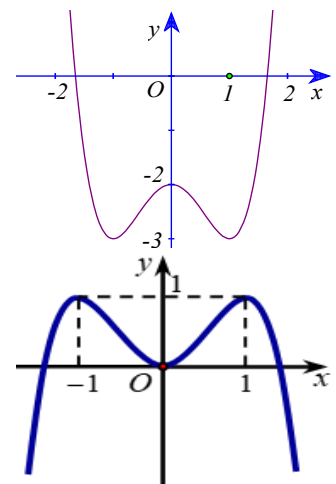
- A. $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1 \end{cases}$. B. $-2 < m < -1$. C. $\begin{cases} m > 0 \\ m = -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = -2 \\ m \geq -1 \end{cases}$.

Câu 16. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

- A. $(-1; 3)$. B. $(-3; 1)$. C. $(2; 4)$. D. $(-3; 0)$.

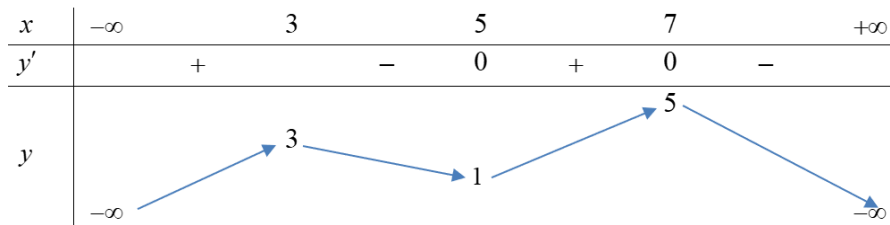
Câu 17. Đường cong trong hình bên là đồ thị hàm $y = x^4 - 2x^2 - 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $m > -3$. B. $-2 < m < -1$.
C. $m < -2$. D. $-3 < m < -2$.

**Câu 18.** Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ có đồ thị như hình vẽ.Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 1 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

- A. $0 \leq m \leq 1$. B. $1 \leq m \leq 2$.
C. $0 < m < 1$. D. $1 < m < 2$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau:

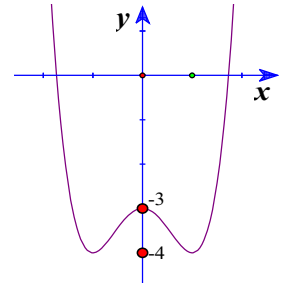


Phương trình $f(x) = 4$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m + 2$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $-4 < m < -3$. B. $-4 \leq m \leq -3$.
C. $-6 \leq m \leq -5$. D. $-6 < m < -5$.



Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y							

The graph shows a function y plotted against x . The function has a local maximum at $x = -2$ with $y = 4$, a local minimum at $x = 0$ with $y = 0$, and another local maximum at $x = 2$ with $y = 4$. The function approaches $-\infty$ as x approaches $-\infty$ and $+\infty$.

- A. Phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.
D. Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 22. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d): y = m + 1$ (m là tham số). Đường thẳng (d) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt khi các giá trị của m là

- A. $3 < m < 5$. B. $1 < m < 2$. C. $-1 < m < 0$. D. $-5 < m < -3$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			3		-1		3	

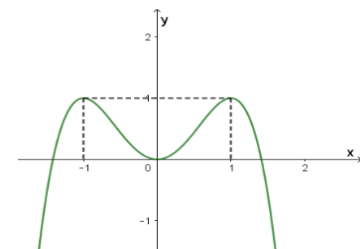
Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = -2020$ tại bao nhiêu điểm?

- A. 4. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

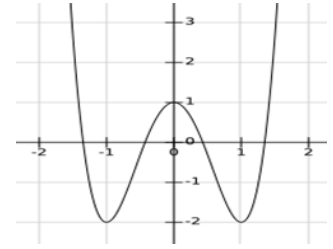
Phương trình $1 - 2.f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. Vô nghiệm.
C. 3. D. 4.



Câu 25. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như sau: Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- A. 0. B. 2.
C. 4. D. 3.



Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				0				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 -1

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

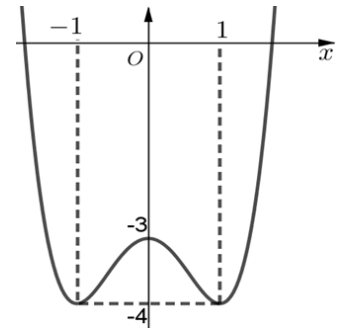
- A. $m = -2, m \geq -1$. B. $m > 0, m = -1$. C. $m = -2, m > -1$. D. $-2 < m < -1$.

Câu 27. Tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$ tại 4 điểm phân biệt là

- A. $m > -3$. B. $m < 1$. C. $-12 < m < 3$. D. $-3 < m < 1$.

Câu 28. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị hàm số như hình bên dưới. Với giá trị nào của tham số m phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$ B. $0 < m < \frac{1}{2}$.
C. $\begin{cases} m < 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$ D. $m \leq \frac{1}{2}$.



☒ DẠNG 3_ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA 2 ĐỒ THỊ (LIÊN QUAN ĐẾN TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM).

PHƯƠNG PHÁP

♦ Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C')

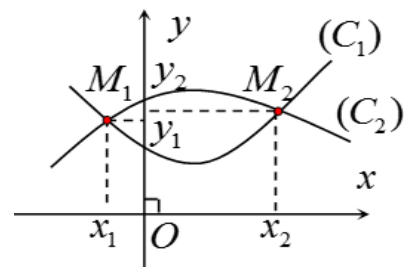
• Lập phương trình hoành độ giao điểm của và: $f(x) = g(x), (1)$

• Giải phương trình (1) tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.

• Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị

$y = f(x), y = g(x)$.

♦ **Nghiệm của PT:** $ax^4 + bx^2 + c = 0$



• **Nhắm nghiệm:**

- *Nhắm nghiệm:* Giả sử $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
- *Khi đó ta phân tích:* $f(x, m) = (x^2 - x_0^2)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm x_0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$.
- Dựa vào giả thiết xử lý phương trình bậc 2 $g(x) = 0$.

• **Ấn phụ - tam thức bậc 2:**

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Phương trình: $at^2 + bt + c = 0$.

- Nếu có đúng 1 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 = t_2 \\ t_1 = t_2 = 0 \end{cases}$.
- Nếu có đúng 2 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $\begin{cases} t_1 < 0 < t_2 \\ 0 < t_1 = t_2 \end{cases}$.
- Nếu có đúng 3 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 = t_1 < t_2$.
- Nếu có đúng 4 nghiệm thì có nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < t_2$.

✓. **PP đồ thị hàm số.**

- Lập phương trình hoành độ giao điểm dạng $F(x, m) = 0$.
- Cô lập m đưa phương trình về dạng $m = f(x)$.

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị m nguyên để phương trình $x^4 - 2x^2 + 4 - m = 0$ có bốn nghiệm thực.

A. $m \in \emptyset$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^4 - 2x^2 + 4 - m = 0(1)$.

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$ ta được phương trình $t^2 - 2t + 4 - m = 0(2)$.

(1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 2 > 0 \\ 4 - m > 0 \end{cases} \quad 3 < m < 4.$$

Vậy $m \in \emptyset$.

