

MỤC LỤC

BÀI 1: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ OXYZ	1
▶ DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CÁC TÍNH CHẤT	2
▶ DẠNG 2: TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM	4
▶ DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG, TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ – CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN	7
BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	10
▶ DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU. NHẬN BIẾT PT MẶT CẦU	10
▶ DẠNG 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU KHI BIẾT MỘT SỐ YẾU TỐ CHO TRƯỚC	12
BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	17
▶ DẠNG 1: TÌM MỘT VTPT CỦA MẶT PHẪNG	17
▶ DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	19
▶ DẠNG 3: ĐIỂM THUỘC MẶT PHẪNG	22
BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	25
▶ DẠNG 1: TÌM MỘT VTCP CỦA ĐƯỜNG THẲNG	25
▶ DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG	27
▶ DẠNG 3: TÌM ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG VÀ GIAO ĐIỂM CỦA ĐT VÀ MẶT PHẪNG	32
BÀI 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI TỔNG HỢP	35
▶ DẠNG 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA 2 MẶT PHẪNG	35
▶ DẠNG 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG	37
▶ DẠNG 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG	40
▶ DẠNG 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG	42
▶ DẠNG 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG	45
BÀI 6: KHOẢNG CÁCH TỔNG HỢP	49
▶ DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM	49
▶ DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG, KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG, KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG TỐI MẶT PHẪNG.	51
▶ DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG	54
▶ DẠNG 4. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU	56

BÀI 1: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ OXYZ

► DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ VÀ CÁC TÍNH CHẤT

PHƯƠNG PHÁP:

①. **Định nghĩa:** $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

②. **Tính chất:** Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.
- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.
- $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3), k \in \mathbb{R}$.
- $\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$.
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b} \ (\vec{b} \neq \vec{0})$.
$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \ (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (1; 2; -3); \vec{b} = (-2; 2; 0)$. Tọa độ vector $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ là

- A. $\vec{c} = (4; -1; -3)$. B. $\vec{c} = (8; -2; -6)$. C. $\vec{c} = (2; 1; 3)$. D. $\vec{c} = (-2; 4; 3)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2\vec{a} = (2; 4; -6) \\ 3\vec{b} = (-6; 6; 0) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (2 + 6; 4 - 6; -6 - 0)$$

$$\Rightarrow \vec{c} = (8; -2; -6).$$

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = (2; -5; 3), \vec{b} = (0; 2; -1)$. Tọa độ vector $\vec{x}$ thỏa mãn $2\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ là

- A. $(-4; 2; -7)$. B. $(-4; 2; 3)$. C. $(-4; 12; -7)$. D. $(-4; 12; -3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2\vec{a} + \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - 2\vec{a}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{b} = (0; 2; -1) \\ 2\vec{a} = (4; -10; 6) \end{cases}$$

Suy ra $\vec{x} = \vec{b} - 2\vec{a} = (0 - 4; 2 + 10; -1 - 6)$

$\Rightarrow \vec{x} = (-4; 12; -7)$.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 1; -2)$, $\vec{c} = (2; 1; -3)$, $\vec{u} = (11; -6; 5)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$. B. $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$. C. $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$. D. $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}$.

Lời giải

Giả sử $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 11 \\ -2x + y + z = -6 \\ x - 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$

Vậy $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

A. $(-1; 2; -3)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(2; -1; -3)$. D. $(-3; 2; -1)$.

Câu 2. Câu nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; 1; \frac{1}{2}\right)$. B. $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{2}; 0; -5\right)$.

C. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (2; -3; 0)$. D. $\vec{a} = \frac{2}{5}\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} \Leftrightarrow \vec{a} = \left(-3; \frac{2}{5}; 1\right)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u} = (-1; 3; -2)$ và $\vec{v} = (2; 5; -1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

A. $\vec{a} = (-8; 9; -1)$. B. $\vec{a} = (-8; -9; 1)$. C. $\vec{a} = (8; -9; -1)$. D. $\vec{a} = (-8; -9; -1)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = -2\vec{j} - 3\vec{k}$ và $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$, khi đó tọa độ của $\vec{u} + \vec{v}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ là:

A. $(1; -2; -1)$. B. $(1; 0; 1)$. C. $(1; 2; 2)$. D. $(-1; 0; 2)$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 0; 4)$. Tìm tọa độ vector $\vec{u} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$.

A. $\vec{u} = (-7; 6; -10)$. B. $\vec{u} = (-7; -6; 10)$. C. $\vec{u} = (7; 6; 10)$. D. $\vec{u} = (-7; 6; 10)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 3 vectơ $\vec{a} = (5; 4; -1)$; $\vec{b} = (2; -5; 3)$ và $\vec{c}$ thỏa mãn hệ thức $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Tìm tọa độ $\vec{c}$?

A. $\vec{c} = (4; 23; -11)$. B. $\vec{c} = (16; 19; -10)$. C. $\vec{c} = (4; 7; 7)$. D. $\vec{c} = (16; 23; 7)$.

- Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 2; -1)$, $\vec{c} = (4; 0; -4)$.
Tọa độ vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là
A. $\vec{d} = (-7; 0; -4)$. B. $\vec{d} = (-7; 0; 4)$. C. $\vec{d} = (7; 0; -4)$. D. $\vec{d} = (7; 0; 4)$.
- Câu 8.** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (-2; -4; 6)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
A. $\vec{a} = 2\vec{b}$. B. $\vec{b} = -2\vec{a}$. C. $\vec{a} = -2\vec{b}$. D. $\vec{b} = 2\vec{a}$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, để hai vectơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương thì $m+n$ bằng:
A. $\frac{11}{6}$. B. $\frac{13}{6}$. C. $\frac{17}{6}$. D. 2.
- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (2; 1; 1)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{c}$ thỏa mãn biểu thức $2\vec{b} - \vec{a} + 3\vec{c} = \vec{0}$ là:
A. $\left(-\frac{3}{2}; 1; -\frac{5}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; -2; -\frac{5}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{7}{2}; 2; -\frac{5}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{7}{2}; 1; -1\right)$.

► DẠNG 2: TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM

①. **Định nghĩa:** $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)

②. **Chú ý:**

- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0$; $M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0$; $M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$; $M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0$; $M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

③. **Tính chất:** Cho $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$
- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC :
 $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
- Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:
 $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

- Ví dụ 1.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -3; 2)$, $B(0; 1; -1)$ và $C(5; -1; 2)$.
Tọa độ là trọng tâm G của tam giác ABC là
A. $G(2; -1; 1)$. B. $G(2; 1; 1)$. C. $G(2; 1; -1)$. D. $G(-2; 1; -1)$.

Lời giải

Chọn A

G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+0+5}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-3+1-1}{3} = -1 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{2-1+2}{3} = 1 \end{cases}$$

Vậy $G(2; -1; 1)$.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; -2), B(2; 1; -1), C(1; -3; 3)$ và điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$. Tìm tọa độ điểm M .

- A. $(0; -5; -6)$. B. $(0; -5; 2)$. C. $(0; -10; 12)$. D. $(0; -5; 4)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = (2; 2; 2)$

$\overrightarrow{BC} = (-1; -4; 4) \Rightarrow 3\overrightarrow{BC} = (-3; -12; 12)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = (-1; -10; 14)$.

Gọi $M(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x-1; y; z+2)$

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -1 \\ y = -10 \\ z+2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -10 \\ z = 12 \end{cases}$$

Vậy $M(0; -10; 12)$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ hình chiếu M lên trục Ox .

- A. $(2; 0; 0)$. B. $(1; 0; 0)$. C. $(3; 0; 0)$. D. $(0; 2; 3)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (Oxy)

- A. $N(-1; -2; -3)$. B. $N(1; 2; 0)$. C. $N(-1; -2; 3)$. D. $N(1; 2; -3)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1; 0), B(0; 3; 3)$. Khi đó

- A. $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 3)$. B. $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3)$. C. $\overrightarrow{AB} = (-1; 4; 3)$. D. $\overrightarrow{AB} = (0; 3; 0)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 2; 0); B(3; -1; 1)$ và $C(1; 1; 1)$. Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. B. $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

- Câu 15.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$. Tìm độ dài của đoạn thẳng AB ?
- A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{18}$. C. $2\sqrt{7}$. D. $\sqrt{3}$.
- Câu 16.** Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cho hai điểm A, B thỏa mãn $\vec{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ và $\vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn AB .
- A. $M\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right)$. B. $M\left(\frac{3}{2}; 0; -1\right)$. C. $M(3; 0; -2)$. D. $M\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$.
- Câu 17.** Trong hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm là $A(1;3;-1)$, $B(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\vec{MA} = 3\vec{MB}$.
- A. $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. B. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. C. $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. D. $M(4; -3; 8)$.
- Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Hãy tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$.
- A. $(2;3;-1)$. B. $(2;-3;1)$. C. $(2;3;1)$. D. $(-2;3;1)$.
- Câu 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-3;5;1)$. Tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là
- A. $D(-4;8;-5)$. B. $D(-2;2;5)$. C. $D(-4;8;-3)$. D. $D(-2;8;-3)$.
- Câu 20.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $\vec{OM} = (1;5;2)$, $\vec{ON} = (3;7;-4)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Tìm tọa độ điểm P .
- A. $P(5;9;-10)$. B. $P(7;9;-10)$. C. $P(5;9;-3)$. D. $P(2;6;-1)$.
- Câu 21.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $M(0;1;2)$, $N(7;3;2)$, $P(-5;-3;2)$. Tìm tọa độ điểm Q thỏa mãn $\vec{MN} = \vec{QP}$.
- A. $Q(12;5;2)$. B. $Q(-12;5;2)$. C. $Q(-12;-5;2)$. D. $Q(-2;-1;2)$.
- Câu 22.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(3;0;3)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $G(2;2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC .
- A. $C(2;4;4)$. B. $C(0;2;2)$. C. $C(8;10;10)$. D. $C(-2;-4;-4)$.
- Câu 23.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A(-3;2;1)$, $C(4;2;0)$, $B'(-2;1;1)$, $D'(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.
- A. $A'(-3;3;1)$. B. $A'(-3;-3;3)$. C. $A'(-3;-3;-3)$. D. $A'(-3;3;3)$.
- Câu 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(3;2;1)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;2;-1)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{OM} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$.
- A. $M(-2; 6; -4)$. B. $M(2; -6; 4)$. C. $M(-2; -6; 4)$. D. $M(5; 5; 0)$.

- Câu 25.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$, trên trục Oz lấy điểm M sao cho $AM = \sqrt{5}$. Tọa độ của điểm M là
- A. $M(0;0;3)$. B. $M(0;0;2)$. C. $M(0;0;-3)$. D. $M(0;3;0)$.

► DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG, TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ – CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

PHƯƠNG PHÁP:

①. **Định nghĩa:** Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

- Tích vô hướng của hai véc tơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$, được xác định bởi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

②. **Chú ý:** Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

③. **Tính chất:**

- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; \quad [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; \quad [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; \quad [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$
- $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

④. **Ứng dụng của tích có hướng:**

- Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ: $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
- Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$
- Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$
- Thể tích khối hộp $ABCD A'B'C'D'$: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$
- Thể tích tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$
- Góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1;2;0)$, $\vec{b} = (2;-1;1)$, $\vec{c} = (1;-1;0)$. Phát biểu nào sau đây

sai?

