

Chương 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I. Tìm tập xác định của phương trình

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

Điều kiện xác định của phương trình (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện cần của ẩn x để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

Các dạng thường gặp:

a) Điều kiện để biểu thức $\sqrt{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \geq 0$;

b) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \neq 0$;

c) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ có nghĩa là $f(x) > 0$.

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+1} = 3$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = x+1$;

b) $\sqrt{x-5} = 1$;

d) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3} = x+5$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

c) Điều kiện xác định của phương trình là $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

d) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{3}{x^2-4} = \frac{\sqrt{3-x}}{3}$;

b) $\frac{2x-1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{1-x}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ 3 \geq x \end{cases}$.
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn cả hai điều kiện này.

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra nghiệm của các phương trình sau:

- a) $\sqrt{3x-4} = \sqrt{4-3x}$; c) $\frac{\sqrt{5x+15}}{x+3} = \sqrt{-x-3}$.
- b) $3x+5-\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x}+2018$;

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ 4-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases}$ hay $x = \frac{4}{3}$. Thay $x = \frac{4}{3}$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{4}{3}$.
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Thay $x = 3$ vào phương trình ta có $3 \cdot 3 - 0 = 0 + 2018$ (vô lý), vậy phương trình đã cho vô nghiệm.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 5x+15 \geq 0 \\ x+3 \neq 0 \\ -x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq -3 \\ x \leq -3 \end{cases}$. Vậy không có x nào thỏa điều kiện xác định của phương trình nên phương trình vô nghiệm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

- a) $1 + \sqrt{2x-5} = 0$; c) $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = x-3$;
- b) $\frac{2x+1}{2x^2-3x+1} = x-1$; d) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{2-3x}{5x+1}$.

Lời giải.

- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2-3x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.
- d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ 5x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{1}{5} \end{cases}$.

Bài 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = x - 1;$

c) $\sqrt{5 - 2x} = \sqrt{x^2 + x + 1};$

b) $\frac{1}{x^2 + 1} = x - 3;$

d) $\frac{x + 1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 5}} = x - 3.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 + 2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 3 \geq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

c) Điều kiện xác định của phương trình là:

$$\begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $-x^2 + 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) - 1 > 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2 - 1 > 0$ (vô lý). Vậy không tồn tại giá trị của x để phương trình xác định.

Bài 3. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x - 1} + \sqrt{x + 2} = 7 - x;$

c) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} + \sqrt{2x - 5} = 2x^2 - 5x;$

b) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0;$

d) $\sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^3 - 2}.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}.$

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 6.$

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 4.$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^3 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{2}.$

Bài 4. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $(x + 1)\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x^2 + 1;$

c) $\sqrt{\sqrt{2} - 1 - x} + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}};$

b) $x(x + 1)(x - 3) + 3 = \sqrt{4 - x} + \sqrt{1 + x};$

d) $\sqrt{1 - x^2} = \left(\frac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4.$

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} \sqrt{2}-1-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2}-1.$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$

Bài 5. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x;$

c) $2\sqrt{1-x}+3\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1+x}-x+3;$

b) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}=2\sqrt{x^2-4}-2x+2;$

d) $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -2 \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \end{cases}$ (luôn đúng). Vậy

phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 6. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\frac{3x}{\sqrt{|x^2-1|}}=x+1;$

b) $\frac{2x+3}{x-3}=\frac{24}{x^2-9}+\frac{2(x+5)}{x+3}.$

Lời giải.

a) Vì $|x^2-1| \geq 0$ nên điều kiện xác định của phương trình là: $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ x^2-9 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 3.$

Bài 7. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $2\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}=4;$

b) $\sqrt{\frac{6}{2-x}}+\sqrt{\frac{10}{3-x}}=4.$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x+2+\sqrt{x+1} \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1}+1)^2 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2.$

Bài 8. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

- a) $\sqrt[4]{57-x} + \sqrt[4]{x+40} = 5;$
- b) $\frac{\sqrt{x}-1}{|x|-3} = 0.$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 57-x \geq 0 \\ x+40 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 57 \\ x > -40 \end{cases} \Leftrightarrow -40 \leq x \leq 57.$
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x \geq 0 \\ |x|-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 3.$

Bài 9. Tìm m để phương trình $\frac{x^2+x}{x-m+3} = 1$ xác định trên $[-1; 1)$.

Lời giải. Phương trình xác định khi $x-m+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m-3.$

Để phương trình xác định trên $[-1; 1)$ thì $m-3 \notin [-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < -1 \\ m-3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \geq 4 \end{cases}.$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Bài 10. Tìm giá trị của m để các phương trình sau xác định với mọi $x \in \mathbb{R}.$

- a) $\sqrt{2x^2+m} = x-2;$
- b) $\frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+4x+5-m}} = x-1;$
- c) $\frac{x+1}{x^2-m+5} = x-3;$
- d) $\frac{3x-2}{mx^2+9} = x^3+2.$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2+m \geq 0.$ Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $m \geq 0.$
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2+4x+5-m > 0 \Leftrightarrow 2(x^2+2x+1)+3-m > 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2+3-m > 0.$ Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $3-m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2-m+5 \neq 0.$ Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $x^2-m+5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = m-5$ vô nghiệm, điều này xảy ra khi $m-5 < 0 \Leftrightarrow m < 5.$
- d) Điều kiện xác định của phương trình là: $mx^2+9 \neq 0.$

- Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $\frac{3x-2}{9} = x^3+2$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}.$

- Nếu $m \neq 0$, để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $mx^2+9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{9}{m}$ vô nghiệm, điều này xảy ra khi $-\frac{9}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0.$

Vậy $m \geq 0$ thì phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}.$

II. Phương trình hệ quả

1. Tóm tắt lý thuyết

Khái niệm. Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là **phương trình hệ quả** của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

Nhận xét. Từ khái niệm trên, ta thấy các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ luôn là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$, do đó nếu ta tìm được tất cả các nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì bằng cách thử lại, ta sẽ tìm được tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Đây cũng chính là phương pháp giải một phương trình dựa vào phương trình hệ quả của nó.

Các nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ mà không thỏa phương trình $f(x) = g(x)$ được gọi là các **ng nghiệm ngoại lai**.

2. Các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả thường gặp

A. Bình phương hai vế

Ví dụ 4.

$$\sqrt{2x-1} = x-1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2x-1 = (x-1)^2 \quad (2)$$

Qua phép biến đổi **bình phương hai vế**, ta được phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

B. Nhân hai vế của phương trình với một đa thức

Ví dụ 5.

$$\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(x+1) + \frac{x}{2}(x-3) = 2x \quad (2)$$

Qua phép biến đổi **nhân hai vế** với $(x+1)(x-3)$, ta được phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

3. Phương pháp giải phương trình dựa vào phương trình hệ quả

Bước 1: Sử dụng các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả, đưa phương trình đã cho về một phương trình đơn giản hơn (*có thể giải được dễ dàng hơn*).

Bước 2: Giải phương trình hệ quả để tìm tất cả các nghiệm.

Bước 3: Thử lại các nghiệm để loại nghiệm ngoại lai.

Bước 4: Kết luận.

 *Khi giải phương trình, ta có thể thực hiện liên tiếp các phép biến đổi. Tuy nhiên, trong các phép biến đổi liên tiếp đó, nếu có một phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả thì phương trình cuối cùng vẫn chỉ là phương trình hệ quả của phương trình ban đầu.*

Dạng 2. Khử mẫu (nhân hai vế với biểu thức)

Ở dạng này, ta sẽ đặt điều kiện xác định rồi nhân hai vế với mẫu của phân thức. Sau khi giải xong phương trình, kiểm tra nghiệm có thỏa mãn phương trình ban đầu hay không.

Ví dụ 6. Giải phương trình:

$$\frac{x^2 + x + 3}{x + 2} = 3$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x \neq -2$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + x + 3}{x + 2} &= 3 \\ \Rightarrow x^2 + x + 3 &= 3(x + 2) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -1 \vee x &= 3\end{aligned}$$

Hai nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện xác định và thỏa phương trình ban đầu.

Vậy $S = \{-1; 3\}$.

Ví dụ 7. Giải phương trình sau : $\frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} - 1$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > 1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - 1} &= \sqrt{x} - 1 \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 3 &= x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện và thử lại phương trình đã cho ta được một nghiệm là $x = 4$. Vậy $S = \{4\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Giải phương trình sau: $2x + \frac{3}{x-2} = \frac{3x}{x-2}$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

$$\begin{aligned}2x + \frac{3}{x-2} &= \frac{3x}{x-2} \\ \Leftrightarrow \frac{2x(x-2) + 3}{x-2} &= \frac{3x}{x-2} \\ \Rightarrow 2x^2 - 4x + 3 &= 3x \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Thử lại phương trình ban đầu ta được các nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $S = \left\{3; \frac{1}{2}\right\}$.

Bài 12. Giải phương trình: $\frac{x+1}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > -1$.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} &= \sqrt{x+1} \\ \Rightarrow x+1 &= x+1 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $S = (-1; +\infty)$.

Bài 13. Giải phương trình:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x+5}{\sqrt{x-1}}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > 1$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x-1}} &= \frac{x+5}{\sqrt{x-1}} \\ \Rightarrow 2x^2 + 5x - 1 &= x+5 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Hai nghiệm này đều không thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy $S = \emptyset$.

Bài 14. Giải phương trình sau: $1 + \frac{2}{x-4} = \frac{10}{x+5} - \frac{24}{(4-x)(x+5)}$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -5 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{x-4} &= \frac{10}{x+5} - \frac{24}{(4-x)(x+5)} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+5) + 2(x+5)}{(x-4)(x+5)} &= \frac{10(x-4) + 24}{(x-4)(x+5)} \\ \Rightarrow x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$. Vậy $S = \{1; 6\}$

Bài 15. Giải phương trình:

$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{\sqrt{3x-1}} = \sqrt{3x-1}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $x > \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 - 7x + 2}{\sqrt{3x - 1}} &= \sqrt{3x - 1} \\ \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 &= (\sqrt{3x - 1})^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 &= 3x - 1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, ta được nghiệm $x = 3$. Vậy $S = \{3\}$.

Dạng 3. Bình phương hai vế (làm mất căn)

Sau khi đặt điều kiện ban đầu, tiến hành chuyển vế và sử dụng kỹ thuật bình phương hai vế để làm mất căn thức, đưa phương trình ban đầu về phương trình hệ quả, dưới dạng đa thức.

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{x+2} = \sqrt{3-2x}$ (1).

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-2x \geq 0 \end{cases}$.

$$(1) \Rightarrow x+2 = 3-2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Thử lại nghiệm ta thấy thỏa mãn phương trình.

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

Ví dụ 9. Giải phương trình: $\sqrt{-10x+10} = x-1$

Lời giải. Điều kiện xác định $-10x+10 \geq 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{-10x+10} &= x-1 \\ \Rightarrow -10x+10 &= (x-1)^2 \\ \Leftrightarrow -10x+10 &= x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow x^2+8x-9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -9. \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại phương trình đã cho ta được một nghiệm là $x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 16. Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4x^2+5x-1}}{x+1} = \sqrt{2}$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x^2 + 5x + 1 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 5x - 1} &= \sqrt{2}(x+1) \\ \Rightarrow 4x^2 + 5x - 1 &= 2(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình. Vậy $S = \{1\}$.

Bài 17. Giải phương trình sau $\frac{\sqrt{x-1}}{x+2} = \frac{-x-11}{x+2} + 2$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} &= \frac{-x-11}{x+2} + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} &= \frac{x-7}{x+2} \\ \Rightarrow \sqrt{x-1} &= x-7 \\ \Rightarrow x-1 &= (x-7)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, phương trình đã cho có nghiệm $x = 10$. Vậy $S = \{10\}$.

Bài 18. Giải phương trình sau: $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+1} = 2$.

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq 4 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x+1} &= 2 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2-3x-4} &= 2x+2 \\ \Rightarrow x^2-3x-4 &= 4x^2+8x+4 \\ \Leftrightarrow 3x^2+11x+8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{8}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{8}{3}$. Vậy $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$.

Bài 19. Giải phương trình $\sqrt{3x-5} = \sqrt{2-x}$

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x - 5} &= \sqrt{2 - x} \\ \Rightarrow 3x - 5 &= 2 - x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{7}{4} \right\}$.

Bài 20. Giải phương trình $\sqrt{3x + 1} = 2x$.

Lời giải. Điều kiện xác định $3x + 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x + 1} &= 2x \\ \Rightarrow 3x + 1 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \{1\}$.

Bài 21. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 10x - 44} = 8 - x$.

Lời giải. Điều kiện xác định $3x^2 - 10x - 44 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2 - 10x - 44} &= 8 - x \\ \Rightarrow 3x^2 - 10x - 44 &= x^2 - 16x + 64 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 108 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} x = 6 \\ x = -9 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \{-9; 6\}$.

Bài 22. Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4x^2 - 3} - x}{x - 1} = 0$$

Lời giải. Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x^2 - 3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4x^2 - 3} - x}{x - 1} &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 3} &= x \\ \Rightarrow 4x^2 - 3 &= x^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ta loại nghiệm $x = 1$ vì không thỏa điều kiện xác định. Còn $x = -1$ không là nghiệm của phương trình ban đầu. Vậy $S = \emptyset$.

Bài 23. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{12x-4}}{(x+1)(2x+5)} + \frac{2x}{2x+5} = \frac{x}{x+1}$.

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} 12x-4 \geq 0 \\ (x+1)(2x+5) \neq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{12x-4}}{(x+1)(2x+5)} + \frac{2x}{2x+5} = \frac{x}{x+1} \quad (1) \\ \Rightarrow & \sqrt{12x-4} + 2x(x+1) = x(2x+5) \\ \Leftrightarrow & \sqrt{12x-4} = 3x \\ \Rightarrow & 12x-4 = 9x^2 \\ \Leftrightarrow & 9x^2 - 12x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & (3x-2)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Thay $x = \frac{2}{3}$ vào phương trình (1) ta thấy thỏa mãn. Vậy $S = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$.

Bài 24. Giải phương trình $\frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x}$.

Lời giải. Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x} \quad (1) \\ \Rightarrow & 2x+1 = \sqrt{x+1} \quad (\text{nhân cả hai vế cho } x\sqrt{x+1}) \\ \Rightarrow & (2x+1)^2 = x+1 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 4x + 1 = x+1 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 3x = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy $S = \emptyset$.

III. Phương trình tương đương

Định nghĩa 1. Hai phương trình (cùng ẩn) gọi là tương đương nếu chúng có chung một tập hợp nghiệm. Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

Định lý 1. Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương:

- Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.
- Nhân hoặc chia cả hai vế cùng với một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

 **Chú ý:**

- Hai phương trình bất kỳ vô nghiệm có cùng ẩn là tương đương với nhau.

- b) Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.
- c) Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định $\mathbb{D}$ (hay có cùng điều kiện xác định mà ta cũng kí hiệu là $\mathbb{D}$) và tương đương với nhau, ta nói:
- Hai phương trình tương đương với nhau trên $\mathbb{D}$, hoặc
 - Với điều kiện $\mathbb{D}$, hai phương trình tương đương với nhau.

Dạng 4. Phương pháp chứng minh hai phương trình tương đương

Khi giải phương trình hoặc xét sự tương đương của hai phương trình thông thường ta sử dụng một trong những cách sau:

- a) Giải từng phương trình để so sánh các tập nghiệm
- b) Sử dụng các phép biến đổi tương đương: Các phép biến đổi sau mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình thì ta thu được phương trình mới tương đương:
 - Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.
 - Nhân hoặc chia cả hai vế cùng với một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.
 - Bình phương hai vế của một phương trình có hai vế luôn cùng dấu khi ẩn lấy mọi giá trị thuộc tập xác định của phương trình.

Ví dụ 10. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$
- b) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$.

Lời giải.

- a) $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ là sai vì $|x| = 2 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$
- b) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ là đúng vì hai phương trình $x - 1 = 0$ và $(x - 1)^2 = 0$ có chung tập nghiệm là $S = \{1\}$

Ví dụ 11. Cặp phương trình nào sau đây là tương đương?

- a) $3x - \frac{21}{4} = 0$ và $4x - 7 = 0$.
- b) $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $-2x^2 + 8x - 6 = 0$

Lời giải.

- a) Phương trình $3x - \frac{21}{4} = 0$ có nghiệm $x = \frac{10}{6}$, phương trình $4x - 7 = 0$ có nghiệm $x = \frac{7}{4}$. Vậy hai phương trình đã cho không tương đương.
- b) Nhân hai vế của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ với -2 ta được phương trình $-2x^2 + 8x - 6 = 0$. Vậy hai phương trình đã cho tương đương.

Ví dụ 12. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2$. Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang vế phải thì ta thu được phương trình tương đương.
- Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2}$. Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ cả hai vế ta được phương trình tương đương.

Lời giải.

- Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang vế phải thì ta thu được phương trình tương đương vì tuân thủ phép biến đổi tương đương (Cộng hai vế của phương trình với $-\sqrt{x-2}$ và không làm thay đổi điều kiện). Khẳng định đã cho là đúng.
- Điều kiện của phương trình là: $x \leq 2$. Khi Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ cả hai vế ta đã thay đổi điều kiện của phương trình ban đầu nên kết quả không thu được phương trình tương đương. Khẳng định ban đầu là sai.

Ví dụ 13. Giải phương trình :

$$\frac{5x+3}{4} - x = \frac{|2x-3|}{2} \quad (3.1)$$

Lời giải. (3.1) $\Leftrightarrow x+3 = 2|2x-3|$

- Nếu $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ thì $|2x-3| = 2x-3$.
 Khi đó: (3.1) $\Leftrightarrow x+3 = 2(2x-3) \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$)
- Nếu $2x-3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ thì $|2x-3| = 3-2x$.
 Khi đó: (3.1) $\Leftrightarrow x+3 = 2(3-2x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$ (thỏa điều kiện $x < \frac{3}{2}$)

Vậy phương trình (3.1) có hai nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{3}{5}$

Ví dụ 14. Xác định m để phương trình $\frac{3x+2}{x^2+x+1} = 2$ và phương trình $-x^2 + (1-m)x - m + \frac{1}{2} = 0$ tương đương.

Lời giải. Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có :

$$\frac{3x+2}{x^2+x+1} = 2 \Leftrightarrow 3x+2 = 2x^2+2x+2 \Leftrightarrow 2x^2-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Để hai phương trình tương đương thì phương trình $-x^2 + (1-m)x - m + \frac{1}{2} = 0$ phải có nghiệm $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$. Thay $x = 0$ và $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình $-x^2 + (1-m)x - m + \frac{1}{2} = 0$ ta được $m = -\frac{1}{2}$. Lúc đó phương

trình đó trở thành: $x^2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Các phương trình nào sau đây là tương đương?

a) $\sqrt{x-3} + x = \sqrt{x-3} + 1$ và $x = 1$

b) $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{x^2+1}}$ và $x^2 = 9$

Lời giải.

a) Điều kiện thì hai phương trình $\sqrt{x-3} + x = \sqrt{x-3} + 1$ là $x \geq 3$ nên phương trình $\sqrt{x-3} + x = \sqrt{x-3} + 1$ vô nghiệm. Do đó không tương đương với phương trình $x = 1$.

b) Ta có $x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên nhân hai vế của phương trình $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{x^2+1}}$ với $\sqrt{x^2+1}$ ta được phương trình $x^2 = 9$. Vậy hai phương trình đã cho tương đương.

Bài 26. Đúng hay sai?

a) $\sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1$.

b) $\sqrt{x-2} = 3-x \Leftrightarrow x-2 = (3-x)^2$

Lời giải.

a) Vì hai vế đều không âm nên bình phương hai vế ta được phương trình tương đương. Hay $\sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1$ là đúng.

b) Do vế phải của phương trình $\sqrt{x-2} = 3-x$ có thể cùng dấu hoặc trái dấu với vế trái nên bình phương hai vế chỉ nhận được phương trình hệ quả. Khẳng định $\sqrt{x-2} = 3-x \Leftrightarrow x-2 = (3-x)^2$ là sai.

