CHỦ ĐỀ 4.	BẤT ĐẲNG THỨC BẤT PHƯƠNG TRÌNH

❍ Bài 01

BẤT ĐẲNG THỨC

I – ÔN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

Các mệnh đề dạng "$a<b$" hoặc "$a>b$" được gọi là bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

Nếu mệnh đề "$a<b\Rightarrow c<d$" đúng thì ta nói bất đẳng thức $c<d$ là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức $a<b$ và cũng viết là $a<b\Rightarrow c<d$.

Nếu bất đẳng thức $a<b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c<d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a<b\Leftrightarrow c<d$.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức $a<b$ ta chỉ cần chứng minh $a-b<0$. Tổng quát hơn, khi so sánh hai số, hai biểu thức hoặc chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể sử dụng các tính chất của bất đẳng thức được tóm tắt trong bảng sau

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a<b\Leftrightarrow a+c<b+c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c>0$	$a<b\Leftrightarrow ac<bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c<0$	$a<b\Leftrightarrow ac>bc$	
	$a<b$ và $c<d\Rightarrow a+c<b+d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a>0,\, c>0$	$a<b$ và $c<d\Rightarrow ac<bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n\in\mathbb{N}^*$	$a<b\Leftrightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
$n\in\mathbb{N}^*$ và $a>0$	$a<b\Leftrightarrow a^{2n}<b^{2n}$	
$a>0$	$a<b\Leftrightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a<b\Leftrightarrow \sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$	

Chú ý

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a\le b$ hoặc $a\ge b$. Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các **bất đẳng thức không ngặt** và gọi các bất đẳng thức dạng $a<b$ hoặc $a>b$ là các **bất đẳng thức ngặt**. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt.

II – BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI)

1. Bất đẳng thức Cô-si

Định lí

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \quad \forall a, b \ge 0. \qquad (1)$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2. Các hệ quả

Hệ quả 1

Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2.

$$a + \frac{1}{a} \ge 2, \qquad \forall a > 0.$$

Hệ quả 2

Nếu x, y cùng dương và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Hệ quả 3

Nếu x, y cùng dương và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

III – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Điều kiện	Nội dung
	$\lvert x\rvert \ge 0, \lvert x\rvert \ge x, \lvert x\rvert \ge -x$
$a > 0$	$\lvert x\rvert \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$
	$\lvert x\rvert \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ hoặc $x \ge a$
	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \le \lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$ **B.** $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$

C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - d > b - c.$ **D.** $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$

Lời giải. Ta có $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ -c < -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ -d > -c \end{cases} \Rightarrow a - d > b - c.$ **Chọn C.**

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây sai?

A. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a > \dfrac{b+c}{2}.$ **B.** $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a - c > b - a.$

C. $a>b\Rightarrow a-c>b-c.$ **D.** $a>b\Rightarrow c-a>c-b.$

Lời giải. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}\Rightarrow a+a>b+c\Rightarrow 2a>b+c\Rightarrow a>\dfrac{b+c}{2}\longrightarrow$ **A đúng.**
- $\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}\Rightarrow a+a>b+c\Rightarrow a-c>b-a\longrightarrow$ **B đúng.**
- $a>b\Rightarrow a+(-c)>b+(-c)\Rightarrow a-c>b-c\longrightarrow$ **C đúng.**
- $a>b\Rightarrow -a<-b\Leftrightarrow c-a<c-b\longrightarrow$ **D sai. Chọn D.**

Câu 3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow ac<bd.$ **B.** $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow ac>bd.$

C. $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Rightarrow ac<bd.$ **D.** $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow -ac>-bd.$

Lời giải. Ta có $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Rightarrow ac<bd.$ **Chọn C.**

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a<b\Rightarrow ac<bc.$ **B.** $a<b\Rightarrow ac>bc.$

C. $c<a<b\Rightarrow ac<bc.$ **D.** $\begin{cases}a<b\\c>0\end{cases}\Rightarrow ac<bc.$

Lời giải. Xét bất phương trình $a<b \qquad (*)$.

Khi nhân cả hai vế của $(*)$ với $c,$ ta được $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}c>0\\a<b\Leftrightarrow ac<bc\end{cases}\\\begin{cases}c<0\\a<b\Leftrightarrow ac>bc\end{cases}\end{array}\right.$. **Chọn D.**

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Rightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}.$ **B.** $\begin{cases}a>b>0\\c>d>0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}.$

C. $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}.$ **D.** $\begin{cases}a>b>0\\c>d>0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{a}{b}>\dfrac{d}{c}.$

Lời giải. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<b\\0<\dfrac{1}{d}<\dfrac{1}{c}\end{cases}\Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{d}\longrightarrow$ **A sai.**
- $\begin{cases}a>b>0\\c>d>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>b>0\\\dfrac{1}{d}>\dfrac{1}{c}>0\end{cases}\Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\dfrac{a}{c},\dfrac{b}{d}\longrightarrow$ **B sai.**
- $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}\longrightarrow$ **C sai** vì chưa thiếu điều kiện $a,b,c,d.$
- $\begin{cases}a>b>0\\c>d>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{b}>1\\1>\dfrac{d}{c}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a}{b}>1>\dfrac{d}{c}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}>\dfrac{d}{c}\longrightarrow$ **D đúng. Chọn D.**

Câu 6. Nếu $a+2c>b+2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $-3a>-3b.$ **B.** $a^2>b^2.$ **C.** $2a>2b.$ **D.** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $a+2c>b+2c \Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow 2a>2b.$ **Chọn C.**

Câu 7. Nếu $a+b<a$ và $b-a>b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab>0.$ **B.** $b<a.$

C. $a<b<0.$ **D.** $a>0$ và $b<0.$

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a+b<a \\ b-a>b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b<0 \\ -a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \Rightarrow ab<0.$ **Chọn A.**

Câu 8. Nếu $0<a<1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{a}>\sqrt{a}.$ **B.** $a>\frac{1}{a}.$ **C.** $a>\sqrt{a}.$ **D.** $a^3>a^2.$

Lời giải. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\frac{1}{a}-\sqrt{a}=\frac{1-a\sqrt{a}}{a}=\frac{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}+a\right)}{a}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\sqrt{a},\ \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **A đúng.**
- $a-\frac{1}{a}=\frac{a^2-1}{a}=\frac{(a-1)(a+1)}{a}<0 \Leftrightarrow a<\frac{1}{a},\ \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **B sai.**
- $a-\sqrt{a}=\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)<0 \Leftrightarrow a<\sqrt{a},\ \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **C sai.**
- $a^3-a^2=a^2(a-1)<0 \Leftrightarrow a^3<a^2,\ \forall a\in(0;1) \longrightarrow$ **D sai.**

Chọn A.

Câu 9. Cho hai số thực dương $a,\ b.$ Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{a^2}{a^4+1}\ge\frac{1}{2}.$ **B.** $\frac{\sqrt{ab}}{ab+1}\ge\frac{1}{2}.$

C. $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2}\le\frac{1}{2}.$ **D.** Tất cả đều đúng.

Lời giải. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\frac{a^2}{a^4+1}-\frac{1}{2}=\frac{2a^2-a^4-1}{2\left(a^4+1\right)}=-\frac{\left(a^2-1\right)^2}{2\left(a^4+1\right)}\le 0,\ \forall a\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^4+1}\le\frac{1}{2} \longrightarrow$ **A sai.**
- $\frac{\sqrt{ab}}{ab+1}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{ab}-ab-1}{2(ab+1)}=-\frac{\left(\sqrt{ab}-1\right)^2}{2(ab+1)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{ab+1}\le\frac{1}{2},\ \forall a,\ b>0 \longrightarrow$ **B sai.**
- $\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{a^2+1}-a^2-2}{2\left(a^2+2\right)}=-\frac{\left(\sqrt{a^2+1}-1\right)^2}{2\left(a^2+2\right)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2}\le\frac{1}{2},\ \forall a \longrightarrow$ **C đúng.**

Chọn C.

Câu 10. Cho $a,\ b>0$ và $x=\frac{1+a}{1+a+a^2},\ y=\frac{1+b}{1+b+b^2}.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x>y.$ **B.** $x<y.$

C. $x=y.$ **D.** Không so sánh được.

Lời giải. Giả sử $x<y \Leftrightarrow \frac{1+a}{1+a+a^2}<\frac{1+b}{1+b+b^2} \Leftrightarrow (1+a)\left(1+b+b^2\right)<(1+b)\left(1+a+a^2\right)$

$\Leftrightarrow 1+b+b^2+a+ab+ab^2<1+a+a^2+b+ab+a^2b$

$\Leftrightarrow b^2+ab^2<a^2+a^2b \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)+ab(a-b)>0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+ab)>0$ luôn đúng với mọi $a>b>0$. Vậy $x<y$. **Chọn B.**

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=x+\dfrac{2}{x-1}$ với $x>1$.