Ví dụ 2. Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ tại mấy điểm phân biệt?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - x^2 + 1 = x + 1$.

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Xét $x^3 - x - 1 = 0$ không có nghiệm $x = 0$ và hàm số $f(x) = x^3 - x - 1$.

Có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$.

Nên đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - x - 1$ cắt trục hoành tại một điểm. Suy ra phương trình.

$x^3 - x - 1 = 0$ có một nghiệm.

Vậy đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 3. Hai đồ thị $y = x^4 - x^2$ và $y = 3x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm chung?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - x^2 = 3x^2 + 1$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 + \sqrt{5} \\ x^2 = 2 - \sqrt{5} (VN) \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

Số điểm chung của hai đồ thị $y = x^4 - x^2$ và $y = 3x^2 + 1$ bằng số nghiệm của phương trình (1) là hai.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

A. $(0; +\infty)$.

B. $(0; +\infty) \setminus \{1\}$.

C. $[0; +\infty)$.

D. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (m+1)x^2 + m = 0$. (1)

$$\Leftrightarrow x^4 - mx^2 - x^2 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - m) - (x^2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - m)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt khi phương trình $x^2 = m$ có hai nghiệm phân biệt khác $\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 29. Đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}$ cắt trục hoành tại mấy điểm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 0.

Câu 30. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

A. $m > 0$.

B. $m > 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m < 0$ hoặc $m > 1$.

Câu 31. Đồ thị hàm số $y = x^2(x^2 - 3)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x$ tại bao nhiêu điểm?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

- Câu 32.** Đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm chung?
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 33.** Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ tại 4 điểm phân biệt.
A. $2 < m < 3$. **B.** $m > 2$. **C.** $1 < m < 2$. **D.** $m < 2$.
- Câu 34.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 4m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 3$ tại bốn điểm phân biệt?
A. $-\frac{13}{4} < m < \frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{13}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$. **C.** $m \leq \frac{3}{4}$. **D.** $m \geq -\frac{13}{4}$.
- Câu 35.** Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ cắt trục hoành tại 4 điểm là
A. $-1 \leq m < 0$. **B.** $0 \leq m < 1$. **C.** $-1 < m < 0$. **D.** $0 < m < 1$.
- Câu 36.** Phương trình $x^4 - 4x^2 + m - 3 = 0$ (m là tham số) có đúng bốn nghiệm khi và chỉ khi
A. $m < 7$. **B.** $m \leq 7$. **C.** $m < 3$. **D.** $3 < m < 7$.
- Câu 37.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$

The graph shows a function $y = f(x)$ with a local minimum at $x = -1$ and a local maximum at $x = 1$. The function values at these points are -1 . The function approaches $+\infty$ as x approaches $-\infty$ and $+\infty$.

- Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.
A. $m = -2, m \geq -1$. **B.** $m > 0, m = -1$. **C.** $m = -2, m > -1$. **D.** $-2 < m < -1$.
- Câu 38.** Cho hàm số $y = x^4 - (m-1)x^2 + m - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.
A. $m \in (1; +\infty)$. **B.** $m \in (2; +\infty)$. **C.** $m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$. **D.** $m \in (2; 3)$

☒ DẠNG 4_ XÁC ĐỊNH HỆ SỐ A, B, C TỪ ĐỒ THỊ HÀM TRÙNG PHƯƠNG.

PHƯƠNG PHÁP: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

- ◆ Hệ số a : Xác định dáng đi lên hay đi xuống của đồ thị
 Quan sát dáng đồ thị, chú ý các hệ số $a > 0$; $a < 0$.
- ◆ Tích số ab : Xác định số điểm cực trị
 $ab < 0$: hàm số có 3 cực trị
 $ab > 0$: hàm số có 1 cực trị
- ◆ Hệ số c : Xác định giao điểm với trục tung.
 $c > 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm trên gốc tọa độ O .
 $c < 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung nằm dưới gốc tọa độ O .
 $c = 0$: giao điểm của đồ thị với trục tung trùng với gốc tọa độ O .

A - BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ sau.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a > 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

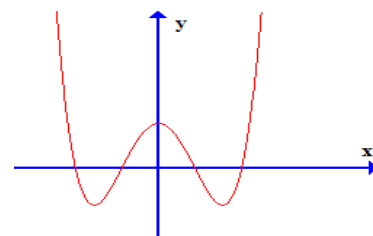
Chọn B

Hàm số là hàm bậc 4 trùng phương có:

+ Nhìn dạng đồ thị suy ra $a > 0$

+ Chọn $x = 0 \Rightarrow y = c \Rightarrow c > 0$

+ Vì hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow a, b$ trái dấu nên $b < 0$.



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c > 0$

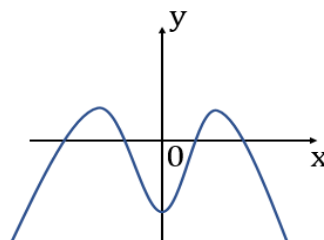
Lời giải

Chọn C

Đồ thị có bề lõm quay xuống nên $a < 0$

$x = 0$ suy ra $y = c$. Đồ thị cắt trục Oy tại $y = -3 \Rightarrow c = -3 < 0$

$$\text{Ta có: } y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

**B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:**

Câu 39. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0$.

Câu 40. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Tìm kết luận đúng.

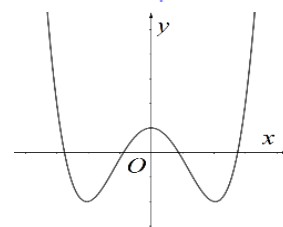
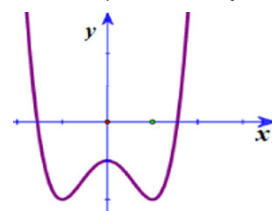
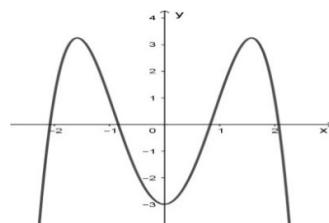
A. $a + b > 0$. **B.** $bc > 0$.

C. $ab > 0$. **D.** $ac > 0$.

Câu 41. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

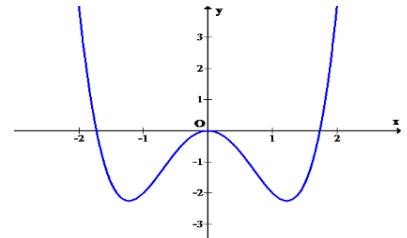
A. $a > 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0$.



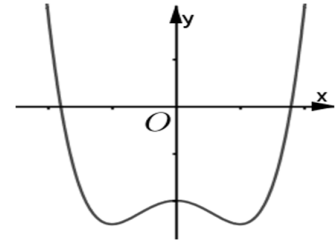
Câu 42. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Hãy chọn mệnh đề đúng.

- A. $a < 0, b < 0, c = 0$. B. $a < 0, b > 0, c = 0$.
C. $a > 0, b < 0, c = 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.