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{5}$. B. $\vec{a} \cdot \vec{c} = -1$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{c} \perp \vec{b}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{c} \cdot \vec{b} = 2.1 + (-1).(-1) + 1.0 = 3 \neq 0 \Rightarrow \vec{c}, \vec{b}$ không vuông góc nhau.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + (m+1)\vec{j} - \vec{k}$. Tìm tham số m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; m+1; -1)$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 1 - m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 26. Trong không gian Oxyz cho $\vec{u} = \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$. Tìm tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A. -3. B. -2. C. 3. D. 2.

Câu 27. Trong không gian Oxyz, cho 3 vecto $\vec{a} = (-1; 1; 0)$; $\vec{b} = (1; 1; 0)$; $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai

- A. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. B. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Câu 28. Gọi φ là góc giữa hai vector $\vec{a} = (1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (2; 0; -1)$, khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. 0. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{2}{5}$.

Câu 29. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{u}(1; -2; 1)$, $\vec{v}(-2; 1; 1)$; góc giữa hai vector là:

- A. $\frac{5\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 30. Trong không gian tọa độ Oxyz, độ dài của véc tơ $\vec{u} = (1; 2; 2)$ là

- A. 3. B. 5. C. 2. D. 9.

Câu 31. Tính góc giữa hai vecto $\vec{a} = (-2; -1; 2)$ và $\vec{b} = (0; 1; -1)$

- A. 60° . B. 120° . C. 45° . D. 135° .

Câu 32. Trong hệ trục Oxyz, cho ba điểm $A(-2, 1, 0)$, $B(-3, 0, 4)$, $C(0, 7, 3)$. Khi đó, $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ bằng:

- A. $\frac{14}{3\sqrt{118}}$. B. $-\frac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{59}}$. C. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{57}}$. D. $-\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{57}}$.

- Câu 33.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a}(4;-2;-4), \vec{b}(6;-3;2)$ thì $\left| (2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b}) \right|$ có giá trị là:
A. 200. **B.** $\sqrt{200}$. **C.** 200^2 . **D.** ± 200 .
- Câu 34.** Trong không gian tọa độ Oxyz cho ba vectơ $\vec{a}(3;0;1), \vec{b}(1;-1;-2), \vec{c}(2;1;-1)$. Tính $T = \vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$.
A. $T = 3$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 0$. **D.** $T = 9$.
- Câu 35.** Cho điểm $A(4;-3;-5), B(2;1;-2)$. Gọi a là số đo góc AOB với O là gốc tọa độ. Giá trị của a là
A. $a = 150^\circ$. **B.** $a = 30^\circ$. **C.** $a = 135^\circ$. **D.** $a = 45^\circ$.
- Câu 36.** Cho bốn véc tơ $\vec{a} = (-1;1;0), \vec{b} = (1;1;0), \vec{c} = (1;1;1), \vec{d} = (2;0;1)$. Chọn mệnh đề đúng.
A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. **B.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
C. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. **D.** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
- Câu 37.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;2;-4), \vec{b} = (1;1;-2)$. Mệnh đề nào sau đây sai?
A. $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$. **B.** $[\vec{a}, \vec{b}] \neq \vec{0}$. **C.** $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$. **D.** $\vec{a} = 2\vec{b}$.
- Câu 38.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho tam giác ABC biết $A(1;1;1), B(4;3;2), C(5;2;1)$. Diện tích tam giác ABC là
A. $\frac{\sqrt{42}}{4}$. **B.** $\sqrt{42}$. **C.** $2\sqrt{42}$. **D.** $\frac{\sqrt{42}}{2}$.
- Câu 39.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;1), B(2;0;-1), C(0;1;3), D(3;1;1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là
A. $V = \frac{2}{3}$. **B.** $V = \frac{4}{3}$. **C.** $V = 4$. **D.** $V = 2$.
- Câu 40.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có $A(0;1;1), B(1;-2;0), C(-2;1;-1)$. Diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu?
A. $\sqrt{22}$. **B.** $2\sqrt{22}$. **C.** $\frac{\sqrt{22}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

BÀI 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

► **DẠNG 1. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU. NHẬN BIẾT PT MẶT CẦU**

PHƯƠNG PHÁP:

- ❶. Dạng chính tắc: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .
- ❷. Dạng khai triển: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, đk: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu có phương trình $(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 5$ là :

- A.** $I(2;3;0)$, $R=\sqrt{5}$. **B.** $I(-2;3;0)$, $R=\sqrt{5}$.
C. $I(2;3;1)$, $R=5$. **D.** $I(2;-2;0)$, $R=5$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính là $R = \sqrt{5}$.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 25 = 0$.
Tìm tọa độ tâm I và bán kính mặt cầu (S) .

- A.** $I(1; -2; 2); R = \sqrt{34}$. **B.** $I(-1; 2; -2); R = 5$.
C. $I(-2; 4; -4); R = \sqrt{29}$. **D.** $I(1; -2; 2); R = 6$.

Lời giải

Chọn A

Từ phương trình ta có : $a=1, b=-2, c=2, d=-25$.

Suy ra (S) tâm $I(1;-2;2)$; $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 + 25} = \sqrt{34}$.

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

- A.** 42π . **B.** 36π . **C.** 9π . **D.** 12π .

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 - 5} = 3$.

Diện tích mặt cầu (S): $S = 4\pi R^2 = 4\pi 3^2 = 36\pi$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 16$. Tính bán kính của (S) .

- A.** 4. **B.** 16. **C.** 7. **D.** 5.

- Câu 2.** Trong không gian Oxyz, mặt cầu $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$ có tâm và bán kính lần lượt là
- A. $I(1; 2; -3), R = 2$. B. $I(-1; -2; 3), R = 2$.
 C. $I(1; 2; -3), R = 4$. D. $I(-1; -2; 3), R = 4$.
- Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu có phương trình $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.
- A. $I(-1; 3; 0); R = 16$. B. $I(-1; 3; 0); R = 4$.
 C. $I(1; -3; 0); R = 16$. D. $I(1; -3; 0); R = 4$.
- Câu 4.** Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .
- A. $R = \sqrt{3}$. B. $R = 3$. C. $R = 9$. D. $R = 3\sqrt{3}$.
- Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .
- A. $I(3; -2; 4), R = 25$. B. $I(3; -2; 4), R = 5$.
 C. $I(-3; 2; -4), R = 25$. D. $I(-3; 2; -4), R = 5$.
- Câu 6.** Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 11 = 0$. Tìm tâm và bán kính của (S) là:
- A. $I(2; -1; 3), R = 25$. B. $I(-2; 1; -3), R = 5$.
 C. $I(2; -1; 3), R = 5$. D. $I(-2; 1; -3), R = \sqrt{5}$.
- Câu 7.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các phương trình sau, phương trình nào **không phải** là phương trình của mặt cầu?
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 8 = 0$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$.
 C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 2y + 2z + 16 = 0$. D. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y - 24z + 16 = 0$.
- Câu 8.** Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 8y + 2z - 1 = 0$. B. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z + 2017 = 0$. D. $x^2 + (y-z)^2 - 2x - 4(y-z) - 9 = 0$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?
- A. $M(1; 1; 1)$. B. $N(0; 1; 0)$. C. $P(1; 0; 1)$. D. $Q(1; 1; 0)$.
- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$. Tìm m để phương trình đó là phương trình của một mặt cầu.
- A. $-5 < m < 5$. B. $m < -5$ hoặc $m > 1$. C. $m < -5$. D. $m > 1$.

- Câu 11.** Trong không gian Oxyz, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.
- A. $m \leq 6$. B. $m < 6$. C. $m > 6$. D. $m \geq 6$.
- Câu 12.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $I(1; -2; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 4 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (α) có phương trình là
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.
- Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz giả sử tồn tại mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2az + 6a = 0$. Nếu (S) có đường kính bằng 12 thì các giá trị của a là
- A. $a = -2; a = 8$. B. $a = 2; a = -8$. C. $a = -2; a = 4$. D. $a = 2; a = -4$.

► DẠNG 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU KHI BIẾT MỘT SỐ YẾU TỐ CHO TRƯỚC

PHƯƠNG PHÁP: Xác định được tâm và bán kính, hoặc là các hệ số a, b, c, d

- ①. Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R thì có phương trình chính tắc là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

- ②. Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm A

- Tính bán kính $R = IA = \sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}$
- Viết phương trình mặt cầu.

- ③. Mặt cầu có đường kính AB

- Tìm tọa độ tâm I (trung điểm của đoạn AB)
- Tính bán kính $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}{2}$
- Viết phương trình mặt cầu.

- ④. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ (hoặc là: Mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D có tọa độ cho trước)

- Gọi mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)
- Thay tọa độ các điểm A, B, C, D vào phương trình mặt cầu, lập được hệ 4 phương trình 4 ẩn a, b, c, d .

- Kết luận phương trình cần lập.

- ⑤. Mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$ Và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

- Tính bán kính $R = d(I, (P)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Viết phương trình mặt cầu: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

⑥. Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ Và tiếp xúc với đường thẳng $(\Delta): \frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2} = \frac{z-z_0}{u_3}$

• Xác định tọa độ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và véc tơ chỉ phương $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ của đường thẳng (Δ)

• Tính bán kính $R = d(I, (\Delta)) = \frac{\left| \overrightarrow{MI}, \vec{u} \right|}{|\vec{u}|}$

• Viết phương trình mặt cầu.

B. BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và bán kính $R=9$.

Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$.

B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81$

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và bán kính $R=9$ nên (S) có phương trình:

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81.$$

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, phương trình mặt cầu tâm $I(-1; 2; 0)$ và đi qua điểm $A(2; -2; 0)$ là

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 100$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 10$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Tâm $I(-1; 2; 0)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu có dạng: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$.

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(2; -1; 2)$. Phương trình của mặt cầu có đường kính AB là

A. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{24}$.

B. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \sqrt{6}$.

C. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 24$.

D. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB \text{ khi đó } \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 0 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 0; 1).$$

$$IA = \sqrt{(0+2)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{6}.$$

Mặt cầu đường kính AB nhận điểm $I(0;0;1)$ làm tâm và bán kính $R = IA = \sqrt{6}$ có phương trình là: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 6$.

Ví dụ 4. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$.

Tính bán kính R của (S) .

A. $R = 2\sqrt{2}$.

B. $R = 3$.

C. $R = 6$.

D. $R = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

Vì (S) đi qua 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(-1;0;3)$, $D(1;2;3)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4a + d = -4 \\ -2a - 6b + d = -10 \\ 2a - 6c + d = -10 \\ -2a - 4b - 6c + d = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ d = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2 - (-4)} = \sqrt{6}.$$

Ví dụ 5. Trong không gian Oxyz cho điểm $I(-1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): 4x + y - z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{2}$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi (S) là mặt cầu tâm I , bán kính R và (S) tiếp xúc với $(P): 4x + y - z - 1 = 0$

$$\text{Ta có } d(I; (P)) = R \Rightarrow \frac{|4 \cdot (-1) + 2 - 3 - 1|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 14. Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-3)$ bán kính $R = 2$ là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 10 = 0$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 2^2$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I((1;-2;3)$ và đi qua điểm $A(3;0;2)$.

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(-1;1;2)$, $M(1;2;1)$. Mặt cầu tâm A đi qua M có phương trình là

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$.