A. $m=1-2\sqrt{2}$. **B.** $m=1+2\sqrt{2}$. **C.** $m=1-\sqrt{2}$. **D.** $m=1+\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=x+\dfrac{2}{x-1}=x-1+\dfrac{2}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1).\dfrac{2}{x-1}}+1=2\sqrt{2}+1$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1=\dfrac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}$. Vậy $m=2\sqrt{2}+1$. **Chọn B.**

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$.

A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{5}{2}$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+4}.\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}}=2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x^2+4}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}} \Leftrightarrow x^2=-3$: vô lý.

Lời giải đúng như sau:

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}+\dfrac{3\sqrt{x^2+4}}{4}$.

Do $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}\geq 2\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}.\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}}=1 \\ \dfrac{3}{4}.\sqrt{x^2+4}\geq \dfrac{3}{4}.2=\dfrac{3}{2} \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

Suy ra $f(x)\geq 1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$. **Chọn C.**

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ với $x>-1$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2+1}{x+1}=x+1+\dfrac{1}{x+1}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x+1+\dfrac{1}{x+1}\geq 2\sqrt{(x+1).\dfrac{1}{x+1}}=2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x+1=\dfrac{1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow x=0$. Vậy $m=2$. **Chọn C.**

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\dfrac{(x+2)(x+8)}{x}$ với $x>0$.

A. $m=4$. **B.** $m=18$. **C.** $m=16$. **D.** $m=6$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\frac{(x+2)(x+8)}{x}=\frac{x^2+10x+16}{x}=x+\frac{16}{x}+10.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x+\frac{16}{x}\geq 2\sqrt{x.\frac{16}{x}}=8\Rightarrow f(x)\geq 18.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x=\frac{16}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$ Vậy $m=18.$ **Chọn B.**

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\frac{4}{x}+\frac{x}{1-x}$ với $1>x>0.$

A. $m=2.$ **B.** $m=4.$ **C.** $m=6.$ **D.** $m=8.$

Lời giải. Ta có $f(x)-4=\frac{4}{x}+\frac{x}{1-x}-4=\frac{4}{x}-\frac{4x}{x}+\frac{x}{1-x}=\frac{4(1-x)}{x}+\frac{x}{1-x}.$

Vì $x\in(0;1)\Rightarrow\frac{x}{1-x}>0$ nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$f(x)-4=\frac{4(1-x)}{x}+\frac{x}{1-x}\geq 2\sqrt{\frac{4(1-x)}{x}.\frac{x}{1-x}}=4\Leftrightarrow f(x)\geq 8.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1>x>0\\\frac{4(1-x)}{x}=\frac{x}{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$ Vậy $m=8.$ **Chọn D.**

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$ với $0<x<1.$

A. $m=2.$ **B.** $m=4.$ **C.** $m=8.$ **D.** $m=16.$

Lời giải. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}.\frac{1}{1-x}}=\frac{2}{\sqrt{x(1-x)}}.$

Mặt khác $x(1-x)\leq\frac{(x+1-x)^2}{4}=\frac{1}{4}\longrightarrow\sqrt{x(1-x)}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\geq 2\Rightarrow f(x)\geq 4.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1>x>0\\x=1-x\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$ Vậy $m=4.$ **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x+x}{x}+\frac{1-x+x}{1-x}=\frac{1-x}{x}+\frac{x}{1-x}+2.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{1-x}{x}+\frac{x}{1-x}\geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x}.\frac{x}{1-x}}=2\Rightarrow f(x)\geq 4.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1>x>0\\\frac{x}{1-x}=\frac{1-x}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\frac{x^2+32}{4(x-2)}$ với $x>2.$

A. $m=\frac{1}{2}.$ **B.** $m=\frac{7}{2}.$ **C.** $m=4.$ **D.** $m=8.$

Lời giải. Ta có $f(x)=\frac{x^2+32}{4(x-2)}\longrightarrow\frac{x^2-4+36}{4(x-2)}=\frac{x+2}{4}+\frac{36}{x-2}=\frac{x-2}{4}+\frac{36}{x-2}+1.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x-2}{4}+\frac{9}{x-2}\geq 2\sqrt{\frac{x-2}{4}.\frac{9}{x-2}}=3\Rightarrow f(x)\geq 3+1=4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{9}{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow x=8$. Vậy $m=4$. **Chọn C.**

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\dfrac{2x^3+4}{x}$ với $x>0$.

A. $m=2$. **B.** $m=4$. **C.** $m=6$. **D.** $m=10$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{2x^3+4}{x}=2x^2+\dfrac{4}{x}=2x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $2x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x}\ge 3\sqrt[3]{2x^2.\dfrac{2}{x}.\dfrac{2}{x}}=3\sqrt[3]{8}=6$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2x^2=\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Vậy $m=6$. **Chọn D.**

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$ với $x>0$.

A. $m=4$. **B.** $m=6$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{19}{2}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}=x^3+\dfrac{3}{x}=x^3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\ge 4\sqrt[4]{x^3.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{x}}=4\Rightarrow f(x)\ge 4$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^3=\dfrac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Vậy $m=4$. **Chọn A.**

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=(6x+3)(5-2x)$ với $x\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$.

A. $M=0$. **B.** $M=24$. **C.** $M=27$. **D.** $M=30$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức hệ quả của Côsi $ab\le\dfrac{(a+b)^2}{4}$, ta được

$$f(x)=3(2x+1)(5-2x)\le 3.\frac{(2x+1+5-2x)^2}{4}=27\Rightarrow f(x)\le 27.$$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{5}{2} \\ 2x+1=5-2x \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Vậy $M=27$. **Chọn C.**

Câu 21. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$ với $x\ge 1$.

A. $M=0$. **B.** $M=\dfrac{1}{2}$. **C.** $M=1$. **D.** $M=2$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1+1}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2.1}=2\sqrt{x-1}$.

$\longrightarrow f(x)\le\dfrac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{1}{2}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=2$. Vậy $M=\frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ với $x>0$.

A. $M=\frac{1}{4}$. **B.** $M=\frac{1}{2}$. **C.** $M=1$. **D.** $M=2$.

Lời giải. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2+4\geq 2\sqrt{x^2.4}=4x$

$\longrightarrow f(x)\leq\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=2$. Vậy $M=\frac{1}{4}$. **Chọn A.**

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ với $x>0$.

A. $M=0$. **B.** $M=\frac{1}{4}$. **C.** $M=\frac{1}{2}$. **D.** $M=1$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{x}{x^2+2x+1}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2+1\geq 2\sqrt{x^2.1}=2x\longrightarrow x^2+2x+1\geq 4x$

$\longrightarrow f(x)\leq\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=1$. Vậy $M=\frac{1}{4}$. **Chọn B.**

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$.

A. $m=\sqrt{2},\ M=3$. **B.** $m=3,\ M=3\sqrt{2}$.

C. $m=\sqrt{2},\ M=3\sqrt{2}$. **D.** $m=\sqrt{3},\ M=3$.

Lời giải. Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+3\geq 0\\ 6-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\leq x\leq 6$ nên TXĐ $\mathrm{D}=[-3;6]$.

Ta có $f^2(x)=9+2\sqrt{(x+3)(6-x)}$.

- Vì $\sqrt{(3+x)(6-x)}\geq 0,\ \forall x\in[-3;6]$ nên suy ra $f^2(x)\geq 9\longrightarrow f(x)\geq 3$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=6$. Vậy $m=3$.

- Lại có $2\sqrt{(3+x)(6-x)}\leq 3+x+6-x=9$ nên suy ra $f^2(x)\leq 18\longrightarrow f(x)\leq 3\sqrt{2}$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x+3=6-x\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$. Vậy $M=3\sqrt{2}$.

Vậy $m=3,\ M=3\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x)=2\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$.

A. $m=0;\ M=4\sqrt{5}$. **B.** $m=2;\ M=4$.

C. $m=2;\ M=2\sqrt{5}$. **D.** $m=0;\ M=2+2\sqrt{2}$.

Lời giải. Hàm số xác định khi $\begin{cases}x-4\geq 0\\ 8-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 4\leq x\leq 8$ nên TXĐ $\mathrm{D}=[4;8]$.

- Ta có $f^2(x)=3x-8+4\sqrt{(x-4)(8-x)}=3(x-4)+4\sqrt{(x-4)(8-x)}+4$.