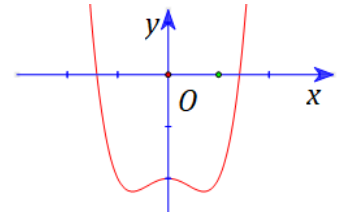
Câu 43. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
C. $a > 0, b > 0, c < 0$. D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



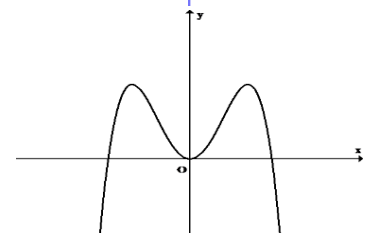
Câu 44. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng

- A. $a + b > 0$. B. $bc > 0$.
C. $ab > 0$. D. $ac > 0$.



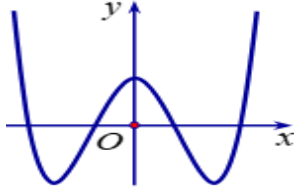
Câu 45. Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c = 0$. D. $a > 0, b < 0, c < 0$.



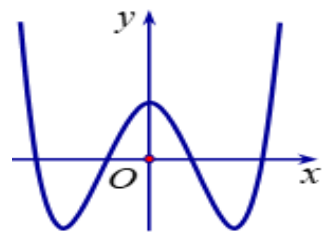
Câu 46. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $a < 0; b > 0; c < 0$. B. $a > 0; b > 0; c > 0$.
C. $a < 0; b < 0; c < 0$. D. $a > 0; b < 0; c > 0$.



Câu 47. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có dạng đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $abc > 0$. B. $abc = 0$.
C. $a < 0; b > 0; c > 0$. D. $a > 0; b < 0; c > 0$.



BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.B	5.C	6.A	7.C	8.B	9.A	10.D	11.C	12.C
13.C	14.A	15.A	16.B	17.B	18.D	19.B	20.D	21.D	22.C	23.C	24.D
25.B	26.C	27.D	28.A	29.C	30.B	31.D	32.A	33.C	34.A	35.D	36.D
37.C	38.C	39.B	40.B	41.C	42.C	43.B	44.B	45.C	46.D	47.D	

§7_ ĐỒ THỊ HÀM SỐ HỮU TỈ

☒ DẠNG 1_NHẬN DẠNG HÀM SỐ HỮU TỈ KHI CHO ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

PHƯƠNG PHÁP

◆ Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

Quan sát dáng đồ thị, chú ý dấu đạo hàm $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Xác định các đường tiệm cận đứng: $x = \frac{-d}{c}$, tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$.

Các giao điểm đặc biệt với trục Ox , Oy .

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0, ad-bc \neq 0$	❶. $ad-bc > 0$	❷. $ad-bc < 0$
❶. $y' > 0$: Hàm số tăng ❷. $y' < 0$: Hàm số giảm		

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với

a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y' < 0, \forall x \neq 1$. **B.** $y' < 0, \forall x \neq 2$.

C. $y' > 0, \forall x \neq 2$. **D.** $y' > 0, \forall x \neq 1$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy tiệm cận đứng bằng 2,

Hàm số nghịch biến vậy chọn B

Ví dụ 2. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

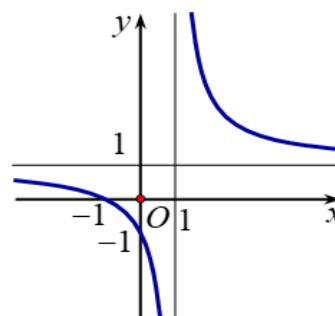
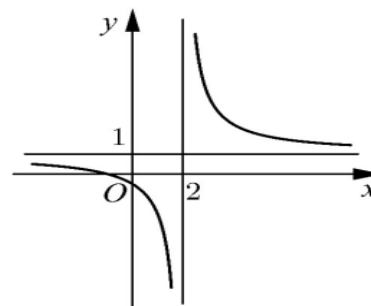
A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$. **B.** $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = x^4 + x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.



Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$.

$\Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị đã cho là của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Ví dụ 3. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào trong các phương án A, B, C, D dưới đây?

A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có: Tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận ngang $y = 2$.

$y = \frac{x-1}{x+1}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1; \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận ngang $y = 1$

A sai

$y = \frac{2x+1}{x+1}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận ngang $y = 2$

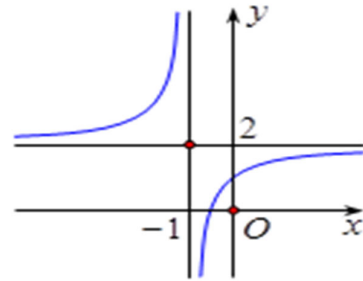
B đúng

$y = \frac{x+2}{x+1}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận ngang $y = 1$

C sai

$y = \frac{x+3}{1-x}$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{1-x} = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng $x = 1$; tiệm cận ngang $y = -1$

D sai



B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

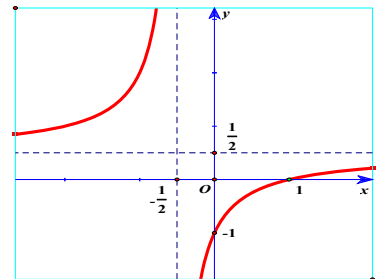
Câu 1. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x+1}{2x+1}$.

B. $y = \frac{x-1}{2x-1}$.

C. $y = \frac{x-1}{1-2x}$.

D. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.



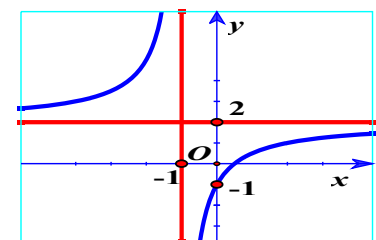
Câu 2. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

C. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

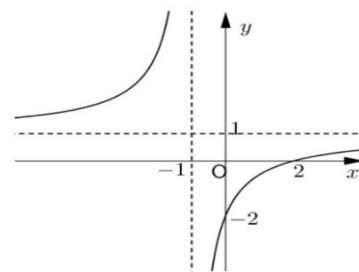
D. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.



Câu 3. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

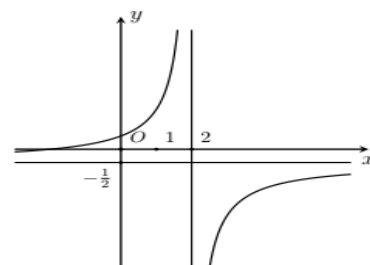
C. $y = \frac{2x-1}{x+2}$. **D.** $y = \frac{x-2}{x+1}$.



Câu 4. Đường cong trong hình sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \frac{x+2}{-2x+4}$. **B.** $y = \frac{2x-3}{x+2}$.

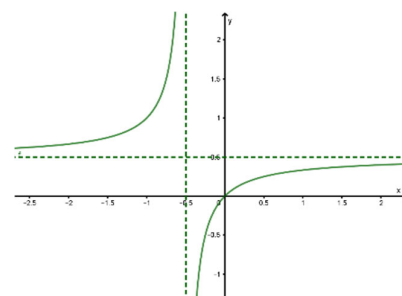
C. $y = \frac{-x+1}{x-2}$. **D.** $y = \frac{-x+3}{2x-4}$.