Bài 27. Cách giải sau sai ở đâu?

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{x+3} - 3 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+3} &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= -3 \end{aligned}$$

Lời giải. Cách giải trên sai ở bước cuối cùng ta đã làm mất điều kiện của phương trình nên không thể nhận được phương trình tương đương, $x = -3$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 28. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào cho ta phương trình tương đương, phép biến đổi nào cho ta phương trình không tương đương?

a) Lược bỏ số hạng $\frac{4}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 - 4x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} - 4$.

b) Lược bỏ số hạng $\frac{5}{x+2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 + 1 + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x+2} + 2x$.

Lời giải.

a) Khi ta lược bỏ số hạng $\frac{4}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 - 4x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} - 4$ ta được phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, tuy nhiên nó lại không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Nên phép biến đổi trên không nhận được phương trình tương đương.

b) Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3.$

- Với $x = 3$: thay vào phương trình ta thấy vô lí.
- Với $x = -3$: thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3\}$.

c) Điều kiện $x > 2$.

Vì $x > 2 > 0$ nên $VT > 0$. Mà $VP < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

d) Điều kiện $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

Thay $x = -1$ vào phương trình ta thấy vô lí. Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 33. Tìm điều kiện của mỗi phương trình rồi suy ra tập nghiệm:

a) $\sqrt{-x^2 - (y+1)^2} + xy = (x+1)(y+1)$

b) $\sqrt{-x^2 + 6x - y^2 + 2y - 10} + x + y = 4 + (x-3)(y+2)$

Lời giải.

a) Điều kiện $-x^2 - (y+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$

Thay $x = 0, y = -1$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{(x; y)\} = \{(0; -1)\}$.

b) Điều kiện $-x^2 + 6x - y^2 + 2y - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$

Thay $x = 3, y = 1$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{(x; y)\} = \{(3; 1)\}$.

Bài 34. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = x$

b) $1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = x^2$

c) $x\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$

Lời giải.

a) Điều kiện $x > 1$.

Vì $x > 1 \Rightarrow x^3 > x \Rightarrow VT > VP \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện $-1 < x < 1$.

Vì $-1 < x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow VT > VP \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Vì $x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow VT \geq 0 \Rightarrow VP \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Bài 35. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} = 0$

c) $x + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$

b) $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$

d) $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$

Lời giải.a) Điều kiện $x \geq -1$.

$$\text{Phương trình tương đương } \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ \sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (TM)} \\ x = -2 \text{ (Loại)} \\ x = -1 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) Điều kiện $x > 3$.Phương trình tương đương $x = 4$ (TM). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.c) Điều kiện $x \neq 2$.Phương trình tương đương $x - 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 2$ (Loại). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.d) Điều kiện $x \neq 1$.

$$\text{Phương trình tương đương } 2x = \frac{3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (TM). Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$$

Bài 36. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $\sqrt{4-x} - 2 = \sqrt{x} - x$

b) $3\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2}$

Lời giải.a) Điều kiện $0 \leq x \leq 4$.Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 3$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 4$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{0; 4\}$.b) Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$.Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

- Với $x = -2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = -1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{0\}$.**Bài 37.** Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế:

a) $|x - 2| = x + 2$

b) $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x}$

c) $\sqrt{5 - 2x} = x - 1$

Lời giải.

a) $|x - 2| = x + 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x = 0.$

Thay $x = 0$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.

b) $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x} \Rightarrow x - 3 = 9 - 2x \Rightarrow x = 4.$

Thay $x = 4$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

c) $\sqrt{5 - 2x} = x - 1 \Rightarrow 5 - 2x = (x - 1)^2 \Rightarrow x = \pm 2.$

- Thay $x = 2$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Thay $x = -2$ vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Bài 38. Xét sự tương đương của các phương trình sau:

a) $\frac{x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x - 4}} = \sqrt{x - 4}$ và $\frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x - 1}} = 0$

b) $|2 - x| = 2x - 1$ và $x^2 - 1 = 0$

Lời giải.

a) Xét phương trình $\frac{x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x - 4}} = \sqrt{x - 4}$ (1).

Điều kiện $x > 4$.

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (Loại)} \\ x = 5 \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{5\}.$$

Xét phương trình $\frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x - 1}} = 0$ (2).

Điều kiện $x > 1$.

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (Loại)} \\ x = 5 \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{5\}.$$

Vì $S_1 = S_2$ nên hai phương trình đã cho tương đương.

b) Xét phương trình $|2 - x| = 2x - 1$ (1).

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Vì } |2 - x| \geq 0 \Rightarrow 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

- Xét $2 - x = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$ (TM).
- Xét $2 - x = -2x + 1 \Rightarrow x = -1$ (Loại).

Vậy $S_1 = \{1\}$.

Xét phương trình $x^2 - 1 = 0$ (2).

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow S_2 = \{\pm 1\}.$$

Vì $S_1 \neq S_2$ nên hai phương trình đã cho không tương đương.

§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Các dạng toán

Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất

Phương pháp giải:

- a) $a \neq 0$: Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.
- b) $a = 0$ và $b \neq 0$: Phương trình vô nghiệm.
- c) $a = 0$ và $b = 0$: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$$m^2x + 2 = x + 2m \quad (1)$$

Lời giải. Ta có biến đổi tương đương

$$(1) \Leftrightarrow m^2x - x = 2m - 2 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1) \quad (2)$$

Ta xét các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Khi $m \neq \pm 1$, ta có $m^2 - 1 \neq 0$ nên (2) có nghiệm

$$x = \frac{2(m-1)}{m^2-1} = \frac{2}{m+1}.$$

Đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Trường hợp 2: Khi $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0 \cdot x = 0$. Phương trình này có nghiệm đúng với mọi số thực x nên phương trình (1) cũng có nghiệm đúng với mọi số thực x . **Trường hợp 3:** Khi $m = -1$, phương trình (2) trở thành $0 \cdot x = -4$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 1$: (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{m+1}$.
- Với $m = -1$: (1) vô nghiệm.
- Với $m = 1$: (1) có vô số nghiệm.

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình $\frac{2x+a}{a-2} - \frac{a-2x}{a+2} = \frac{6a}{a^2-4}$. (1)

Lời giải. Ta có $\begin{cases} a-2 \neq 0 \\ a+2 \neq 0 \\ a^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm 2$.

Phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$(2x+a)(a+2) - (a-2x)(a-2) = 6a \Leftrightarrow 2ax = a. \quad (2)$$

Trường hợp 1: Nếu $a \neq 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $a = 0$ thì $(2) \Leftrightarrow 0.x = 0$, phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x .

Kết luận:

- Với $a \neq 0$ và $a \neq \pm 2$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.
- Với $a = 0$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x .
- Với $a = \pm 2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có tập hợp nghiệm là $\mathbb{R}$

$$m(m^2x - 1) = 1 - x \quad (1)$$

Lời giải. Phương trình đã cho viết dưới dạng $(m^3 + 1)x = m + 1$. (2)

Do đó, phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy với $m = -1$ thì phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm $x > 2$

$$2x - 3m = 1 \quad (1)$$

Lời giải. Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng $x = \frac{3m + 1}{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm $x > 2$ khi và chỉ khi $\frac{3m + 1}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận phương trình $(m^2 + 4)x - 3m = x - 3$. (1)

Lời giải. Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng $(m^2 + 3)x = 3m - 3$. (2).

Vì $m^2 + 3 > 0$, với mọi giá trị thực của m nên phương trình (2) có 1 nghiệm duy nhất là $x = \frac{3m - 3}{m^2 + 3}$.

Bài 2. Giải và biện luận phương trình $m(x - 2m) = x + m + 2$. (1)

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 1)x = 2m^2 + m + 2$. (2)

- Với $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0.x = 5$. Điều này vô lí, phương trình đã cho vô nghiệm.

- Với $m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{m^2 + 2 + m}{m - 1}$.

Bài 3. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 2 = x + 2m$. (1)

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 1)x = 2m - 2$. (2)

- Với $m \neq \pm 1$, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2m - 2}{m^2 - 1} = \frac{2}{m + 1}$.
- Với $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0.x = 0$. Phương trình đúng với mọi số thực x .
- Với $m = -1$, phương trình (2) trở thành $0.x = -4$. Điều này vô lí nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 4. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 1 = (m - 1)x + m$. (1).

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - m + 1)x = m - 1$. (2).

Vì $m^2 - m + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình (2) luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{m - 1}{m^2 - m + 1}$.

Bài 5. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$. (1).

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 4)x = 3m - 6$. (2).

- Với $m \neq \pm 2$, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m - 6}{m^2 - 4} = \frac{3}{m + 2}$.
- Với $m = 2$, phương trình (2) trở thành $0.x = 0$. Phương trình đúng với mọi số thực x .
- Với $m = -2$, phương trình (2) trở thành $0.x = -12$. Điều này vô lý nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$ (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^3 - 4m)x = 2m + m^2$. (2).

Phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m^3 - 4m = 0 \\ 2m + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Bài 7. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 2)x = m^2 - 3m + 2$. (2).

Phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Bài 8. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 2)x = m^2 - 3m + 2$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Bài 9. Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m + 3)(x - m) = 2(x - 2)$ (1) vô nghiệm.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m + 1)x = m^2 + 3m - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m + 1 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 1 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Bài 10. Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m - 1)^2x = 4x + m + 1$ (1) vô nghiệm.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 + 2m - 3)x = m + 1$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

Bài 11. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x - 1) = 2(mx - 2)$ (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 2m)x = m^2 - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Bài 12. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x - 1) = -4(mx + 1)$ (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 + 4m)x = m^2 - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm dương duy nhất.

$$\text{Điều này xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 + 4m \neq 0 \\ \frac{m^2 - 4}{m^2 + 4m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq 0 \end{cases} \quad m^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Giải và biện luận phương trình $(x - 1)(x - mx + 2) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = 1 \\ (1 - m)x = -2 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 1$, phương trình (*) trở thành $0.x = -2$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m = 3$, phương trình (*) trở thành $-2x = -2$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m \neq 1$ và $m \neq 3$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{1-m} \neq 1$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{2}{1-m}$.

Bài 14. Giải và biện luận phương trình $(x^2 - 4)(mx - 3) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ mx = 3 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 0$, phương trình (*) trở thành $0.x = 3$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = -\frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $-\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m \neq \pm \frac{3}{2}$ và $m \neq 0$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{m} \neq \pm 2$. Do đó, phương trình (1) có ba nghiệm $x = \pm 2$ và $x = \frac{3}{m}$.

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn là phải tìm cách làm mất dấu căn. Có các phương pháp thường dùng như: bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, đưa phương trình về dạng tích, ...

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Thiết lập điều kiện rồi sau đó bình phương hai vế.

$$\bullet \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$$

$$\bullet \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$$

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Nhiều phương trình, việc bình phương không thể làm mất hết căn hoặc lại đưa về những phương trình bậc cao hơn hai. Những câu như vậy ta không nên bình phương hai vế mà nên sử dụng phương pháp khác.

Sau đây là một số dạng hay gặp trong đặt ẩn phụ:

$$\bullet af(x) + b\sqrt{f(x)} = c. \text{ Đặt } \sqrt{f(x)} = t.$$

$$\bullet a(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}) + b\sqrt{A.B} = c \text{ (A, B là biểu thức của } x \text{)}. \text{ Đặt } \sqrt{A} \pm \sqrt{B} = t \Rightarrow \sqrt{A.B} = \dots \text{ (Bình phương } t \text{ để đưa ra } \sqrt{A.B} \text{).}$$

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Nếu phương trình đưa được về tích ta có thể chuyển về các phương trình dễ giải hơn. Chúng ta có thể thực hiện theo một trong những hướng sau:

- Ghép nhóm tạo ra nhân tử chung.
- Biến đổi liên hợp $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.
- Khi nhầm được nghiệm thì thêm bớt hệ số để liên hợp tạo ra nhân tử chung.

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+5=(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$.

Lời giải. Phân tích: 2 vế không âm nên ta có thể bình phương được, bình phương sẽ mất dần số lượng căn đi.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3 \text{ (ĐK: } x \geq \frac{1}{2}) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1})^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow 3x+2+2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 9 \\ & \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 7-3x \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 4(2x^2+5x-3) = (7-3x)^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ x^2-62x+61=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=61 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \text{ (TMĐK)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 15. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6}$.

Lời giải. $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+3=2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$

Phương trình có 2 nghiệm $x=-1; x=3$.

Bài 16. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2} = x+1$.

Lời giải. $\sqrt{2x^2+2} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2+2=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Phương trình có 2 nghiệm $x=1$.

Bài 17. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -3$. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+10x+3} = 6-2x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^2+10x+3=(6-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (tmđk)}$

Phương trình có 2 nghiệm $x=1$.

Bài 18. Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2$.

Lời giải. ĐK: $-\frac{3}{2} \leq x \leq 4$.

$\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = \sqrt{4-x} + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{4-x} = 3x-5$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 16(4-x) = (3x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$

Phương trình có 1 nghiệm $x=3$.

Bài 19. Giải phương trình $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2+2x-2} = 2$.

Lời giải. ĐK: $x^2+2x-2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2+2x-2} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{x^2+2x-2} + 2 \\ \Leftrightarrow x^2+4x+4 &= x^2+2x-2+4+4\sqrt{x^2+2x-2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2x-2} = x+1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x-2 = (x+1)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Phương trình có 1 nghiệm $x = 1$.

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 8. Giải phương trình $2x^2 - 2x + \sqrt{(x+1)(x-2)} = 14$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{(x+1)(x-2)} = t$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow x^2 - x - 2 = t^2 \Rightarrow x^2 - x = t^2 + 2$.

Vậy ta có phương trình:

$$2(t^2 + 2) + t = 14 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{5}{2} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x+1)(x-2)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = -2; x = 3$.

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$.

Lời giải. ĐK: $1 \leq x \leq 3$ Đặt $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = t$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$)

$$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{-x^2+4x-3} = \frac{t^2-2}{2}.$$

Khi đó ta có phương trình:

$$t + \frac{t^2-2}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

$$\text{Khi đó ta có } \sqrt{-x^2+4x-3} = 1 \Leftrightarrow -x^2+4x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{x+3} = 4$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -3$.

Đặt $\sqrt[3]{x+7} = a; \sqrt{x+3} = b$ ($b \geq 0$)

Ta có hệ

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a+b=4 \\ a^3-b^2=4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^3-(4-a)^2=4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^3-a^2+8a-20=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ (a-2)(a^2+a+10)=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=2 \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 20. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2x^2 + 2x - 2$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2} (t \geq 0)$ có phương trình:

$$t = 2t^2 - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1; x = -2$.

Bài 21. Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2x^2 + 2x - 10$.

Lời giải. Đặt $\sqrt{(x-1)(x+2)} = t (t \geq 0)$ thì $x^2 + x = t^2 + 2$ ta có phương trình

$$t = 2(t^2 + 2) - 10 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x-1)(x+2)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 2; x = -3$

Bài 22. Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2} = 5$.

Lời giải. ĐK: $-1 \leq x \leq 1$ Đặt $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = t (\sqrt{2} \leq t \leq 2)$ thì $\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2 - 2}{2}$ khi đó ta có phương trình

$$t + 3 \frac{t^2 - 2}{2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{8}{3} \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài 23. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 8$.

Lời giải. ĐK: $x \geq 2$.

Đặt $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = t (t \geq 0)$ thì $x + \sqrt{x^2 - x - 2} = \frac{t^2 + 1}{2}$ ta có

$$t + \frac{t^2 + 1}{2} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \text{ (Loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 5 - x \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$

Bài 24. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 5$.

Lời giải. Đặt $\sqrt[3]{x-1} = a; \sqrt{x+2} = b (b \geq 0)$ ta có hệ

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Ví dụ 11. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 3$.

Lời giải. ĐK: $1 \leq x \leq 3$.

$$\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) + (3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) - \sqrt{3-x}(\sqrt{x-1} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3)(\sqrt{3-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 3 \\ \sqrt{3-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10(\text{loại}) \\ x = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$.

Ví dụ 12. Giải phương trình $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x - 4$.

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} &= x^2 - 3x - 4 \\ \frac{x+3-2x+1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} &= (x-4)(x+1) \\ \Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} &= (x-4)(x+1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{-1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} = x+1(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì với $x \geq \frac{1}{2}$ thì $VT < 0 < VP$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$

Ví dụ 13. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Lời giải. Phân tích: Ta nhận được một nghiệm của phương trình là $x = 3$ và nếu tại $x = 3$ thì $\sqrt{x-2}$ là 1 nên nếu ta trừ nó cho 1 thì sẽ tạo được nhân tử $x - 3$

. ĐK: $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1) + x^2 - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + x = 0(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) với điều kiện $x \geq 2$ thì phương trình (2) có $VT > 0$ nên (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 25. Giải phương trình $-\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Lời giải. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1+x}-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Phương trình có nghiệm $x = 0$.

Bài 26. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0$

Lời giải. ĐK: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2) + (\sqrt{2x-1}-1) + x^2 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x+1 \right) &= 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

Bài 27. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -3$

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+3} = 3(x^3 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \frac{x}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+3}} = 3(x-1)(x^2+x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{x^2+3}+\sqrt{x+3} = 3(x^2+x+1)(2) \end{cases}$$

Thấy phương trình (2) vô nghiệm vì $VT \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq VP$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Dạng 3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là phải tìm cách làm mất dấu giá trị tuyệt đối. Các phương pháp thường dùng là: biến đổi tương đương, chia khoảng trên trục số, ...

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

Với $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số. Khi đó

$$\begin{aligned} |f(x)| = g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases} \\ |f(x)| = |g(x)| &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \\ |f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| &\Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

Phương pháp 2. Chia khoảng trên trục số

Ta lập bảng xét dấu của các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối rồi xét các trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Một số cách khác

- Đặt ẩn phụ.
- Sử dụng bất đẳng thức ta so sánh $f(x)$ và $g(x)$ từ đó tìm nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.
- Sử dụng đồ thị cần chú ý số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Phương pháp này thường áp dụng cho các bài toán biện luận nghiệm.

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

Ví dụ 14. Giải phương trình sau $|2x-3| = 5-x$.

Lời giải. Phương trình $|2x-3| = 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ \begin{cases} 2x-3 = 5-x \\ 2x-3 = -(5-x) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{8}{3}$ và $x = -2$.

Ví dụ 15. Giải phương trình $|x-2| = |3x+2|$.

Lời giải. Phương trình $|x-2| = |3x+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 3x+2 \\ x-2 = -(3x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 0$.

Ví dụ 16. Giải phương trình $|x-2| + |x+2| = |2x|$.

Lời giải. Phương trình $|x-2| + |x+2| = |2x| \Leftrightarrow |x-2| + |x+2| = |x-2+x+2| \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 28. Giải phương trình $|x-3| = 2x+4$.

Lời giải. Ta có $|x-3| = 2x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ \begin{cases} x-3 = 2x+4 \\ x-3 = -2x-4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = -7 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = -\frac{1}{3}$.

Bài 29. Giải phương trình $|x+1| = |3x-1|$.

Lời giải. Ta có $|x+1| = |3x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3x-1 \\ x+1 = -3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 0$.

Bài 30. Giải phương trình sau $|3x-6| = 2x+1$.

Lời giải. Phương trình $|3x-6| = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \begin{cases} 3x-6 = 2x+1 \\ 3x-6 = -2x-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 7$ và $x = 1$

Bài 31. Giải phương trình $|x-1| + |2x+1| = |3x|$.

Lời giải. Phương trình $|x-1| + |2x+1| = |3x| \Leftrightarrow |x-1| + |2x+1| = |x-1+2x+1| \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Bài 32. Giải phương trình $|3x-5| + |2x-1| = |-5x+6|$.

Lời giải. Phương trình $|3x-5| + |2x-1| = |-5x+6| \Leftrightarrow |3x-5| + |2x-1| = |5x-6| = |3x-5+2x-1| \Leftrightarrow (3x-5)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Bài 33. Giải và biện luận phương trình $|x-2m| = x+m$.