Vì $\begin{cases} x-4\ge 0 \\ \sqrt{(x-4)(8-x)}\ge 0 \end{cases}, \forall x\in[4;8]$ nên suy ra $f^2(x)\ge 4 \longrightarrow f(x)\ge 4.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=4.$ Vậy $m=2.$

- Với $x\in[4;8],$ áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có
  - $x-\frac{4}{5}=x-4+\frac{16}{5}\ge 2\sqrt{(x-4).\frac{16}{5}}=\frac{8\sqrt{x-4}}{\sqrt{5}}.$ (1)
  - $\frac{44}{5}-x=8-x+\frac{4}{5}\ge 2\sqrt{(8-x).\frac{4}{x}}=\frac{4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}.$ (2)

Lấy $(1)+(2)$ theo vế, ta được $\frac{8\sqrt{x-4}+4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}\le x-\frac{4}{5}+\frac{44}{5}-x=8.$

Suy ra $\frac{8\sqrt{x-4}+4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}\le 8 \Leftrightarrow \frac{4f(x)}{\sqrt{5}}\le 8\Leftrightarrow f(x)\le 2\sqrt{5}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{36}{5}.$ Vậy $M=2\sqrt{5}.$

Vậy $m=2,\ M=2\sqrt{5}.$ **Chọn C.**

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\sqrt{7-2x}+\sqrt{3x+4}.$

A. $m=3.$ **B.** $m=\sqrt{10}.$ **C.** $m=2\sqrt{3}.$ **D.** $m=\frac{\sqrt{87}}{3}.$

Lời giải. Hàm số xác định khi $\begin{cases} 7-2x\ge 0 \\ 3x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\le x\le \frac{7}{2}$ nên TXĐ $D=\left[-\frac{4}{3};\frac{7}{2}\right].$

Ta có $y^2=\left(\sqrt{7-2x}+\sqrt{3x+4}\right)^2=7-2x+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}+3x+4$

$=x+11+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}=\frac{1}{3}(3x+4)+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}+\frac{29}{3}.$

Vì $\begin{cases} 3x+4\ge 0 \\ \sqrt{(7-2x)(3x+4)}\ge 0 \end{cases}, \forall x\in\left[-\frac{4}{3};\frac{7}{2}\right]$ nên suy ra $f^2(x)\ge \frac{29}{3}\longrightarrow f(x)\ge \frac{\sqrt{87}}{3}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=-\frac{4}{3}.$ Vậy $m=\frac{\sqrt{87}}{3}.$ **Chọn D.**

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=x+\sqrt{8-x^2}.$

A. $M=1.$ **B.** $M=2.$ **C.** $M=2\sqrt{2}.$ **D.** $M=4.$

Lời giải. Ta có $f^2(x)=\left(x+\sqrt{8-x^2}\right)^2=x^2+2x\sqrt{8-x^2}+8-x^2=8+2x\sqrt{8-x^2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $2x\sqrt{8-x^2}\le x^2+\left(\sqrt{8-x^2}\right)^2=8$

$\longrightarrow f^2(x)=8+2x\sqrt{8-x^2}\le 8+8=16\longrightarrow f(x)\le 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\left(\sqrt{8-x^2}\right)^2 \\ 2x\sqrt{8-x^2}=8 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$ Vậy $M=4.$ **Chọn D.**

Câu 28. Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x^2+y^2+xy=3.$ Tập giá trị của biểu thức $S=x+y$ là:

A. $[0;3].$ **B.** $[0;2].$ **C.** $[-2;2].$ **D.** $\{-2;2\}.$

Lời giải. Ta có $x^2+y^2+xy=3 \Leftrightarrow (x+y)^2-3=xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4}$.

Suy ra $(x+y)^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le x+y \le 2$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2+xy=1$. Tập giá trị của biểu thức $P=xy$ là:

A. $\left[0;\frac{1}{3}\right]$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $\left[\frac{1}{3};1\right]$. **D.** $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \Leftrightarrow 1-3xy=(x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow xy \le \frac{1}{3} \\ x^2+y^2+xy=1 \Leftrightarrow 1+xy=(x+y)^2 \ge 0 \Rightarrow xy \ge -1 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 30. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x+y)^3+4xy \ge 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+y$ là:

A. $\sqrt[3]{2}$. **B.** 1. **C.** 8. **D.** $-\sqrt[3]{2}$.

Lời giải. Với mọi x, y ta có $(x+y)^2 \ge 4xy$.

Suy ra $(x+y)^3+(x+y)^2 \ge (x+y)^3+4xy \ge 2$ hay $(x+y)^3+(x+y)^2 \ge 2 \Leftrightarrow x+y \ge 1$.

Chọn B.

Câu 31. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2=x+y+xy$. Tập giá trị của biểu thức $S=x+y$ là:

A. $[0;+\infty)$. **B.** $[-\infty;0]$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $[0;4]$.

Lời giải. Ta có $x^2+y^2=x+y+xy$

$\Leftrightarrow x+y=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy \ge (x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)^2=\frac{1}{4}(x+y)^2$.

Suy ra $x+y \ge \frac{1}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \le x+y \le 4$. **Chọn D.**

Câu 32. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2-3(x+y)+4=0$. Tập giá trị của biểu thức $S=x+y$ là:

A. $\{2;4\}$. **B.** $[0;4]$. **C.** $[0;2]$. **D.** $[2;4]$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $3(x+y)-4=x^2+y^2 \ge \dfrac{(x+y)^2}{2}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-6(x+y)+8 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x+y \le 4$. **Chọn D.**

Câu 33. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x+y=1$. Giá trị nhỏ nhất của $S=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải. Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1.\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=5+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{x} \ge 5+2\sqrt{\dfrac{4x}{y}.\dfrac{y}{x}}=9$.

Dấu "$=$" xảy ra khi $x=\frac{1}{3}; y=\frac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 34. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2y+xy^2=x+y+3xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+y$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $xy(x+y)=x+y+3xy$. $(*)$

Vì $x>0,\ y>0$ nên $x+y>0$. Do đó $(*)\Leftrightarrow x+y=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3\geq\frac{4}{x+y}+3$

$\Leftrightarrow(x+y)^2-3(x+y)-4\geq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y\leq-1\\x+y\geq4\end{array}\right.\Leftrightarrow x+y\geq4$ (do $x,y>0$). **Chọn D.**

Câu 35. Cho hai số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $x^4+y^4+\frac{1}{xy}=xy+2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy$ lần lượt là:

A. $\frac{1}{2}$ và 1. **B.** 0 và 1. **C.** $\frac{1}{4}$ và 1. **D.** 1 và 2.

Lời giải. Ta có $x^4+y^4\geq2x^2y^2$, kết hợp với giả thiết ta được $xy+2\geq2x^2y^2+\frac{1}{xy}$.

Đặt $xy=t>0$, ta được $t+2\geq2t^2+\frac{1}{t}\Leftrightarrow2t^3-t^2-(2t-1)\leq0$

$\Leftrightarrow(t+1)(t-1)(2t-1)\leq0\Leftrightarrow(t-1)(2t-1)\leq0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq t\leq1$. **Chọn A.**

Câu 36. Cho hai số thực $a,\ b$ thuộc khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn $\left(a^3+b^3\right)(a+b)-ab(a-1)(b-1)=0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab$ bằng:

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 1.

Lời giải. Giả thiết $\Leftrightarrow\frac{\left(a^3+b^3\right)(a+b)}{ab}=(1-a)(1-b)$. $(*)$

• $\frac{\left(a^3+b^3\right)(a+b)}{ab}=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)(a+b)\geq2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab}=4ab.$ (1)

• $(1-a)(1-b)=1-(a+b)+ab\leq1-2\sqrt{ab}+ab.$ (2)

Từ (1), (2) và kết hợp với $(*)$, ta được

$4ab\leq1-2\sqrt{ab}+ab\Leftrightarrow3ab+2\sqrt{ab}-1\leq0\Rightarrow0<ab\leq\frac{1}{9}$. **Chọn A.**

Câu 37. Cho hai số thực $x,\ y$ thuộc đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $x+y=4xy$. Tập giá trị của biểu thức $P=xy$ là:

A. $[0;1]$. **B.** $\left[0;\frac{1}{4}\right]$. **C.** $\left[0;\frac{1}{3}\right]$. **D.** $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$.

Lời giải. Ta có $4xy=x+y\geq2\sqrt{xy}\Rightarrow xy\geq\frac{1}{4}$.

Do $x,y\in[0;1]$, suy ra $(1-x)(1-y)\geq0\Leftrightarrow1-(x+y)+xy\geq0$. $(*)$

Kết hợp $(*)$ và giả thiết, ta được $1-4xy+xy\geq0\Rightarrow xy\leq\frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 38. Cho hai số thực dương $x,\ y$ thỏa mãn $x+2y-xy=0$. Giá trị nhỏ nhất của $S=x+2y$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $x+2y=xy=\frac{1}{2}.x.2y\le\frac{1}{2}.\frac{(x+2y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow (x+2y)\left[(x+2y)-8\right]\ge 0\Leftrightarrow x+2y\ge 8$ (do $x,y>0$). **Chọn C.**

Câu 39. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x+y+xy\ge 7$. Giá trị nhỏ nhất của $S=x+2y$ là:

A. 8. **B.** 5. **C.** 7. **D.** -11.

Lời giải. Từ giả thiết $x+y+xy\ge 7\Leftrightarrow 2(x+1)(y+1)\ge 16$.