Câu 5. Hình vẽ bên đây là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $y = \frac{x}{2x+1}$. **B.** $y = \frac{-x}{2x+1}$.

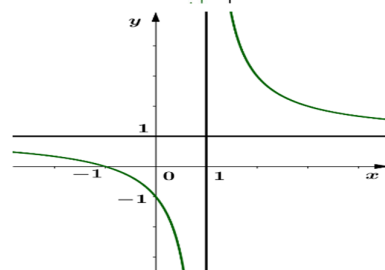
C. $y = \frac{x}{2x-1}$. **D.** $y = \frac{-x}{2x-1}$.



Câu 6. Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \frac{x}{x-1}$. **B.** $y = \frac{2x-3}{2x-2}$.

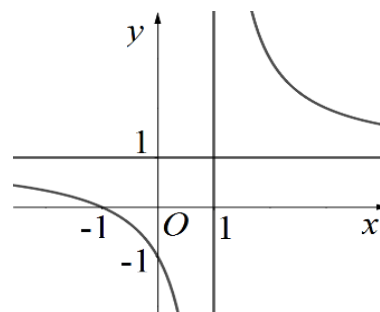
C. $y = \frac{x+1}{x-1}$. **D.** $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Câu 7. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$. **B.** $y = \frac{2x+1}{2x-2}$.

C. $y = \frac{-x}{1-x}$. **D.** $y = \frac{x-1}{x+1}$.



Câu 8. Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

A. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$. **B.** $y = \frac{x+3}{x+1}$. **C.** $x^3 + 3x^2 + 4$. **D.** $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Câu 9. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'			
y	1	$+\infty$	1

A. $y = \frac{2x+3}{x-2}$.

B. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

C. $y = \frac{2x-7}{x-2}$.

D. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

Câu 10. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

A. $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$.

B. $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$.

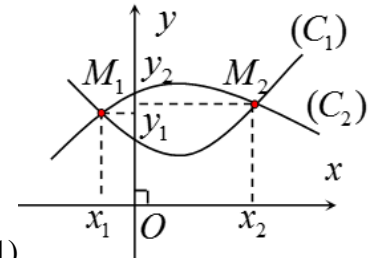
C. $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$.

D. $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$.

☒ DẠNG 2_ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA 2 ĐỒ THỊ (LIÊN QUAN ĐẾN TỌA ĐỘ GIAO ĐIỂM)

PHƯƠNG PHÁP

Cho 2 hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C) và (C')



- ◆ Lập phương trình hoành độ giao điểm của và: $f(x) = g(x), (1)$
- ◆ Giải phương trình (1) tìm x từ đó suy ra y và tọa độ giao điểm.
- ◆ Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x), y = g(x)$.

A - BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tìm tung độ giao điểm của đồ thị $(C): y = \frac{2x-3}{x+3}$ và đường thẳng $d: y = x-1$.

A. 1.

B. -3.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường (C) và d là

$$\frac{2x-3}{x+3} = x-1 \quad (x \neq -3) \Rightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1.$$

Ví dụ 2. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ với đường thẳng $y = 2x+3$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải**Chọn A**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = 2x+3$

$\Leftrightarrow 2x+1 = (2x+3)(x-1)$ (do $x=1$ không là nghiệm của phương trình)

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{1-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y = -2x+11$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

A. $x_I = 3$.B. $x_I = 2$.C. $x_I = \frac{5}{2}$.D. $x_I = \frac{7}{2}$.**Lời giải****Chọn A**

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $\frac{x+1}{x-1} = -2x+11$.

Hay x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $-x^2 + 6x - 6 = 0$ (*)

Do I là trung điểm của đoạn thẳng AB nên $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Từ phương trình (*), ta có $x_1+x_2 = 6 \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = 3$.

Vậy hoành độ của điểm I bằng 3.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $(d): y = x+1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt M và N thì tung độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng

A. -2.

B. -3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải**Chọn D**

Ta có x_M, x_N là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$\frac{2x+2}{x-1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_M + x_N = 2 \Rightarrow x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 1.$$

Vì I thuộc $(d) \Rightarrow y_I = 2$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 11. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ với đường thẳng $y = 2x+3$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

- Câu 12.** Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x}$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + x + 1$ cắt nhau tại hai điểm, ký hiệu $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm đó. Tìm $y_1 + y_2$.
- A. $y_1 + y_2 = 0$. B. $y_1 + y_2 = 2$. C. $y_1 + y_2 = 6$. D. $y_1 + y_2 = 4$.
- Câu 13.** Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn MN bằng
- A. $\frac{5}{2}$. B. $-\frac{5}{2}$. C. 2 . D. 1 .
- Câu 14.** Tìm tung độ giao điểm của đồ thị $(C): y = \frac{2x-3}{x+3}$ và đường thẳng $d: y = x - 1$.
- A. 1 . B. -3 . C. -1 . D. 3 .
- Câu 15.** Đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại các điểm có tọa độ là
- A. $(-1; 0); (2; 1)$. B. $(1; 2)$. C. $(0; -1); (2; 1)$. D. $(0; 2)$.
- Câu 16.** Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ cắt hai trục Ox và Oy tại A và B . Khi đó diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ bằng)
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 1 . D. 2 .
- Câu 17.** Đường cong $y = \frac{2x-8}{x}$ cắt đường thẳng $y = -x$ tại hai điểm M, N . Tính độ dài đoạn thẳng MN
- A. $MN = 4$. B. $MN = 2\sqrt{5}$. C. $MN = 4\sqrt{2}$. D. $MN = 6\sqrt{2}$.
- Câu 18.** Đường thẳng $y = -x - 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Trung điểm của đoạn thẳng AB có hoành độ là
- A. -5 . B. -7 . C. $-\frac{11}{2}$. D. -3 .
- Câu 19.** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ bằng 0 cắt hai trục tọa độ lần lượt tại A và B . Diện tích tam giác OAB bằng
- A. 2 . B. 3 . C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 20.** Đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A. $AB = 6$. B. $AB = \sqrt{17}$. C. $AB = \sqrt{34}$. D. $AB = 8$.
- Câu 21.** Biết đường thẳng $y = x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là $x_A; x_B$. Tính giá trị của $x_A + x_B$.

- A. $x_A + x_B = 2$. B. $x_A + x_B = -2$. C. $x_A + x_B = 0$. D. $x_A + x_B = 1$.

Câu 22. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = x - m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số

$$y = \frac{x+1}{x+2}$$

- A. $m = -2$. B. $m \in \{-1; -5\}$. C. $m = -5$. D. $m \in \{-2; 2\}$.

☒ DẠNG 3 _ XÁC ĐỊNH HỆ SỐ A, B, C, D TỪ ĐỒ THỊ HÀM SỐ HỮU TỶ

PHƯƠNG PHÁP: Chú ý các đặc điểm nhận dạng sau:

♦ Tiệm cận đứng: $cd > 0$; TCD nằm bên trái trục Oy $cd < 0$; TCD nằm bên phải trục Oy Đặc biệt: $d = 0$: TCD trùng với trục Oy	♦ Giao điểm trục ox: $ab > 0$; nằm bên trái gốc tọa độ O $ab < 0$; nằm bên phải gốc tọa độ O Đặc biệt: $a = 0$: Đồ thị không cắt trục Ox
♦ Tiệm cận ngang: $ac > 0$; TCN nằm bên trên trục Ox $ac < 0$; TCN nằm bên dưới trục Ox Đặc biệt: $a = 0$: TCN trùng với trục Ox	♦ Giao điểm trục oy: $bd > 0$; nằm bên trên gốc tọa độ O $bd < 0$; nằm bên dưới gốc tọa độ O Đặc biệt: $b = 0$: Giao trục tung trùng với gốc tọa độ O

A - BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ.