Lời giải. Phương trình $|x-2m| = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x+m \geq 0 \\ \begin{cases} x-2m = x+m \\ x-2m = -x+m \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ \begin{cases} 3m = 0 \\ x = \frac{3m}{2} \end{cases} \end{cases}$

Với $x = \frac{3m}{2} \geq -m \Rightarrow m \geq 0$.

Kết luận:

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $m = 0$ phương trình có tập nghiệm $S = [0; +\infty)$.

Với $m > 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m}{2}$.

Phương pháp 2. Chia khoảng trên trục số

Ví dụ 17. Giải phương trình $|x - 2| = 2x - 1$.

Lời giải. Ta xét hai trường hợp

TH1: Với $x \geq 2$ phương trình trở thành $x - 2 = 2x - 1 \Rightarrow x = -1 < 2$ (loại).

TH2: Với $x < 2$ phương trình trở thành $-x + 2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 1 < 2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 18. Giải phương trình $|x - 2| + |3x - 9| = |x + 1|$.

Lời giải. Lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có
$$\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$x - 2$		$-$	$-$	0	$+$
$3x - 9$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Khi đó ta xét từng trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối như sau:

TH1: Với $x < -1$ phương trình trở thành

$$-(x - 2) - (3x - 9) = -(x + 1) \Leftrightarrow x = 4 > -1 \Rightarrow \text{loại.}$$

TH2: Với $-1 \leq x < 2$ phương trình trở thành

$$-(x - 2) - (3x - 9) = x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \text{loại.}$$

TH3: Với $2 \leq x < 3$ phương trình trở thành

$$x - 2 - (3x - 9) = x + 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

TH4: Với $x \geq 3$ phương trình trở thành

$$x - 2 + 3x - 9 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 4$.

Ví dụ 19. Biện luận số nghiệm của phương trình $|2x - 4m| = 3x + 2m$.

Lời giải. Ta sẽ xét từng trường hợp để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x \geq 2m$ thì phương trình trở thành

$$2x - 4m = 3x + 2m \Rightarrow x = -6m \text{ vì } x \geq 2m \Rightarrow -6m \geq 2m \Rightarrow m \leq 0$$

Vậy với $m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -6m$.

TH2: Với $x < 2m$ thì phương trình trở thành

$$-2x + 4m = 3x + 2m \Rightarrow x = \frac{2m}{5} \text{ vì } x < 2m \Rightarrow \frac{2m}{5} < 2m \Rightarrow m > 0$$

Vậy $m > 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{2m}{5}$.

Kết luận: Với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì phương trình có một nghiệm.

Bài 34. Giải phương trình $|3x - 2| = x + 1$.

Lời giải. **TH1:** Với $x \geq \frac{2}{3}$ phương trình trở thành $3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

TH2: Với $x < \frac{2}{3}$ phương trình trở thành $-3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{1}{4}$.

Bài 35. Giải phương trình $|2x - 1| = |x + 2| + |x - 1|$.

Lời giải. Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x - 1$		-	0	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+

Từ đó ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x < -2$ phương trình trở thành $-2x + 1 = -x - 2 - x + 1 \Leftrightarrow 0 = -3 \Rightarrow$ loại.

TH2: Với $-2 \leq x < \frac{1}{2}$ phương trình trở thành $-2x + 1 = x + 2 - x + 1 \Leftrightarrow x = -1$.

TH3: Với $\frac{1}{2} \leq x < 1$ phương trình trở thành $2x - 1 = x + 2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 2 > 1 \Rightarrow$ loại.

TH4: Với $x \geq 1$ phương trình trở thành $2x - 1 = x + 2 + x - 1 \Leftrightarrow -1 = 1 \Rightarrow$ loại.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$.

Bài 36. Giải phương trình $|x^2 - 3x + 2| + |3x - 6| = 2$.

Lời giải. Ta lập bảng xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$3x - 6$	$-$	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

TH1: Với $x < 1$ phương trình trở thành

$$x^2 - 3x + 2 - 3x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{3} \\ x = 3 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

TH2: Với $1 \leq x < 2$ phương trình trở thành $-x^2 + 3x - 2 - 3x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$ kết hợp với

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$$

TH3: Với $x \geq 2$ phương trình trở thành $x^2 - 3x + 2 + 3x - 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ x = \sqrt{6} \end{cases}$ kết hợp với

$$x \geq 2 \Rightarrow x = \sqrt{6}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \sqrt{2}$ và $x = \sqrt{6}$.

Bài 37. Giải phương trình $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| = x+5$.

Lời giải. Điều kiện $x \neq 1$. Ta lập bảng xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối, có $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ và $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$\frac{2x-1}{x-1}$		+	0	-	0	+

Bài 38. Giải phương trình $|3x-2|+|x^2-3x+2|=|x-2|+|x-1|$.

Lời giải. Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có

$$\begin{cases} 3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \\ x^2-3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	2	$+\infty$		
$3x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
x^2-3x+2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$

Từ bảng xét dấu ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x < \frac{2}{3}$ phương trình trở thành

$$-3x+2+x^2-3x+2=-x+2-x+1 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3} \end{cases} \text{ kết hợp với } x < \frac{2}{3} \Rightarrow x=2-\sqrt{3}.$$

Tương tự xét đối với các trường hợp còn lại ta được phương trình có hai nghiệm là $x=2-\sqrt{3}$ và $x=1$.

Bài 39. Giải phương trình $\frac{|2x+4|-3|x|}{|x-2|+x-1}=4$.

Lời giải. Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có

Bài 40. Biện luận số nghiệm các phương trình $|3x-4m|=x+m$.

Lời giải. TH1: Với $x < \frac{4m}{3}$ thì phương trình trở thành $3x-4m=x+m \Leftrightarrow x=\frac{5m}{2}$ kết hợp với $x < \frac{4m}{3} \Rightarrow \frac{5m}{2} < \frac{4m}{3} \Leftrightarrow m < 0$.

TH2: Với $x \geq \frac{4m}{3}$ thì phương trình trở thành $-3x+4m=x+m \Leftrightarrow x=\frac{3m}{4}$ kết hợp với $x \geq \frac{4m}{3} \Rightarrow \frac{3m}{4} \geq \frac{4m}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{12}m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết luận: Vậy phương trình đã cho luôn có duy nhất một nghiệm.

Một số cách khác

Ví dụ 20. Giải phương trình $|x^2 - 4x + 2| = 2x^2 - 8x + 3$.

Lời giải. Ta có $|x^2 - 4x + 2| = 2x^2 - 8x + 3 \Leftrightarrow |x^2 - 4x + 2| = 2(x^2 - 4x + 2) - 1 \Rightarrow$ đặt $t = x^2 - 4x + 2$. Khi đó, phương trình trở thành

$$|t| = 2t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} t = 2t - 1 \\ t = -2t + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2 + \sqrt{3}$ và $x = 2 - \sqrt{3}$.

Ví dụ 21. Biện luận số nghiệm của phương trình $|x| + |x - 2| = m$.

Lời giải. Trước hết ta vẽ đồ thị hàm số $y = |x| + |x - 2|$ lập bảng xét dấu

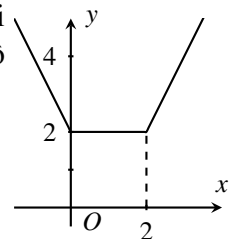
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x		$-$	0	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$

Từ đó vẽ đồ thị ứng với mỗi khoảng trong bảng xét dấu ta được đồ thị hình bên. Khi đó, số nghiệm của phương trình $|x| + |x - 2| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x| + |x - 2|$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Với $m < 2$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $m = 2$ thì phương trình có tập nghiệm $S = [0; 2]$.

Với $m > 2$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.



Ví dụ 22. Giải phương trình $|x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 = 1$.

Lời giải. Ta thấy $x = 2016$ hoặc $x = 2017$ là nghiệm của phương trình.

TH1: Với $x < 2016 \Rightarrow x - 2017 < -1 \Rightarrow |x - 2017| > 1 \Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 > 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $x < 2016$.

TH2: Với $2016 < x < 2017 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - 2016 < 1 \\ -1 < x - 2017 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2016|^4 < |x - 2016| < x - 2016 \\ |x - 2017|^5 < |x - 2017| < 2017 - x \end{cases}$

$\Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 < x - 2016 + 2017 - x = 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $2016 < x < 2017$.

TH3: Với $x > 2017 \Rightarrow x - 2016 > 1 \Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 > 1$

$\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm $x > 2017$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2016$ và $x = 2017$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 41. Giải phương trình $|2x^2 - 4x + 3| = |x^2 - 3x + 1|$.

Lời giải. Phương trình $|2x^2 - 4x + 3| = |x^2 - 3x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 3x - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 = 0 \\ 3x^2 - 7x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{4}{3}$.

Bài 42. Giải phương trình $|5 - |2x - 1|| = 3$.

Lời giải. Đặt $t = |2x - 1|$ với $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$|5 - t| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - t = 3 \\ 5 - t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow |2x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 8 \Rightarrow |2x - 1| = 8 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 8 \\ 2x - 1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{9}{2} \right\}$.

Bài 43. Biện luận số nghiệm của phương trình $|5x + 2| + |x - 1| = m$

Lời giải. Trước tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = |5x + 2| + |x - 1|$ bằng cách lập bảng xét dấu

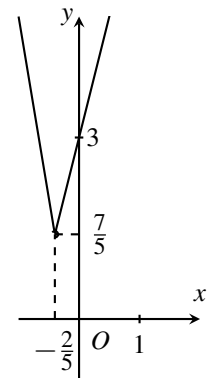
x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	1	$+\infty$
$5x - 2$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$

Từ đó vẽ đồ thị ứng với mỗi khoảng trong bảng xét dấu ta được đồ thị hình bên. Khi đó, số nghiệm của phương trình $|5x + 2| + |x - 1| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |5x + 2| + |x - 1|$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Với $m < \frac{7}{5}$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $m = \frac{7}{5}$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm.

Với $m > \frac{7}{5}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.



Bài 44. Giải phương trình $|x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} = 1$.

Lời giải. Ta thấy $x = 2017$ hoặc $x = 2018$ là nghiệm của phương trình.

TH1: Với $x < 2017 \Rightarrow x - 2018 < -1 \Rightarrow |x - 2018| > 1 \Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} > 1$
 $\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $x < 2017$.

TH2: Với $2017 < x < 2018 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - 2017 < 1 \\ -1 < x - 2018 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2017|^{2018} < |x - 2017| < x - 2017 \\ |x - 2018|^{2017} < |x - 2018| < 2018 - x \end{cases}$
 $\Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} < x - 2017 + 2018 - x = 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $2017 < x < 2018$.

TH3: Với $x > 2018 \Rightarrow x - 2017 > 1 \Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} > 1$
 $\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm $x > 2018$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2017$ và $x = 2018$.

Bài 45. Giải phương trình $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| = 100x$.

Lời giải. Ta có $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| \geq 0 \Rightarrow |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| = 100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$x + 1 + x + 2 + x + 3 + \dots + x + 99 = 100x \Leftrightarrow 99x + 4950 = 100x \Rightarrow x = 4950.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4950$

Dạng 4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương trình bậc bốn trùng phương

Loại 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

- Đặt điều kiện xác định của phương trình.
- Biến đổi phương trình đã cho về phương trình bậc nhất, bậc hai đã biết cách giải.
- Chọn nghiệm thỏa điều kiện xác định của phương trình.

 Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta phải chú ý điều kiện xác định của phương trình.

Loại 2. Phương trình trùng phương

Để giải phương trình trùng phương dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) ta đặt $t = x^2 \geq 0$ để đưa về phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$ (*').

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm thì phương trình (*) vô nghiệm.
- Nếu phương trình (*) có nghiệm $t = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm $x = 0$.
- Nếu phương trình (*) có một nghiệm $t = t_0 > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.

Loại 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ 23. Giải phương trình $\frac{x^2 + 3x + 4}{2x - 1} = \frac{x + 1}{2}$.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho thành $2(x^2 + 3x + 4) = (x + 1)(2x - 1) \Leftrightarrow 5x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}$.

So điều kiện ta nhận $x = -\frac{9}{5}$.

Ví dụ 24. Giải phương trình $\frac{5x - 3}{3x + 5} = \frac{2x - 5}{x - 1}$.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq -\frac{5}{3}, x \neq 1$.

Phương trình đã cho thành $(5x - 3)(x - 1) = (2x - 5)(3x + 5) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -7 \end{cases}$.

So điều kiện ta nhận $x = -7, x = 4$.

Ví dụ 25. Giải phương trình $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$ (*).

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \notin \{-7, -6, -5, -4\}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

So điều kiện ta nhận $x = -13, x = 2$.

Ví dụ 26. Giải và biện luận phương trình $\frac{(3m-2)x-4}{x-1} = 2m+3$.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq 1$.

Phương trình đã cho thành $(3m-2)x-4 = (2m+3)(x-1) \Leftrightarrow (m-5)x = 1-2m$.

Với $m = 5$ phương trình cuối thành $0x = -9$ vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m \neq 5$ thì $(m-5)x = 1-2m \Leftrightarrow x = \frac{1-2m}{m-5}$. Nghiệm này thỏa mãn điều kiện của phương trình đã cho khi và chỉ khi $\frac{1-2m}{m-5} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Kết luận:

+ Với $m = 5$ hoặc $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $m \neq 5$ và $m \neq 2$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1-2m}{m-5}$.

Ví dụ 27. Tìm m để phương trình $\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$ vô nghiệm.

Lời giải. Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq m-1, x \neq -m-2$.

Phương trình đã cho thành $(x+1)(x+m+2) = x(x-m+1) \Leftrightarrow 2(m+1)x = -m-2$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $m = -1$ thì $2(m+1)x = -m-2$ thành $0x = -1$ (vô nghiệm), nên $m = -1$ nhận.

+ Với $m \neq -1$ thì $2(m+1)x = -m-2 \Leftrightarrow x = \frac{-m-2}{2(m+1)}$. Kiểm tra điều kiện:

$$\begin{cases} x \neq m-1 \\ x \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq m-1 \\ \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Vậy với $m \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 46. Giải phương trình $\frac{2x^2+3x-1}{x+3} = \frac{4x-5}{2}$.

Lời giải. Điều kiện $x \neq -3$.

Biến đổi phương trình ta được nghiệm $x = 13$ thỏa điều kiện.

Bài 47. Giải phương trình $\frac{2x^2-2}{2x+1} + \frac{x+2}{2x+1} = 2$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq -\frac{1}{2}$.

Biến đổi phương trình thành $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

So điều kiện ta nhận $x = 2$.

Bài 48. Giải phương trình $\frac{3x^2-x-2}{\sqrt{3x-2}} = \sqrt{3x-2}$.

Lời giải. Điều kiện $x > \frac{2}{3}$.

Biến đổi phương trình thành $3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$.

So điều kiện ta nhận $x = \frac{4}{3}$.

Bài 49. Giải và biện luận phương trình $\frac{2mx-m^2+m-2}{x^2-1} = 1$.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình thành $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$.

Phương trình có biệt thức $\Delta' = m - 1$.

Với $m < 1$ phương trình cuối vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m = 1$ phương trình cuối có nghiệm $x = 1$ (loại) nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m > 1$ phương trình cuối có nghiệm $x = m \pm \sqrt{m-1}$.

• TH1: $f(1) = m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = 2$.

• TH2: $f(-1) = m^2 + m + 2 \neq 0 \forall m$.

Kết luận:

$+ m \leq 1$ hoặc $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

$+ 1 < m \neq 2$ phương trình có hai nghiệm $x = m \pm \sqrt{m-1}$.

Bài 50. Tìm m để phương trình $\frac{3x-m}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} = \frac{2x+2m-1}{\sqrt{x-2}}$ có nghiệm.

Lời giải. Điều kiện $x > 2$.

Biến đổi phương trình thành $3x - m + x - 2 = 2x + 2m - 1 \Leftrightarrow 2x = 3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3m+1}{2}$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\frac{3m+1}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 1$.

Loại 2. Phương trình trùng phương

Ví dụ 28. Giải phương trình $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = \frac{5}{2}$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = \frac{5}{2}$ thì $x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Ví dụ 29. Giải phương trình $(1 - \sqrt{2})x^4 + 2x^2 - 1 - \sqrt{2} = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $(1 - \sqrt{2})t^2 + 2t - 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

Với $t = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ thì $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$.

Ví dụ 30. Tìm m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$.

Phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \neq 1$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 51. Giải phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ phương trình thành $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 4$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bài 52. Giải phương trình $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 13t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 9, t = 4$.

Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bài 53. Giải phương trình $x^4 + 24x^2 - 25 = 0$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 + 24t - 25 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -25$. Nghiệm $t = 1$ nhận, còn nghiệm $t = -25 < 0$ nên loại.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bài 54. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 3m + 1$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = 3m + 1$ thì $x^2 = 3m + 1$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình $x^2 = 3m + 1$ có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và nhỏ hơn 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Bài 55. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$.

Lời giải. Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - (m^2 + 10)t + 9 = 0$.

Phương trình $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khi và chỉ khi phương trình $t^2 - (m^2 + 10)t + 9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ (luôn thỏa với mọi

giá trị tham số m).

Nhận xét rằng nếu x là nghiệm của phương trình thì $-x$ cũng là nghiệm nên $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 16$.

Theo định lý Vi-et thì $t_1 + t_2 = m^2 + 10, t_1 t_2 = 9$.

Do đó ta được $m^2 + 10 = 10 \Leftrightarrow m = 0$.

Dạng 5. Biện luận theo m có áp dụng định lí Viète**Định lí Viète**

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Ví dụ 31. Biết phương trình $x^2 + 2mx - 12 = 0$ có một nghiệm $x_1 = 3$. Tìm m và nghiệm còn lại.

Lời giải.

- Thay $x_1 = 3$ vào phương trình ta được

$$9 + 6m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

- Theo định lí Viète, ta có $x_1 x_2 = -12 \Rightarrow x_2 = -4$.

Ví dụ 32. Biết phương trình $x^2 - x + m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ và $x_2 - x_1 = 5$. Tìm m .

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3. \end{cases}$

Do đó $x_1 x_2 = m - 7 = -6 \Leftrightarrow m = 1$.

Ví dụ 33. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = x_1^3 + x_2^3$.

Lời giải. Áp dụng định lí Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -4. \end{cases}$

a) $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 + 8$.

b) $B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (2m)^3 - 3 \cdot (-4) \cdot (2m) = 8m^3 + 24m$.

Ví dụ 34. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1).

a) có hai nghiệm trái dấu.

b) có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

a) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

b) Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ 2(m - 1) > 0 \\ (m - 1)(m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 56. Tìm m để phương trình $x^2 - 9x + m = 0$ có một nghiệm là -3 . Khi đó tìm nghiệm còn lại.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} -3 + x_2 = 9 \\ (-3) \cdot x_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 12 \\ m = -36. \end{cases}$

Bài 57. Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1).

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

b) Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Lời giải.

a) Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -m + 6 < 0 \Leftrightarrow m > 6$.

b) Ta có $x = -2$ là nghiệm của phương trình (1) nên

$$(-2)^2 - (m + 5)(-2) - m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -20.$$

Với $m = -20$ thay vào phương trình (1) ta được

$$x^2 + 15x + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -13. \end{cases}$$

c) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 1 > 0 \quad (*).$$

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = -m + 6. \end{cases}$ Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 + 12m + 13$.

Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 13 = 13 \Leftrightarrow m^2 + 12m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{thỏa mãn } (*)) \\ m = -12 & (\text{không thỏa mãn } (*)). \end{cases}$$

Vậy $m = 0$.

Bài 58. Cho phương trình $mx^2 - 6(m - 1)x + 9(m - 3) = 0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

Lời giải. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1. \end{cases}$

Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6(m - 1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{9(m - 3)}{m}. \end{cases}$ Khi đó

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{6(m - 1)}{m} = \frac{9(m - 3)}{m} \Leftrightarrow m = 7.$$

Bài 59. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m + 3 = 0$ (1).

- a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
 b) Với các giá trị m trong câu a). Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

Lời giải.