Ta có $16\le 2(x+1)(y+1)=(x+1)(2y+2)\le\left(\frac{1+x+2y+2}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x+2y+3)^2\ge 64\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y\ge 5\\x+2y\le -11\end{array}\right.\Leftrightarrow x+2y\ge 5$ (do $x,y>0$). **Chọn B.**

Câu 40. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x+3y\le 7$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+xy$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải. Ta có $6(x+1)(y+1)=(2x+2)(3y+3)\le\frac{(2x+2+3y+3)^2}{4}\le\frac{(7+5)^2}{4}\le 36$.

Suy ra $x+y+xy\le 5$. **Chọn B.**

Câu 41. Cho hai số thực x, y không âm và thỏa mãn $x^2+2y=12$. Giá trị lớn nhất của $P=xy$ là:

A. $\frac{13}{4}$. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 13.

Lời giải. Từ giả thiết, ta có $16=(x^2+4)+2y\ge 4x+2y\ge 2\sqrt{4x.2y}$.

Suy ra $xy\le 8$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x=2;\ y=4$. **Chọn C.**

Câu 42. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x>y$ và $xy=1000$. Biết biểu thức $F=\frac{x^2+y^2}{x-y}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases}x=a\\y=b\end{cases}$. Tính $P=\frac{a^2+b^2}{1000}$.

A. $P=2$. **B.** $P=3$. **C.** $P=4$. **D.** $P=5$.

Lời giải. Ta có $F=\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2.1000}{x-y}=x-y+\frac{2.1000}{x-y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F=x-y+\frac{2.1000}{x-y}\ge 2\sqrt{(x-y).\frac{2.1000}{x-y}}=40\sqrt{5}$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1000\\x-y=\frac{2.1000}{x-y}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1000\\x-y=20\sqrt{5}\end{cases}$.

Vậy $F_{\min}=4\sqrt{5}$ khi $\begin{cases}ab=1000\\a-b=20\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4000\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{1000}=4$.

Chọn C.

Câu 43. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x+y\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F=x+y+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}$.

A. $F_{\min}=4\frac{1}{2}$. **B.** $F_{\min}=3\sqrt{2}$. **C.** $F_{\min}=4\frac{1}{3}$. **D.** $F_{\min}=4\frac{2}{3}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số thực dương, ta có

$\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{2}.\frac{1}{2x}}=2.\frac{1}{\sqrt{4}}=1$ và $\frac{y}{2}+\frac{2}{y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{2}.\frac{2}{y}}=2.$

Khi đó $F=x+y+\frac{1}{2x}+\frac{2}{y}=\frac{x+y}{2}+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)+\left(\frac{y}{2}+\frac{2}{y}\right)\geq\frac{3}{2}+1+2=4\frac{1}{2}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=3\\ \frac{x}{2}=\frac{1}{2x};\frac{y}{2}=\frac{2}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$. Vậy $F_{\min}=4\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 44. Cho $x>8y>0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+\frac{1}{y(x-8y)}$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải. Ta có $F=x+\frac{1}{y(x-8y)}=(x-8y)+8y+\frac{1}{y(x-8y)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F\geq 3\sqrt[3]{(x-8y).8y.\frac{1}{y(x-8y)}}=3\sqrt[3]{8}=6.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-8y=8y=\frac{1}{y(x-8y)}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 45. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$. Tập giá trị của biểu thức $S=x+y$ là:

A. $[-1;7]$. **B.** $[3;7]$. **C.** $[3;7]\cup\{-1\}$. **D.** $[-7;7]$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 2\\ y\geq -3\end{cases}$, suy ra $x+y+1\geq 0$.

• Ta có $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$.

$$=2\sqrt{x-2}+2\sqrt{y+3}\leq\frac{4+x-2}{2}+\frac{4+y+3}{2}=\frac{x+y+9}{2}$$

Suy ra $x+y+1\leq\frac{x+y+9}{2}\Leftrightarrow x+y\leq 7$.

• Lại có $x+y+1=2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right)$

$$\Leftrightarrow(x+y+1)^2=4\left(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right)\geq 4(x+y+1)\ \text{(do } 2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\geq 0\text{)}$$

Suy ra $(x+y+1)^2\geq 4(x+y+1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1\leq 0\\ x+y+1\geq 4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+y+1=0\\ x+y+1\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+y=-1\\ x+y\geq 3\end{array}\right.$.

Chọn C.

Câu 46. Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a>0,b>0$ và $f(x)=ax^2+bx+c\geq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F=\frac{4a+c}{b}$.

A. $F_{\min}=1$. **B.** $F_{\min}=2$. **C.** $F_{\min}=3$. **D.** $F_{\min}=5$.

Lời giải. Do hàm số $f(x)=ax^2+bx+c\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\longrightarrow 4ac\ge b^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F=\dfrac{4a+c}{b}\ge\dfrac{2\sqrt{4ac}}{b}=\dfrac{2\sqrt{b^2}}{b}=\dfrac{2b}{b}=2$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $\begin{cases}c=4a\\ b^2=4ac\end{cases}\Leftrightarrow b=c=4a$. **Chọn B.**

Câu 47. Cho ba số thực $a,\ b,\ c$ không âm và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$ lần lượt là:

A. 1 và 3. **B.** 2 và 4. **C.** 2 và 3. **D.** 3 và 4.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+c^2\le 4$.

Ta có $4=a^2+b^2+c^2+abc=a^2+b^2+c^2+\sqrt{a^2b^2c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27}\ge a^2b^2c^2$.

Từ đó suy ra $4\le a^2+b^2+c^2+\sqrt{\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27}}$ hay $\sqrt{\dfrac{S^3}{27}}\ge 4-S\Leftrightarrow 3\le S\le 4$. **Chọn D.**

Câu 48. Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$. Biểu thức $P=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)+\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** 9.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$x^2+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\ge 3.\sqrt[3]{x^2.\frac{y}{zx}.\frac{z}{xy}}=3;\quad y^2+\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}\ge 3;\quad z^2+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}\ge 3.$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta được $x^2+y^2+z^2+2\left(\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}\right)\ge 9$.

Suy ra $P\ge\dfrac{9}{2}$. Khi $x=y=z=1$ thì $P=\dfrac{9}{2}$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)$ bằng:

A. 12. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$x^3+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\ge 4x \text{ hay } x^3+3\sqrt[3]{x}\ge 4x.$$

Tương tự: $y^3+3\sqrt[3]{y}\ge 4y$ và $z^3+3\sqrt[3]{z}\ge 4z$.

Suy ra $P=x^3+y^3+z^3+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)\ge 4(x+y+z)=12$.

Khi $x=y=z=1$ thì $P=12$. **Chọn A.**

Câu 50. Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$ bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 1.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{(x+y).\frac{4}{3}} \le \frac{x+y+\frac{4}{3}}{2};\ \sqrt{(y+z).\frac{4}{3}} \le \frac{y+z+\frac{4}{3}}{2} \text{ và } \sqrt{(z+x).\frac{4}{3}} \le \frac{z+x+\frac{4}{3}}{2}.$$

Suy ra $\sqrt{(x+y).\frac{4}{3}}+\sqrt{(y+z).\frac{4}{3}}+\sqrt{(z+x).\frac{4}{3}} \le x+y+z+2=4.$

Do đó $P=\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} \ge 2\sqrt{3}.$

Khi $x=y=z=\frac{2}{3}$ thì $P=2\sqrt{3}.$ **Chọn C**.

❍ Bài 02

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ
HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) < g(x) \quad \left(f(x) \le g(x)\right) \qquad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x.

Ta gọi $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là vế trái của bất phương trình (1). Số thực x_0 sao cho $f(x_0) < g(x_0)$ $\left(f(x_0) \le g(x_0)\right)$ là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.

Chú ý

Bất phương trình (1) cũng có thể viết lại dưới dạng sau $g(x) > f(x) \quad \left(g(x) \ge f(x)\right)$.

2. Điều kiện của một bất phương trình

Tương tự đối với phương trình, ta gọi các điều kiện của ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa là điều kiện xác định (hay gọi tắt là điều kiện) của bất phương trình (1).

3. Bất phương trình chứa tham số

Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình tương đương

Ta đã biết hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương và dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương đó.

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.

3. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{P(x)<Q(x)\Leftrightarrow P(x)+f(x)<Q(x)+f(x)}$$

4. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x)<Q(x)\Leftrightarrow P(x).f(x)<Q(x).f(x),\quad f(x)>0,\,\forall x \\ P(x)<Q(x)\Leftrightarrow P(x).f(x)>Q(x).f(x),\quad f(x)<0,\,\forall x \end{array}}$$

5. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{P(x)<Q(x)\Leftrightarrow P^2(x)<Q^2(x),\quad P(x)\geq 0,\,Q(x)\geq 0,\,\forall x}$$

6. Chú ý

Trong quá trình biến đổi một bất phương trình thành bất phương trình tương đương cần chú ý những điều sau

1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.
2) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x)<Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến hệ bất phương trình.
3) Khi giải bất phương trình $P(x)<Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp
   a) $P(x),\,Q(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.
   b) $P(x),\,Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết
      $P(x)<Q(x)\Leftrightarrow -Q(x)<-P(x)$
      rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Câu 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{2-x}+x<2+\sqrt{1-2x}$.