B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 6$.

C. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$.

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{6}$.

Câu 17. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $I(1; 0; -1)$ và $A(2; 2; -3)$. Mặt cầu (S) tâm I và đi qua điểm A có phương trình là.

A. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 3$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $(x+5)^2 + (y+1)^2 + (z-6)^2 = 62$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 62$.

C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 62$.

D. $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+6)^2 = 62$.

Câu 19. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 2$.

B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(2; 1; 1)$, $B(0; 3; -1)$. Mặt cầu (S) đường kính AB có phương trình là

A. $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$.

Câu 21. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$ và tiếp xúc với mp(P) có phương trình: $2x - 2y - z + 3 = 0$ Bán kính của mặt cầu (S) là:

A. $R = \frac{2}{9}$.

B. $R = \frac{2}{3}$.

C. $R = \frac{4}{3}$.

D. $R = 2$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + 2y - z - 3 = 0$ và điểm $I(1; 2; -3)$. Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc mp(P) có phương trình:

A. (S): $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

B. (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$.

C. (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4$.

D. (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x - 2y - 2z - 8 = 0$?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$.

Câu 24. Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $O, A(1; 0; 0), B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; 4)$.

A. (S): $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z = 0$.

B. (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z = 0$.

C. $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0.$

D. $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 8z = 0.$

Câu 25. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $I(0; -3; 0)$. Viết phương trình của mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .

A. $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = \sqrt{3}.$

B. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = \sqrt{3}.$

C. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 3.$

D. $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9.$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{\sqrt{14}}{3}.$

B. $\frac{\sqrt{14}}{4}.$

C. $\frac{\sqrt{14}}{2}.$

D. $\sqrt{14}.$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 3)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(-1; 2; 3)$. Mặt cầu tâm O và tiếp xúc mặt phẳng (ABC) có bán kính R là

A. $R = 3.$

B. $R = \sqrt{3}.$

C. $R = \frac{3}{2}.$

D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -4)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 1 = 0$. Biết rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 25.$

B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 13.$

C. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 25.$

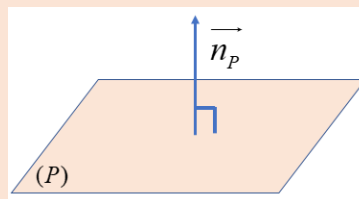
D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 = 13.$

BÀI 3: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

► DẠNG 1: TÌM MỘT VTPT CỦA MẶT PHẪNG

PHƯƠNG PHÁP:

①. **Định nghĩa:** Vector $\vec{n} \neq \vec{0}, \vec{n}$ có giá vuông góc với $(P) \Rightarrow \vec{n}$ là 1 VTPT của (P)



②. Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (P) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của mp (P)
- Nếu mp (P) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n}(A; B; C)$.
- Nếu (P) có cặp $\vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương với nhau và có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (P) .

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

- A. $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B. $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C. $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A = 3; B = 2; C = -4; D = 1$.

Suy ra (α) có $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3z + 4 = 0$. Vector nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n}_3 = (2; -3; 4)$. B. $\vec{n}_1 = (2; 0; -3)$. C. $\vec{n}_2 = (3; 0; 2)$. D. $\vec{n}_4 = (2; -3; 0)$

Lời giải

Chọn B

Vector $\vec{n}_1 = (2; 0; -3)$ có giá vuông góc với mặt phẳng (P) vì là một vectơ pháp tuyến của (P) .

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$ và $C(-10; 5; 3)$. Vector nào dưới đây là vector pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ?

- A. $\vec{n} = (1; 2; 2)$. B. $\vec{n} = (1; -2; 2)$. C. $\vec{n} = (1; 8; 2)$. D. $\vec{n} = (1; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-12; 6; 0)$, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (12; 24; 24) = 12 \cdot (1; 2; 2)$

$\Rightarrow (ABC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; 2)$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

- Câu 1.** Trong không gian Oxyz, mặt phẳng $(P): 3x - 2z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là
A. $\vec{u} = (3; 0; 2)$. **B.** $\vec{u} = (-3; 0; 2)$. **C.** $\vec{u} = (3; -2; 0)$. **D.** $\vec{u} = (3; -2; -1)$.
- Câu 2.** Trong không gian Oxyz, một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng $2x + 3y - z + 1 = 0$ là
A. $\vec{n} = (2; 3; 1)$. **B.** $\vec{n} = (3; 2; 1)$. **C.** $\vec{n} = (2; 3; -1)$. **D.** $\vec{n} = (3; 2; -1)$.
- Câu 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là vectơ pháp tuyến của (P) ?
A. $\vec{n} = (-2; 3; 0)$. **B.** $\vec{n} = (2; -3; 1)$. **C.** $\vec{n} = (2; -3; 2)$. **D.** $\vec{n} = (2; 0; -3)$.
- Câu 4.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x - 3y - 2z - 6 = 0$. Vectơ nào **không phải** là vectơ pháp tuyến của (α) ?
A. $\vec{n} = (1; -3; -2)$. **B.** $\vec{n} = (-1; 3; 2)$. **C.** $\vec{n} = (1; 3; 2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; 6; 4)$.
- Câu 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) . Chọn đáp án sai.
A. $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$. **B.** $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$. **C.** $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$. **D.** $\frac{1}{3}[\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}]$.
- Câu 6.** Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(2; -1; 1)$. Một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (OAB) là
A. $\vec{n} = (-3; 1; -1)$. **B.** $\vec{n} = (1; -1; -3)$. **C.** $\vec{n} = (1; -1; 3)$. **D.** $\vec{n} = (1; 1; 3)$.
- Câu 7.** Mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$ có một vectơ pháp tuyến là:
A. $\vec{n} = (3; 2; 3)$. **B.** $\vec{n} = (2; 3; -2)$. **C.** $\vec{n} = (2; 3; 2)$. **D.** $\vec{n} = (3; 2; -3)$.
- Câu 8.** Trong không gian Oxyz, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là
A. $\vec{n} = (3; 6; -2)$. **B.** $\vec{n} = (2; -1; 3)$. **C.** $\vec{n} = (-3; -6; -2)$. **D.** $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.
- Câu 9.** Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -3; 0)$, $P(0; 0; 4)$ là
A. $(2; -3; 4)$. **B.** $(-6; 4; -3)$. **C.** $(-6; -4; 3)$. **D.** $(-6; 4; 3)$.
- Câu 10.** Tọa độ một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -3; 0)$, $P(0; 0; 4)$ là
A. $(2; -3; 4)$. **B.** $(-6; 4; -3)$. **C.** $(-6; -4; 3)$. **D.** $(-6; 4; 3)$.
- Câu 11.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(-3; -1; 3)$, $B(-1; 3; 1)$ và (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Một vectơ pháp tuyến của (P) có tọa độ là:

- A. $(-1; 3; 1)$. B. $(-1; 1; 2)$. C. $(-3; -1; 3)$. D. $(1; 2; -1)$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 1)$, $B(-1; 3; 3)$, $C(2; -4; 2)$. Một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (ABC) là:

- A. $\vec{n}_1 = (-1; 9; 4)$. B. $\vec{n}_2 = (9; 4; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (4; 9; -1)$. D. $\vec{n}_4 = (9; 4; 11)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 7 = 0$. Tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

- A. $\vec{n} = (3; -2; 1)$. B. $\vec{n} = (-1; 3; 2)$. C. $\vec{n} = (3; 2; 1)$. D. $\vec{n} = (3; -2; -1)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (Oyz) có một vectơ pháp tuyến là:

- A. $\vec{k} = (0; 0; 1)$. B. $\vec{n} = (0; 1; 1)$. C. $\vec{j} = (0; 1; 0)$. D. $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Câu 15. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(-2; 1; 1)$. (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Tìm một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

- A. $\vec{n} = (-1; 1; 0)$. B. $\vec{n} = (1; 1; 1)$. C. $\vec{n} = (1; 1; 0)$. D. $\vec{n} = (0; 1; -1)$.

► DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

PHƯƠNG PHÁP:

①. Viết phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và vectơ pháp tuyến của nó.

♦ Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vectơ $\vec{n} = (A; B; C)$ làm VTPT có phương trình dạng $(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ hay $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

♦ Mặt phẳng (α) đi qua điểm ba điểm $A(a; 0; 0)$, $A(0; b; 0)$, $A(0; 0; c)$ có phương trình theo đoạn chắn: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

②. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước.

♦ VTPT của (β) là $\vec{n}_{(\beta)} = (A; B; C)$

♦ Vì $(\alpha) \parallel (\beta)$ nên VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(\beta)} = (A; B; C)$

♦ Phương trình mặt phẳng $(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

③. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

♦ Tìm tọa độ các vectơ: $\vec{AB}, \vec{AC}$

♦ Vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{AB}, \vec{AC}]$

- ♦ Điểm thuộc mặt phẳng là A (hoặc B hoặc C)
- ♦ Viết phương trình mặt phẳng qua 1 điểm và có VTPT $\vec{n}_{(\alpha)}$

④. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β) .

- ♦ Tìm VTPT của (β) là $\vec{n}_{(\beta)}$
- ♦ Tìm tọa độ vector $\vec{AB}$
- ♦ VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_{(\alpha)} = [\vec{n}_{(\beta)}, \vec{AB}]$
- ♦ Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

A. BÀI TẬP MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz)?

- A.** $x = y + z$. **B.** $y - z = 0$. **C.** $y + z = 0$. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (Oyz) đi qua $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{n} = (1;0;0)$ làm vec tơ pháp tuyến nên phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0$.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;-2)$, $B(3;1;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

- A.** $2x + 3y + 4 = 0$. **B.** $x - 2y + 2z = 0$. **C.** $x - 2y + 2z + 8 = 0$. **D.** $x - 2y + 2z + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{AB} = (2; -4; 4)$ là một VTPT của mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB.

Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(2;3;0)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua điểm I và có VTPT $\vec{n} = (2; -4; 4)$ nên có phương trình là: $2(x-2) - 4(y-3) + 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 4 = 0$.

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng chứa trục Oz và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có phương trình là

- A.** $x + y = 0$. **B.** $x + 2y = 0$. **C.** $x - y = 0$. **D.** $x + y - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z - 1 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_{\alpha} = (1; -1; 2)$

Trên trục Oz có vector đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$

Mặt phẳng chứa trục Oz và vuông góc với mặt phẳng (α) là mặt phẳng qua O và nhận

$$[\vec{n}_\alpha; \vec{k}] = (-1; -1; 0) \text{ làm vector pháp tuyến.}$$

Do đó có phương trình $-x - y = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là

- A. $z = 0$. B. $x + y + z = 0$. C. $y = 0$. D. $x = 0$.

Câu 17. Cho hai điểm $A(1; 3; -4)$, $B(-1; 2; 2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

- A. $4x + 2y - 12z - 17 = 0$. B. $4x + 2y + 12z - 17 = 0$.
C. $4x - 2y - 12z - 17 = 0$. D. $4x - 2y + 12z + 17 = 0$.

Câu 18. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; -1; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm A và song song với (P) . Phương trình mặt phẳng (Q) là

- A. $(Q): 2x - y + z - 5 = 0$. B. $(Q): 2x - y + z = 0$.
C. $(Q): x + y + z - 2 = 0$. D. $(P): 2x + y - z + 1 = 0$.