- a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-1)(m+3) > 0 \end{cases} \begin{cases} m \neq 1 \\ m < \frac{7}{6} \end{cases}.$$

- b) Theo định lí Viète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-2}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} & (*) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m+3}{m-1} = 1 + \frac{4}{m-1} & (**). \end{cases}$$

Từ (*) suy ra $\frac{1}{m-1} = x_1 + x_2 - 1$. Do đó

$$x_1 \cdot x_2 = 1 + 4(x_1 + x_2 - 1) \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - 4(x_1 + x_2) + 3 = 0.$$

Bài 60. Cho phương trình $mx^2 + 2(m-4)x + m + 7 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$.

Lời giải. Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{16}{15} \end{cases} (*)$.

Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(m-4)}{m} & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m+7}{m} & (2). \end{cases}$

Kết hợp (1) với điều kiện $x_1 - 2x_2 = 0$ suy ra $x_1 = \frac{-4m+16}{3m}, x_2 = \frac{-2m+8}{3m}$.

Thay vào (2) ta được

$$m^2 + 127m - 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{thỏa mãn } (*)) \\ m = -128 & (\text{thỏa mãn } (*)). \end{cases}$$

Bài 61. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + m$ có đồ thị (P) . Tìm m để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA = 5OB$.

Lời giải. Ta có (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt
 $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2x + m = 0 (*)$ có hai nghiệm phân biệt.
 $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$ và tọa độ các điểm là $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$.

Theo định lí Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m & (2). \end{cases}$

Ta có $OA = 5OB \Leftrightarrow |x_1| = 5|x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_1 = -5x_2. \end{cases}$

- Với $x_1 = 5x_2$. Kết hợp với (1) suy ra $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{1}{3}$. Thay vào (2) ta được $m = \frac{5}{9}$.

- Với $x_1 = -5x_2$. Kết hợp với (1) suy ra $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Thay vào (2) ta được $m = -\frac{5}{4}$.

Vậy các giá trị thỏa mãn bài toán là $m = \frac{5}{9}$, $m = -\frac{5}{4}$.

Bài 62. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 24. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải. Gọi chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là x và y ($x > 0$, $y > 0$) và diện tích của hình chữ nhật là S ($S > 0$). Khi đó

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = S. \end{cases}$$

Do đó, x và y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 12X + S = 0$. Vì phương trình phải có nghiệm nên ta có

$$\Delta' = 36 - S \geq 0 \Leftrightarrow S \leq 36.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow x = y = 6$.

Vậy $\max S = 36$ (đvdt), khi đó hình chữ nhật là hình vuông có cạnh bằng 6.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 63. Giải và biện luận phương trình $(x - 1)(x - mx + 2) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = 1 \\ (1 - m)x = -2 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 1$, phương trình (*) trở thành $0.x = -2$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m = 3$, phương trình (*) trở thành $-2x = -2$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m \neq 1$ và $m \neq 3$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{1-m} \neq 1$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{2}{1-m}$.

Bài 64. Giải và biện luận phương trình $(x^2 - 4)(mx - 3) = 0$.

Lời giải. Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ mx = 3 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 0$, phương trình (*) trở thành $0.x = 3$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = -\frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $-\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m \neq \pm \frac{3}{2}$ và $m \neq 0$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{m} \neq \pm 2$. Do đó, phương trình (1) có ba nghiệm $x = \pm 2$ và $x = \frac{3}{m}$.

Bài 65. Giải phương trình $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2-x+1} = b$ ta có $2(a^2 + b^2) = 5ab \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = \frac{1}{2}b \end{cases}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

Bài 66. Giải phương trình $\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 2$

Lời giải. $\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow (x+2) + \sqrt{x+2} - (x^2-x) = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x+2}$ ta có $t^2 + t - (x^2 - x) = 0$, coi đây là phương trình ẩn t và có tham số x , sử dụng $\Delta = (2x-1)^2$ thì ta có:

$$\begin{cases} t = -x \\ t = x-1 \end{cases} \text{ hay ta có}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} = -x \\ \sqrt{x+2} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Bài 67. Giải phương trình $\sqrt{2+x} = \frac{-x^2-x+2}{x}$.

Lời giải. ĐK: $x \geq -2, x \neq 0$

$$\sqrt{2+x} = \frac{-x^2-x+2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{2+x} - (x+1) = \frac{-x^2-x+2}{x} - (x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2-x+1}{\sqrt{2+x} + (x+1)} = 2 \frac{-x^2-x+1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-x+1=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2+x} + (x+1)} = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 2\sqrt{2+x} = -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

Bài 68. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2x+5} + \sqrt{2x^2-2x+25} = \sqrt{8x^2+8}$.

Lời giải. $\sqrt{2x^2+2x+5} + \sqrt{2x^2-2x+25} = \sqrt{8x^2+8}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (x+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (x-4)^2} = \sqrt{(2x+2)^2 + (2x-2)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức khoảng cách $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ ta có

VT $\geq$ VP; vậy phương trình xảy ra khi dấu bằng xảy ra hay tức là:

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{x+2}{x-4} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{5}$$

Bài 69. Giải phương trình $|3|x-2|-9|-2|6-3x-6|| = 5$.

Lời giải. Đặt $t = |x-2|$ với $t \geq 0$ khi đó phương trình trở thành $|3t-9|-2|6-3t| = 5$. Ta lập bảng xét dấu của phương trình này. Có $3t-9=0 \Rightarrow t=3$ và $6-3t=0 \Rightarrow t=2$.

Bảng xét dấu

t	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$3t-9$	-	-	0	+
$6-3t$	+	0	-	-

TH1: Với $t < 2$ phương trình trở thành

$$-3t + 9 - 2(6 - 3t) = 5 \Leftrightarrow -3t + 9 - 12 + 6t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{8}{3} > 2 \text{ (loại).}$$

TH2: Với $2 \leq t < 3$ phương trình trở thành

$$-3t + 9 + 12 - 6t = 5 \Leftrightarrow -9t = -16 \Rightarrow t = \frac{16}{9} < 2 \text{ (loại).}$$

TH3: Với $t \geq 3$ phương trình trở thành

$$3t - 9 + 12 - 6t = 5 \Leftrightarrow -3t = 2 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} < 3 \text{ (loại).}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 70. Tìm các số nguyên a để phương trình $ax^2 - (a+3)x + a + 2 = 0$ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

○ Với $a = 0$ phương trình trở thành: $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

○ Với $a \neq 0$ khi đó để phương trình có nghiệm nguyên điều kiện cần là:

$\Delta = (a+3)^2 - 4a(a+2) = -3a^2 - 2a + 9$ là một số chính phương, tức là: $-3a^2 - 2a + 9 = k^2, k \in \mathbb{Z}$. Khi

$$\text{đó điều kiện của } a \text{ là: } \begin{cases} \frac{-1-2\sqrt{7}}{3} < a < \frac{-1+2\sqrt{7}}{3} \\ a \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Thay lần lượt các giá trị của a vào Δ và phương trình ban đầu ta tìm được: $a = -2; a = 1$ thỏa mãn.

Kết luận: Có 2 giá trị $a = -2$ và $a = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 71. Giải và biện luận phương trình: $\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} ax-1 \neq 0 \\ bx-1 \neq 0 \\ (a+b)x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 \\ bx \neq 1 \\ (a+b)x \neq 1 \end{cases} \quad (I).$

Phương trình được viết lại thành: $abx[(a+b)x-2] = 0 (*)$.

○ Nếu $a = b = 0$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

○ Nếu $\begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{b}$.

○ Nếu $\begin{cases} b=0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$.

Khi đó phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{a}$.

○ Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a+b=0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$ và $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

○ Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}; x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a+b}$.

Khi đó phương trình có nghiệm $x = 0$ và nghiệm $x = \frac{2}{a+b}$ nếu $a \neq b$.

Bài 72. Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

Lời giải.

○ Với $x = 0$ phương trình trở thành $2 = 0$. Vậy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

○ Với $x \neq 0$. Chia cả hai vế cho x^2 ta được phương trình:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, $|t| \geq 2$.

Khi đó phương trình trở thành: $2(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} (L)$.

Với $t = 2$ ta có phương trình: $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 73. Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3^2(x+4)(x+5)) = 360$.

Lời giải.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360$.

Đặt $t = x^2 + 6x$, $t \geq -9$. Ta được phương trình:

$$(t+5)(t+8)(t+9) - 360 = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 22t + 157) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0; -6\}$.

Bài 74. Giải phương trình: $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.

Lời giải.

○ Đặt $y = \sqrt[3]{3x-2}$. Khi đó phương trình chuyển thành hệ: $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 = 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = -3(x-y)$.

$$\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Thay vào hệ ta được phương trình: } x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; -2\}$.

Bài 75. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 3x$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $(2x^2+x+1) - (x^2-x+1) = x^2+2x > 0 \forall x > 0$.

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}} = 3x \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}} = 3.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 3x \\ \sqrt{2x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \frac{x+2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Trừ vế với vế ta được: } 3\sqrt{2x^2+x+1} = 5x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -8 \end{cases} (L).$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 76. Giải phương trình: $2\sqrt[9]{(1+x)^2} + 3\sqrt[9]{1-x^2} + \sqrt[9]{(1-x)^2} = 0$.

Lời giải.

Để thấy $x = \pm 1$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[9]{(1-x)^2}$, $t \neq -1$ ta được phương trình:

$$2\sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[9]{\frac{1-x}{1+x}} + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}}$ ta được phương trình:

$$2t + \frac{1}{t} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (L)} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+2^9}{1-2^9}.$$

Bài 77. Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 + 1}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $3(x-1) + 2(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Để thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{x^2+x+1} \end{cases}, u, v > 0.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } 3u^2 + 2v^2 = 7uv \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u = \frac{1}{3}v \end{cases}.$$

○ Với $u = 2v$ ta có: $4x^2 + 3x + 5 = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

○ Với $u = \frac{1}{3}v$ ta có: $x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}\}$.

Bài 78. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(3-m)x + m - 4 = 0$ có đúng một nghiệm âm.

Lời giải.

○ Với $m = 0$ phương trình có nghiệm $x = -\frac{2}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

○ Với $m \neq 0$ phương trình có đúng một nghiệm âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 < 0 \leq x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 = x_2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ S < 0 \\ P < 0 \\ \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ 0 < m < 4 \\ m = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in [0; 4] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$ thì phương trình có đúng một nghiệm âm.

Bài 79. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - (x_1^3 + x_2^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b}{a} \left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a} \right) = 0.$$

$$b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc.$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại là $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$.

Bài 80. Giải phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$.

Lời giải.

$$\text{Viết lại phương trình thành: } \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{x-1})^2} = 1.$$

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } |\sqrt{x-1}-1| + |2-\sqrt{x-1}| = (\sqrt{x-1}-1) + (2-\sqrt{x-1}).$$

$$\text{Áp dụng tính chất: } |a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases} \text{ phương trình đã cho tương đương với:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \\ 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

Bài 81. Tìm m để phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m+3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$.

Lời giải.

○ Phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{2} \\ m > \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\circ \text{ Ta có: } \begin{cases} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \frac{4m^2+4m-2}{(2m+3)^2} \\ \frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{4m^2+12m+9} \end{cases}.$$

$$\text{Phương trình bậc hai thỏa mãn là: } X^2 - \frac{4m^2+4m-2}{4m^2+12m+9}X + \frac{1}{4m^2+12m+9} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (4m^2+12m+9)X^2 - (4m^2+4m-2)X + 1 = 0 \text{ với } m \neq -\frac{3}{2}.$$

Bài 82. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x + 1| = m$.

Lời giải.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ (P)

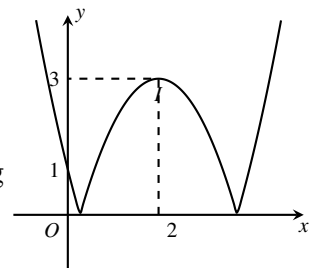
Đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 1|$ (C) gồm hai phần:

○ Phần phía trên trục hoành của (P).

○ Phần đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (P) qua trục hoành.

Khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$ ta được:

- +. Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.
- +. Với $m = 0$ hoặc $m > 3$ phương trình có 2 nghiệm.
- +. Với $0 < m < 3$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
- +. Với $m = 3$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.



Bài 83. Tìm m để phương trình $4x^4 + 4x^2 + 2mx + m^2 + 2m + 1 = 0$.

a) Có nghiệm lớn nhất.

b) Có nghiệm nhỏ nhất.

Lời giải.

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình đã cho, khi đó phương trình:

$$m^2 + 2(x_0 + 1)m + 4x_0^4 + 4x_0^2 + 1 = 0 \text{ luôn có nghiệm } m.$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (x_0 + 1)^2 - (2x_0^2 + 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2x_0^2)(2x_0^2 + x_0 + 2) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}.$$

$$\circ x_0 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\circ x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 + 3m + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Bài 84. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 4} + 2\sqrt{2 - x^2} = 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\sqrt{2x^2 + 4} + 2\sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2} + 2\sqrt{2 - x^2} \leq \sqrt{(2+4)(x^2 + 2 + 2 - x^2)} = 2\sqrt{6}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-x^2}}{2} \Leftrightarrow 3x^2+2=0$.

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 85. Cho phương trình: $\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2m \cdot \frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$, $t \geq 2$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2mt + 1 = 0$ (*).

a) Với $m = -1$ ta có: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

b) Để phương trình ban đầu có nghiệm thì (*) phải có nghiệm $t \geq 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq t_1 \leq t_2 \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \begin{cases} f(2) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \geq 2 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Giải hệ tìm được $m \leq -\frac{5}{4}$.

§3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

I. Tóm tắt lí thuyết

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Khái niệm. Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by = c \quad (1),$$

trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

 a) Nếu $a = b = c = 0$ thì (1) có vô số nghiệm (mọi cặp số $(x_0; y_0)$ đều là nghiệm).

b) Nếu $a = b = 0, c \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.

c) Nếu $b \neq 0$ thì (1) có dạng $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (d). Khi đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (d).

Tổng quát, phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c, (a^2 + b^2 \neq 0)$ luôn có vô số nghiệm. Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình là một đường thẳng trong mặt tọa độ Oxy.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Khái niệm. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2),$$

trong đó x, y là hai ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (2). Giải hệ phương trình (2) là tìm tập nghiệm của nó.

3. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

Khái niệm. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (3),$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ thì $(x_0; y_0; z_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (3).

II. Các dạng toán

Dạng 1. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau:

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (và giữ nguyên phương trình thứ nhất).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- Bước 1: Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
- Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.
Chú ý: Nếu thấy xuất hiện phương trình có các hệ số của hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

2. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số gồm hai bước:

- Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Nhân các vế của hai phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- Bước 2: Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- Bước 3: Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2x - 3(3x - 1) = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ -7x + 3 = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = -\frac{4}{7}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{19}{7}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(-\frac{4}{7}; -\frac{19}{7}\right)$.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+5} + \sqrt{y-8} = 11 \\ 5\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-8} = 8. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ y-8 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq 8. \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+5} \\ v = \sqrt{y-8}. \end{cases}$, $u, v \geq 0$. Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 2u + v = 11 \\ 5u - 4v = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 11 - 2u \\ 5u - 4(11 - 2u) = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 11 - 2.4 = 3 \\ u = 4. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x+5} = 4 \\ \sqrt{y-8} = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 16 \\ y-8 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 17. \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (11; 17)$.

Ví dụ 3. Ngày sinh nhật của cô giáo A gồm hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số đó là 8. Nếu viết ngày sinh nhật theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng 4 lần số ban đầu cộng thêm 3. Vậy ngày sinh nhật của cô giáo A là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi ngày sinh nhật là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}, 10 \leq \overline{ab} \leq 31$.
Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ \overline{ba} = 4\overline{ab} + 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ 10b + a = 4(10a + b) + 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ 39a - 6(8 - a) = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 7. \end{cases}$$

Vậy ngày sinh nhật của cô giáo A là 17.

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất trừ với phương trình thứ hai ta được $8y = 8$. Do đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 8y = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

Ví dụ 5. Nếu đem $\frac{1}{5}$ số trâu và $\frac{1}{3}$ số bò gộp lại thì được 25 con. Nếu đem $\frac{2}{5}$ số trâu và $\frac{1}{4}$ số bò gộp lại thì được 30 con. Tính số trâu và số bò.

Lời giải. Gọi x và y lần lượt là số trâu và số bò (x, y là các số nguyên dương). Ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 25 & (1) \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = 30 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 25 \\ \frac{5}{12}y = 20. \end{cases} \quad (\text{Lấy (1) nhân với 2 rồi trừ cho (2)})$$

Từ đó suy ra $x = 45, y = 48$. Vậy có 45 con trâu và 48 con bò.

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{3}+1)x+y=\sqrt{3}-1 \\ 2x-(\sqrt{3}-1)y=2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y=-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}-1 \\ 2x+(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)x-(\sqrt{3}-1)^2=2\sqrt{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}-1 \\ 2x+2x=2\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-(\sqrt{3}+1).\frac{\sqrt{3}-1}{4}+\sqrt{3}-1 \\ x=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;-2)$.

Bài 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-4y=10. \end{cases}$$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất nhân với 3, phương trình thứ hai nhân với 2 ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 6x+9y=3 & (a) \\ 6x-8y=20 & (b) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+9y=3 \\ 17y=-17. \end{cases} \quad (\text{Lấy } (a) \text{ trừ cho } (b)) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(2;-1)$.

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{10}{4x-y} + \frac{1}{x+y} = 1 \\ \frac{25}{4x-y} + \frac{3}{x+y} = 2. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 4x-y \neq 0 \\ x+y \neq 0. \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{4x-y} \\ v = \frac{1}{x+y}. \end{cases}$ Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 10u+v=1 \\ 25u+3v=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1-10u \\ 25u+3(1-10u)=2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=1 \\ u=\frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{4x-y} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x+y} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y=5 \\ x+y=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x-5 \\ x+4x-5=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=-\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{6}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Bài 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 0,4x-0,3y=0,6 \\ 0,3x-0,2y=1,3. \end{cases}$$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất nhân với 3, phương trình thứ hai nhân với 4 ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1, 2x - 0, 9y = 1, 8 \\ 1, 2x - 0, 8y = 5, 2. \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1, 2x - 0, 9y = 1, 8 \\ -0, 1y = -3, 4. \end{cases} \quad (\text{Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 27 \\ y = 34. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (27; 34)$.

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{3}{7}y = \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}x + \frac{2}{7}y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Lời giải. Lấy phương trình thứ nhất nhân với $\frac{2}{5}$, phương trình thứ hai nhân với $\frac{3}{4}$ ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{6}{35}y = \frac{6}{25} \\ \frac{3}{10}x + \frac{3}{14}y = \frac{1}{4}. \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{6}{35}y = \frac{6}{25} \\ -\frac{3}{70}y = -\frac{1}{100}. \end{cases} \quad (\text{Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{30}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{30}\right)$.

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{3}{5y} = 4 \\ \frac{3}{2x} + \frac{1}{5y} = 2. \end{cases}$

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$. Ta xem đây là hệ phương trình bậc nhất theo $X = \frac{1}{x}$ và $Y = \frac{1}{y}$.

Nhân phương trình thứ nhất với $\frac{3}{2}$, phương trình thứ hai với $\frac{1}{3}$ ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{2}X + \frac{9}{10}Y = 6 \\ \frac{1}{2}X + \frac{1}{15}Y = \frac{2}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}X + \frac{9}{10}Y = 6 \\ \frac{5}{6}Y = \frac{16}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{12}{25} \\ Y = \frac{32}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{12} \\ y = \frac{5}{32}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{25}{12}; \frac{5}{32}\right)$.

Bài 7. Cho đường thẳng $d: y = ax + b$ ($a \neq 0$). Viết phương trình của d biết nó đi qua hai điểm $A(3; 2), B(1; -2)$.

Lời giải. Vì d đi qua A và B nên tọa độ của A và B thỏa mãn phương trình của d . Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ a + b = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4. \end{cases}$$

Vậy $d: y = 2x - 4$.

Bài 8. Một bài kiểm tra có 15 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 5 điểm. Mỗi câu trả lời sai hoặc bỏ trống bị trừ 5 điểm. Một học sinh làm bài kiểm tra và đạt 25 điểm. Hỏi bạn đó đã trả lời đúng bao nhiêu câu?