A. $x\in\mathbb{R}$. **B.** $x\in(-\infty;2]$. **C.** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **D.** $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Lời giải. Bất phương trình xác định khi $\begin{cases}2-x\geq 0\\1-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 2\\x\leq\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 2. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $x+\frac{x-1}{\sqrt{x+5}}>2-\sqrt{4-x}$.

A. $x\in[-5;4]$. **B.** $x\in(-5;4]$. **C.** $x\in[4;+\infty)$. **D.** $x\in(-\infty;-5)$.

Lời giải. Bất phương trình xác định khi $\begin{cases}x+5>0\\4-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-5\\x\leq 4\end{cases}\Leftrightarrow -5<x\leq 4$. **Chọn B.**

Câu 3. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{\frac{x+1}{(x-2)^2}}<x+1$.

A. $x\in[-1;+\infty)$. **B.** $x\in(-1;+\infty)$. **C.** $x\in[-1;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $x\in(-1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Lời giải. Bất phương trình xác định khi $\begin{cases}\frac{x+1}{(x-2)^2}\geq 0\\x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\geq 0\\x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\x\neq 2\end{cases}$.

Chọn C.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sqrt{x-m}-\sqrt{6-2x}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

A. $m=3$. **B.** $m<3$. **C.** $m>3$. **D.** $m<\frac{1}{3}$.

Lời giải. Hàm số xác định khi $\begin{cases}x-m\geq 0\\6-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq m\\x\leq 3\end{cases}$.

- Nếu $m=3$ thì tập xác định của hàm số là $D=\{3\}$.
- Nếu $m>3$ thì tập xác định của hàm số là $D=\varnothing$.
- Nếu $m<3$ thì tập xác định của hàm số là $D=[m;3]$. **Chọn B.**

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sqrt{m-2x}-\sqrt{x+1}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

A. $m<-2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>-2$.

Lời giải. Hàm số xác định khi $\begin{cases}m-2x\geq 0\\x+1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq\frac{m}{2}\\x\geq -1\end{cases}$.

- Nếu $\frac{m}{2}=-1\Leftrightarrow m=-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\{-1\}$.
- Nếu $\frac{m}{2}<-1\Leftrightarrow m<-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\varnothing$.

• Nếu $\frac{m}{2} > -1 \Leftrightarrow m > -2$ thì tập xác định của hàm số là $D = \left[-1; \frac{m}{2}\right]$. **Chọn D.**

Vấn đề 2. CẶP BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Câu 6. Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 3 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với

A. $2x < 3$. **B.** $x < \frac{3}{2}$ và $x \neq 2$. **C.** $x < \frac{3}{2}$. **D.** Tất cả đều đúng.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 2$. Bất phương trình tương đương với: $2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ (thỏa điều kiện). **Chọn D.**

Câu 7. Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 5 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với:

A. $2x < 5$. **B.** $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$. **C.** $x < \frac{5}{2}$. **D.** Tất cả đều đúng.

Lời giải. Điều kiện: $x \neq 2$. Bất phương trình tương đương với: $2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$ kết hợp với điều kiện ta có $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$. **Chọn B.**

Câu 8. Bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $2x - 1 + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3}$. **B.** $2x - 1 - \frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3}$.

C. $(2x-1)\sqrt{x-2018} \geq \sqrt{x-2018}$. **D.** $\frac{2x-1}{\sqrt{x-2018}} \geq \frac{1}{\sqrt{x-2018}}$.

Lời giải. Nếu ta cộng $\frac{1}{x-3}$ vào hai vế bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ thì điều kiện của bất phương trình sẽ thay đổi suy ra đáp án A sai. Tương tự nếu ta nhân hoặc chia hai vế bất phương trình đã cho với $\sqrt{x-2018}$ thì điều kiện của bất phương trình ban đầu cũng sẽ thay đổi suy ra đáp án C và D sai. **Chọn B.**

Câu 9. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

A. $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x-2) \leq 0$. **B.** $x - 2 < 0$ và $x^2(x-2) > 0$.

C. $x - 2 < 0$ và $x^2(x-2) < 0$. **D.** $x - 2 \geq 0$ và $x^2(x-2) \geq 0$.

Lời giải. Ta xét từng bất phương trình trong đáp án A:

$x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

$x^2(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Cả hai bất phương trình có cùng tập nghiệm nên chúng tương đương. **Chọn A.**

Câu 10. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x + 5 > 0$?

A. $(x-1)^2(x+5) > 0$. **B.** $x^2(x+5) > 0$.

C. $\sqrt{x+5}(x+5) > 0$. **D.** $\sqrt{x+5}(x-5) > 0$.

Lời giải. Bất phương trình $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Bất phương trình $(x-1)^2(x+5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -5 \end{cases}$. Đáp án A sai.

Bất phương trình $x^2(x+5)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -5 \end{cases}$. Đáp án B sai.

Bất phương trình $\sqrt{x+5}(x+5)>0 \Leftrightarrow x>-5.$ Đáp án C đúng. **Chọn C.**

Câu 11. Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \le 0$ tương đương với

A. $\sqrt{x(x+1)^2} \le 0.$ **B.** $(x+1)\sqrt{x} < 0.$

C. $(x+1)^2\sqrt{x} \le 0.$ **D.** $(x+1)^2\sqrt{x} < 0.$

Lời giải. Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \le 0$ có điều kiện $x \ge 0 \to (x+1)\sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow x=0.$

Ta có: $\sqrt{x(x+1)^2} \le 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$. Đáp án A sai.

Ta có: $(x+1)\sqrt{x} < 0$ vô nghiệm vì từ điều kiện $x \ge 0 \Rightarrow (x+1)\sqrt{x} \ge 0$. Đáp án B sai.

Ta có: $(x+1)^2\sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow x=0.$ Đáp án C đúng. **Chọn C.**

Câu 12. Bất phương trình $\sqrt{x-1} \ge x$ tương đương với

A. $(1-2x)\sqrt{x-1} \ge x(1-2x).$ **B.** $(2x+1)\sqrt{x-1} \ge x(2x+1).$

C. $(1-x^2)\sqrt{x-1} \ge x(1-x^2).$ **D.** $x\sqrt{x-1} \le x^2.$

Lời giải. Bất phương trình $\sqrt{x-1} \ge x \longrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x-1 \ge x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-x+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Ta có: $(1-2x)\sqrt{x-1} \ge x(1-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \sqrt{x-1} \le x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$ Đáp án A sai.

Ta có: $(2x+1)\sqrt{x-1} \ge x(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \sqrt{x-1} \ge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-x+1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$ Đáp án B đúng. **Chọn B.**

Câu 13. Với giá trị nào của a thì hai bất phương trình $(a+1)x-a+2>0$ và $(a-1)x-a+3>0$ tương đương:

A. $a=1.$ **B.** $a=5.$ **C.** $a=-1.$ **D.** $a=2.$

Lời giải. Phương pháp trắc nghiệm: Thay lần lượt từng đáp án vào hai phương trình.

• Thay $a=1$, ta được $\begin{cases} (a+1)x-a+2>0 \longrightarrow 2x+1>0 \leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2} \\ (a-1)x-a+3>0 \longrightarrow 0x+2>0 \leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$. Không thỏa.

• Thay $a=5$, ta được $\begin{cases} (a+1)x-a+2>0 \longrightarrow 6x-3>0 \leftrightarrow x>\dfrac{1}{2} \\ (a-1)x-a+3>0 \longrightarrow 4x-2>0 \leftrightarrow x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 14. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+2)x \le m+1$ và $3m(x-1) \le -x-1$ tương đương:

A. $m=-3.$ **B.** $m=-2.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=3.$

Lời giải. Viết lại $(m+2)x \le m+1 \quad (1)$ và $(3m+1)x \le 3m-1 \quad (2).$

• Thay $m=-3$, ta được $\begin{cases} (m+2)x \le m+1 \longrightarrow -x \le -2 \leftrightarrow x \ge 2 \\ (3m+1)x \le 3m-1 \longrightarrow -8x \le -10 \leftrightarrow x \ge \dfrac{5}{4} \end{cases}$. Không thỏa.

• Thay $m=-2$ thì hệ số của x ở (1) bằng 0, hệ số của x ở (2) khác 0. Không thỏa.

• Thay $m=-1$ thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) âm. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Đến đây dùng phương pháp loại trừ thì chỉ còn đáp án D.