Câu 19. Cho 3 điểm $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(0; -2; -1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C là

- A. $x - 2y - 5z - 5 = 0$. B. $2x - y + 5z - 5 = 0$.
C. $x - 2y - 5 = 0$. D. $x - 2y - 5z + 5 = 0$.

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $C\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ là

- A. $x - y + 2z - 1 = 0$. B. $x - y + 2z = 0$.
C. $x - y + 2z + 1 = 0$. D. $x - y + \frac{z}{2} - 1 = 0$.

Câu 21. Cho hai điểm $A(1; -1; 5)$, $B(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy có phương trình là

- A. $4x - z + 1 = 0$. B. $4x + y - z + 1 = 0$. C. $2x + z - 5 = 0$. D. $x + 4z - 1 = 0$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 2; 2)$ và song song với trục Ox có phương trình là

- A. $y - 2z + 2 = 0$. B. $x + 2z - 3 = 0$. C. $2y - z + 1 = 0$. D. $x + y - z = 0$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và điểm $M(1; 2; 1)$.

- A. $(P): y - 2z = 0$. B. $(P): 2x - y = 0$. C. $(P): x - z = 0$. D. $(P): x - 2y = 0$.

- Câu 24.** Trong không gian Oxyz, mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oxy) và đi qua điểm $A(1;1;1)$ có phương trình là
A. $y-1=0$. **B.** $x+y+z-1=0$. **C.** $x-1=0$. **D.** $z-1=0$.
- Câu 25.** Trong không gian Oxyz, mặt phẳng song song với mặt phẳng (Oyz) và đi qua điểm $A(-1;-1;-1)$ có phương trình là
A. $y-1=0$. **B.** $x+y+z-1=0$. **C.** $x+1=0$. **D.** $z-1=0$.
- Câu 26.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(0;-1;3)$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P).
A. $x-2y+2z-1=0$. **B.** $x-2y-2z+1=0$.
C. $x-2y-2z-1=0$. **D.** $x-2y+2z+1=0$.
- Câu 27.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(1;2;-1); B(2;1;0)$ mặt phẳng (P): $2x+y-3z+1=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A; B và vuông góc với (P). Phương trình mặt phẳng (Q) là
A. $2x+5y+3z-9=0$. **B.** $2x+y-3z-7=0$.
C. $2x+y-z-5=0$. **D.** $x-2y-z-6=0$.
- Câu 28.** Trong hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$ cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Phương trình mặt phẳng (ABC) là
A. $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}-\frac{z}{6}=1$. **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1$. **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=0$. **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}-\frac{z}{6}=1$.
- Câu 29.** Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là
A. (P): $x+5y+8z-16=0$. **B.** (P): $x+5y+8z+16=0$.
C. (P): $x+4y+6z-12=0$. **D.** (P): $2x+y-6=0$.
- Câu 30.** Cho $A(1;-1;0)$ và $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa A và d là
A. $x+2y+z+1=0$. **B.** $x+y+z=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $y+z=0$.

► DẠNG 3: ĐIỂM THUỘC MẶT PHẪNG

PHƯƠNG PHÁP:

♦ Điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (P): Ax+By+Cz+D=0 \Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$?

- A.** $Q(1; -2; 2)$. **B.** $P(2; -1; -1)$. **C.** $M(1; 1; -1)$. **D.** $N(1; -1; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Thay toạ độ điểm Q vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1 - (-2) + 2 - 2 = 4 \neq 0$ nên $Q \notin (P)$.

Thay toạ độ điểm P vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.2 - (-1) + (-1) - 2 = 2 \neq 0$ nên $P \notin (P)$.

Thay toạ độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1 - 1 + (-1) - 2 = -2 \neq 0$ nên $M \notin (P)$.

Thay toạ độ điểm N vào phương trình mặt phẳng (P) ta được $2.1 - (-1) + (-1) - 2 = 0$ nên $N \in (P)$.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 7 = 0$ và $(\beta): x - 2y + z - 2 = 0$. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

- A.** $Q(2; -1; 3)$. **B.** $M(1; 0; -3)$. **C.** $P(-1; 0; 3)$. **D.** $N(1; -2; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điểm } \begin{cases} P \in (\alpha) \\ P \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow P \in d.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 31. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng $3x - 5y + z - 2 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

- A.** $M(1; 2; -1)$. **B.** $N(1; 1; -1)$. **C.** $P(2; 0; -3)$. **D.** $Q(1; 0; -1)$.

Câu 32. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 1 = 0$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A.** $P(1; -2; 0)$. **B.** $M(2; -1; 1)$. **C.** $N(0; 1; -2)$. **D.** $Q(1; -3; -4)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, điểm $M(3; 4; -2)$ thuộc mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau?

- A.** $(S): x + y + z + 5 = 0$. **B.** $(P): z - 2 = 0$.
C. $(Q): x - 1 = 0$. **D.** $(R): x + y - 7 = 0$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc mặt phẳng (α) ?

- A.** $P(1; 2; 3)$. **B.** $Q(3; 3; 0)$. **C.** $M(1; -1; 1)$. **D.** $N(2; 2; 2)$.

- Câu 35.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 1 = 0$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?
- A. $M(2; -1; 1)$. B. $N(0; 1; -2)$. C. $Q(1; -3; -4)$. D. $H(1; -2; 0)$.
- Câu 36.** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 2 = 0$?
- A. $M(1; 1; -1)$. B. $Q(1; -2; 2)$. C. $P(2; -1; -1)$. D. $N(1; -1; -1)$.
- Câu 37.** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng $(\alpha): -x + y + 3z - 2 = 0$?
- A. $(1; -3; 2)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(1; 3; 2)$. D. $(-1; -3; 2)$.
- Câu 38.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 10 = 0$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng
- A. 10. B. -10. C. 5. D. 0.
- Câu 39.** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oxy) là
- A. $(1; 2; 0)$. B. $(1; 0; 3)$. C. $(0; 2; 3)$. D. $(0; 0; 3)$.
- Câu 40.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Tìm tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oyz) .
- A. $A(1; -2; 3)$. B. $A(1; -2; 0)$. C. $A(1; 0; 3)$. D. $A(0; -2; 3)$.

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

► DẠNG 1: TÌM MỘT VTCP CỦA ĐƯỜNG THẲNG

PHƯƠNG PHÁP:

①. **Định nghĩa:** Vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{u}$ có giá song song hoặc trùng với $d \Rightarrow \vec{u}$ là 1 VTCP của đường thẳng d .

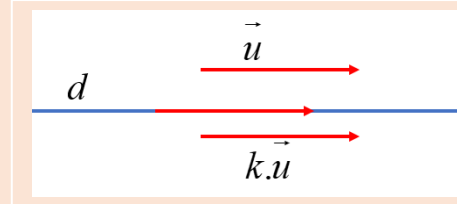
②. Chú ý:

Nếu $\vec{u}$ là một VTCP của đường thẳng d thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) là một VTCP của đường thẳng d

• Nếu Δ có trình tham số của dạng:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$
 thì Δ có 1 VTCP là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

• Nếu $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ được gọi là phương trình chính tắc.

• Nếu Δ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d thì Δ có 1 VTCP là $\vec{a} = [\vec{u}_d, \vec{n}_P]$



A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ song song với đường thẳng

$$d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} . \text{ Một vector chỉ phương của } \Delta \text{ là}$$

- A. $\vec{a} (2; 0; -6)$. B. $\vec{b} (-1; 1; 3)$. C. $\vec{v} (2; 1; -1)$. D. $\vec{u} (1; 0; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Theo phương trình tham số của đường thẳng Δ thì ta thấy Δ có một vector chỉ phương là $\vec{a} (2; 0; -6)$.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3} ?$$

- A. $(2; -1; 3)$. B. $(2; 1; 3)$. C. $(1; -2; 0)$. D. $(1; 2; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Theo phương trình chính tắc của đường thẳng d thì ta thấy d có một vector chỉ phương là $(2; -1; 3)$.

- Ví dụ 3.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d song song với trục Oy. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là
- A. $\vec{u}_1 = (2019; 0; 0)$. B. $\vec{u}_2 = (0; 2021; 0)$.
 C. $\vec{u}_3 = (0; 0; 2019)$. D. $\vec{u}_4 = (2020; 0; 2020)$.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng d song song với trục Oy nên vectơ chỉ phương của d cùng phương với vectơ đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Vậy đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (0; 2021; 0)$.

- Ví dụ 4.** Trong không gian Oxyz, đường thẳng qua hai điểm $M(-2; 1; 2)$, $N(3; -1; 0)$ có một vectơ chỉ phương là
- A. $\vec{u} = (1; 0; 2)$. B. $\vec{u} = (5; -2; -2)$. C. $\vec{u} = (-1; 0; 2)$. D. $\vec{u} = (5; 0; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua hai điểm $M(-2; 1; 2)$ và $N(3; -1; 0)$ nhận $\overrightarrow{MN} = (5; -2; -2)$ làm một VTCP.

Vậy $\vec{u} = (5; -2; -2)$ cũng là một VTCP của đường thẳng đã cho.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

- Câu 1.** Trong không gian Oxyz, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ có vectơ chỉ phương là
- A. $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1; 2)$. C. $\vec{u}_3 = (2; -1; 2)$. D. $\vec{u}_4 = (-1; -2; -3)$.
- Câu 2.** Vectơ nào là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$?
- A. $\vec{u} = (2; -6; 1)$. B. $\vec{u} = (4; -6; 2)$. C. $\vec{u} = (1; -3; 2)$. D. $\vec{u} = (2; 3; 1)$.
- Câu 3.** Trong không gian Oxyz cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $\alpha: x + 2z + 3 = 0$. Một vectơ chỉ phương của Δ là
- A. $\vec{a} = (1; 0; 2)$. B. $\vec{b} = (2; -1; 0)$. C. $\vec{v} = (1; 2; 3)$. D. $\vec{u} = (2; 0; -1)$.
- Câu 4.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x - 3z + 5 = 0$. Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là
- A. $\vec{u} = (2; -3; 5)$. B. $\vec{u} = (2; 0; -3)$. C. $\vec{u} = (2; -3; 0)$. D. $\vec{u} = (2; 0; 3)$.
- Câu 5.** Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của d ?
- A. $\vec{u} = (1; -2; 1)$. B. $\vec{u} = (1; 2; 1)$. C. $\vec{u} = (-1; -2; 1)$. D. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.

- Câu 6.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + (m-1)t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để d có thể viết được dưới dạng chính tắc?
- A. $\forall m \in \mathbb{R}$. B. $m \neq -1$. C. $m \neq 1$. D. $m = 1$.
- Câu 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 0)$; $B(3; 2; -8)$. Tìm một vector chỉ phương của đường thẳng AB .
- A. $\vec{u} = (1; 2; -4)$. B. $\vec{u} = (2; 4; 8)$. C. $\vec{u} = (-1; 2; -4)$. D. $\vec{u} = (1; -2; -4)$.
- Câu 8.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$, $B(3; -2; 0)$. Một vector chỉ phương của đường thẳng AB là
- A. $\vec{u} = (1; 2; -1)$. B. $\vec{u} = (2; -4; 2)$. C. $\vec{u} = (2; 4; -2)$. D. $\vec{u} = (-1; 2; 1)$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{OB} = -2\vec{j} - 4\vec{k}$. Tìm một vector chỉ phương của đường thẳng AB .
- A. $\vec{u} = (2; 5; -1)$. B. $\vec{u} = (2; 3; -5)$. C. $\vec{u} = (-2; -5; -1)$. D. $\vec{u} = (2; 5; -9)$.
- Câu 10.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ nhận vector $\vec{u} = (a; 2; b)$ là vector chỉ phương. Tính $a + b$.
- A. -8 . B. 8 . C. 4 . D. -4 .