Lời giải. Gọi số câu trả lời đúng là x , số câu trả lời sai hoặc không trả lời là y (x, y là các số nguyên không âm). Ta có

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 5x - 5y = 25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ 10x = 100. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy học sinh đó trả lời đúng 10 câu.

Bài 9. Có 2 loại xe khách (loại I và loại II). Nếu chọn phương án vận chuyển hành khách bằng 2 chuyến xe loại I và 5 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 190 hành khách (không tính tài xế). Nếu chọn phương án vận chuyển bằng 3 chuyến xe loại I và 3 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 195 hành khách (không tính tài xế). Hỏi mỗi loại xe có thể chứa tối đa bao nhiêu hành khách (không tính tài xế)?

Lời giải. Gọi x và y lần lượt là số hành khách tối đa có thể chở được của xe loại I và xe loại II (x, y là các số nguyên dương). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 5y = 190 \\ 3x + 3y = 195. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 20. \end{cases}$$

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2|x+y| + |x-y| = 7 \\ -|x+y| + 4|x-y| = 10. \end{cases}$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} u = |x+y| \\ v = |x-y| \end{cases}$, $u, v \geq 0$. Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 2u + v = 7 \\ -u + 4v = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - 2u \\ -u + 4(7 - 2u) = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ u = 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} |x+y| = 2 \\ |x-y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y = 2 \\ x+y = -2 \end{cases} \\ |x-y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 2-x \\ |x-y| = 3. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2-x \\ |x-y| = 3. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hệ } \begin{cases} y = 2-x \\ |x-y| = 3. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ |x-(2-x)| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ \begin{cases} 2x-2 = 3 \\ 2x-2 = -3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \\ \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2}. \end{cases} \end{cases} \\ \text{Xét hệ } \begin{cases} y = -2-x \\ |x-y| = 3. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2-x \\ |x-(-2-x)| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2-x \\ \begin{cases} 2x+2 = 3 \\ 2x+2 = -3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2-x \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{5}{2}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right); \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Dạng 2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

- Bước 1: Dùng phương pháp cộng đại số đưa hệ đã cho về dạng tam giác.
- Bước 2: Giải hệ và kết luận

⚠ Chú ý

- Cách giải hệ dạng tam giác: từ phương trình cuối ta tìm z , thay vào phương trình thứ hai ta tìm được y và cuối cùng thay y, z vào phương trình thứ nhất ta tìm được x .
- Nếu trong quá trình biến đổi ta thấy xuất hiện phương trình chỉ có một ẩn thì ta giải tìm ẩn đó rồi thay vào hai phương trình còn lại để giải hệ hai phương trình hai ẩn.
- Ta có thể thay đổi thứ tự các phương trình trong hệ để việc biến đổi dễ hơn.

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ y - z = 5 \\ 2z = 4. \end{cases}$$

Lời giải. Từ phương trình (3) suy ra $z = 2$.

Thay $z = 2$ vào phương trình (2) ta được $y - 2 = 5 \Leftrightarrow y = 7$.

Thay $y = 7, z = 2$ vào phương trình (3) ta được $x + 2 \cdot 7 + 2 = 10 \Leftrightarrow x = -6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-6; 7; 2)$.

Ví dụ 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ 3x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - 4z = 3. \end{cases}$$

Lời giải. Nhân hai vế của phương trình (1) với -3 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, nhân hai vế của phương trình (1) với -2 rồi cộng vào phương trình (3) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -5y = -15 \\ y - 6z = 9. \end{cases}$$

Giải phương trình (2) ta được $y = 3$.

Thay $y = 3$ vào phương trình (3) ta được $3 - 6z = 9 \Leftrightarrow z = -1$

Thay $y = 3, z = -1$ vào phương trình (1) ta được $x - 3 + (-1) = -3 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(1; 3; -1)$.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Nhân hai vế của phương trình (1) với -2 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, Nhân hai vế của phương trình (1) với -1 rồi cộng vào phương trình (3) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -9 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Tiếp tục nhân hai vế của phương trình (2) với $-\frac{2}{3}$ rồi cộng vào phương trình (3) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -9 \\ \frac{7}{3}z = 7 \end{cases}$$

Từ phương trình (3) suy ra $z = 3$.

Thay $z = 3$ vào phương trình (2) ta được $3y - 5 \cdot 3 = -9 \Leftrightarrow y = 2$.

Thay $y = 2, z = 3$ vào phương trình (3) ta được $x - 2 + 2 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(0; 2; 3)$.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 16 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = -9 \end{cases}$$

Lời giải. Ta đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, t = \frac{1}{z}$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v + t = 10 \\ 2u - v + 3t = 16 \\ u - 2v - t = -9 \end{cases}$$

Dùng phép cộng đại số ta đưa hệ trên về dạng tam giác, ta được hệ

$$\begin{cases} u + v + t = 10 \\ -3v + t = -4 \\ -3t = -15 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $u = 2, v = 3, t = 5$.

Suy ra $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{5}$.

Ví dụ 10. Ba bạn Vân, Anh, Khoa đi chợ mua trái cây. Bạn Anh mua 2 kí cam và 3 kí quýt hết 105 nghìn đồng, bạn Khoa mua 4 kí nho và 1 kí cam hết 215 nghìn đồng, bạn Vân mua 2 kí nho, 3 kí cam và 1 kí quýt hết 170 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi loại cam, quýt, nho là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x, y, z (nghìn đồng) lần lượt là giá một kí cam, quýt, nho. Điều kiện x, y, z là số dương. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} 2x + 3y = 105 \\ x + 4z = 215 \\ 3x + y + 2z = 170 \end{cases}$$

Dùng phép cộng đại số ta đưa hệ trên về dạng tam giác, ta được hệ

$$\begin{cases} x + 4y = 125 \\ y - 10z = -475 \\ 22z = 1100 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 15, y = 25, z = 50$.

Vậy giá mỗi kí cam, quýt, nho lần lượt là 15, 25, 50 (nghìn đồng).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y + 5z = -8 \\ 2y + z = -2 \\ -3z = 6 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(1; 0; -2)$.

Bài 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3y = 9 \\ 2x - z = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(2; 3; -1)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = -5 \\ 2x + 3y - 5z = -14 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 1; 3)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ 3x + y - 3z = -9 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(4; 6; 9)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 20 \\ 2x + 2y - z = 23 \\ x + y - z = 11 \end{cases}$$

Lời giải. Nghiệm của hệ phương trình là $(5; 7; 1)$.

Bài 16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Lời giải. Ta đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, t = \frac{1}{z}$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + 3v + 6t = 1 \\ u - v + 3t = \frac{2}{3} \\ -u + v + 2t = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $u = \frac{1}{10}, v = -\frac{1}{15}, t = \frac{1}{6}$.

Suy ra $x = 10, y = -15, z = 6$.

Bài 17. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -11 \\ \frac{2}{x} - \frac{2y+4}{y} + \frac{1}{z} = -7 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{-2-z}{z} = -6 \end{cases}$$

Lời giải. Ta có $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$, $\frac{2y+4}{y} = 2 + \frac{4}{y}$, $\frac{-2-z}{z} = -\frac{2}{z} - 1$ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -12 \\ \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{z} = -5 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = -5 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $t = \frac{1}{z}$ thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + 2v - 3t = -12 \\ 2u - 4v + t = -5 \\ -3u + v - 2t = -5 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u = -1$, $v = 2$, $t = 5$.

Suy ra $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{5}$.

Bài 18. Một cửa hàng bán quần, áo và nón. Ngày thứ nhất bán được 3 cái quần, 7 cái áo và 10 cái nón, doanh thu là 1930000 đồng. Ngày thứ hai bán được 5 cái quần, 6 cái áo và 8 cái nón, doanh thu là 2310000 đồng. Ngày thứ ba bán được 11 cái quần, 9 cái áo và 3 cái nón, doanh thu là 3390000 đồng. Hỏi giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón là bao nhiêu?

Lời giải. Gọi x, y, z (đồng) lần lượt là giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón. Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 7y + 10z = 1930000 \\ 5x + 6y + 8z = 2310000 \\ 11x + 9y + 3z = 3390000 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 210000$, $y = 100000$, $z = 60000$.

Vậy giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón lần lượt là 210000 đồng, 100000 đồng, 60000 đồng.

Dạng 3. Giải và biện luận hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có chứa tham số (PP Crame)

a) **Dạng:**
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1^2 + b_1^2 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2^2 + b_2^2 \neq 0). \end{cases}$$

Cách giải đã biết: Phép thế, phép cộng...

b) **Giải và biện luận hệ phương trình:**

Bước 1: Tính các định thức:

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (Gọi là định thức của hệ);

- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ (Gọi là định thức của x);

- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ (Gọi là định thức của y).

Bước 2: Biện luận

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$.
- Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $a_1x + b_1y = c_1$).

Ví dụ 11. Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$

Lời giải. $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1; D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2; D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$

a) Nếu $m = 1 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0$. Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$ thỏa $x + y = 2$.

b) Nếu $m = -1 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = -2 \\ D_y = -2 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

c) Nếu $m \neq 1, m \neq -1$. Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 + m - 2}{m^2 - 1} = \frac{m + 2}{m + 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m - 1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m + 1}. \end{cases}$

Ví dụ 12. Với giá trị nguyên nào của tham số m , hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m. \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên.

Lời giải. $D = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2), D_x = m^2 + 2m - 4m = m^2 - 2m = m(m - 2),$
 $D_y = m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2).$

$$D = m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2, \text{ hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m}{m+2} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m+1}{m+2}. \end{cases}$$

Ta có:

$$x = \frac{m}{m+2} = 1 - \frac{2}{m+2} \text{ nên để } x \text{ nguyên thì } m+2 \text{ phải là ước của 2 (1);}$$

$$y = \frac{m+1}{m+2} = 1 - \frac{1}{m+2} \text{ nên để } y \text{ nguyên thì } m+2 \text{ phải là ước của 1 (2).}$$

$$\text{Từ (1),(2), suy ra } m+2 \text{ là ước của 1} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 = 1 \\ m+2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3. \end{cases}$$

Ví dụ 13. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m. \end{cases}$

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.
- Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < 1, y < 1$.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc vào m .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= -1 - m^2 < 0, \quad \forall m \\ D_x &= -1 + m^2 \\ D_y &= -m - m = -2m \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } D \neq 0, \quad \forall m \text{ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 - 1}{-m^2 - 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2m}{-m^2 - 1}. \end{cases}$$

$$\text{b) } x < 1 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{-m^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 > -m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$$y < 1 \Leftrightarrow \frac{-2m}{-m^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow -2m > -m^2 - 1 \Leftrightarrow (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Vậy với $m \neq 0 \wedge m \neq 1$ thì hệ có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{c) } x^2 + y^2 = \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2 + 1} \right)^2 = \frac{m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2}{m^4 + 2m^2 + 1} = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{m^4 + 2m^2 + 1} = 1.$$

Vậy $x^2 + y^2 = 1$ không phụ thuộc vào m .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 19. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} (m-1)x + 2y = 3m-1 \\ (m+2)x - y = 1-m. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ by + ax = 2ab. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m+1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

$$\text{Bài 20. Tìm } m \text{ để hệ sau vô nghiệm: } \begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - 2y = 2. \end{cases}$$

Bài 21. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa $x > 1, y > 1$.

Bài 22. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + m^2y = m + 1 \\ m^2x + y = 3 - m \end{cases}$. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $S = x + y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. $D = 1 - m^4$

$$D_x = m + 1 - m^2(3 - m) = m^3 - 3m^2 + m + 1$$

$$D_y = 3 - m - m^2(m + 1) = -m^3 - m^2 - m + 3$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - m^4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

$$x + y = \frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} = \frac{m^3 - 3m^2 + m + 1}{1 - m^4} + \frac{-m^3 - m^2 - m + 3}{1 - m^4}$$

$$= \frac{-4m^2 + 4}{1 - m^4} = \frac{4(1 - m^2)}{(1 - m^2)(1 + m^2)} = \frac{4}{1 + m^2} \leq \frac{4}{1 + 0} = 4$$

Dấu "=" đạt khi $m = 0$ (thỏa điều kiện)

Bài 23. Cho $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Lời giải. $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ bx + cy = a & (2) \\ cx + ay = b & (3) \end{cases}$

$$\Rightarrow (a + b + c)x + (a + b + c)y = a + b + c$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

• $a + b + c = 0$

Ta có: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - 3abc$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

• $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - y$ thế vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} a(1 - y) + by = c \\ b(1 - y) + cy = a \\ c(1 - y) + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b - a)y = c - a \\ (c - b)y = a - b \\ (a - c)y = b - c \end{cases}$$

Nếu $a = b$, để hệ có nghiệm ta suy ra $a = b = c \Rightarrow \text{đpcm}$.

Nếu a, b, c khác nhau từng đôi một, từ hệ ta có:

$$(b - a)(c - b)(a - c)y^3 = (c - a)(a - b)(b - c) \Rightarrow (b - a)(c - b)(a - c)(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0$$

Thế $x = 0, y = 1$ vào hệ ban đầu ta được $a = b = c \Rightarrow \text{đpcm}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 24. Tìm tất cả các số nguyên m để hai đường thẳng $y = -\frac{2}{3}mx + \frac{1}{3}m$ và $y = -x + m + 1$ cắt nhau tại một điểm có các thành phần tọa độ là các số nguyên.

Lời giải. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}mx + \frac{1}{3}m \\ y = -x + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm có các thành phần tọa độ là các số nguyên khi và chỉ khi hệ (1) có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất đó nguyên.

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - 3, D_x = \begin{vmatrix} m & 3 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -2m - 3, D_y = \begin{vmatrix} 2m & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 2m^2 + m.$$

Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ (1) là

$$\begin{cases} x = -\frac{2m+3}{2m-3} \\ y = \frac{2m^2+m}{2m-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{6}{2m-3} \\ y = m+2 + \frac{6}{2m-3} \end{cases}.$$

Nghiệm này nguyên $\Rightarrow 2m-3$ là ước của 6

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 = -1 \\ 2m-3 = 1 \\ 2m-3 = -2 \\ 2m-3 = 2 \\ 2m-3 = -3 \\ 2m-3 = 3 \\ 2m-3 = -6 \\ 2m-3 = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{5}{2} \\ m = 0 \\ m = 3 \\ m = -\frac{3}{2} \\ m = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Bài 25. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{4}{x-2y} = -2 \\ \frac{5}{2x-y} + \frac{2}{x-2y} = 14. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} 2x-y \neq 0 \\ x-2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{2} \\ x \neq 2y \end{cases} (*)$.

Với điều kiện (*), đặt $u = \frac{1}{2x-y}, v = \frac{1}{x-2y}$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3u-4v = -2 \\ 5u+2v = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-4v = -2 \\ 10u+4v = 28. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-4v = -2 \\ 13u = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} 2x-y = \frac{1}{2} \\ x-2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{1}{2} \\ x-2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$ (Thỏa mãn (*)).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$.

Bài 26. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} (m+n)x + (m-n)y = 2m(m^2-n^2) \\ x-y = -4mn \end{cases}$ theo hai tham số m, n .

Lời giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} m+n & m-n \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(m+n) - (m-n) = -2m,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m(m^2 - n^2) & m-n \\ -4mn & -1 \end{vmatrix} = -2m(m^2 - n^2) + 4mn(m-n) = -2m(m-n)^2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} (m+n) & 2m(m^2 - n^2) \\ 1 & -4mn \end{vmatrix} = -4mn(m+n) - 2m(m^2 - n^2) = -2m(m+n)^2.$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất
$$\begin{cases} x = \frac{-2m(m-n)^2}{-2m} = (m-n)^2 \\ y = \frac{-2m(m+n)^2}{-2m} = (m+n)^2. \end{cases}$$
- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x. \end{cases}$$

Bài 27. Tìm tất cả các giá trị của a, b, c để ít nhất một trong các hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x+cy=b \\ cx+y=a \end{cases} (1); \quad \begin{cases} cx+y=a \\ bx+ay=1 \end{cases} (2); \quad \begin{cases} bx+ay=1 \\ x+cy=b \end{cases} (3).$$

Lời giải. Ta giải bài toán gián tiếp: Tìm tất cả các giá trị của a, b, c để cả ba hệ đã cho đều vô nghiệm.

Xét hệ
$$\begin{cases} x+cy=b \\ cx+y=a \end{cases} (1).$$

Ta có $D_{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1 - c^2$; $D_x = \begin{vmatrix} b & c \\ a & 1 \end{vmatrix} = b - ac$; $D_y = \begin{vmatrix} 1 & b \\ c & a \end{vmatrix} = a - bc$.

Hệ (1) vô nghiệm khi và chỉ khi
$$\begin{cases} D_{(1)} = 0 \\ D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - c^2 = 0 \\ b - ac \neq 0 \\ a - bc \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b - a \neq 0 \\ c = -1 \\ b + a \neq 0 \end{cases}.$$

- Xét trường hợp $\begin{cases} c = 1 \\ b - a \neq 0 \end{cases}$. Thay $c = 1$ vào hệ (2), ta có:
$$\begin{cases} x+y=a \\ bx+ay=1 \end{cases}$$

Ta có $D_{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a - b \neq 0$. Do đó (2) có nghiệm duy nhất.

- Xét trường hợp $\begin{cases} c = -1 \\ b + a \neq 0 \end{cases}$. Thay $c = -1$ vào (3) ta có
$$\begin{cases} bx+ay=1 \\ x-y=b \end{cases}$$

Ta có $D_{(3)} = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -b - a = -(b + a) \neq 0$. Do đó (3) có nghiệm duy nhất.

Suy ra nếu (1) vô nghiệm thì các hệ (2), (3) đều có nghiệm. Do đó không tồn tại giá trị nào của a, b, c để cả ba hệ phương trình đã cho cùng vô nghiệm.

Vậy, với mọi giá trị của a, b, c thì ít nhất một trong các hệ đã cho có nghiệm.

Bài 28. Tập thể giáo viên (Toán và $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$) gồm 128 người được chia thành ba nhóm ra đề kiểm tra: Nhóm 1, Nhóm 2 và Nhóm 3. Sau một ngày làm việc, cả ba nhóm hoàn thành được 476 câu trắc nghiệm và 375 câu tự luận; trong đó, mỗi thành viên Nhóm 1 hoàn thành được 3 câu trắc nghiệm và 4 câu tự luận, mỗi thành viên Nhóm 2 hoàn thành được 2 câu trắc nghiệm và 5 câu tự luận, mỗi thành viên Nhóm 3 hoàn thành được 6 câu trắc nghiệm. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu giáo viên?

Lời giải. Gọi số giáo viên của Nhóm 1, Nhóm 2, Nhóm 3 lần lượt là x, y, z (ĐK: x, y, z nguyên dương). Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 128 & (1) \\ 3x + 2y + 6z = 476 & (2) \\ 4x + 5y = 375 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với -6 rồi cộng vào (2), ta được hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 128 & (1) \\ 3x + 4y = 292 & (4) \\ 4x + 5y = 375 & (5) \end{cases}$$

Từ (4) và (5) ta có $\begin{cases} x = 40 \\ y = 43. \end{cases}$ Thế vào (1) ta được $z = 45$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy số giáo viên của các nhóm 1, 2, 3 lần lượt là 40, 43, 45.