• Thay $m=3$, ta được $\begin{cases}(m+2)x \le m+1 \longrightarrow 5x \le 4 \leftrightarrow x \le \dfrac{4}{5} \\ (3m+1)x \le 3m-1 \longrightarrow 10x \le 8 \leftrightarrow x \le \dfrac{4}{5}\end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 15. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+3)x \ge 3m-6$ và $(2m-1)x \le m+2$ tương đương:

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$ hoặc $m=4$.

Lời giải.

• Thay $m=1$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

• Thay $m=0$, ta được $\begin{cases}(m+3)x \ge 3m-6 \longrightarrow 3x \ge -6 \leftrightarrow x \ge -2 \\ (2m-1)x \le m+2 \longrightarrow -x \le 2 \leftrightarrow x \ge -2\end{cases}$. Ta thấy thỏa mãn nhưng chưa đủ kết luận là đáp án B vì trong đáp án D cũng có $m=0$. Ta thử tiếp $m=4$.

• Thay $m=4$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Vậy với $m=0$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Vấn đề 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Câu 16. Bất phương trình $ax+b>0$ vô nghiệm khi:

A. $\begin{cases}a \ne 0 \\ b=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a>0 \\ b>0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=0 \\ b \ne 0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=0 \\ b \le 0\end{cases}$.

Lời giải.

• Nếu $a>0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right) \ne \varnothing$.

• Nếu $a<0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right) \ne \varnothing$.

• Nếu $a=0$ thì $ax+b>0$ có dạng $0x+b>0$

  • Với $b>0$ thì $S=\mathbb{R}$.

  • Với $b \le 0$ thì $S=\varnothing$. **Chọn D.**

Câu 17. Bất phương trình $ax+b>0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi:

A. $\begin{cases}a=0 \\ b>0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a>0 \\ b>0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=0 \\ b \ne 0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=0 \\ b \le 0\end{cases}$.

Lời giải.

• Nếu $a>0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right) \ne \varnothing$.

• Nếu $a<0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)\neq\varnothing$.

• Nếu $a=0$ thì $ax+b>0$ có dạng $0x+b>0$

  • Với $b\leq 0$ thì $S=\varnothing$.

  • Với $b>0$ thì $S=\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 18. Bất phương trình $ax+b\leq 0$ vô nghiệm khi:

A. $\begin{cases}a=0\\b>0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=0\\b\leq 0\end{cases}$.

Lời giải.

• Nếu $a>0$ thì $ax+b\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -\frac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right]\neq\varnothing$.

• Nếu $a<0$ thì $ax+b\leq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{b}{a}$ nên $S=\left[-\frac{b}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$.

• Nếu $a=0$ thì $ax+b\leq 0$ có dạng $0x+b\leq 0$

  • Với $b\leq 0$ thì $S=\mathbb{R}$.

  • Với $b>0$ thì $S=\varnothing$. **Chọn A.**

Câu 19. Tập nghiệm S của bất phương trình $5x-1\geq \frac{2x}{5}+3$ là:

A. $S=\mathbb{R}$. **B.** $S=(-\infty;2)$. **C.** $S=\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=\left[\frac{20}{23};+\infty\right)$.

Lời giải. Bất phương trình $5x-1\geq \frac{2x}{5}+3 \Leftrightarrow 25x-5\geq 2x+15 \Leftrightarrow 23x\geq 20 \Leftrightarrow x\geq \frac{20}{23}$.

Chọn D.

Câu 20. Bất phương trình $\frac{3x+5}{2}-1\leq \frac{x+2}{3}+x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên lớn hơn -10?

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải. Bất phương trình $\frac{3x+5}{2}-1\leq \frac{x+2}{3}+x \Leftrightarrow 9x+15-6\leq 2x+4+6x \Leftrightarrow x\leq -5$.

Vì $x\in\mathbb{Z}, -10<x\leq -5$ nên có 5 nghiệm nguyên. **Chọn B.**

Câu 21. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(1-\sqrt{2}\right)x<3-2\sqrt{2}$ là:

A. $S=\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right)$. **B.** $S=\left(1-\sqrt{2};+\infty\right)$.

C. $S=\mathbb{R}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải. Bất phương trình $\left(1-\sqrt{2}\right)x<3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x>\frac{3-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$.

Chọn B.

Câu 22. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $x(2-x)\geq x(7-x)-6(x-1)$ trên đoạn $[-10;10]$ bằng:

A. 5. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 40.

Lời giải. Bất phương trình $x(2-x)\geq x(7-x)-6(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-x^2\geq 7x-x^2-6x+6 \Leftrightarrow x\geq 6 \xrightarrow[x\in\mathbb{Z}]{x\in[-10;10]} x\in\{6;7;8;9;10\}$. **Chọn D.**

Câu 23. Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1\le(x-1)(x+3)+x^2-5$ có tập nghiệm

A. $S=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$. **B.** $S=\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$. **C.** $S=\mathbb{R}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải. Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1\le(x-1)(x+3)+x^2-5$ tương đương với $2x^2+5x-3-3x+1\le x^2+2x+x^2-5\Leftrightarrow 0.x\le-3\Leftrightarrow x\in\varnothing\longrightarrow S=\varnothing$. **Chọn D.**

Câu 24. Tập nghiệm S của bất phương trình $5(x+1)-x(7-x)>-2x$ là:

A. $S=\mathbb{R}$. **B.** $S=\left(-\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải. Bất phương trình $5(x+1)-x(7-x)>-2x$ tương đương với:

$5x+5-7x+x^2>-2x\Leftrightarrow x^2+5>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\longrightarrow S=\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 25. Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\ge\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2$ là:

A. $S=\left[\frac{\sqrt{3}}{6};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(\frac{\sqrt{3}}{6};+\infty\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$. **D.** $S=\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Lời giải. Bất phương trình $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\ge\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2$ tương đương với:

$x^2+2\sqrt{3}x+3\ge x^2-2\sqrt{3}x+3+2\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x\ge 2\Leftrightarrow x\ge\frac{\sqrt{3}}{6}\longrightarrow S=\left[\frac{\sqrt{3}}{6};+\infty\right)$. **Chọn A.**

Câu 26. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)^2+(x-3)^2+15<x^2+(x-4)^2$ là:

A. $S=(-\infty;0)$. **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=\mathbb{R}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải. BPT tương đương $x^2-2x+1+x^2-6x+9+15<x^2+x^2-8x+16$

$\Leftrightarrow 0.x<-9$: vô nghiệm $\longrightarrow S=\varnothing$. **Chọn D.**

Câu 27. Tập nghiệm S của bất phương trình $x+\sqrt{x}<\left(2\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ là:

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(3;+\infty)$. **C.** $S=[3;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;3]$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge0$.

BPT tương đương $x+\sqrt{x}<2x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3\Leftrightarrow -x<-3\Leftrightarrow x>3\longrightarrow S=(3;+\infty)$

Chọn B.

Câu 28. Tập nghiệm S của bất phương trình $x+\sqrt{x-2}\le2+\sqrt{x-2}$ là:

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=(-\infty;2]$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=[2;+\infty)$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge2$.

BPT tương đương $x\le2\longrightarrow x=2$. **Chọn C.**

Câu 29. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{x-4}}\le\frac{4}{\sqrt{x-4}}$ bằng:

A. 15 . **B.** 11 . **C.** 26 . **D.** 0 .

Lời giải. Điều kiện: $x>4$.

BPT tương đương :

$x-2\le4\Leftrightarrow x\le6\Rightarrow 4<x\le6, x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=5; x=6\longrightarrow S=5+6=11$. **Chọn B.**

Câu 30. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-3)\sqrt{x-2}\ge0$ là:

A. $S=[3;+\infty)$. **B.** $S=(3;+\infty)$. **C.** $S=\{2\}\cup[3;+\infty)$. **D.** $S=\{2\}\cup(3;+\infty)$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge2$.

BPT tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0\\ x-3\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x\geq 3\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 31. Bất phương trình $(m-1)x>3$ vô nghiệm khi

A. $m\neq 1$. **B.** $m<1$. **C.** $m=1$. **D.** $m>1$.

Lời giải. Rõ ràng nếu $m\neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m=1$ bất phương trình trở thành $0x>3$: vô nghiệm. **Chọn C.**

Câu 32. Bất phương trình $\left(m^2-3m\right)x+m<2-2x$ vô nghiệm khi

A. $m\neq 1$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m=1, m=2$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-3m+2\right)x<2-m$.

Rõ ràng nếu $m^2-3m+2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 2\end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x<1$: vô nghiệm.

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x<0$: vô nghiệm.

Chọn C.

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(m^2-m\right)x<m$ vô nghiệm.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải. Rõ ràng nếu $m^2-m\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 0\end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x<1$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $m=0$ bất phương trình trở thành $0x<0$: vô nghiệm.

Chọn B.