► DẠNG 2: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯỜNG THẲNG

PHƯƠNG PHÁP:

①. Xác định một điểm cố định $M(x_0; y_0; z_0)$ thuộc Δ .

②. Xác định một vector chỉ phương $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ của Δ .

③. **Viết PT đường thẳng:**

Phương trình tham số của Δ có dạng: $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t, t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của Δ có dạng: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}, (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0)$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

- Ví dụ 1.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của d là

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+3}{5}$.

B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

C. $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{5}$.

D. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-2}{2} \\ t = \frac{y}{-3} \\ t = \frac{z+3}{5} \end{cases}$.

Do đó phương trình chính tắc của d là: $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Trục Ox đi qua $O(0;0;0)$ và nhận $\vec{i} = (1;0;0)$ làm vector chỉ phương nên có phương trình

tham số là $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1;3)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}(1;2;-4)$ là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{3}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{3}$.

C. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-4}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương

$\vec{u}(a;b;c)$ với $a.b.c \neq 0$ là $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ nên phương trình đường thẳng cần tìm là

$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$.

Ví dụ 4. Cho điểm $A(1;2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+1=0$, $(Q): 2x-y+2z-1=0$. Phương trình đường thẳng d đi qua A song song với cả (P) và (Q) là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-6}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(P): 2x + 2y + z + 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2; 2; 1)$.

$(Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}} = (2; -1; 2)$.

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}$.

Do đường thẳng d song song với (P) và (Q) nên $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \\ \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_{(Q)}} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}] = (5; -2; -6)$.

Mặt khác đường thẳng d đi qua $A(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (5; -2; -6)$ nên phương trình chính tắc của d là $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-6}$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 11. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ là

A. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 3; 2)$ là

A. $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

B. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C. $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

D. $d: \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 13. Trong không gian Oxyz, đường thẳng Oz có phương trình là

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

Câu 14. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

- Câu 15.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $I(1; -1; -1)$ và nhận $\vec{u} = (-2; 3; -5)$ là vector chỉ phương có phương trình chính tắc là
- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{5}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5}$.
 C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{-5}$. D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{5}$.
- Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $E(-1; 0; 2)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (3; 1; -7)$. Phương trình của đường thẳng d là
- A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$. B. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$. C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-3}$. D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$.
- Câu 17.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -2; 5)$ và $B(3; 1; 1)$?
- A. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{5}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-5}{5}$.
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-4}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{-4}$.
- Câu 18.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3; 1; 2)$, $B(1; -1; 0)$ là
- A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$. B. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.
 C. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$.
- Câu 19.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 4y + 7z + 2 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là
- A. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = 7 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 7t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
 C. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 7t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. D. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 7t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
- Câu 20.** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 3 = 0$.
- A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$.
- Câu 21.** Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 1 = 0$ là
- A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

Câu 22. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$. Khi

đó phương trình chính tắc của d là

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$.

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

C. $x-2 = y = z-3$.

D. $x+2 = y = z-3$.

Câu 23. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{3}$. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của d ?

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 24. Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1; 4; -1)$, $B(2; 4; 3)$, $C(2; 2; -1)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC là

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$.

Câu 25. Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 1 = 0$, $(Q): 2x - y + 2z - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng d đi qua A song song với cả (P) và (Q) là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-6}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-6}$.

Câu 34. Trong không gian tọa độ Oxyz, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 3y + z = 0$ và $(\beta): x + y - z + 4 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x}{5} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+1}{2}$.

B. $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x}{-5} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+1}{2}$.

D. $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

► DẠNG 3: TÌM ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG VÀ GIAO ĐIỂM CỦA ĐT VÀ MẶT PHẪNG

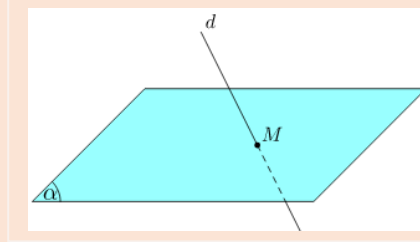
PHƯƠNG PHÁP:

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Điểm $M \in d \Leftrightarrow M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$.

$M \in (P) \Leftrightarrow A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$

từ đó suy ra t rồi suy ra tọa độ giao điểm M .



A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{4}$

Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng d .

- A. $M(1; -1; -5)$. B. $M(1; -1; 3)$. C. $M(3; -2; -1)$. D. $M(5; -3; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Thử đáp án A ta được: $\frac{1-3}{2} = \frac{-1+2}{-1} = \frac{-5+1}{4} = -1$. Suy ra M thuộc đường thẳng d .

Thử đáp án B ta được: $\frac{1-3}{2} = \frac{-1+2}{-1} \neq \frac{3+1}{4}$. Suy ra M không thuộc đường thẳng d .

Thử đáp án C ta được: $\frac{3-3}{2} = \frac{-2+2}{-1} = \frac{-1+1}{4} = 0$. Suy ra M thuộc đường thẳng d .

Thử đáp án D ta được: $\frac{5-3}{2} = \frac{-3+2}{-1} = \frac{3+1}{4} = 1$. Suy ra M thuộc đường thẳng d .

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - z - 5 = 0$. Tọa độ giao điểm của d và (P) là

- A. $(2; 1; -1)$. B. $(3; -1; -2)$. C. $(1; 3; -2)$. D. $(1; 3; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hệ:
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow 2 - t + 2(1 + 2t) - 2t - 5 = 0$$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(1; 3; 2)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng

$(P): 2x - y - z - 7 = 0$ có tọa độ là

A. $(3; -1; 0)$.

B. $(0; 2; -4)$.

C. $(6; -4; 3)$.

D. $(1; 4; -2)$

Lời giải

Chọn A

Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \\ 2x - y - z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \\ 2(3 + t) + 1 + t - 2t - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là: $(3; -1; 0)$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 36. Trong không gian Oxyz, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1; 0; 2)$.

B. $N(2; 3; 1)$.

C. $P(1; 0; 2)$.

D. $Q(1; 0; -2)$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{4}$

Điểm nào sau đây **không** thuộc đường thẳng d .

A. $M(1; -1; -5)$.

B. $M(1; -1; 3)$.

C. $M(3; -2; -1)$.

D. $M(5; -3; 3)$.

Câu 38. Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(3; -2; 1)$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A ?

A. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$.

B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$.

C. $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

D. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 39. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho phương trình đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$

Trong các điểm dưới đây, điểm nào thuộc đường thẳng Δ ?

A. $(1; 4; -5)$.

B. $(-1; -4; 3)$.

C. $(2; 1; 1)$.

D. $(-5; -2; -8)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ **không** đi qua điểm nào sau đây?

A. $M(2; 1; -2)$.

B. $P(4; 1; -4)$.

C. $Q(3; 1; -5)$.

D. $N(0; 1; 4)$.

Câu 41. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Tọa độ điểm M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 2 = 0$:

- A. $M(5; -1; -3)$. B. $M(1; 0; 1)$. C. $M(2; 0; -1)$. D. $M(-1; 1; 1)$.

Câu 42. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, giao điểm của d với mặt

phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A. $(4; -3; 0)$. B. $(2; -2; 0)$. C. $(0; -1; -1)$. D. $(-2; 0; -2)$.

Câu 43. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -2; 3)$, $B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Tọa độ giao điểm C của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là

- A. $C(2; 0; -1)$. B. $C(1; 1; -1)$. C. $C(0; 2; -1)$. D. $C(2; -1; 0)$.

Câu 44. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 7 = 0$ và điểm $A(1; 1; -2)$. Điểm $H(a; b; -1)$ là hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Tổng $a + b$ bằng

- A. 2. B. 3. C. -1. D. -3.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y - 2z + 1 = 0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào?

- A. $(0; 1; 3)$. B. $(2; 3; 3)$. C. $(5; 6; 8)$. D. $(1; -2; 0)$.

BÀI 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI TỔNG HỢP

► DẠNG 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA 2 MẶT PHẪNG

PHƯƠNG PHÁP:

Cho 2 mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

(P) có VTPT $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và (Q) có VTPT $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

- Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ thì $(P) // (Q)$.
- Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ thì $(P) \equiv (Q)$.
- Nếu $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương thì $(P), (Q)$.
- Nếu $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ thì $(P) \perp (Q)$.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** (Q) cắt và không vuông góc với (P) . **B.** $(Q) \perp (P)$.
C. (Q) song song với (P) . **D.** $(Q) \equiv (P)$.

Lời giải

Chọn A

$$\vec{n}_P = (1; -2; 1), \vec{n}_Q = (3; -3; 2)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow (P) \text{ và } (Q) \text{ cắt nhau}$$

$$\text{Xét: } \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = 11 \neq 0$$

$$\Rightarrow (P) \text{ và } (Q) \text{ cắt và không vuông góc nhau.}$$

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng $(P): 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x + 2y + mz + 1 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song

- A.** $m = 3$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$(P) \text{ có vtpt } \vec{n}_P = (2; 4; -6)$$

$$(Q) \text{ có vtpt } \vec{n}_Q = (1; 2; m)$$

Để 2 mặt phẳng song song thì $\vec{n}_P, \vec{n}_Q$ cùng phương.

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-6}{m} \Rightarrow m = -3.$$

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 5x - 2y + z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 3y + mz + 11 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc nhau.

- A. $m = -11$. B. $m = 1$. C. $m = 11$. D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn A

(P) có vtpt $\vec{n}_P = (5; -2; 1)$

(Q) có vtpt $\vec{n}_Q = (1; -3; m)$

Để 2 mp vuông góc nhau thì $\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 4x + 2y + z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - 3y + 2z + 1 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $(Q) \equiv (P)$. B. (Q) cắt và không vuông góc với (P) .
C. (Q) song song với (P) . D. $(Q) \perp (P)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 4 = 0$; $(Q): 5x - 3y - 2z - 7 = 0$
Vị trí tương đối của (P) & (Q) là

- A. Song song. B. Cắt nhưng không vuông góc.
C. Vuông góc. D. Trùng nhau.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z = 0$ và mặt phẳng $(Q): x + y + mz + 1 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau

- A. $m \neq -\frac{1}{2}$. B. $m \neq \frac{1}{2}$. C. $m \neq -1$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x + 4y - 6z + 5 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x + 2y + mz + 1 = 0$. Tìm m để hai mặt phẳng (P) và (Q) song song

- A. $m = 3$. B. $m = -3$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Câu 5. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, điều kiện của m để hai mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z = 0$ và $(Q): x + y + mz + 1 = 0$ cắt nhau là

- A. $m \neq -\frac{1}{2}$. B. $m \neq \frac{1}{2}$. C. $m \neq -1$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$. Tìm m để $(\alpha) // (\beta)$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. Không tồn tại m .