Bài 29. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 2 & (*) \\ x + y + mz = 4. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y + z = 1 & (1) \\ (m-1)x + (1-m)y = -1 & (2) \\ (m^2-1)x + (m-1)y = m-4 & (3) \end{cases}$

Xét hệ phương trình (2), (3), ta có:

- $D = \begin{vmatrix} m-1 & 1-m \\ m^2-1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2 - (1-m)(m^2-1) = (m-1)^2(m+2),$
- $D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1-m \\ m-4 & m-1 \end{vmatrix} = -(m-1) - (1-m)(m-4) = (m-1)(m-5),$
- $D_y = \begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ m^2-1 & m-4 \end{vmatrix} = (m-1)(m-4) + (m^2-1) = (m-1)(2m-3).$

Hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ Hệ (2), (3) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$

Khi đó nghiệm duy nhất của hệ $(*)$ là $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m-5}{(m-1)(m+2)} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{2m-3}{(m-1)(m+2)} \\ z = \frac{4m+1}{(m-1)(m+2)}. \end{cases}$

Cách khác: Lấy ba phương trình của hệ cộng lại, ta được

$$(m+2)x + (m+2)y + (m+2)z = 7$$

Hệ có nghiệm khi $m \neq -2$. Khi đó

$$x + y + z = \frac{7}{m+2} \quad (1)$$

Lấy các phương trình của hệ trừ cho (1) ta được

$$\begin{cases} (m-1)x = 1 - \frac{7}{m+2} \\ (m-1)y = 2 - \frac{7}{m+2} \\ (m-1)z = 4 - \frac{7}{m+2}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra, hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1. \end{cases}$ và nghiệm duy nhất của hệ là $\begin{cases} x = \frac{m-5}{(m-1)(m+2)} \\ y = \frac{2m-3}{(m-1)(m+2)} \\ z = \frac{4m+1}{(m-1)(m+2)}. \end{cases}$

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ x+by+b^2z+b^3=2017 \\ x+cy+c^2z+c^3=2017. \end{cases}$ (1), với a, b, c là các tham số đôi một khác nhau.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ (b-a)y+(b^2-a^2)z+b^3-a^3=0 \\ (c-a)y+(c^2-a^2)z+c^3-a^3=0. \end{cases} && \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ y+(b+a)z+b^2+ab+a^2=0 \\ y+(c+a)z+c^2+ac+a^2=0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ y+(b+a)z+b^2+ab+a^2=0 \\ (b-c)z+b^2-c^2+a(b-c)=0. \end{cases} && \Leftrightarrow \begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=2017 \\ y+(b+a)z+b^2+ab+a^2=0 \\ z=-(a+b+c). \end{cases} \\ & && \Leftrightarrow \begin{cases} x=-ay-a^2z-a^3+2017 \\ y=ab+bc+ca \\ z=-(a+b+c). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ (1) có nghiệm là $\begin{cases} x=-abc+2017 \\ y=ab+bc+ca \\ z=-(a+b+c). \end{cases}$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

I. Hệ phương trình gồm các phương trình bậc nhất và bậc hai

Để giải các hệ phương trình dạng này, ta chủ đạo sử dụng phương pháp thế và phương pháp cộng đại số thông thường, đôi khi kết hợp thêm giải pháp đặt ẩn phụ để làm gọn bài toán.

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - y^2 = 2x - 1 - y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2x - y^2 = 1 \\ y^2 + 4x = 8 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ x^2 - y^2 = 2x - 1 - y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 1 - 2y.$$

$$(2) \Leftrightarrow (1 - 2y)^2 - y^2 = 2(1 - 2y) - 1 - y \Leftrightarrow 3y^2 + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2x - y^2 = 1 & (1) \\ y^2 + 4x = 8 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) ta được $3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$.

Với $x = -3$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = 8 - 4x = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{5} \end{cases}$.

Với $x = 1$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = 8 - 4x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy hệ có bốn nghiệm là $\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm 2\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 + x^2y = 9 - 2xy \\ x^2 + y = 6 - 4x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 + x^2y = 9 - 2xy & (1) \\ x^2 + y = 6 - 4x & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = -x^2 - 4x + 6$$

$$(1) \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + x^2(-x^2 - 4x + 6) = 9 - 2x(-x^2 - 4x + 6)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = 9 \end{cases}$.

$$\text{b) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 + \frac{1}{xy} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x = y, (2) \Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 2: } xy = -1, (2) \Leftrightarrow 2x^2 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

Ví dụ 3. Xác định các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = m \\ x^2 + 2xy - y^2 = 2m \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải. Ta có $(1) \Leftrightarrow x = 2y + m$.

Thế vào (2) ta được $(2) \Leftrightarrow (2y + m)^2 + 2y(2y + m) - y^2 = 2m \Leftrightarrow 7y^2 + 6my + m^2 - 2m = 0(*)$.

Để hệ có hai nghiệm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 14m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ m > 0 \end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^2 + 14y^2 = 1 + 4xy \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (3x + y - 1)(x - 2y - 1) = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải. **Đáp số:**

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 4 \end{cases}.$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = \frac{5}{11} \end{cases}, \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ x^2 + 3xy + 4y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Lời giải.

$$a) \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$b) \text{ Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 & (1) \\ xy = \frac{-x^2 + 6x + 6}{2} & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Thế (2) và (1) ta được } (1) \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{-x^2 + 6x + 6}{2}\right)^2 = 2x + 9 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 = 8x + 36$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Với $x = 0$, hệ vô lý.

$$\text{Với } x = -4, (2) \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 + 6x + 6}{2x} = \frac{17}{4}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm là } \begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{17}{4} \end{cases}.$$

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$a) \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y^2 + xy + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{2x+5y-1} - \sqrt{x-2y} = 1 \\ x+y = 2 \end{cases}$$

Lời giải. Hướng dẫn:

$$a) \text{ Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy)^2 + x^3y = 1 \\ x^2 - xy = x^3y + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Sử dụng phương pháp thế ta có nghiệm là } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$b) \text{ Đặt } a = \sqrt{2x+5y-1}, b = \sqrt{x-2y}.$$

$$\text{Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+5y-1} - \sqrt{x-2y} = 1 \\ 2x+5y-1 + x-2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Giải hệ tìm } a, b \text{ rồi suy ra nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}.$$

$$\text{Bài 4. Giải hệ phương trình } \begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

Lời giải. Xét $y = 0$, khi đó hệ vô lý.

$$\text{Xét } y \neq 0, \text{ hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 7 - \frac{x}{y} & (1) \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Thế (1) và (2) ta được } \left(7 - \frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 12y \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $x = 3y$, $(1) \Leftrightarrow 3y^2 + 3y + 1 = 7y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

Trường hợp 2: $x = 12y$, $(1) \Leftrightarrow 12y^2 + 12y + 1 = 7y$ (vô nghiệm).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Bài 5. Xác định các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ 2x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải. Đáp số: $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

II. Hệ phương trình đối xứng loại 1

Định nghĩa 1. Hệ phương trình đối xứng loại 1 của hai ẩn x, y là hệ mà khi ta thay thế x bởi y và y bởi x thì ta được hệ mới không thay đổi (thứ tự các phương trình trong hệ giữ nguyên).

Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt điều kiện nếu cần;

Bước 2: Đặt $x + y = S; xy = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P ;

Bước 3: Giải hệ ta tìm được S, P ;

Bước 4: x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

 **Chú ý:**

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P; x^3 + y^3 = S^3 - 3SP.$$

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 - 3xy = -1. \end{cases}$

Lời giải. Hệ đã cho có thể viết lại là:

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 5P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 5S - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -8 \\ S = 3 \end{cases}.$$

TH1:

$$\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

TH2:

$$\begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 + \sqrt{3} \\ y = -4 - \sqrt{3} \\ x = -4 - \sqrt{3} \\ y = -4 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $(1; 2), (2; 1), (-4 + \sqrt{3}; -4 - \sqrt{3}), (-4 - \sqrt{3}; -4 + \sqrt{3})$

 **Chú ý 1.** Đối với hệ đối xứng của hai ẩn x, y thì nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

2. Có một số hệ phương trình không phải là hệ đối xứng loại 1, tuy nhiên ta có thể chọn biến phù hợp để đổi biến đưa về hệ đối xứng loại 1.

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y, \\ x^3 = 5y^2. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y & (1), \\ x^3 = 5y^2 & (2). \end{cases}$$

• Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0; 0)$ là nghiệm của hệ.

• Nếu $y \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (1) cho y ta có: $\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} = \frac{14}{3}$.

Chia 2 vế của phương trình (2) cho y^2 ta được $\frac{x^2}{y} \cdot \frac{x}{y} = 5$.

Vậy ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} = \frac{14}{3}, \\ \frac{x^2}{y} \cdot \frac{x}{y} = 5 \end{cases}.$$

Đặt $\frac{x^2}{y} = u; \frac{x}{y} = v$ ta được hệ mới là:

$$\begin{cases} u + v = \frac{14}{3} \\ uv = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = \frac{5}{3} \\ v = \frac{5}{3} \\ v = 3 \end{cases}.$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} u = 3 \\ v = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{27}{25} \end{cases}.$$

TH2: Giải tương tự ta có

$$\begin{cases} x = \frac{27}{25} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $\left(\frac{9}{5}; \frac{27}{25}\right), \left(\frac{27}{25}; \frac{9}{5}\right)$.

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} = 4, \\ x + y = 2m + 1. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $u = \sqrt{x-2}; v = \sqrt{y+1}$ ($u, v \geq 0$). Khi đó hệ phương trình được viết lại là:
$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 8 - m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u, v$ là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x + 8 - m = 0$. Để hệ phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình trên phải có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 \geq 0 \\ 8 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 8.$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là: $4 \leq m \leq 8$.

Ví dụ 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 6m. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0$. Đặt $\sqrt{x} + \sqrt{y} = S; \sqrt{x}\sqrt{y} = P$ ($S, P \geq 0; S^2 \geq 4P$). Khi đó hệ phương trình được viết lại là:

$$\begin{cases} S = 1 \\ S^3 - 3PS = 1 - 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 2m \end{cases}.$$

Khi đó S, P là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - x + 2m = 0$.

Để hệ phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình trên phải có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 1 - 4m \geq 0 \\ P = 2m \geq 0 \\ S = 1 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}. \text{ Vậy tất cả các giá trị } m \text{ cần tìm là: } 0 \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + 2y + 2xy = 5, \\ x^2 + 4y^2 = 5. \end{cases}$

Lời giải. Giải: Đặt $u = 2y$ ta được hệ $\begin{cases} x + u + xu = 5, \\ (x + u)^2 - 2xu = 5. \end{cases}$

Đặt $x + u = S; xu = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P là:

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -5, P = 10 \\ S = 3, P = 2 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $(1; 1), \left(2; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 6xy^2 = 9, \\ x^2 + 4y^4 = 5. \end{cases}$

Lời giải. Giải: Đặt $u = 2y^2$ ta được hệ $\begin{cases} x + u + 3xu = 9, \\ (x + u)^2 - 2xu = 5. \end{cases}$

Đặt $x + u = S; xu = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P là:

$$\begin{cases} S + 3P = 9 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 9 - 3P \\ 3S^2 + 2S - 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -\frac{11}{3} \\ S = 3 \end{cases}.$$

Giải tiếp ta được các nghiệm $(1; 1), (1; -1), \left(2; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(2; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Bài 8. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y} = 2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

Lời giải. Giải: Đặt $u = \sqrt{x+y}; v = \sqrt{y}$ ta được hệ $\begin{cases} u + v = 2, \\ u^2 + v^2 = 2. \end{cases}$

Giải tiếp ta được nghiệm $(0; 1)$.

Bài 9. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 2, \\ 2x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 3. \end{cases}$

Lời giải. Giải tương tự bài 3 ta được $S = \{(1; 0)\}$.

Bài 10. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4y - 1, \\ x^3 + x^2y + x - 3y = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Hệ đã cho có thể viết lại là:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y & (1), \\ (x^2 + 1)(x + y) = 4y & (2). \end{cases}$$

Dễ thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Chia cả hai vế phương trình (1), (2) cho y ta được hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + (x + y) = 4, \\ \frac{x^2 + 1}{y}(x + y) = 4. \end{cases}$$

Đặt $\frac{x^2 + 1}{y} = u; x + y = v$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Giải hệ ta suy ra tập nghiệm của hệ là: $S = \{(1; 1); (-3; 5)\}$.

Bài 11. Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2, \\ xy(x + 2)(y + 2) = m. \end{cases}$$

Lời giải. Đặt $u = x^2 + 2x \geq -1; v = y^2 + 2y \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = m \end{cases} (*)$.

Hệ trên có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (*) có hai nghiệm $\geq -1 \Leftrightarrow$ phương trình $t^2 - 2t + m = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn

$$-1 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m + 3 \geq 0 \\ 4 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

III. Hệ phương trình đối xứng loại 2

Định nghĩa 2. Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0. \end{cases}$$

 Nếu hệ phương trình có nghiệm là (a, b) thì nó cũng có nghiệm (b, a) .

Dạng 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại 2.

Phương pháp giải hệ phương trình đối xứng loại 2:

$$f(x, y) - f(y, x) = 0 \Leftrightarrow (x - y)h(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ h(x, y) = 0. \end{cases}$$

 Thường thì $h(x, y)$ là những phương trình dễ dàng tìm ra mối liên hệ giữa x và y ; hoặc $h(x, y)$ là phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 8. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y \\ y^2 - 2018y = 2017x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y & (1) \\ y^2 - 2018y = 2017x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2) - 2018(x - y) = 2017(y - x) \\ \Leftrightarrow & (x - y)(x + y - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ y = -x + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2018x = 2017y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x + 1 \\ x^2 - 2018x = 2017y \end{cases}$$

• Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 4035. \end{cases}$

• Giải (II): $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{8069}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{8069}}{2}. \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{8069}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{8069}}{2}. \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình có bốn nghiệm: $(0; 0)$, $(4035; 4035)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{8069}}{2}; \frac{1 + \sqrt{8069}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{8069}}{2}; \frac{1 - \sqrt{8069}}{2}\right)$.

Ví dụ 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y & (1) \\ y^3 + 2 = 3x. & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 3(y - x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + xy + y^2 + 3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^3 + 2 = 3y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \\ x^3 + 2 = 3y \end{cases}$$

• Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -2. \end{cases}$

• Giải (II): Ta có $x^2 + xy + y^2 + 3 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Nên hệ phương trình (II) vô nghiệm.

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $(1; 1)$, $(-2; -2)$.

Ví dụ 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{5-y} = 16 \\ \sqrt{y+3} + \sqrt{5-x} = 16. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{5-y} = 16 & (1) \\ \sqrt{y+3} + \sqrt{5-x} = 16. & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 5. \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(\sqrt{x+3} - \sqrt{y+3}) + (\sqrt{5-y} - \sqrt{5-x}) = 0$.

(3)

- Với $x = y = -3$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{8} = 16 \\ \sqrt{8} = 16. \end{cases}$ (vô lí)
- Với $x = y = 5$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{8} = 16 \\ \sqrt{8} = 16. \end{cases}$ (vô lí)
- Với $\begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \neq -3 \\ y \neq 5 \end{cases}$
(3) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}} + \frac{x-y}{\sqrt{5-y}+\sqrt{5-x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{y+3}} + \frac{1}{\sqrt{5-y}+\sqrt{5-x}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = x. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = x \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 8 + 2\sqrt{(x+3)(5-x)} = 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ \sqrt{(x+3)(5-x)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1. \end{aligned}$$

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm: $(1; 1)$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số thỏa điều kiện cho trước.

Dựa vào tính chất nghiệm của hệ phương trình đối xứng để tìm tham số.

Ví dụ 11. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x - 2y = m \frac{y}{x} \\ y - 2x = m \frac{x}{y} \end{cases}$$

Lời giải. Vì hệ phương trình đối xứng nên giả sử nghiệm của hệ là $(x; y)$ thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ, vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y$. Suy ra (1) trở thành

$$x - 2x = m \Leftrightarrow -x = m \Leftrightarrow x = -m.$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $x = y = -m \neq 0$, suy ra $m \neq 0$.

Thử lại, với $m \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$ thì hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2 - 2xy = my & (1) \\ y^2 - 2xy = mx & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được $x^2 - y^2 = m(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + m) = 0$

$$\Leftrightarrow (I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2xy = my \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x - m \\ x^2 - 2xy = my \end{cases}$$

- Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \text{ (loại)} \\ x = y = -m. \end{cases}$

- Giải (II): Từ hệ (II) ta được phương trình $3x^2 + 3mx + m^2 = 0$. Có $\Delta = -3m^2 < 0, \forall m \neq 0$. Nên hệ phương trình (II) vô nghiệm.

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq 0$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 12. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y & (1) \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(x - y)\frac{13}{3} = 0 \Leftrightarrow y = x$. Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = x \\ 4x - x^2 = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x = \frac{11}{3} \\ y = x = 0. \end{cases}$$

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(\frac{11}{3}; \frac{11}{3}\right), (0; 0)$.

Bài 13. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + x = 2y \\ y^2 + y = 2x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^2 + x = 2y & (1) \\ y^2 + y = 2x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x - 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x - 3 \\ x^2 + 3x + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $(1; 1), (0; 0)$.

Bài 14. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + x^2y = y \\ y^3 + y^2x = x. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^3 + x^2y = y & (1) \\ y^3 + y^2x = x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + 2xy + y^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (x + y)^2 + 1 = 0. \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} y = x \\ 2x^3 = x. \end{cases}$$

Kết luận, hệ phương trình có ba nghiệm: $(0; 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Bài 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2xy = 2018 \frac{y}{x} \\ y^2 - 2xy = 2018 \frac{x}{y} \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$.

Hệ phương trình tương đương với hệ
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2y = 2018y & (1) \\ y^3 - 2xy^2 = 2018x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x-y)(x^2 - xy + y^2 + 2018) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2018 = 0. \end{cases} & \text{(vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} y = x \\ -x^2 = 2018. \end{cases}$ (vô lí)

Kết luận, hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 16. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2y - 2 \\ y^2 = 2x + \frac{2}{x} \end{cases}$$

Lời giải. Hệ phương trình tương đương với hệ
$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2y \\ y^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0$.

Đặt $u = x + \frac{1}{x}$, hệ trên trở thành
$$\begin{cases} u^2 = 2y & (1) \\ y^2 = 2u & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (u-y)(u+y+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (I) \begin{cases} y = u \\ u^2 = 2u \end{cases} & \text{ hoặc } (II) \begin{cases} y = -u-2 \\ u^2 + 2u + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{(vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Giải (I): (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} u = y = 0 \\ u = y = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm: (1; 2).

Bài 17. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{7-y} = m \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{7-x} = m. \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình trên với $m = 3$.

b) Tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 7 \\ -2 \leq y \leq 7. \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{7-y} = m & (1) \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{7-x} = m & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(\sqrt{x+2} - \sqrt{y+2}) + (\sqrt{7-y} - \sqrt{7-x}) = 0$.

(3)

- Với $x = y = -2$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{9} = m \\ \sqrt{9} = m. \end{cases}$
- Với $x = y = 7$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{9} = m \\ \sqrt{9} = m. \end{cases}$
- Với $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \neq -2 \\ y \neq 7 \end{cases}$
(3) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} + \frac{x-y}{\sqrt{7-y}+\sqrt{7-x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} + \frac{1}{\sqrt{7-y}+\sqrt{7-x}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = x. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = x \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 9 + 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \sqrt{(x+2)(7-x)} = \frac{m-9}{2} \end{cases} \quad (4)$$

a) Với $m = 3$, hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ bằng $(-2; -2)$, $(7; 7)$.

b) Ta xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1. $m = 3$, hệ phương trình có hai nghiệm, loại.
- Trường hợp 2. $\begin{cases} \frac{m-9}{2} < 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m \neq 3 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm, loại.
- Trường hợp 3. $\frac{m-9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$ thì (4) trở thành

$$-x^2 + 5x + 14 - \frac{m^2 - 18m + 81}{4} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x + \frac{-m^2 + 18m - 25}{4} = 0.$$

Ta được $\Delta = 25 + (-m^2 + 18m - 25) = -m^2 + 18m$.

Để (4) có nghiệm duy nhất thì $m = 0$ (loại) hoặc $m = 18$. Với $m = 18$ phương trình (4) có nghiệm $x = \frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 18$.

IV. Hệ phương trình đẳng cấp

Định nghĩa 3. Biểu thức $f(x, y)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc 2 nếu $f(mx, my) = m^2 f(x, y)$.

Định nghĩa 4. Biểu thức $f(x, y)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc 3 nếu $f(mx, my) = m^3 f(x, y)$.