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $b < 0 < a$. B. $0 < a < b$.
C. $a < b < 0$. D. $0 < b < a$.

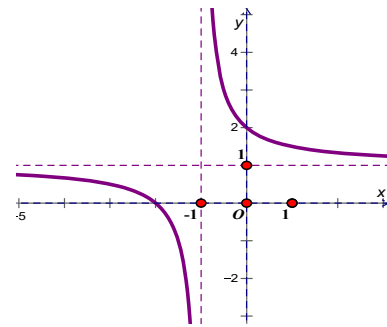
Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 = a > 0$,

$$x = 0 \Rightarrow y = b = 2 > 0.$$

Vậy $0 < a < b$



Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.

Khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

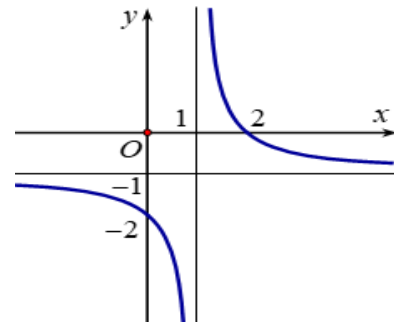
- A. $0 < a < b$. B. $b < 0 < a$.
C. $0 < b < a$. D. $b < a < 0$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn đồ thị ta thấy đồ thị cắt Ox tại $x = 2$ và cắt Oy tại

$$y = -2.$$



Nên với hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$, cho $x=0 \Rightarrow y=b \Rightarrow b=-2$, cho $y=0 \Rightarrow x=\frac{b}{a}$ hay $2 = \frac{-2}{a} \Rightarrow a=-1$.

Vậy $b < a < 0$. Đáp án được chọn là D

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như dưới đây. Tính giá

trị biểu thức $T = a + 2b + 3c$.

A. $T = 1$.

B. $T = 2$.

C. $T = 3$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn A

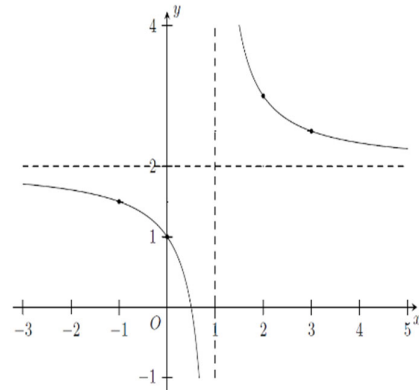
Đồ thị nhận $x=1$ là tiệm cận đứng

$$\Rightarrow \frac{-c}{b} = 1 \Rightarrow b = -c.$$

Đồ thị nhận $y=2$ là tiệm cận ngang $\Rightarrow \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$.

Đồ thị đi qua điểm $(0;1) \Rightarrow \frac{a \cdot 0 - 1}{b \cdot 0 + c} = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 2$.

Vậy $T = a + 2b + 3c = 2 + 2(1) + 3(-1) = 1$.



B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

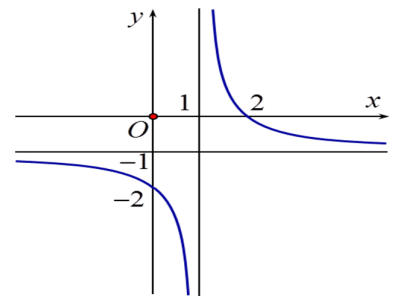
Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b < 0 < a$.

B. $b < a < 0$.

C. $a < b < 0$.

D. $0 < b < a$.



Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

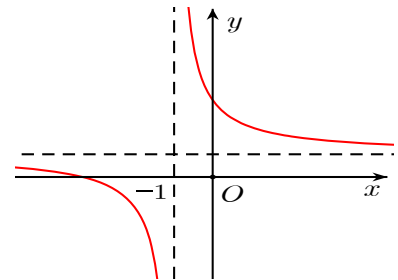
Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $a < b < 0$.

B. $b < 0 < a$.

C. $0 < b < a$.

D. $0 < a < b$.



Câu 25. Biết hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

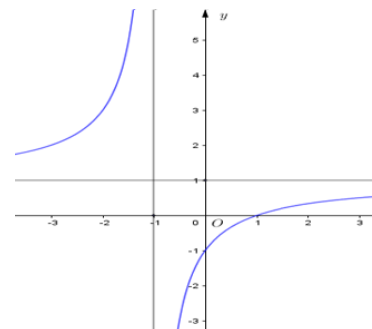
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $ac < 0, cd > 0$.

B. $ad > 0, bc < 0$.

C. $ac > 0, ab > 0$.

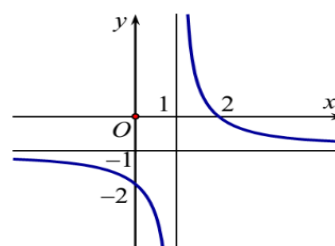
D. $cd > 0, ad < 0$.



Câu 26. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình bên

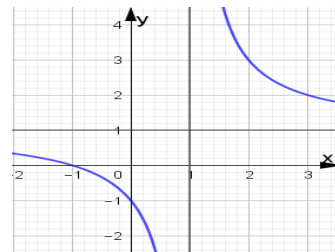
Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $b < 0 < a$. B. $b < a < 0$.
C. $a < b < 0$. D. $0 < b < a$.



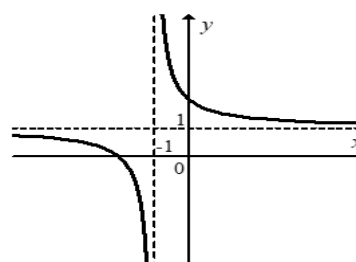
Câu 27. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ. khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $b < 0 < a$. B. $a < 0 < b$.
C. $0 < b < a$. D. $b < a < 0$.



Câu 28. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

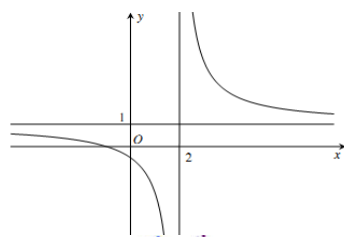
- A. $0 < a < b$. B. $b < 0 < a$.
C. $a < b < 0$. D. $0 < b < a$.



Câu 29. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$, có đồ thị như hình vẽ. Tính

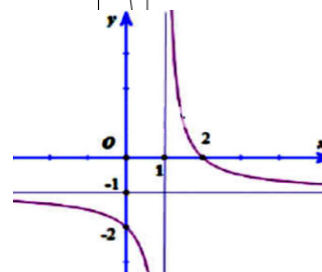
$$T = a + b$$

- A. $T = 2$. B. $T = 0$.
C. $T = -1$. D. $T = 3$.