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y + mz - 2 = 0$ và $(Q): x + ny + 2z + 8 = 0$ song song với nhau. Giá trị của m và n lần lượt là

- A. 4 và $\frac{1}{4}$. B. 4 và $\frac{1}{2}$. C. 2 và $\frac{1}{2}$. D. 2 và $\frac{1}{4}$.

- Câu 8.** Trong không gian Oxyz, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + my + 3z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 8y - 6z + 2 = 0$. Tìm giá trị của các tham số m, n để (P) và (Q) song song.
- A.** $m = -4, n = 3$. **B.** $m = 4, n = 3$. **C.** $m = -4, n = 4$. **D.** $m = 4, n = -4$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α) ?
- A.** $3x - y + 2z - 6 = 0$. **B.** $3x - y + 2z + 6 = 0$.
C. $3x - y - 2z + 6 = 0$. **D.** $3x + y + 2z - 14 = 0$.
- Câu 10.** Trong không gian Oxyz, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là
- A.** $2x + y + 3z - 9 = 0$. **B.** $2x - y + 3z + 11 = 0$.
C. $2x - y - 3z + 11 = 0$. **D.** $2x - y + 3z - 11 = 0$.

► DẠNG 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT PHẪNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

PHƯƠNG PHÁP:

①. Cho đường thẳng d qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; c)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (A; B; C)$.

- $d // (P)$ nếu $\vec{u}_d \perp \vec{n}_p$ và không có điểm chung.
- $d \subset (P)$ nếu $\vec{u}_d \perp \vec{n}_p$ và có điểm chung.
- $d \perp (P)$ nếu $\vec{u}_d = k \cdot \vec{n}_p$.

Sơ đồ tư duy:

$$\text{Xét } \vec{u}_d \cdot \vec{n}_p \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \cdot \vec{n}_p = 0 \quad (1) \Rightarrow \begin{cases} M \in d \Rightarrow M \in (P) \Rightarrow d \subset (P) \\ M \in d \Rightarrow M \notin (P) \Rightarrow d // (P) \end{cases} \\ \vec{u}_d \cdot \vec{n}_p \neq 0 \quad (2) \Rightarrow \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} \quad (*) \Rightarrow \begin{cases} (*) \text{ đúng} \Rightarrow d \perp (P) \\ (*) \text{ sai} \Rightarrow d \text{ cắt } (P) \end{cases} \end{cases}$$

②. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = x_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Xét phương trình $(P): A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0 \quad (1)$

- Nếu pt (1) vô nghiệm thì $d // (P)$

- Nếu pt (1) có vô số nghiệm thì $d \subset (P)$
- Nếu pt (1) có nghiệm $t = t_0$ thì d cắt (P) tại điểm $M(x_0 + a_1t_0; y_0 + a_2t_0; z_0 + a_3t_0)$.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d cắt và không vuông góc với (P) . B. d vuông góc với (P) .
C. d song song với (P) . D. d nằm trong (P) .

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d đi qua $M(-1; 0; 5)$ có vtcp $\vec{u} = (1; -3; -1)$ và mặt phẳng (P) có vtp $\vec{n} = (3; -3; 2)$.

Vì $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 = 10 \neq 0$, suy ra d cắt hoặc vuông góc với (P)

Vì $\frac{1}{3} \neq \frac{-3}{-3} \Rightarrow \vec{n}, \vec{u}$ không cùng phương $\Rightarrow \vec{n}, \vec{u}$ không vuông góc.

Vậy d cắt và không vuông góc với (P) .

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -52$. D. $m = 52$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (5; 1; 1)$.

Mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (10; 2; m)$

Để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ thì $\vec{u}$ phải cùng phương với $\vec{n}$

$$\Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = 2.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 3z - 6 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\Delta // (\alpha)$. B. $\Delta \perp (\alpha)$.
C. Δ cắt và không vuông góc với (α) . D. $\Delta \subset (\alpha)$.

- Câu 12.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. d vuông góc với (P) . B. d nằm trong (P) .
 C. d cắt và không vuông góc với (P) . D. d song song với (P) .
- Câu 13.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ song song với mặt phẳng $(P): 2x + (1-2m)y + m^2z + 1 = 0$.
- A. $m \in \{-1; 3\}$. B. $m = 3$.
 C. Không có giá trị nào của m . D. $m = -1$.
- Câu 14.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?
- A. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$ thì d song song với (P) .
 B. $\vec{u}$ không vuông góc với $\vec{n}$ thì d cắt (P) .
 C. d song song với (P) thì $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$.
 D. d vuông góc với (P) thì $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{n}$.
- Câu 15.** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1; 4; -7)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y - 2z - 3 = 0$ có phương trình là
- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-7}{-2}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-7}{-7}$.
 C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{-2}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{-2}$.
- Câu 16.** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(2; 4; 9)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y - z - 3 = 0$ có phương trình là
- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-9}{-1}$. B. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-9}{1}$.
 C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-9}{-1}$. D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+9}{-1}$.
- Câu 17.** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $4x + 3y - 3z + 1 = 0$ có phương trình là
- A. $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$
- Câu 18.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): x + 3y - z + 5 = 0$?
- A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 19. Trong không gian Oxyz, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;-2)$ và vuông góc với đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3} \text{ có phương trình là}$$

A. $3x+2y+z-5=0$.

B. $2x+y+3z+2=0$.

C. $x+2y+3z+1=0$.

D. $2x+y+3z-2=0$.

Câu 20. Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(-1;1;1)$, $B(2;1;0)$, $C(1;-1;2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A. $x+2y-2z+1=0$.

B. $x+2y-2z-1=0$.

C. $3x+2z-1=0$.

D. $3x+2z+1=0$.

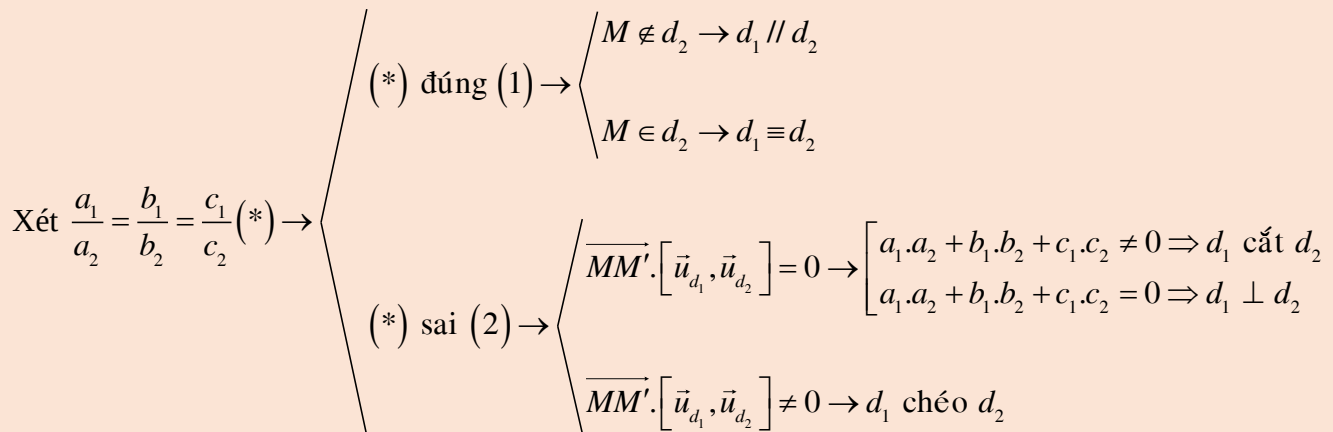
► DẠNG 3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

PHƯƠNG PHÁP:

Cho đường thẳng d_1 qua điểm $M(x_1; y_1; z_1)$, có vector chỉ phương $\vec{u}_{d_1} = (a_1; b_1; c_1)$ và d_2 qua điểm $M'(x_2; y_2; z_2)$, có vector chỉ phương $\vec{u}_{d_2} = (a_2; b_2; c_2)$.

- $d_1 // d_2$ nếu $\vec{u}_{d_1} = k \cdot \vec{u}_{d_2}$ và có không có điểm chung.
- $d_1 \equiv d_2$ nếu $\vec{u}_{d_1} = k \cdot \vec{u}_{d_2}$ và có một điểm chung.
- d_1 cắt d_2 nếu $\vec{u}_{d_1}$ không song song $\vec{u}_{d_2}$ và $\overrightarrow{MM'} \cdot [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = 0$.
- d_1 chéo d_2 nếu $\vec{u}_{d_1}$ không song song $\vec{u}_{d_2}$ và $\overrightarrow{MM'} \cdot [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] \neq 0$.

Sơ đồ tư duy:



A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, vị trí tương đối của đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$

và đường thẳng $d_2: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}$ là

A. Cắt nhau.

B. Song song.

C. Chéo nhau.

D. Trùng nhau.

Lời giải

Chọn A

d_1 qua $M_1(-1;1;-1)$, có vector chỉ phương $\vec{u}_{d_1} = (2;1;-3)$.

d_2 qua $M_2(-3; -2; -2)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_2} = (2; 2; -1)$.

$\vec{u}_{d_1}$ không cùng phương $\vec{u}_{d_2}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-2; -3; -1), [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = (5; -4; 2)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{M_1M_2} \cdot [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = -2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = 0.$$

$\Rightarrow d_1$ cắt d_2 .

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vị trí tương đối của $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = t' \\ z = 0 \end{cases}$ là

- A.** Trùng nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Song song. **D.** Chéo nhau.

Lời giải

Chọn D

d_1 qua $M_1(0; 0; 4)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1} = (2; 1; 0)$.

d_2 qua $M_2(3; 0; 0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d_2} = (-1; 1; 0)$.

$\vec{u}_{d_1}$ không cùng phương $\vec{u}_{d_2}$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3; 0; -4), [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = (0; 0; 3)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{M_1M_2} \cdot [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] = (-4) \cdot 3 \neq 0.$$

$\Rightarrow d_1$ chéo d_2 .

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}. \text{ Vị trí tương đối của } d_1 \text{ và } d_2 \text{ là}$$

- A.** Chéo nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Trùng nhau. **D.** Song song.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ và

$$d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-7}{-3}. \text{ Vị trí tương đối của } d_1 \text{ và } d_2 \text{ là}$$

- A.** Cắt nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Chéo nhau. **D.** Song song.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 - 4t \end{cases}$ và

$$d_2: \frac{x+4}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{3}. \text{ Mệnh đề nào sau đây đúng?}$$

- A.** d_1 song song d_2 . **B.** d_1 và d_2 chéo nhau.
C. d_1 cắt và vuông góc với d_2 . **D.** d_1 vuông góc d_2 và không cắt nhau.

Câu 24. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}; d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$. Vị trí tương đối của d_1 và d_2 là

- A. Chéo nhau. B. Trùng nhau. C. Cắt nhau. D. Song song.

Câu 25. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=2t \\ y=1+4t \\ z=2+6t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$. Khẳng định nào sau là đúng?

- A. $d_1 // d_2$. B. $d_1 \equiv d_2$. C. d_1, d_2 chéo nhau. D. d_1 cắt d_2 .

Câu 26. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $d_2: \frac{x+3}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+5}{1}$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng là

- A. Song song. B. Chéo nhau. C. Trùng nhau. D. Cắt nhau.

Câu 27. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3-t' \end{cases}; (t; t' \in \mathbb{R})$.

Tìm a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.