Định nghĩa 5. Hệ phương trình đẳng cấp bậc 2 theo x, y có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

(Mỗi phương trình trong hệ (3.2) là các biểu thức đẳng cấp bậc 2)

Phương pháp giải:

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào (3.2) để tìm y . Nếu không tìm được y thì hệ vô nghiệm trong trường hợp này.
- Xét $x \neq 0$.
 - (i) Nếu $d_1 = 0$ hoặc $d_2 = 0$, chẳng hạn, $d_1 = 0$ thì ta chia cả hai vế phương trình thứ nhất cho x^2 ta được phương trình có dạng: $c_1\left(\frac{y}{x}\right)^2 + b_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_1 = 0$. Giải phương trình này ta tìm được tỉ số $\frac{y}{x}$, sau đó thế vào phương trình còn lại để tìm nghiệm x, y .
 - (ii) Nếu $d_1 \neq 0$ và $d_2 \neq 0$ thì ta có thể tạo ra một phương trình đẳng cấp bậc 2 thuần nhất (phương trình có hệ số tự do bằng 0) bằng cách:
 $d_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 - d_1) - d_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 - d_2) = 0$. Sau đó giải giống (i).

Định nghĩa 6. Hệ phương trình đẳng cấp bậc 3 theo x, y có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} F(x, y) = A \\ G(x, y) = B. \end{cases} \quad (3.3)$$

Trong đó, $F(x, y), G(x, y)$ là các biểu thức đẳng cấp bậc 3.

Phương pháp giải: Giải tương tự hệ phương trình (3.2).

Ví dụ 12. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 0. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ:
$$\begin{cases} 2y^2 = 0 \\ -10y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$$
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:
$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y. \end{cases}$$
 - a) Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow -7x^2 = 0$ (vô nghiệm do $x \neq 0$).
 - b) Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 0y^2 = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$. Mà $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(2a, a), a \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 13. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + 4y^2 = 19. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + xy + 4y^2 = 19 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ:
$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ 4y^2 = 19 \end{cases},$$
 hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:
$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2x. \end{cases}$$

a) Với $y = x$, $(2) \Leftrightarrow 6x^2 = 19 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{114}}{6}$ hoặc $x = -\frac{\sqrt{114}}{6}$.

b) Với $y = 2x$, $(2) \Leftrightarrow 19x^2 = 19 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(\frac{\sqrt{114}}{6}, \frac{\sqrt{114}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{114}}{6}, -\frac{\sqrt{114}}{6}\right), (1, 2), (-1, -2)$.

Ví dụ 14. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy - y^2 = -5. \end{cases}$$

Lời giải.

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} -y^2 = 1 \\ -y^2 = -5 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế (1) cho 5 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$6x^2 - 9xy - 6y^2 = 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -2x. \end{cases}$$
 - a) Với $x = 2y$, $(2) \Leftrightarrow 5y^2 = -5$ (Vô nghiệm).
 - b) Với $y = -2x$, $(2) \Leftrightarrow -5x^2 = -5 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(1, -2), (-1, 2)$.

Ví dụ 15. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \\ x^3 + x^2y - y^3 = 5. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 & (1) \\ x^3 + x^2y - y^3 = 5 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} 2y^3 = 0 \\ -y^3 = 5 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^3 ta được phương trình:

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y. \end{cases}$$
 - a) Với $x = y$, $(2) \Leftrightarrow y^3 = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{5}$.
 - b) Với $x = -2y$, $(2) \Leftrightarrow -5y^3 = 5 \Leftrightarrow y = -1$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}), (2, -1)$.

Ví dụ 16. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ 3x^3 - xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

Lời giải.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 & (1) \\ 3x^3 - xy^2 - y^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} y^3 = 2 \\ -y^3 = 1 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế (2) cho 2 rồi trừ (1) ta được phương trình:

$$5x^3 - 2xy^2 - 3y^3 = 0 \Leftrightarrow -3\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y.$$
 - Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(1, 1)$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy = 14. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + 3xy = 14 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$-4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -2y. \end{cases}$$
 - a) Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 14y^2 = 14 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -1$.
 - b) Với $x = -2y$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \sqrt{7}$ hoặc $y = -\sqrt{7}$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(2, 1), (-2, -1), (-2\sqrt{7}, \sqrt{7}), (2\sqrt{7}, -\sqrt{7})$.

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 3xy = -9 \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 9. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^2 + 3xy = -9 & (1) \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 9 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (1) cộng (2) ta được phương trình:

$$2x^2 + 9xy + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = -\frac{1}{3} \\ \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y = -\frac{2}{3}x. \end{cases}$$
 - a) Với $x = -3y$, (2) $\Leftrightarrow 0y^2 = 9$ (Vô nghiệm).
 - b) Với $y = -\frac{2}{3}x$, (2) $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 3$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(-3, 2), (3, -2)$.

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3 & (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$, lấy (2) nhân 3 rồi trừ (1) ta được phương trình:

$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ x = y. \end{cases}$$

a) Với $x = 5y$, (2) $\Leftrightarrow 21y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{21}}{21}$ hoặc $y = \frac{\sqrt{21}}{21}$.

b) Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(-\frac{5\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}\right), \left(\frac{5\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right), (-1, -1), (1, 1)$.

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = -1 \\ x^3 - xy^2 - 3y^3 = 3. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = -1 & (1) \\ x^3 - xy^2 - 3y^3 = 3 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$, lấy (1) nhân 3 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$4x^3 + 3x^2y - xy^2 = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 4 \\ \frac{y}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ y = -x. \end{cases}$$

a) Với $y = 4x$, (2) $\Leftrightarrow -207x^3 = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{69}}$.

b) Với $y = -x$, (2) $\Leftrightarrow 3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{69}}, \frac{-4}{\sqrt[3]{69}}\right), (1, -1)$.

Bài 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 \\ (x+y)(x^2 - y^2) = 3. \end{cases}$

Lời giải. $\begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 \\ (x+y)(x^2 - y^2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 & (1) \\ x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 3 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$, lấy (1) nhân 3 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$22x^3 + x^2y - xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) + 22 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -2 \Leftrightarrow y = -2x.$$

○ Với $y = -2x$, (1) $\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(1, -2)$.

Bài 23. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx^2 - (m+1)xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Lời giải. $\begin{cases} mx^2 - (m+1)xy + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - (m+1)\left(\frac{y}{x}\right) + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = m \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ y = x. \end{cases}$$

a) Với $y = x$, (2) $\Leftrightarrow 3x^2 = 1$ (phương trình này có hai nghiệm).

b) Với $y = mx$, (2) $\Leftrightarrow (1+m+m^2)x^2 = 1$. Vì $1+m+m^2 > 0, \forall m$ nên hệ có 4 nghiệm thì $1+m+m^2 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -2$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq -2$.

V. Hệ phương trình hai ẩn khác

Khi gặp hệ phương trình hai ẩn chưa ở dạng cơ bản hay chưa có dạng đã biết phương pháp giải thì ta cần sử dụng linh hoạt các phương pháp: Thế, Cộng đại số, Phân tích nhân tử, Đặt ẩn phụ, Nhân liên hợp.

Ví dụ 17. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5, \\ 8x^3 + y^3 = 5y + 4x^2y. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5 & (1), \\ 8x^3 + y^3 = 5y + 4x^2y & (2). \end{cases}$$

• **Cách Thế biểu thức:** Để ý thấy (1) $\Leftrightarrow 4x^2 = 5 - y^2$, (2) $\Leftrightarrow 8x^3 - 4x^2y = y(5 - y^2)$, nên ta có thể giải bằng phương pháp thế biểu thức $5 - y^2 = 4x^2$ vào (2) và nhận được phương trình:

$$8x^3 - 4x^2y = y \cdot 4x^2 \Leftrightarrow 8x^3 - 8x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

+/ Với $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$.

+/ Với $x = y \Rightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(0; \sqrt{5}), (0; -\sqrt{5}), (1; 1), (-1; -1)\}$.

• **Cách Thế hằng số:** Để ý thấy có hệ số 5 ở cả hai phương trình. Ở phương trình (2), hệ số 5 nằm ở số hạng có bậc 1, trong khi tất cả các số hạng khác có bậc 3. Ở phương trình (1), hệ số tự do 5 bằng một biểu thức đẳng cấp bậc 2. Vì vậy ta có thể nghĩ đến phương pháp thế hằng số $5 = 4x^2 + y^2$ vào (2) và nhận được phương trình:

$$8x^3 + y^3 = (4x^2 + y^2)y + 4x^2y \Leftrightarrow 8x^3 - 8x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Đến đây, ta giải tiếp như trên và thu được tập nghiệm $S = \{(0; \sqrt{5}), (0; -\sqrt{5}), (1; 1), (-1; -1)\}$.

Ví dụ 18. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9y^2 = (10x+4)(4-2x), \\ 9y^2 - 20x^2 - 24xy + 32x - 24y + 16 = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ
$$\begin{cases} 9y^2 = (10x+4)(4-2x) & (1), \\ 9y^2 - 20x^2 - 24xy + 32x - 24y + 16 = 0 & (2). \end{cases}$$

• **Cách 1:** Để ý thấy $(10x+4)(4-2x) = -20x^2 + 32x + 16$ là biểu thức không chứa y trong (2). Vì vậy ta giải bằng phương pháp thế như sau:

Ta có (1) $\Leftrightarrow 9y^2 = -20x^2 + 32x + 16$ thế vào (2) ta có

$$9y^2 - 24xy - 24y + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 18y^2 - 24xy - 24y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4x+4}{3} \end{cases}.$$

+/ Với $y = 0$ thay vào (1) ta có $(10x+4)(4-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}.$

+/ Với $y = \frac{4x+4}{3}$ thay vào (1), rút gọn được phương trình $36x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; 0\right), \left(0; \frac{4}{3}\right), (2; 0) \right\}.$

• **Cách 2:** Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn y , tham số x :

$$9y^2 - 24(x+1)y - 20x^2 + 32x + 16 = 0.$$

Ta có $\Delta_y = (18x)^2$. Suy ra (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12(x+1) + 18x}{9} = \frac{10x+4}{3} \\ y = \frac{12(x+1) - 18x}{9} = \frac{-2x+4}{3} \end{cases}.$

+/ Với $y = \frac{10x+4}{3}$ thế vào (1) được phương trình

$$(10x+4)^2 = (10x+4)(4-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

+/ Với $y = \frac{-2x+4}{3}$ thế vào (1) được phương trình

$$(-2x+4)^2 = (10x+4)(4-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; 0\right), \left(0; \frac{4}{3}\right), (2; 0) \right\}.$

Ví dụ 19. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 11x = y^3 + 11y, \\ x^2 + y^2 = 2x + y - 1. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 + 11x = y^3 + 11y & (1), \\ x^2 + y^2 = 2x + y - 1 & (2). \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 11x - 11y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 11(x-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x^2 + xy + y^2 + 11=0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Với $x-y=0 \Leftrightarrow y=x$ thế vào (2) ta có

$$2x^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}.$

Ví dụ 20. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2(xy+2x) = 12, \\ xy+x = 2. \end{cases}$

Lời giải. Ta có

$$\begin{cases} (x+1)^2(xy+2x) = 12 \\ xy+x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(xy+2x) = 12, \\ (xy+2x) - (x+1) = 1. \end{cases}$$

Đặt $u = x+1$, $v = xy+2x$ ta được hệ $\begin{cases} u^2v = 12 & (*) \\ v - u = 1. \end{cases}$

Thế $v = u+1$ vào $(*)$ ta được phương trình $u^3 + u^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \Rightarrow v = 3$. Suy ra $x = 1, y = 1$.
Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(1; 1)\}$.

Ví dụ 21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x+3y-1} - \sqrt{x+6y-2} + x - 3y + 1 = 0, \\ x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 9y = 0. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} \sqrt{2x+3y-1} - \sqrt{x+6y-2} + x - 3y + 1 = 0 & (1), \\ x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 9y = 0 & (2). \end{cases}$

Để ý thấy $(2x+3y-1) - (x+6y-2) = x-3y+1$, nên ta sẽ sử dụng phương pháp nhân liên hợp:

• Điều kiện $\begin{cases} 2x+3y \geq 1 \\ x+6y \geq 2 \end{cases}$

• Trường hợp $\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-1 = 0 \\ x+6y-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ (loại).

• Trường hợp $\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2} \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{x-3y+1}{\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2}} + (x-3y+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3y+1) \left(\frac{1}{\sqrt{2x+3y-1} + \sqrt{x+6y-2}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 3y - 1. \end{aligned}$$

Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow (3y-1)^2 + 9y^2 - 6(3y-1)y + 4(3y-1) - 9y = 0 \Leftrightarrow 3y-3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(2; 1)\}$.

Ví dụ 22. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3 + 8y^3 = 35, \\ 3x^2y + 2xy^2 = 5. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 27x^3 + 8y^3 = 35 & (1), \\ 3x^2y + 2xy^2 = 5 & (2). \end{cases}$

Để ý thấy hệ là đẳng cấp bậc 3, nhưng ở đây ta sẽ giải hệ bằng phương pháp cộng đại số để minh họa cho phương pháp này. Ta quan sát: (1) có $27x^3 = (3x)^3$, $8y^3 = (2y)^3$. Mà $(3x+2y)^3 = 27x^3 + 8y^3 + 18(3x^2y + 2xy^2)$. Vì vậy ta giải hệ như sau:

Lấy $(1) + 18 \times (2)$ ta được

$$\begin{aligned} 27x^3 + 8y^3 + 18(3x^2y + 2xy^2) &= 35 + 18 \times 5 \\ \Leftrightarrow (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 &= 125 \\ \Leftrightarrow (3x+2y)^3 &= 5^3 \Leftrightarrow 3x+2y = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5-3x}{2}. \end{aligned}$$

Thế $y = \frac{5-3x}{2}$ vào (1) ta có

$$27x^3 + 8\left(\frac{5-3x}{2}\right)^3 = 35 \Leftrightarrow 27x^3 + (5-3x)^3 = 35$$

$$\Leftrightarrow 27x^2 - 45x + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{(1; 1), \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right)\right\}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 24. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10x = 0, \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 4y - 20 = 0. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10x = 0 & (1), \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 4y - 20 = 0 & (2). \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow 10x = x^2 + 4y^2$ thế vào (2) ta được $y = \frac{3x-10}{2}$. Thế trở lại vào (1) và giải ra tập nghiệm $S = \left\{(2; -2); \left(5; \frac{5}{2}\right)\right\}$.

Bài 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + x + 2y = x^2 - 8y^2, \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 2xy + x + 2y = x^2 - 8y^2 & (1), \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y & (2). \end{cases}$

+/- Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

+/- Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 - (2y+1)x - 8y^2 - 2y = 0$ có $\Delta_x = (6y+1)^2$. Suy ra $\begin{cases} x = 4y+1 \\ x = -2y \end{cases}$ (loại).

Thế vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \{(5; 1)\}$.

Bài 26. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2xy + x - 2 = 0, \\ 2x^3 - 2x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y = 0. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 2xy + x - 2 = 0 & (1), \\ 2x^3 - 2x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y = 0 & (2). \end{cases}$

• Cách 1: Phân tích

$$(2) \Leftrightarrow x^2(2x - 2y + 1) - 2y(2x - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2y)(2x - 2y + 1) = 0.$$

• Cách 2: Sử dụng phương pháp Δ chính phương:

$$(2) \Leftrightarrow 4y^2 - 2(x^2 + 2x + 1)y + (2x^3 + x^2) = 0 \text{ có } \Delta_y = (-x^2 + 2x + 1)^2.$$

Hệ có tập nghiệm $S = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Bài 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy + 4y + 1 = 0, \\ -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(4x^2 + 1). \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy + 4y + 1 = 0 & (1), \\ -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(4x^2 + 1) & (2). \end{cases}$

Để ý thấy vế trái của (2) có nhân tử chung là y và vế phải của (2) xuất hiện trong (1): (1) $\Leftrightarrow 4x^2 + 1 = -y^2 + 2xy - 4y$ (*). Nên ta sẽ thế (*) vào (2) được phương trình

$$\begin{aligned}
 -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y &= 2(-y^2 + 2xy - 4y) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y^2 + (4x+2)y - 4x^2 - 4x + 15 = 0 \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

(3) có $\Delta'_y = 16$, suy ra (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$.

Thay lại vào (1) giải ra tập nghiệm $S = \left\{(-1; -5), \left(\frac{1}{2}; -2\right)\right\}$.

Bài 28. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y, \\ x^2 + 3y^2 = 4. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y & (1), \\ x^2 + 3y^2 = 4 & (2). \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 4x + \frac{1}{2} \cdot 4y$. Thế $4 = x^2 + 3y^2$ ta được phương trình

$$x^3 - y^3 = (x^2 + 3y^2)x + \frac{1}{2}(x^2 + 3y^2)y \Leftrightarrow 5y^3 + 6y^2x + x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5y^2 + 6yx + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -y \\ x = -5y \end{cases}.$$

Thay vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \left\{(\pm 2; 0), (-1; 1), (1; -1), \left(-\frac{5}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(\frac{5}{\sqrt{7}}; -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$.

Bài 29. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} = x + 2y + 4xy, \\ \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} = 3x - 8y + 4. \end{cases}$$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} = x + 2y + 4xy & (1), \\ \sqrt{x+2y} + \sqrt{x-2y} = 3x - 8y + 4 & (2). \end{cases}$

Để ý (1) có:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4y^2 - 4xy &= (x - 2y)^2, \\
 (2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2})^2 - (x + 2y)^2 &= 7x^2 - 28xy + 28y^2 = 7(x - 2y)^2, \\
 (1) &\Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} - (x + 2y)) = 0.
 \end{aligned}$$

Vậy nên ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp cho biểu thức $2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} - (x + 2y)$. Hệ có tập nghiệm $S = \{(2; 1)\}$.

Bài 30. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy = 4y - 1, \\ 2x + y = \frac{y}{4x^2 + 1} + 2. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy = 4y - 1 & (1), \\ 2x + y = \frac{y}{4x^2 + 1} + 2 & (2). \end{cases}$

+/ Trường hợp $y = 0$ không thỏa mãn.

+/ Trường hợp $y \neq 0$, chia hai vế của (1) cho y ta được (1) $\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 1}{y} + 2x + y = 4$.

Đặt $u = \frac{4x^2 + 1}{y}$, $v = 2x + y$ đưa về giải hệ $\begin{cases} u + v = 4, \\ v = \frac{1}{u} + 2. \end{cases}$

Tập nghiệm của hệ ban đầu $S = \left\{(-1; 5), \left(\frac{1}{2}; 2\right)\right\}$.

Bài 31. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 108, \\ xy^2 + y^3 = 4. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 + 9x^2y = 108 & (1), \\ xy^2 + y^3 = 4 & (2). \end{cases}$

Lấy (1) + 27 × (2) ta được phương trình:

$$x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 216 \Leftrightarrow (x + 3y)^3 = 6^3 \Leftrightarrow x + 3y = 6 \Leftrightarrow x = 6 - 3y.$$

Thế vào (2) và giải ra tập nghiệm $S = \{(3 - 3\sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}), (3 + 3\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}), (3; 1)\}$.

Bài 32. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - x - 4y = 0. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0 & (1), \\ x^2 + 2y^2 - x - 4y = 0 & (2). \end{cases}$

Lấy (1) - 3 × (2), nhóm các số hạng để có hằng đẳng thức bậc 3, ta được phương trình:

$$(x - 1)^3 + (y - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = -(y - 2)^3 \Leftrightarrow x - 1 = -(y - 2) \Leftrightarrow x = 3 - y.$$

Thế vào (2) và giải ra tập nghiệm $S = \{(1; 2), (2; 1)\}$.

Bài 33. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + \frac{16xy}{x + 2y} = 16, \\ \sqrt{x + 2y} = x^2 - 2y. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^2 + 4y^2 + \frac{16xy}{x + 2y} = 16 & (1), \\ \sqrt{x + 2y} = x^2 - 2y & (2). \end{cases}$

Đặt $u = x + 2y > 0$, $v = 2xy$, biến đổi (1) trở thành

$$u^3 - 2uv + 8v - 16u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 16) + 2v(4 - u) = 0 \Leftrightarrow (u - 4)(u^2 + 4u - 2v) = 0.$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow (x + 2y - 4)(x^2 + 4y^2 + 4(x + 2y)) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$.