Câu 34. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(m^2-m\right)x+m<6x-2$ vô nghiệm. Tổng các phần tử trong S bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-m-6\right)x<-2-m$.

Rõ ràng nếu $m^2-m-6\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -2\\ m\neq 3\end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=-2$ bất phương trình trở thành $0x<0$: vô nghiệm.

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x<-5$: vô nghiệm.

Suy ra $S=\{-2;3\}\longrightarrow -2+3=1$. **Chọn B.**

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx-2\leq x-m$ vô nghiệm.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $(m-1)x\leq 2-m$.

Rõ ràng nếu $m\neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m=1$ bât phương trình trở thành $0x\leq 1$: nghiệm đúng với mọi x .

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 36. Bất phương trình $\left(m^2+9\right)x+3\geq m(1-6x)$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m\neq 3$. **B.** $m=3$. **C.** $m\neq -3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $(m+3)^2 x \geq m-3$.

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x \geq -6$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn D.

Câu 37. Bất phương trình $4m^2(2x-1) \geq (4m^2+5m+9)x-12m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m=-1$. **B.** $m=\frac{9}{4}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-\frac{9}{4}$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $(4m^2-5m-9)x \geq 4m^2-12m$.

Dễ dàng thấy nếu $4m^2-5m-9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \frac{9}{4} \end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m=-1$ bất phương trình trở thành $0x \geq 16$: vô nghiệm.

Với $m=\frac{9}{4}$ bất phương trình trở thành $0x \geq -\frac{27}{4}$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=\frac{9}{4}$. **Chọn B.**

Câu 38. Bất phương trình $m^2(x-1) \geq 9x+3m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=\varnothing$. **D.** $m=-1$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $(m^2-9)x \geq m^2+3m.$

Dễ dàng thấy nếu $m^2-9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x > 18$: vô nghiệm

Với $m=-3$ bât phương trình trở thành $0x \geq 0$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3.$ **Chọn B.**

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(x+m)m+x > 3x+4$ có tập nghiệm là $(-m-2;+\infty)$.

A. $m=2$. **B.** $m \neq 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m < 2$.

Lời giải. Để ý rằng, bất phương trình $ax+b>0$ (hoặc $<0,\ \geq 0,\ \leq 0$)

• Vô nghiệm $(S=\varnothing)$ hoặc có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$ thì chỉ xét riêng $a=0$.

• Có tập nghiệm là một tập con của $\mathbb{R}$ thì chỉ xét $a>0$ hoặc $a<0$.

Bất phương trình viết lại $(m-2)x > 4-m^2$.

Xét $m-2>0 \leftrightarrow m>2$, bất phương trình $\Leftrightarrow x > \frac{4-m^2}{m-2} = -m-2 \rightarrow S=(-m-2;+\infty)$.

Chọn C.

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(x-m) \geq x-1$ có tập nghiệm là $(-\infty;m+1]$.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m<1$. **D.** $m \geq 1$.

Lời giải. Bất phương trình viết lại $(m-1)x \geq m^2-1$.

Xét $m-1>0 \leftrightarrow m>1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x \geq \frac{m^2-1}{m-1} = m+1 \longrightarrow S=[m+1;+\infty)$.

Xét $m-1<0\leftrightarrow m<1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x\le\dfrac{m^2-1}{m-1}=m+1\longrightarrow S=(-\infty;m+1]$.

Chọn C.

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1)<2x-3$ có nghiệm.

A. $m\ne 2$. **B.** $m>2$. **C.** $m=2$. **D.** $m<2$.

Lời giải. Bất phương trình viết lại $(m-2)x<m-3$.

● Rõ ràng $m-2\ne 0\leftrightarrow m\ne 2$ thì bất phương trình có nghiệm.

● Xét $m-2=0\leftrightarrow m=2$, bất phương trình trở thành $0x<-1$ (vô lí).

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m\ne 2$. **Chọn A.**

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1)<3-x$ có nghiệm.

A. $m\ne 1$. **B.** $m=1$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\ne 3$.

Lời giải. Bất phương trình viết lại $(m+1)x<m+3$.

● Rõ ràng $m+1\ne 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

● Xét $m+1=0\leftrightarrow m=-1$, bất phương trình trở thành $0x<2$ (luôn đúng với mọi x).

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi m. **Chọn C.**

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(m^2+m-6)x\ge m+1$ có nghiệm.

A. $m\ne 2$. **B.** $m\ne 2$ và $m\ne 3$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\ne 3$.

Lời giải.

● Rõ ràng $m^2+m-6\ne 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

● Xét $m^2+m-6=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\longrightarrow 0x\ge 3\longrightarrow S=\varnothing\\ m=-3\longrightarrow 0x\ge -2\longrightarrow S=\mathbb{R}\end{array}\right.$.

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm khi $m\ne 2$. **Chọn A.**

Câu 44. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x-1<mx+m$ có nghiệm.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=0$; $m=1$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Bất phương trình viết lại $(m^2-m)x<m+1$.

● Rõ ràng $m^2-m\ne 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

● Xét $m^2-m=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\longrightarrow 0x<1\longrightarrow S=\mathbb{R}\\ m=1\longrightarrow 0x<2\longrightarrow S=\mathbb{R}\end{array}\right.$.

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 45. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $mx+6<2x+3m$ với $m<2$. Hỏi tập hợp nào sau đây là phần bù của tập S?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $(m-2)x<3m-6$.

Với $m<2$, bất phương trình tương đương với $x>\dfrac{3m-6}{m-2}=3\longrightarrow S=(3;+\infty)$

Suy ra phần bù của S là $(-\infty;3]$. **Chọn D.**

Câu 46. Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(2x-1)\ge 2x+1$ có tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

A. $m=3$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=-2$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $(2m-2)x\ge m+1$.

• Với $m=1$, bất phương trình trở thành $0x\ge 2$: vô nghiệm. Do đó $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Với $m>1$, bất phương trình tương đương với $x\ge \dfrac{m+1}{2m-2}\longrightarrow S=\left[\dfrac{m+1}{2m-2};+\infty\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2m-2}=1\Leftrightarrow m=3$: thỏa mãn $m>1$.

• Với $m<1$, bất phương trình tương đương với $x\le \dfrac{m+1}{2m-2}\longrightarrow S=\left(-\infty;\dfrac{m+1}{2m-2}\right]$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 47. Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x-m<3(x-1)$ có tập nghiệm là $(4;+\infty)$.

A. $m\ne 1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m>1$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương với $2x-m<3x-3\Leftrightarrow x>3-m$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3-m;+\infty)$

Để bất phương trình trên có tập nghiệm là $(4;+\infty)$ thì $3-m=4\Leftrightarrow m=-1$. **Chọn C.**

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx+4>0$ nghiệm đúng với mọi $|x|<8$.

A. $m\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.

C. $m\in\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Lời giải. Ta có $|x|<8\Leftrightarrow -8<x<8\Leftrightarrow x\in(-8;8)$.

• **TH1:** $m>0$, bất phương trình $\Leftrightarrow mx>-4\Leftrightarrow x>-\dfrac{4}{m}\longrightarrow S=\left(-\dfrac{4}{m};+\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-8;8)\subset S\Leftrightarrow -\dfrac{4}{m}\le -8\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $0<m\le\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• **TH2:** $m=0$,bất phương trình trở thành $0.x+4>0$: đúng với mọi x.

Do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• **TH3:** $m<0$, bất phương trình $\Leftrightarrow mx>-4\Leftrightarrow x<-\dfrac{4}{m}\longrightarrow S=\left(-\infty;-\dfrac{4}{m}\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-8;8)\subset S\Leftrightarrow -\dfrac{4}{m}\ge 8\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $-\dfrac{1}{2}\le m<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Keetsp hợp các trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Cách 2. Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = mx + 4 > 0, \forall x \in (-8;8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-8;8)$ nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \ge 0 \\ f(8) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 4 \ge 0 \\ 8m + 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \frac{1}{2} \\ m \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}.$$

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2) - mx + x + 5 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2018;2]$.

A. $m < \frac{7}{2}$. **B.** $m = \frac{7}{2}$. **C.** $m > \frac{7}{2}$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x < 2m^2 - 5 \longrightarrow x < \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1}$

$\longrightarrow S = \left(-\infty; \frac{2m^2-5}{m^2-m+1}\right)$ (vì $m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-2018;2] \subset \left(-\infty; \frac{2m^2-5}{m^2-m+1}\right) \leftrightarrow 2 < \frac{2m^2-5}{m^2-m+1} \leftrightarrow m > \frac{7}{2}$. **Chọn C.**

Cách 2. Ta có $(m^2 - m + 1)x < 2m^2 - 5 \Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x - 2m^2 + 5 < 0$.