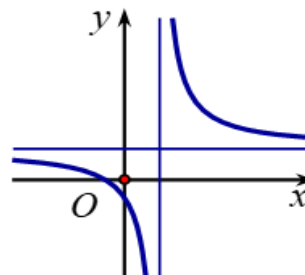
Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$ bằng

- A. $T = 12$. B. $T = 10$.
C. $T = -7$. D. $T = -9$.



Câu 31. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{cx-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

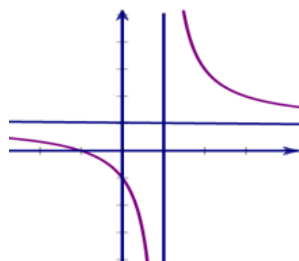
- A. $c < 0; b < 0$. B. $b < 0; c > 0$.
C. $b > 0; c > 0$. D. $b > 0; c < 0$.



Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên.

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

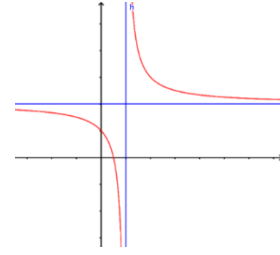
- A. $a > 1, b > 0, c < 1$. B. $a > 1, b < 0, c > 1$.
C. $a < 1, b > 0, c < 1$. D. $a > 1, b > 0, c > 1$.



Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ.

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $0 < ad < bc$. B. $ad < bc < 0$.
C. $bc < ad < 0$. D. $ad < 0 < bc$.



☒ DẠNG 4_ TÌM ĐIỀU KIỆN THAM SỐ M THỎA ĐK CHO TRƯỚC

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (C) và đường thẳng $d: y = px + q$.
- ◆ Phương trình hoành độ giao điểm của và: $\frac{ax+b}{cx+d} = px + q \Leftrightarrow F(x, m) = 0$
- ◆ Xử lý điều kiện và tìm tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 34. Tìm m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt thuộc hai nhánh đồ thị.

- A. $m \in (-\infty; 0)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.
C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m = 0$.

Câu 35. Giả sử $m = -\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ. Tính $a + 2b$.

- A. 2. B. 5. C. 11. D. 21.

Câu 36. Cho đường cong (C): $y = \frac{x-3}{x+1}$ và đường thẳng $d: y = x + 3m$. Tìm tất cả các giá trị của m để d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn thẳng AB có hoành độ bằng 3.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Câu 37. Tìm m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN là nhỏ nhất.

- A. 3. B. -1. C. 2. D. 1.

Câu 38. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị (C) hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

- A. -6. B. 0. C. 9. D. -27.

- Câu 39.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x - 2y - 2 = 0$?
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 40.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.
- A. $m \in (-\infty; +\infty)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in (-2; 4)$. D. $m \in (-\infty; -2)$.
- Câu 41.** Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng $\forall m \neq 0$ đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tích tất cả các giá trị của tham số m tìm được để đường thẳng d cắt Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2 lần diện tích tam giác OCD bằng
- A. $-\frac{4}{9}$. B. -4 . C. -1 . D. 0 .
- Câu 42.** Cho đường cong $(C): y = \frac{x-3}{x+1}$ và đường thẳng $d: y = x + 3m$. Tìm tất cả các giá trị của m để d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn thẳng AB có hoành độ bằng 3.
- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.
- Câu 43.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B . Giá trị nhỏ nhất của AB là
- A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{2}$. D. 2.
- Câu 44.** Biết đường thẳng $y = x - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_A, x_B . Khi đó $x_A + x_B$ là:
- A. $x_A + x_B = 5$. B. $x_A + x_B = 2$. C. $x_A + x_B = 1$. D. $x_A + x_B = 3$.
- Câu 45.** Để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị m thuộc khoảng nào?
- A. $m \in (-4; -2)$. B. $m \in (2; 4)$. C. $m \in (-2; 0)$. D. $m \in (0; 2)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.A	5.A	6	7.A	8.D	9.B	10.A
11.A	12.D	13.D	14.C	15.C	16.A	17.D	18.D	19.C	20.C
21.A	22.B	23.B	24.D	25.B	26.B	27.A	28.A	29	30.D
31.C	32.D	33.B	34.C	35.D	36.D	37.A	37.A	39.C	40.A
41.A	42.D	43.A	44.A	45.D					

§8 _ TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ

☒ DẠNG 1 _ TIẾP TUYẾN TẠI TIẾP ĐIỂM CỦA ĐỒ THỊ

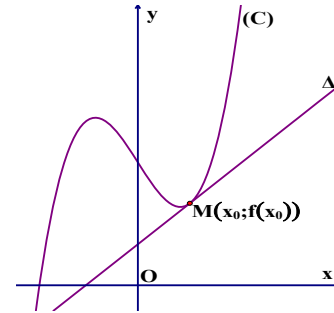
PHƯƠNG PHÁP

♦ Tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng

$$\Delta: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Để viết PTTT của (C) tại $M(x_0; f(x_0))$:

- Xác định tọa độ tiếp điểm $x_0; y_0$ từ giả thiết
- Tính hệ số góc tiếp tuyến: $f'(x_0)$
- Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



♦ **Chú ý:** Tọa độ giao điểm đặc biệt sau:

- Giao điểm của đồ thị với trục tung: $(0; y_0)$
- Giao điểm của đồ thị với trục hoành: $(x_0; 0)$

A - BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A.** $y = 4x - 6$. **B.** $y = 4x + 2$. **C.** $y = 4x + 6$. **D.** $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$, $y'(-1) = 4$.

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x = -1$ là: $M(-1; 2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1; 2)$ là

$$y = y'(-1)(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 4(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x + 6.$$

Ví dụ 2. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

- A.** $y = 7x + 13$. **B.** $y = -7x + 30$. **C.** $y = 3x + 9$. **D.** $y = -x - 2$.

Lời giải

Chọn C

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 9;$$

$$y' = \frac{-7}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = -7.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tương ứng là } y = -7(x - 3) + 9 \Leftrightarrow y = -7x + 30.$$

Ví dụ 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1-x}{2x+1}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành là

- A.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. **B.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. **C.** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. **D.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Giao điểm của (C) và Ox là: $A(1;0)$

Ta có: $y' = \frac{-3}{(2x+1)^2}$ nên $y'(1) = -\frac{1}{3}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $A(1;0)$ là: $y = y'(1)(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x-1)$ hay

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 4. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là

- A.** $y = 3x + 1$. **B.** $y = -3x - 1$. **C.** $y = -3x + 1$. **D.** $y = -3x + 3$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ mà $y_0 = -2$.

Khi đó $\frac{x_0+1}{x_0-2} = -2 \Rightarrow x_0+1 = -2(x_0-2) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow M(1; -2)$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$, suy ra $y'(1) = -3$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $M(1; -2)$ là $y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 1. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{1-x}{2x+1}$ tại giao điểm của (C) với trục hoành là

- A.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. **B.** $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. **C.** $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. **D.** $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm M có hoành độ $x = 1$.