Thế vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \left\{ \left(-3; \frac{7}{2} \right), (2; 1) \right\}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 34. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x(y - 3) - 9y = 1, \\ (x - 1)^2y^2 + 2y = -1. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x(y - 3) - 9y = 1 & (1), \\ (x - 1)^2y^2 + 2y = -1 & (2). \end{cases}$

Để thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Chia hai vế của phương trình (1) cho y , hai vế của phương trình (2) cho y^2 và đặt $t = -\frac{1}{y}$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} x + t + 3xt = 9, \\ x^2 + t^2 - 2(x + t) = -1. \end{cases}$

Đặt $x + t = S$; $xt = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P :

$$\begin{cases} S + 3P = 9 \\ S^2 - 2S - 2P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3, P = 2 \\ S = -\frac{5}{3}, P = \frac{32}{9} \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Giải tiếp ta được tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \left\{ \left(1; -\frac{1}{2} \right); (2; -1) \right\}$.

Bài 35. Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m, \\ x+y = 3m. \end{cases}$$

Lời giải. Điều kiện $x \geq -1; y \geq -1$.

Đặt $\sqrt{x+1} = u; \sqrt{y+1} = v$. Khi đó hệ phương trình được viết lại là:

$$\begin{cases} u+v = m \\ u^2 + v^2 - 2 = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = m \\ m^2 - 2uv - 2 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = m \\ uv = \frac{m^2 - 3m - 2}{2} \end{cases} \quad (*).$$

Để hệ ban đầu có nghiệm thì hệ (*) phải có nghiệm thỏa mãn $u \geq 0; v \geq 0$. Tức là phương trình: $2v^2 - 2mv + m^2 - 3m - 2 = 0$ có 2 nghiệm không âm. Giải ra ta được $\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \leq m \leq 3 + \sqrt{13}$.

Bài 36. Giải phương trình: $x^2 + 3x - 1 = 4\sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2}$.

Lời giải. $x^2 + 3x - 1 = 4\sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2} (*)$.

- Nhận xét: $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2 + 2)$, điều kiện: $x \geq 1$.
- Phân tích: $x^2 + 3x - 1 = a(x-1) + b(x^2 + 2) \Rightarrow a = 3$ và $b = 1$.

- Đặt $u = \sqrt{x-1}$ và $v = \sqrt{x^2 + 2}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3u^2 + v^2 = 4uv \Leftrightarrow \begin{cases} v = u \\ v = 3u. \end{cases}$$

a) Với $v = u \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ (vô nghiệm).

b) Với $v = 3u \Leftrightarrow x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa điều kiện).

- Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Bài 37. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx^3 - mx^2y + 7xy^2 - 3y^3 = 4 \\ 2xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm.

Lời giải.
$$\begin{cases} mx^3 - mx^2y + 7xy^2 - 3y^3 = 4 & (1) \\ 2xy^2 - y^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (2) nhân (-4) rồi cộng (1) ta được phương trình:

$$mx^3 - mx^2y - xy^2 + y^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - m\left(\frac{y}{x}\right) + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 = m \end{cases} (*), \text{ với } t = \left(\frac{y}{x}\right).$$

a) Với $t = 1 \Rightarrow y = x, (2) \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Hệ có một nghiệm $(1; 1)$.

b) Với $t^2 = m$.

(a) $m < 0$. Hệ có đúng 1 nghiệm.

(b) $m = 0$. Hệ có đúng 1 nghiệm.

(c) $m > 0. (*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{m} \\ t = -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - m\sqrt{m})x^3 = 1 \\ (2m + m\sqrt{m})x^3 = 1. \end{cases} (I)$

Hệ đã cho có đúng 2 nghiệm khi (I) có đúng 1 nghiệm khác 1 hoặc có 2 nghiệm, trong đó

có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + m\sqrt{m} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2m + m\sqrt{m} = 1 \\ 2m - m\sqrt{m} = 0 \\ 2m - m\sqrt{m} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ m = 4 \\ m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

• Vậy $m \in \left\{ 1; 4; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Bài 38. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8, \\ x(y^3 - 2) = 6. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 & (1), \\ x(y^3 - 2) = 6 & (2). \end{cases}$

+/ Trường hợp $x = 0$ không thỏa mãn.

+/ Trường hợp $x \neq 0$, hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} 2 + 3y = \left(\frac{2}{x}\right)^3, \\ y^3 - 2 = \frac{6}{x}. \end{cases}$

Đặt $u = \frac{2}{x}$, ta được hệ: $\begin{cases} 2 + 3y = u^3 & (3), \\ y^3 - 2 = 3u & (4). \end{cases}$

Lấy (3) + (4) ta được phương trình $y^3 + 3y = u^3 + 3u \Leftrightarrow (y - u)(y^2 + yu + u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow y = u$.
Giải ra tập nghiệm $S = \{(-2; -1), (1; 2)\}$.

Bài 39. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 2(x + 2y) = 0, \\ 2xy(x^2 + 4y^2) + 2 = (x + 2y)^2. \end{cases}$

Lời giải. Xét hệ $\begin{cases} 10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 2(x + 2y) = 0 & (1), \\ 2xy(x^2 + 4y^2) + 2 = (x + 2y)^2 & (2). \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2x^3y + 8xy^3 + 2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow 2xy(x^2 + 4y^2 - 2) - (x^2 + 4y^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2xy - 1)(x^2 + 4y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

+/ Với $2xy \stackrel{(*)}{=} 1 \Leftrightarrow 2 = 4xy$ thế vào (1) được phương trình

$$10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 4xy(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 & \text{(loại)} \\ x = 2y \end{cases}.$$

Thế $x = 2y$ vào (*) tìm được nghiệm $\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

+/ Với $x^2 + 4y^2 \stackrel{(**)}{=} 2$ thế vào (1) được phương trình

$$10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - (x^2 + 4y^2)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2(x - 4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 4y \end{cases}.$$

Thế vào (**) tìm được nghiệm $\left(\frac{4}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(1; \frac{1}{2}\right), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \right\}$.

Bài 40. Giải phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$.

Lời giải. • Bài này có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn để đưa về hệ phương trình.

Cách xây dựng ẩn phụ như sau: Quan sát về trái có bậc hai nên ta sẽ đặt $\alpha t + \beta = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (*), sao cho sau khi bình phương, rút gọn thu được phương trình dạng:

$$7t^2 + 7t = \alpha x + \beta \quad (**).$$

Từ (*), (**) ta được hệ

$$\begin{cases} x = 7\alpha^2 t^2 + 14\alpha\beta t + 7\beta^2 - \frac{9}{4} \\ x = \frac{7}{\alpha} t^2 + \frac{7}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}.$$

Suy ra

$$7\alpha^2 t^2 + 14\alpha\beta t + 7\beta^2 - \frac{9}{4} = \frac{7}{\alpha} t^2 + \frac{7}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta có $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$.

• Cách giải: Xét phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (1).

Đặt $t + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (2), $t \geq -\frac{1}{2}$. Suy ra $7t^2 + 7t = x + \frac{1}{2}$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có hệ đối xứng loại 2 với điều kiện $t \geq -\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 7x^2 + 7x = t + \frac{1}{2}, \\ 7t^2 + 7t = x + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm $\begin{cases} x = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \\ t = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{-8-\sqrt{46}}{14} \\ t = \frac{-8+\sqrt{46}}{14} \end{cases}$. Vậy phương trình ban đầu có tập

ng nghiệm $S = \left\{ \frac{-8-\sqrt{46}}{14}; \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \right\}.$

§5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG III

I. Đề số 1a

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 2 - x$.

Lời giải.

$$PT \iff \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 3 = (2 - x)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\iff x = 1 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 2. (2 điểm) Tìm m sao cho phương trình $(x - 1)((m + 1)x^2 - 2x + 1) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

$$\text{Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} (m + 1) - 2 + 1 \neq 0 \\ m + 1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 4} = |x + 1| + 1$.

Lời giải.

TH1: $x \geq -1$.

$$PT \iff \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = (x + 2)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 0 \end{cases} \iff x = 0 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

TH2: $x < -1$.

$$PT \iff x^2 - 5x + 4 = x^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\iff x = \frac{4}{5} \text{ (loại)} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ mx - y + 2z = 2 \\ x + (1 - m)y + z = -2 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ mx - y + 2z = 2 \\ x + (1 - m)y + z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x + 2y - 1 \\ (m + 2)x + 3y = 4 \\ 2x + (3 - m)y = -1 \end{cases} \text{ . Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi}$$

$$\text{hệ } \begin{cases} (m + 2)x + 3y = 4 \\ 2x + (3 - m)y = -1 \end{cases} \text{ có nghiệm duy nhất.} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{vmatrix} m + 2 & 3 \\ 2 & 3 - m \end{vmatrix} \neq 0 \iff -m^2 + m \neq 0 \iff m \neq 0 \text{ và } m \neq 1. \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 5. (2 điểm) Giải phương trình $x^3 - x^2 + 1 = \sqrt{2x - 1}$.

Lời giải. Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$

$$x^3 - x^2 + 1 = \sqrt{2x-1} \iff x^3 - x^2 - x + 1 + x - \sqrt{2x-1} = 0 \iff (x-1)^2(x+1) + \frac{(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}} = 0$$

$$\iff (x-1)^2 \left(x+1 + \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}} \right) = 0 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Vì $x \geq \frac{1}{2}$ nên $x+1 + \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}} > 0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$

II. Đề số 1b

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} = 5-x$.

Lời giải.

$$PT \iff \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x+1 = (5-x)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x = 3 \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 2. (2 điểm) Tìm m sao cho phương trình $(x-2)(mx^2-x+2) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

$$\text{Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} 4m \neq 0 \\ m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{8} \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} xy - x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} xy - x - y = 1 \\ (x+y)^2 - 2xy = 13 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = x+y+1 \\ (x+y)^2 - 2(x+y) - 15 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy = -2 \\ x+y = -3 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} xy = 6 \\ x+y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

$$\begin{cases} xy = -2 \\ x+y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Tìm m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + my = 2 \\ (m+1)x + 2y = 1 \end{cases}$$

Lời giải.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m+1 & 2 \end{vmatrix} = -m^2 - m + 2, D_x = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - m,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ m+1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2m \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$$

Hệ có nghiệm khi $D \neq 0$ hoặc $D_x = D_y = D = 0$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

$D \neq 0 \iff -m^2 - m + 2 \neq 0 \iff m \neq 1$ hoặc $m \neq -2$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

$D_x = D_y = D = 0$ (không tồn tại m). $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

Câu 5. (2 điểm) Giải phương trình $x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0$.

Lời giải.

$$x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \iff 2x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \iff 2x^3 = (x+2)^3. \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

$$\iff (\sqrt[3]{2x-x-2}) \underbrace{(\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{x(x+2)} + (x+2)^2)}_{>0 \forall x \in \mathbb{R}} = 0 \iff x = \frac{2}{\sqrt[3]{2}-1} \dots\dots\dots (1 \text{ điểm})$$

III. Đề số 2a

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình:

$$|2x - 5| = x - 1. \quad (3.4)$$

Lời giải.

$$(3.4) \Rightarrow (2x - 5)^2 = (x - 1)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.4) ta thấy $x = 2$ và $x = 4$ đều thỏa. $\dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{2; 4\}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$x - \sqrt{2x+7} = 4. \quad (3.5)$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x \geq -\frac{7}{2}. \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$(3.5) \Rightarrow \sqrt{2x+7} = x - 4 \Rightarrow 2x + 7 = (x - 4)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 9. \end{cases} \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.5) ta thấy chỉ có $x = 9$ thỏa mãn. $\dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{9\}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z &= -2 \\ -2x + 5y + z &= 5 \\ 3x - 7y + 4z &= 8. \end{cases} \quad (3.6)$$

Lời giải.

$$(3.6) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z &= -2 \\ -y + 5z &= 1 \\ 2y - 2z &= 14 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y+2z = -2 \\ -y+5z = 1 \\ 8z = 16 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 9 \\ z = 2. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y;z) = (21;9;2)$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 4. (2 điểm) Tìm giá trị của tham số m để phương trình:

$$mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0 \quad (3.7)$$

có hai nghiệm phân biệt. Tìm hai nghiệm đó.

Lời giải.

(3.7) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 - m(m-3) > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \neq 0. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Khi đó (3.7) có hai nghiệm là $x = \frac{m-2-\sqrt{4-m}}{m}$ và $x = \frac{m-2+\sqrt{4-m}}{m}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 5. (2 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+my = 1 \\ mx-3my = 2m+3. \end{cases} \quad (3.8)$$

Lời giải.

Ta có $D = -m^2 - 3m, D_x = -2m^2 - 6m, D_y = m + 3$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$$\text{TH1: } D \neq 0 \Leftrightarrow -m^2 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right) = \left(\frac{-2m^2-6m}{-m^2-3m}; \frac{m+3}{-m^2-3m}\right)$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$$\text{TH2: } D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -3. \end{cases}$$

• $m = 0 \Rightarrow D_x = 0, D_y = 3 \neq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

• $m = -3 \Rightarrow D_x = D_y = 0$. Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $x + my = 1$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

IV. Đề số 2b

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình:

$$|2-x| = 2x+1. \quad (3.9)$$

Lời giải.

$$(3.9) \Rightarrow (2-x)^2 = (2x+1)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow 4 - 4x + x^2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 3 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.9) ta thấy chỉ có $x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn. (0,25 điểm).

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$ (0,5 điểm).

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình:

$$x + \sqrt{x-1} = 13. \quad (3.10)$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$ (0,25 điểm).

$$(3.10) \Rightarrow \sqrt{x-1} = 13-x \Rightarrow x-1 = (13-x)^2 \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow x^2 - 27x + 170 = 0 \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 17 \end{cases} \dots\dots\dots (0,25 \text{ điểm}).$$

Thế vào (3.10) ta thấy chỉ có $x = 10$ thỏa mãn. (0,25 điểm).

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{10\}$ (0,5 điểm).

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x + 5y + z = 2 \\ 2x - 9y + 2z = 8 \\ 3x - 4y + z = 5 \end{cases} \quad (3.11)$$

Lời giải.

$$(3.11) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y + z = 2 \\ y + 4z = 12 \\ 11y + 4z = 11 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 5y + z = 2 \\ y + 4z = 12 \\ 10y = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{40} \\ y = -\frac{1}{10} \\ z = \frac{121}{40} \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y; z) = \left(\frac{21}{40}; -\frac{1}{10}; \frac{121}{40} \right)$ (0,5 điểm).

Câu 4. (2 điểm) Tìm giá trị của tham số m để phương trình:

$$(m-1)x^2 + 2(m-3)x + m+3 = 0 \quad (3.12)$$

có hai nghiệm phân biệt. Tìm hai nghiệm đó.

Lời giải.

(3.12) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 - (m-1)(m+3) > 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m \neq 1. \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Khi đó (3.12) có hai nghiệm là $x = \frac{3-m-\sqrt{12-8m}}{m-1}$ và $x = \frac{3-m+\sqrt{12-8m}}{m-1}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

Câu 5. (2 điểm) Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + y = 4m \\ 2x + (m-1)y = m. \end{cases} \quad (3.13)$$

Lời giải.

Ta có $D = m^2 - m - 2, D_x = 4m^2 - 5m, D_y = m^2 - 8m$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

TH1: $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{4m^2 - 5m}{m^2 - m - 2}; \frac{m^2 - 8m}{m^2 - m - 2} \right)$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

TH2: $D = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2. \end{cases}$

• $m = -1 \Rightarrow D_x = 9 = D_y \neq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

• $m = 2 \Rightarrow D_x = 6 \neq 0, D_y = -12 \neq 0$. Hệ phương trình vô nghiệm $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm}).$

V. Đề số 3a

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình $\frac{1-3x}{2x+1} = -2$.

Lời giải. ĐK: $x \neq -\frac{1}{2}$ $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

Ta có: $PT \Leftrightarrow 1-3x = -4x-2 \Leftrightarrow x = -3$ $\dots\dots\dots (0,5 \times 2 \text{ điểm})$

Đối chiếu ĐK, ta có tập nghiệm của pt đã cho là $S = \{-3\}$. $\dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình $|3x-5| = 2x+3$.

Lời giải. $PT \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ \begin{cases} 3x-5 = 2x+3 \\ 3x-5 = -2x-3 \end{cases} \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \text{ điểm})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \end{cases} \dots\dots\dots (0,5 \times 2 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2y^3 = 10 \\ 2x^2 + 3y^3 = 5 \end{cases}$.

Lời giải. HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^3 = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \times 2 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Giải phương trình $(x-1)^2 + 2 = \sqrt{x^3 + 3x}$.

Lời giải. ĐK: $x \geq 0$ $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

PT $\Leftrightarrow (x^2 + 3) - \sqrt{x(x^2 + 3)} - 2x = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2 + 3} - 2\sqrt{x}) = 0 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 2\sqrt{x} \text{ (vì } \sqrt{x^2 + 3} + x\sqrt{x} > 0, \forall x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, PT đã cho có tập nghiệm là $S = \{1; 3\}$. $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Câu 5. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y+3} + 5\sqrt{x} = 4\sqrt{y+3} + 30 \\ x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + 3y^2 + 4y + 12 \end{cases}$

Lời giải. ĐK: $x \geq 0, y \geq -3$. Ta có:

$$x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + 3y^2 + 4y + 12 \Leftrightarrow (x-2)^3 + (x-2) = (y+1)^3 + (y+1) \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

(do hàm số $f(t) = t^3 + t$ là đồng biến trên $\mathbb{R}$, vì $\forall a, b \in \mathbb{R}, a > b$, ta có

$$\begin{cases} a^3 > b^3 \\ a > b \end{cases} \Rightarrow a^3 + a > b^3 + b \Rightarrow f(a) > f(b)). \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Thay vào PT còn lại trong hệ, ta có:

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x} = 30 \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) = f(3) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9. \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, HPT đã cho có nghiệm là $\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

VI. Đề số 3b

Câu 1. (2 điểm) Giải phương trình $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+1} = 2$.

Lời giải. ĐK: $x \neq 2, x \neq -1$ $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

PT $\Leftrightarrow x(x+1) - 2(x-2) = 2(x+1)(x-2) \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{33}}{2} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, PT đã cho có tập nghiệm là $S = \{\frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}\}$. $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Câu 2. (2 điểm) Giải phương trình $|2x-1| = |x+1|$.

Lời giải. PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = x+1 \\ 2x-1 = -x-1 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \times 2 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \times 2 \text{ điểm})$$

Câu 3. (2 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 3x + 3} = 1 - 2x$.

Lời giải.

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \geq 0 \\ 3x^2 - 3x + 3 = (1 - 2x)^2 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Câu 4. (2 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y - 12xy = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 - 18xy = 5 \end{cases}$.

Lời giải. $HPT \Leftrightarrow \begin{cases} S + 2P = 4 \\ S^2 + P = 5 \end{cases}$, (trong đó $\begin{cases} S = 2x - 3y \\ P = 2x(-3x) = -6xy \end{cases}$, và $S^2 \geq 4P$) $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2S^2 - S - 6 = 0 \\ S + 2P = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = -\frac{3}{2} \\ P = \frac{11}{4} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

suy ra $2x$ và $-3y$ là các nghiệm của phương trình $t^2 - 2t + 1 = 0$, suy ra $2x = -3y = 1 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$

Câu 5. (2 điểm) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{3(x^2 - 2x - 2)}$.

Lời giải. ĐK: $x \geq 1 + \sqrt{3}$.

$$PT \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = \sqrt{x(x+1)(x-2)} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x) - \sqrt{(x+1)(x^2 - 2x)} - 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x+1}) (\sqrt{x^2 - 2x} - 2\sqrt{x+1}) = 0 \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} - 2\sqrt{x+1} = 0 \text{ (vì } \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x+1} > 0, \forall x \geq 1 + \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{13} \\ x = 3 - \sqrt{13} \end{cases} \dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$$

Đối chiếu ĐK, PT đã cho có tập nghiệm là $S = \{3 + \sqrt{13}\}$. $\dots\dots\dots (0.5 \text{ điểm})$