- A. $a=0$. B. $a=1$. C. $a=-1$. D. $a=2$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3 \end{cases}$ và đường thẳng

$\Delta': \begin{cases} x=3+2t' \\ y=1-t' \\ z=-3 \end{cases}$. Vị trí tương đối của Δ và Δ' là

- A. $\Delta // \Delta'$. B. $\Delta \equiv \Delta'$. C. Δ cắt Δ' . D. Δ và Δ' chéo nhau.

Câu 29. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Đường thẳng nào sau đây song song với d ?

- A. $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$. B. $\Delta: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$.
C. $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$. D. $\Delta: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-2}$.

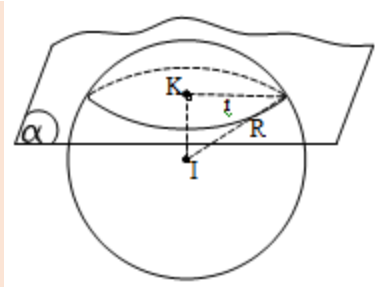
Câu 30. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=1+2t' \\ y=-1+2t' \\ z=2-2t' \end{cases}$. Mệnh đề nào

sau đây đúng?

- A. Hai đường thẳng d và d' chéo nhau. B. Hai đường thẳng d và d' song song.
C. Hai đường thẳng d và d' cắt nhau. D. Hai đường thẳng d và d' trùng nhau.

► DẠNG 4. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

PHƯƠNG PHÁP:



Cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ tâm $I(a; b; c)$ bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

- Nếu $d(I, (P)) > R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- Nếu $d(I, (P)) = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau.

Khi đó (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S) và điểm chung gọi là tiếp điểm

- Nếu $d(I, (P)) < R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có

phương trình:
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Trong đó bán kính đường tròn $r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2}$ và tâm H của đường tròn là hình chiếu của tâm I mặt cầu (S) lên mặt phẳng (P) .

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** (P) không cắt (S) . **B.** (P) tiếp xúc (S) .
C. (P) cắt (S) . **D.** (P) đi qua tâm của (S) .

Lời giải

Chọn A

(S) có tâm $I(1; 2; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Khoảng cách từ tâm I đến (P) :

$$d(I, (P)) = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} > R = 2$$

Vậy (P) không cắt (S) .

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 3y + 4z + m = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 26$. Xác định m để (P) tiếp xúc với (S) ?

- A.** $m = 7; m = -45$. **B.** $m = 7, m = 45$. **C.** $m = -7, m = 45$. **D.** $m = -7, m = -45$.

Lời giải

Chọn A

(S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{26}$.

(P) tiếp xúc với (S)

$$\Leftrightarrow d(I, (P)) = \frac{|1+3 \cdot 2+4 \cdot 3+m|}{\sqrt{1^2+3^2+4^2}} = \sqrt{26}$$

$$\Leftrightarrow |19+m| = \sqrt{26} \cdot \sqrt{1^2+3^2+4^2} = 26$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19+m=26 \\ 19+m=-26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=7 \\ m=-45 \end{cases}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;0;-2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x+2y-2z+4=0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với (P) là

A. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$.

B. $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=3$.

C. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=3$.

D. $(x+1)^2+y^2+(z-2)^2=9$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $R = d(I, (\alpha)) = \frac{|1+4+4|}{3} = 3$.

Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=3$ có dạng (S):
 $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$.

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-3=0$. Hỏi trong các mặt phẳng sau, đâu là mặt phẳng không có điểm chung với mặt cầu (S)?

A. $(\alpha_4): 2x+2y-z+10=0$.

B. $(\alpha_1): x-2y+2z-1=0$.

C. $(\alpha_2): 2x-y+2z+4=0$.

D. $(\alpha_3): x-2y+2z-3=0$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-2)^2=1$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+4z+12=0$. Khi đó khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Mặt phẳng (α) đi qua tâm mặt cầu (S).

B. Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S).

C. Mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

D. Mặt phẳng (α) không cắt mặt Cầu (S).

Câu 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$, $2x+2y+z+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S)?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

- Câu 34.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$ cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 5$ theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là
- A. $\frac{11\pi}{4}$. B. $\frac{9\pi}{4}$. C. $\frac{15\pi}{4}$. D. $\frac{7\pi}{4}$.
- Câu 35.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 10$. Mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3?
- A. $(P_1): x + 2y - 2z + 8 = 0$. B. $(P_1): x + 2y - 2z - 8 = 0$.
C. $(P_1): x + 2y - 2z - 2 = 0$. D. $(P_1): x + 2y - 2z - 4 = 0$.
- Câu 36.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Biết (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S) .
- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$.
- Câu 37.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; -2)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là
- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 3$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3$. D. $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$.
- Câu 38.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r . Tính r .
- A. $r = 3$. B. $r = 2\sqrt{2}$. C. $r = \sqrt{3}$. D. $r = 2$.
- Câu 39.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là:
- A. $r = \sqrt{6}$. B. $r = 2\sqrt{2}$. C. $r = 4$. D. $r = 2\sqrt{3}$.
- Câu 40.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ và một điểm $A(1;1;0)$ thuộc (S) . Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại A có phương trình là
- A. $x + y + 1 = 0$. B. $x + 1 = 0$. C. $x + y - 2 = 0$. D. $x - 1 = 0$.

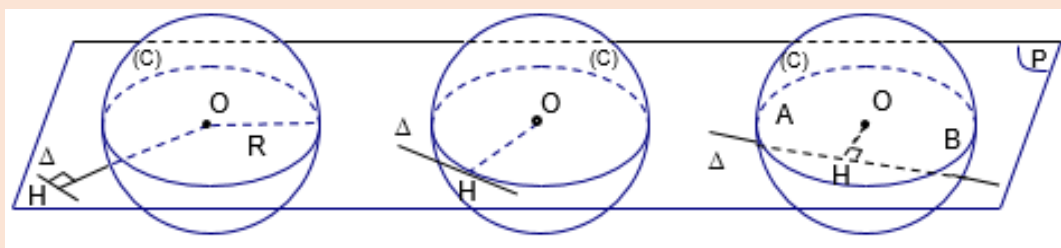
► DẠNG 5. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

PHƯƠNG PHÁP:

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + b_1 t & (2) \\ z = z_0 + c_1 t & (3) \end{cases}$ qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (a_1; b_1; c_1)$

Mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R .

Gọi khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng d là $h = d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM_0}, \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|}$.



- Nếu $d(I, d) > R$ thì d không cắt (S) .
- Nếu $d(I, d) = R$ thì d tiếp xúc (S) .
- Nếu $d(I, d) < R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B và AB vuông góc với đường kính

(bán kính) mặt cầu. Khi đó $R^2 = d^2(I, d) + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$. Số điểm chung của d và (S) là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

d qua $M(0; 1; 2)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2; 1; -1)$

(S) có tâm $I(1; 0; -2)$ và $R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} - 1 = 2$

$\overrightarrow{IM} = (-1; 1; 4)$

$[\overrightarrow{IM}, \vec{u}_d] = (-5; 7; -3)$.

$d(I, d) = \frac{|\overrightarrow{IM}, \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|} \approx 3,7193 > R = 2$.

Vậy d và (S) không cắt nhau.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$, mặt cầu tâm $I(2;5;3)$ tiếp xúc với d là

- A. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 18$. B. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 16$.
C. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 25$. D. $(S): (x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải

Chọn A

d qua $M(1;0;2)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (2;1;2)$.

$$\vec{IM} = (-1; -5; -1).$$

$$[\vec{IM}, \vec{u}_d] = (9; 0; -9).$$

$$\text{Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng nên } R = d(I, d) = \frac{|[\vec{IM}, \vec{u}_d]|}{|\vec{u}_d|} = \sqrt{18}.$$

$$\Rightarrow R^2 = 18.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;1;-1), B(-2;3;1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$. Đường thẳng AB và mặt cầu (S) có bao nhiêu điểm chung?

- A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+5}{5}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$. Số điểm chung của d và (S) là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;1;-3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$. B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$. D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, bán kính của mặt cầu tâm $I(1;3;5)$ và tiếp xúc với

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

- A. $\sqrt{7}$. B. 14. C. $\sqrt{14}$. D. 7.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, bán kính của mặt cầu tâm $I(3;3;-4)$ và tiếp xúc với trục Oy bằng

- A. 5. B. 4. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{5}{2}$.

- Câu 46.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$ tiếp xúc với trục Oy là
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$. D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 10$.
- Câu 47.** Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$. Số giao điểm của (Δ) và (S) là
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất?
- A. d cắt (S) tại hai điểm. B. d không cắt (S) .
 C. d tiếp xúc với (S) tại $M(-2; 2; 3)$. D. d cắt (S) và đi qua tâm của (S) .
- Câu 49.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$. Số điểm chung của d và (S) là
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.
- Câu 50.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$ và điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với d là
- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5\sqrt{2}$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 50$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$.

BÀI 6: KHOẢNG CÁCH TỔNG HỢP

► DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP:

Cho hai điểm $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

- A. $OA = 3$. B. $OA = 9$. C. $OA = \sqrt{5}$. D. $OA = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(4; 3; -2)$ và $B(3; -5; 0)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- A. $\sqrt{69}$. B. $\sqrt{38}$. C. $\sqrt{96}$. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Với $A(4; 3; -2)$ và $B(3; -5; 0)$ thì $\overrightarrow{AB} = (-1; -8; 2)$, do đó

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{69}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3, 1, 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A. $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$. B. $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$.
C. $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$. D. $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $D(x; 0; 0) \in Ox$

$$AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(2; -1; 2)$. Tính độ dài đoạn thẳng OM.

- A. $OM = 9$. B. $OM = \sqrt{3}$. C. $OM = 3$. D. $OM = \sqrt{5}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Gọi A' là hình chiếu của A lên trục Oy. Tính độ dài đoạn OA' .

- A. $OA' = -1$. B. $OA' = \sqrt{10}$. C. $OA' = \sqrt{11}$. D. $OA' = 1$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(5; 2; 0)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\overline{AB}| = \sqrt{61}$. B. $|\overline{AB}| = 3$. C. $|\overline{AB}| = 5$. D. $|\overline{AB}| = 2\sqrt{3}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 1)$, $N(0; 1; -1)$. Tìm độ dài của đoạn thẳng MN .

A. $MN = \sqrt{22}$. B. $MN = 10$. C. $MN = 22$. D. $MN = \sqrt{10}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; -3; 5)$, $N(6; -4; -1)$ và đặt $u = |\overline{MN}|$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $u = (-4; 1; 6)$. B. $u = \sqrt{53}$. C. $u = 3\sqrt{11}$. D. $u = (4; -1; -6)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; -3)$, $B(3; -1; 1)$. Gọi M là trung điểm của AB , đoạn OM có độ dài bằng

A. $2\sqrt{6}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $M(3; 0; 0)$, $N(0; 0; 4)$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

A. $MN = 1$. B. $MN = 5$. C. $MN = 7$. D. $MN = 10$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; -1)$; $B(1; 1; 3)$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOB , tính độ dài đoạn thẳng OI .