- A.** $y = -5x + 3$. **B.** $y = 5x - 3$. **C.** $y = 3x - 5$. **D.** $y = -3x + 5$.

Câu 3. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là

- A.** $y = x + 2$. **B.** $y = -x + 2$. **C.** $y = -x - 3$. **D.** $y = x - 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm

$$M\left(1; \frac{1}{3}\right)$$
 là

- A.** $y = 3x - 2$. **B.** $y = -3x + 2$. **C.** $y = x - \frac{2}{3}$. **D.** $y = -x + \frac{2}{3}$.

- Câu 5.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2;3)$ là
A. $y = 2x + 7$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = -2x + 7$. **D.** $y = -2x - 1$.
- Câu 6.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
A. $y = -9x + 16$. **B.** $y = -9x + 20$. **C.** $y = 9x - 20$. **D.** $y = 9x - 16$.
- Câu 7.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $M(-3;2)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?
A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -2.
- Câu 8.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{2} + x$ tại điểm $M(2;4)$.
A. $y = 3x$. **B.** $y = 3x - 2$. **C.** $y = 3x - 1$. **D.** $y = -3x + 10$.
- Câu 9.** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm $A(-2; 3)$ là
A. $y = -2x - 1$. **B.** $y = -2x - 7$. **C.** $y = 2x + 1$. **D.** $y = 2x + 7$.
- Câu 10.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + x + 2$ tại điểm có hoành độ bằng -1 là
A. $y = -2x - 5$. **B.** $y = -2x + 1$. **C.** $y = -2x - 2$. **D.** $y = 10x - 13$.
- Câu 11.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là
A. $y = -3x + 13$. **B.** $y = 3x - 5$. **C.** $y = 3x + 13$. **D.** $y = -3x - 5$.
- Câu 12.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3;1)$ là
A. $y = -9x - 3$. **B.** $y = 9x - 26$. **C.** $y = 9x + 2$. **D.** $y = -9x - 26$.
- Câu 13.** Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$.
A. $\frac{9}{5}$. **B.** $-\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{5}{9}$. **D.** -10.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
A. $y = -2x + 1$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = -3x - 2$.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.
A. $y = 3x - 2$. **B.** $y = -3x - 2$. **C.** $y = 3x - 3$. **D.** $y = 3x + 2$.
- Câu 16.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2;2)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?
A. 9. **B.** 0. **C.** 24. **D.** 45.

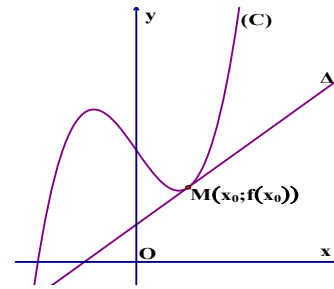
☒ DẠNG 2_Tiếp tuyến của đồ thị biết hệ số góc k**PHƯƠNG PHÁP**

♦ Viết PTTT của (C) tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ khi biết hệ số góc tiếp tuyến bằng k .

• Hệ số góc tiếp tuyến: $f'(x_0) = k \Rightarrow x_0 = ?$

• Xác định $x_0 \Rightarrow y_0 = ?$

• Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



♦ **Chú ý:** Các vị trí tương đối cơ bản:

Cho $\Delta_1: y = k_1x + m_1$ và $\Delta_2: y = k_2x + m_2$. Ta có:

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ m_1 = m_2 \end{cases};$

• $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ m_1 \neq m_2 \end{cases};$

• $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1;$

♦ Cho $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, ta có: Δ_1 tạo với Δ_2 góc $\alpha \Leftrightarrow \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \right| = \tan \alpha;$

• Đặc biệt: nếu $k_2 = 0$ thì: Δ_1 tạo với Δ_2 góc $\alpha \Leftrightarrow |k_1| = \tan \alpha.$

♦ **Hàm số bậc ba:** Tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc bé nhất khi $a > 0$ và lớn nhất khi $a < 0$

A - VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3-4x}{x-2}$ tại điểm có tung độ $y = -\frac{7}{3}$.

A. $\frac{9}{5}.$

B. $-\frac{5}{9}.$

C. $\frac{5}{9}.$

D. $-10.$

Lời giải

Chọn C

$$y = -\frac{7}{3} \Rightarrow \frac{3-4x}{x-2} = -\frac{7}{3} \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{5}{(x-2)^2}.$$

$$\text{Vậy hệ số góc cần tìm là } y'(-1) = \frac{5}{9}.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ có đồ thị (C) . Trong các tiếp tuyến của (C) , tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất, thì hệ số góc của tiếp tuyến đó là

A. $\frac{4}{3}.$

B. $\frac{5}{3}.$

C. $\frac{2}{3}.$

D. $\frac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có hệ số góc: $y'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + 2$

Hệ số góc nhỏ nhất khi $y''(x_0) = 0 \Rightarrow 6x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{3}$

Thay $x_0 = \frac{2}{3}$ vào $y'(x_0) = \frac{5}{3}$

Ví dụ 3. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C). Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2021$ là

A. 2.**B.** 1.**C.** 3.**D.** 0.**Lời giải****Chọn D**

$$y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ nên

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$$

Với $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 3x - 4\sqrt{2}$

Với $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3x + 4\sqrt{2}$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C). Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2020$ là

A. 2.**B.** 1.**C.** 0.**D.** 3.**Lời giải****Chọn A**

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$.

Vì tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2020$ nên $y'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$, suy ra PTTT là: $y = -9(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = -9x - 8$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -3$, suy ra PTTT là: $y = -9(x - 3) - 3 \Leftrightarrow y = -9x + 24$.

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

Câu 17. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ (C). Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(-2; 2)$ có hệ số góc bằng bao nhiêu?

A. 9.**B.** 0.**C.** 24.**D.** 45.

Câu 18. Trong các tiếp tuyến tại các điểm trên đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất bằng

A. -3.**B.** 3.**C.** 4.**D.** 0.

- Câu 19.** Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ là
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 1. D. 2.
- Câu 20.** Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Trong các tiếp tuyến với (C) , tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu?
- A. $k = 3$. B. $k = 2$. C. $k = 1$. D. $k = 0$.
- Câu 21.** Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có tiếp tuyến song song với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến đó là:
- A. $x = -3$. B. $y = -4$. C. $y = 4$. D. $x = 3$.
- Câu 22.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là:
- A. $y - 16 = -9(x + 3)$. B. $y = -9(x + 3)$. C. $y - 16 = -9(x - 3)$. D. $y + 16 = -9(x + 3)$.
- Câu 23.** Cho hàm số $y = 2 - \frac{4}{x}$ có đồ thị (H) . Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = -x + 2$ và tiếp xúc với (H) thì phương trình của Δ là
- A. $y = x + 4$. B. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = x + 6 \end{cases}$. D. Không tồn tại.
- Câu 24.** Lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = x^3 + 3x^2 - 8x + 1$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 2020$?
- A. $y = x + 2021$. B. $y = x + 4$.
C. $y = x - 4; y = x + 28$. D. $y = x - 2021$.
- Câu 25.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ (C) . Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau
- A. 0. B. 2. C. 1. D. Vô số.
- Câu 26.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -9x - 7$ là
- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.
- Câu 27.** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị. Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) , mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2020$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng
- A. $\frac{4}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. -1 .
- Câu 28.** Số cặp điểm A, B trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$, mà tiếp tuyến tại A, B vuông góc với nhau là
- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

