

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{3n+7}{n+1}} - 1, n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim u_n$.

Bài 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3. (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi L, M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Giả sử các điểm E, F thuộc AL sao cho $ME \perp AC, NF \perp AB$. Gọi $K = BF \cap CE$. Các đường thẳng đi qua A và tâm các đường tròn (KAB), (KAC) lần lượt cắt BC tại P, Q.

a) Giả sử đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định. Chứng minh AK luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi trên (O).

b) Chứng minh PM, QN cắt nhau trên AT (với T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ).

Bài 4. (5,0 điểm). Trong bảng 10×10 , viết các chữ số 0, 1, 2, 3, ..., 9 theo thứ tự tùy ý vào các ô vuông, mỗi ô vuông một chữ số, sao cho mỗi chữ số xuất hiện 10 lần.

a) Hỏi có thể làm điều này sao cho mỗi hàng và mỗi cột chứa không quá bốn chữ số phân biệt không?

b) Chứng minh rằng tồn tại một hàng hoặc một cột trong đó có ít nhất bốn chữ số khác nhau.

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 18/9/2024

(Đề thi có 01 trang, gồm 03 bài)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 5 (6,0 điểm).

a) Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố lẻ của $a^{2^n} + 1$ ($a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$) thì p có dạng: $p = 2^{n+1} \cdot k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

b) Tìm tất cả các số nguyên dương $m > 1$ thỏa mãn $m \mid 2024^{m-1} + 1$.

Bài 6 (7,0 điểm). Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên có bậc $n \geq 5$ và $P(0) = 0$. Biết rằng $P(x)$ có n nghiệm nguyên phân biệt và hệ số của bậc cao nhất là số dương.

a) Chứng minh rằng đa thức $Q(x) = P(x) - 1$ không phân tích được thành tích của 2 đa thức hệ số nguyên có bậc không nhỏ hơn 1.

b) Chứng minh rằng tập các nghiệm nguyên của đa thức $H(x) = P(P(x))$ trùng với tập các nghiệm nguyên của đa thức $P(x)$.

Bài 7. (7,0 điểm). Cho tam giác không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) (BC không là đường kính). Giả sử đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định; A là điểm thay đổi trên cung lớn BC (A khác B, C). I là trung điểm BC. D là điểm đối xứng với A qua O. BD cắt AC tại E; CD cắt AB tại F. M là trung điểm BF, N là trung điểm CE. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên BC. AI cắt lại (O) tại L khác A.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, I, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh KL luôn đi qua một điểm cố định.

Hết