A. $OI = \frac{\sqrt{17}}{4}$. B. $OI = \frac{\sqrt{6}}{2}$. C. $OI = \frac{\sqrt{11}}{2}$. D. $OI = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 1; 1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(3; 1; 2)$. Chu vi của tam giác ABC bằng:

A. $4 + \sqrt{5}$. B. $4\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{5}$. D. $2 + 2\sqrt{5}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài đoạn AM là

A. $AM = 3\sqrt{3}$. B. $AM = 2\sqrt{7}$. C. $AM = \sqrt{29}$. D. $AM = \sqrt{19}$.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = 2$. B. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; 1)$; $B(3; -2; -1)$. Tìm điểm N trên Ox cách đều A và B .

A. $(-4; 0; 0)$. B. $(4; 0; 0)$. C. $(1; 0; 0)$. D. $(2; 0; 0)$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 1)$, $C(-3; 6; 4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài đoạn AM là.

A. $\sqrt{30}$. B. $2\sqrt{7}$. C. $\sqrt{29}$. D. $3\sqrt{3}$.

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi I là tâm mặt cầu đi qua bốn điểm $A(2;3;-1)$, $B(-1;2;1)$, $C(2;5;1)$, $D(3;4;5)$. Tính độ dài đoạn thẳng OI .

- A. $\frac{\sqrt{123}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{41}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{113}}{2}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-5;2;3)$, F là điểm đối xứng với E qua trục Oy . Độ dài EF là

- A. $2\sqrt{34}$. B. $2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{29}$. D. $\sqrt{14}$.

► DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN MẶT PHẪNG, KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG, KHOẢNG CÁCH GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẪNG TỚI MẶT PHẪNG.

PHƯƠNG PHÁP:

①. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính: $d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Đặc biệt: $d(M, (Oxy)) = |z_0|$; $d(M, (Oxz)) = |y_0|$; $d(M, (Oyz)) = |x_0|$.

②. Khoảng cách giữa hai mp song song là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Chú ý: Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

③. Khoảng cách giữa đường thẳng song song với mặt phẳng tới mặt phẳng là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.

Chú ý: Nếu đường thẳng không song song với mặt phẳng thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;5)$ và mặt phẳng (α) có phương trình: $2x - y + 2z - 6 = 0$. Khoảng cách từ điểm M mặt phẳng (α) là

- A. $\frac{5\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{11}{3}$. C. $\frac{17}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Áp dụng công thức } d(M, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{11}{3}.$$

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$, $(\beta): 2x + 3y - z + 16 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là

- A. $\sqrt{14}$. B. 0. C. 15. D. $\sqrt{23}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm $M(0;0;2) \in (\alpha)$.

Áp dụng công thức $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$

$$= \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 + 16|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}. \text{ Tính khoảng cách } d \text{ giữa } \Delta \text{ và } (P).$$

- A.** $d = \frac{1}{3}$. **B.** $d = \frac{5}{3}$. **C.** $d = \frac{2}{3}$. **D.** $d = 2$.

Lời giải

Chọn D

(P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(2; -2; -1)$ và đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}(2; 1; 2)$ thỏa mãn $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ nên $\Delta // (P)$ hoặc $\Delta \subset (P)$

Do đó: lấy $A(1; -2; 1) \in \Delta$

$$\text{ta có: } d(\Delta, (P)) = d(A, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 1 + 1|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 2.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (Oyz) .

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y + z - 3 = 0$. Khoảng cách từ điểm $A(1; -1; 1)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A.** $\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x - 3y + 6z - 21 = 0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) bằng

- A.** 3. **B.** -3. **C.** 21. **D.** $\frac{21}{\sqrt{31}}$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -3; 5)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - y + 2z - 6 = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là

- A.** $\frac{5\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{17}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 20. Tính khoảng cách từ điểm $B(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(P): z + 1 = 0$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A.** z_0 . **B.** $|z_0|$. **C.** $\frac{|z_0 + 1|}{\sqrt{2}}$. **D.** $|z_0 + 1|$.

- Câu 21.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$, $(\beta): 2x + 3y - z + 16 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là:
- A. $\sqrt{14}$. B. 0. C. 15. D. $\sqrt{23}$.
- Câu 22.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 2 = 0$, $(\beta): 4x - 4y + 2z + 5 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là:
- A. $\sqrt{3}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{6}$.
- Câu 23.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 5x + 5y - 5z - 1 = 0$ và $(Q): x + y - z + 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{2}{15}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.
- Câu 24.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;3), B(-1;3;2), C(-1;2;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mp(ABC) bằng
- A. $\sqrt{3}$. B. 3. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 25.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$ gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox, Oy, Oz . Khi đó khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (ABC) có giá trị bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\sqrt{6}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
- Câu 26.** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1;2;3), B(-3;0;0), C(0;-3;0), D(0;0;6)$. Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh A của tứ diện $ABCD$.
- A. 9. B. 1. C. 6. D. 3.
- Câu 27.** Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1;2;-1)$. Tìm phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O và cách M một khoảng lớn nhất.
- A. $x + 2y - z = 0$. B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1$. C. $x - y - z = 0$. D. $x + y + z - 2 = 0$.
- Câu 28.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (P) là
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 29.** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y - z + 3 = 0$. Bán kính của (S) bằng
- A. 2. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{2}{9}$.

- Câu 30.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3, -2, -2)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 1)$ và $D(-1, 1, 2)$. Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) có bán kính bằng
- A. 9. B. 5. C. $\sqrt{14}$. D. $\sqrt{13}$.

► DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG

PHƯƠNG PHÁP:

Cách 1: Xác định hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ .

Bước 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên Δ . Khi đó tham số hóa tọa độ điểm H theo t .

Bước 2: Từ $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0$ tìm ra tham số t rồi suy ra tọa độ điểm H .

Bước 3: Tính đoạn AH .

Cách 2: Sử dụng công thức: $d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_\Delta|}, \forall M \in \Delta$.

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

- Ví dụ 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $P(a; b; c)$. Khoảng cách từ P đến trục tọa độ Oy bằng
- A. $a^2 + c^2$. B. $\sqrt{a^2 + c^2}$. C. b . D. $|b|$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của P lên trục Oy . Khi đó $H(0; b; 0)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{HP} = (a; 0; c).$$

$$\Rightarrow d(P, Oy) = PH = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

- Ví dụ 2.** Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ điểm $M(4; -3; 2)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$.
- A. $d(M; \Delta) = 3\sqrt{3}$. B. $d(M; \Delta) = 3$. C. $d(M; \Delta) = \sqrt{3}$. D. $d(M; \Delta) = 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u} = (3; 2; -1)$ và qua điểm $B(-2; -2; 0)$.

$$\overrightarrow{MB} = (-6; 1; -2), [\overrightarrow{MB}; \vec{u}] = (3; -12; -15).$$

$$d(M; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-12)^2 + (-15)^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{3}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

- Câu 31.** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, khoảng cách h từ điểm $A(-4; 3; 2)$ đến trục Ox là
- A. $h = 4$. B. $h = \sqrt{13}$. C. $h = 3$. D. $h = 2\sqrt{5}$.

- Câu 32.** Khoảng cách giữa điểm $M(1; -4; 3)$ đến đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$ là
- A. 6. B. 3. C. 4. D. 2.
- Câu 33.** Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -6)$ đến đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}$.
- A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{2}$. D. $\sqrt{11}$.
- Câu 34.** Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;1;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-2}$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng d là
- A. $3\sqrt{5}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 35.** Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(4; -1; 2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ .
- A. $d(M, \Delta) = \sqrt{10}$. B. $d(M, \Delta) = 3\sqrt{10}$.
C. $d(M, \Delta) = \frac{1}{2}\sqrt{10}$. D. $d(M, \Delta) = 2\sqrt{10}$.
- Câu 36.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz tính khoảng cách từ điểm $M(1; 3; 2)$ đến đường thẳng
- $$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$$
- A. 3. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 37.** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $A(-4; 4; 0)$, $B(2; 0; 4)$, $C(1; -2; 1)$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng AB là:
- A. $3\sqrt{2}$. B. $\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3.
- Câu 38.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(1; 2; -1)$, $B(0; 3; 4)$, $C(2; 1; -1)$. Độ dài đường cao từ A đến BC bằng:
- A. $\sqrt{6}$. B. $5\sqrt{3}$. C. $\sqrt{\frac{50}{33}}$. D. $\sqrt{\frac{33}{50}}$.
- Câu 39.** Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(2; 1; -2)$, $B(1; -3; 1)$, $C(3; -5; 2)$. Độ dài đường cao AH của tam giác ABC là.
- A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$. B. $2\sqrt{17}$. C. $\sqrt{17}$. D. $3\sqrt{2}$.
- Câu 40.** Bán kính mặt cầu tâm $I(1; 3; 5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$ là
- A. $\sqrt{14}$. B. 14. C. $\sqrt{7}$. D. $2\sqrt{3}$.

► DẠNG 4. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

PHƯƠNG PHÁP:

①. **Cách 1:** Tính đoạn vuông góc chung AB của Δ_1 và Δ_2 .

• **Bước 1:** Tham số hóa tọa độ hai điểm A, B theo t_1, t_2 . Xác định hai vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng lần lượt là $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

• **Bước 2:** Sử dụng
$$\begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow t_1, t_2.$$
 Từ đó xác định được tọa độ hai điểm A, B .

• **Bước 3:** Tính đoạn AB .

②. **Cách 2:** Quy về khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

• **Bước 1:** Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 .

• **Bước 2:** Tính khoảng cách từ một điểm $A \in \Delta_1$ đến mặt phẳng (P) . Khi đó $d(\Delta_1, \Delta_2) = d(A, (P))$

③. **Cách 3:** Sử dụng công thức:
$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left| [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} \right|}{\left| [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \right|}.$$

A. VÍ DỤ MINH HỌA:

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng d và d' .

A. $h = \frac{8\sqrt{21}}{21}$. B. $h = \frac{10\sqrt{21}}{21}$. C. $h = \frac{4\sqrt{21}}{21}$. D. $h = \frac{22\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải

Chọn A

d có vector chỉ phương $\vec{u} = (2; 3; 2)$, đi qua $M(-1; -1; 1)$.

d' có vector chỉ phương $\vec{u'} = (2; 1; 1)$, đi qua $M'(1; -2; 3)$.

Ta có: $[\vec{u}, \vec{u'}] = (1; 2; -4)$, $\vec{MM'} = (2; -1; 2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{u'}}] \cdot \vec{MM'} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 = -8 \neq 0$
 $\Rightarrow d, d'$ chéo nhau.

Khi đó: khoảng cách h giữa hai đường thẳng d và d' là:
$$h = \frac{\left| [\vec{u}, \vec{u'}}] \cdot \vec{MM'} \right|}{\left| [\vec{u}, \vec{u'}}] \right|} = \frac{8}{\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{21}.$$

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng d và d' .

A. $h = \frac{4\sqrt{21}}{21}$. B. $h = \frac{10\sqrt{21}}{21}$. C. $h = \frac{8\sqrt{21}}{21}$. D. $h = \frac{22\sqrt{21}}{21}$.

Câu 43. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ và $d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$

A. $\frac{12}{5}$. B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. 3. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 44. Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=1-4t \\ y=2-t \\ z=-3+t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Khoảng

cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng bao nhiêu?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 45. Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(1;-2;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(-1;1;0)$, $D(1;2;-1)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{11}}$. B. $\frac{6}{\sqrt{11}}$. C. $\frac{8}{\sqrt{11}}$. D. $\frac{10}{\sqrt{11}}$.