- Câu 29.** Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{2-x}$ cắt đồ thị (C') của hàm số $y = x^2 + 1$ tại hai điểm A, B. Tiếp tuyến tại hai điểm A, B với đồ thị (C) có hệ số góc lần lượt là $k_1; k_2$. Tính tổng $k_1 + k_2$.
- A. $k_1 + k_2 = 3$. B. $k_1 + k_2 = \frac{5}{2}$. C. $k_1 + k_2 = 1$. D. $k_1 + k_2 = -\frac{5}{2}$.
- Câu 30.** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là
- A. $y = -3x - 1; y = -3x + 11$. B. $y = -3x + 10; y = -3x - 4$.
C. $y = -3x + 5; y = -3x - 5$. D. $y = -3x + 2; y = -3x - 2$.
- Câu 31.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Tiếp tuyến của vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ
- A. $x = 0$. B. $x = -2$. C. $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.
- Câu 32.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 10$ là
- A. $y = 9x + 6; y = 9x - 28$. B. $y = 9x; y = 9x - 26$.
C. $y = 9x - 6; y = 9x - 28$. D. $y = 9x + 6; y = 9x - 26$.
- Câu 33.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 9x - y + 7 = 0$ là
- A. $y = 9x + 25$. B. $y = -9x - 25$. C. $y = 9x - 25$. D. $y = -9x + 25$.
- Câu 34.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x - 3y + 6 = 0$.
- A. $y = \frac{1}{3}x - 1$. B. $y = \frac{1}{3}x + 1$. C. $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. D. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
- Câu 35.** Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.
- A. $y + 16 = -9(x + 3)$. B. $y = -9(x + 3)$.
C. $y - 16 = -9(x - 3)$. D. $y - 16 = -9(x + 3)$.
- Câu 36.** Có bao nhiêu điểm trên đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + \frac{7}{3}$ mà tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm đó song song với trục tung.
- A. vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

☒ DẠNG 4_ BÀI TOÁN TÌM THAM SỐ, DIỆN TÍCH TAM GIÁC, ...

PHƯƠNG PHÁP

- ◆ Ứng dụng phương trình tiếp tuyến của đồ thị
- ◆ Khai thác điều kiện của bài toán

♦ Giải quyết bài toán

A – VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Tìm m để mọi tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ đều có hệ số góc dương.

A. $m \neq 0$.**B.** $m > 1$.**C.** $m \neq 1$.**D.** $m \in \emptyset$.**Lời giải****Chọn D**

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số

 $y = x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - 1$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 + 2m - 3$$

$$\text{Hệ số góc luôn dương} \Leftrightarrow y'(x_0) > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m - 3)^2 < 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 1)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

A. 3.**B.** $\frac{3}{2}$.**C.** 9.**D.** $\frac{9}{2}$.**Lời giải****Chọn B**

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}. \text{ Theo đề } x_0 = 2; y_0 = 1; y'(x_0) = -1.$$

Suy ra pttt Δ là: $y = -x + 3$.Tiếp tuyến Δ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A(3; 0), B(0; 3)$.

$$\text{Do đó diện tích tam giác được tạo bởi } \Delta \text{ và các trục tọa độ bằng: } S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{9}{2}.$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m - 1)x + 2m$ (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 1$

A. $m = 1$.**B.** $m = 2$.**C.** $m = \frac{11}{6}$.**D.** $m = \frac{6}{11}$.**Lời giải****Chọn C**

$$y' = 3x^2 - 4x + m - 1$$

$$\text{Ta có } y' = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + m - \frac{7}{3} \geq m - \frac{7}{3}$$

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = \frac{2}{3}$ có hệ số góc nhỏ nhất và hệ số góc đó có giá trị $k = m - \frac{7}{3}$

$$\text{Theo bài ra: } 2.k = -1 \Leftrightarrow 2\left(m - \frac{7}{3}\right) = -1 \Rightarrow m = \frac{11}{6}.$$

B - BÀI TẬP RÈN LUYỆN:

- Câu 37.** Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y = 3x + 1$.
A. $m = 3$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -2$.
- Câu 38.** Cho hàm số $y = x^3 - 1 - m(x+1)$ (C_m) . Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến tại (C_m) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8?
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.
- Câu 39.** Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tính $S = a - b$.
A. $S = \frac{1}{2}$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = -1$. **D.** $S = 1$.
- Câu 40.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + x + 1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hoành độ $x = 1$. Tất cả các giá trị thực của tham số m để thỏa mãn $k \cdot f(-1) < 0$.
A. $m > 2$. **B.** $m \leq -2$. **C.** $-2 < m < 1$. **D.** $m \geq 1$.
- Câu 41.** Gọi là tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại điểm có hoành độ bằng -3 . Khi đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích là:
A. $S = \frac{169}{6}$. **B.** $S = \frac{121}{6}$. **C.** $S = \frac{25}{6}$. **D.** $S = \frac{49}{6}$.
- Câu 42.** Đường thẳng $y = 9x + m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 1$ khi m bằng
A. -6 hoặc 26 . **B.** -1 hoặc 3 . **C.** -3 hoặc 1 . **D.** 3 hoặc -5 .
- Câu 43.** Tìm m để đồ thị: $y = \frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 + (3m-4)x + 1$ có điểm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $x - y + 2013 = 0$.
A. $m \leq 1$. **B.** $-\frac{1}{2} \leq m$. **C.** $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$. **D.** $-\frac{1}{2} < m < 1$.
- Câu 44.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị là (C) . Giả sử (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = 2$, đồng thời (d) cắt đồ thị (C) tại N , tìm tọa độ N .
A. $N(1; -1)$. **B.** $N(2; 3)$. **C.** $N(-4; -51)$. **D.** $N(3; 19)$.
- Câu 45.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + x + 1$ có đồ thị (C) . Trong các tiếp tuyến với đồ thị (C) , hãy tìm phương trình tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất?
A. $y = -8x - 10$. **B.** $y = x - 10$. **C.** $y = -8x + 10$. **D.** $y = -x + 10$.
- Câu 46.** Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - mx + 2m - 3$ có đồ thị là (C) , với m là tham số thực. Gọi T là tập tất cả các giá trị nguyên của m để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương. Tính tổng các phần tử của T .
A. 3. **B.** 6. **C.** -6 . **D.** -3 .

Câu 47. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 + mx + 1$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu giá trị của m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của (C) đi qua gốc tọa độ O ?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 48. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $y = x + 2$.B. $y = x - 2$.C. $y = -x + 2$.D. $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.C	4.C	5	6.D	7.A	8.B	9.D	10.B
11.A	12.B	13.C	14.C	15.A	16.A	17.A	18.A	19.D	20.C
21.B	22.A	23.C	24.C	25.D	26.D	27.A	28.B	29.B	30.A
31.C	32.D	33.C	34.D	35.C	36.C	37.D	38.D	39.D	40.C
41.A	42.A	43.C	44.C	45.C	46.D	47.B	48.A		

----- TOANMATH.com -----