Hàm số bậc nhất $y = (m^2 - m + 1)x - 2m^2 + 5$ có hệ số $m^2 - m + 1 > 0$ nên đồng biến.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(2) < 0 \Leftrightarrow (m^2 - m + 1).2 - 2m^2 + 5 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2) + m + x \ge 0$ có nghiệm $x \in [-1;2]$.

A. $m \ge -2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m \ge -1$. **D.** $m \le -2$.

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2 + 1)x \ge 2m^2 - m \longrightarrow x \ge \frac{2m^2 - m}{m^2 + 1}$

$\longrightarrow S = \left[\frac{2m^2 - m}{m^2 + 1}; +\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-1;2] \cap \left[\frac{2m^2-m}{m^2+1}; +\infty\right) \ne \varnothing \longleftrightarrow \frac{2m^2-m}{m^2+1} \le 2 \leftrightarrow m \ge -2$. **Chọn A.**

Vấn đề 4. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Câu 51. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2x + 1 < x - 2 \end{cases}$ là:

A. $S = (-\infty; -3)$. **B.** $S = (-\infty; 2)$. **C.** $S = (-3; 2)$. **D.** $S = (-3; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2x + 1 < x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > x \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3$. **Chọn A.**

Câu 52. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \dfrac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases}$ là:

A. $S=\left(-2;\dfrac{4}{5}\right)$. **B.** $S=\left(\dfrac{4}{5};+\infty\right)$. **C.** $S=(-\infty;-2)$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} > -x+1 \\ \dfrac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > -3x+3 \\ 4-3x < 6-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 4 \\ -x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{5}$.

Chọn B.

Câu 53. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < -x+1 \\ 3+x > \dfrac{5-2x}{2} \end{cases}$ là:

A. $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < -x+1 \\ 3+x > \dfrac{5-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < -2x+2 \\ 6+2x > 5-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 3 \\ 4x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\dfrac{1}{4} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 54. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 > -x+2017 \\ 3+x < \dfrac{2018-2x}{2} \end{cases}$ là:

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\left(\dfrac{2012}{8};\dfrac{2018}{3}\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\dfrac{2012}{8}\right)$. **D.** $S=\left(\dfrac{2018}{3};+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} 2x-1 > -x+2017 \\ 3+x < \dfrac{2018-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 2018 \\ 6+6x < 2018-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 2018 \\ 8x < 2012 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

Chọn A.

Câu 55. Tập $S=\left[-1;\dfrac{3}{2}\right)$ là tập nghiệm của hệ bất phương trình sau đây ?

A. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < \dfrac{3}{2} \longrightarrow S=\left[-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **Chọn A.**

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{3}{2} \longrightarrow S=\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. B sai.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1 \longrightarrow S=(-\infty;-1]$. C sai.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing \longrightarrow S=\varnothing$. D sai.

Câu 56. Tập nghiệm S của bất phương trình $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \le 3(x+1) \end{cases}$ là:

A. $S=(-3;5)$. **B.** $S=(-3;5]$. **C.** $S=[-3;5)$. **D.** $S=[-3;5]$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \le 3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 < x+3 \\ 2x \le 3x+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x < 5 \longrightarrow S=[-3;5)$. **Chọn C.**

Câu 57. Biết rằng bất phương trình $\begin{cases} x-1 < 2x-3 \\ \dfrac{5-3x}{2} \le x-3 \\ 3x \le x+5 \end{cases}$ có tập nghiệm là một đoạn $[a;b]$. Hỏi $a+b$ bằng:

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{47}{10}$.

Lời giải. Bất phương trình $\begin{cases} x-1 < 2x-3 \\ 5-3x \le 2x-6 \\ 3x \le x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \\ 11 \le 5x \\ 2x \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \ge \dfrac{11}{5} \\ x \le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{11}{5} \le x \le \dfrac{5}{2}$.

Suy ra $a+b=\dfrac{11}{5}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{47}{10}$. **Chọn D.**

Câu 58. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7} > 4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x+25 \end{cases}$ là:

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 0.

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 42x+5 > 28x+49 \\ 8x+3 < 4x+50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x > 44 \\ 4x < 47 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{44}{14} \\ x < \dfrac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{44}{14} < x < \dfrac{47}{4} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x \in \{4;5;6;7;8;9;10;11\}$. **Chọn C.**

Câu 59. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$ bằng:

A. 21. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -x < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$. Suy ra tổng bằng 21. **Chọn A.**

Câu 60. Cho bất phương trình $\begin{cases}(1-x)^2 \le 8-4x+x^2\\(x+2)^3 < x^3+6x^2+13x+9\end{cases}$. Tổng nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải. Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}1-2x+x^2 \le 8-4x+x^2\\x^3+6x^2+12x+8 < x^3+6x^2+13x+9\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-2x \le 8-4x\\12x+8 < 13x+9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x \le 7\\-x < 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \le \dfrac{7}{2}\\x > -1\end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le \dfrac{7}{2} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x \in \{0;1;2;3\}.$

Suy ra tổng cần tính là $0+3=3$. **Chọn B.**

Câu 61. Hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-1>0\\x-m<2\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m < -\dfrac{3}{2}$. **B.** $m \le -\dfrac{3}{2}$. **C.** $m > -\dfrac{3}{2}$. **D.** $m \ge -\dfrac{3}{2}$.

Lời giải. Bất phương trình $2x-1>0$ có tập nghiệm $S_1 = \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $x-m<2$ có tập nghiệm $S_2 = (-\infty; m+2)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \ne \varnothing \Leftrightarrow m+2 > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{2}$. **Chọn C.**

Câu 62. Hệ bất phương trình $\begin{cases}3(x-6) < -3\\\dfrac{5x+m}{2} > 7\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > -11$. **B.** $m \ge -11$. **C.** $m < -11$. **D.** $m \le -11$.

Lời giải. Bất phương trình $3(x-6) < -3$ có tập nghiệm $S_1 = (-\infty;5)$.

Bất phương trình $\dfrac{5x+m}{2} > 7$ có tập nghiệm $S_2 = \left(\dfrac{14-m}{5};+\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \ne \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{14-m}{5} < 5 \Leftrightarrow m > -11$. **Chọn A.**

Câu 63. Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-1 \le 0\\x-m > 0\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \ne 1$.

Lời giải. Bất phương trình $x^2-1 \le 0$ có tập nghiệm $S_1 = [-1;1]$.

Bất phương trình $x-m>0$ có tập nghiệm $S_2 = (m;+\infty)$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \ne \varnothing \Leftrightarrow m < 1$. **Chọn C.**

Câu 64. Hệ bất phương trình $\begin{cases}x-2 \ge 0\\(m^2+1)x < 4\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$. **B.** $m < 1$. **C.** $m < -1$. **D.** $-1 < m < 1$.

Lời giải. Bất phương trình $x-2 \ge \Leftrightarrow x \ge 2$ có tập nghiệm $S_1 = [2;+\infty)$.

Bất phương trình $(m^2+1)x < 4 \Leftrightarrow x < \dfrac{4}{m^2+1}$ (do $m^2+1>0$).

Suy ra $S_2=\left(-\infty;\dfrac{4}{m^2+1}\right)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\neq\varnothing\longleftrightarrow\dfrac{4}{m^2+1}>2$

Giải bất phương trình $\dfrac{4}{m^2+1}>2\Leftrightarrow 4>2\left(m^2+1\right)\Leftrightarrow 2>2m^2\Leftrightarrow m^2<1\Leftrightarrow -1<m<1$.

Chọn D.

Câu 65. Hệ bất phương trình $\begin{cases} m(mx-1)<2 \\ m(mx-2)\geq 2m+1\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m<\dfrac{1}{3}$. **B.** $0\neq m<\dfrac{1}{3}$. **C.** $m\neq 0$. **D.** $m<0$.

Lời giải. Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x<m+2 \\ m^2x\geq 4m+1\end{cases}$.

• Với $m=0$, ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x<2 \\ 0x\geq 1\end{cases}$: hệ bất phương trình vô nghiệm.

• Với $m\neq 0$, ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x<\dfrac{m+2}{m^2} \\ x\geq\dfrac{4m+1}{m^2}\end{cases}$.

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{m+2}{m^2}>\dfrac{4m+1}{m^2}\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{3}$.

Vậy $0\neq m<\dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1\geq 3 \\ x-m\leq 0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m>2$. **B.** $m=2$. **C.** $m\leq 2$. **D.** $m\geq 2$.

Lời giải. Bất phương trình $2x-1\geq 3\leftrightarrow x\geq 2\longrightarrow S_1=[2;+\infty)$.

Bất phương trình $x-m\leq 0\leftrightarrow x\leq m\longrightarrow S_2=(-\infty;m]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1\cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow 2=m.$ **Chọn B.**

Câu 67. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} m^2x\geq 6-x \\ 3x-1\leq x+5\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\pm 1$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải. Bất phương trình $m^2x\geq 6-x\leftrightarrow\left(m^2+1\right)x\geq 6\leftrightarrow x\geq\dfrac{6}{m^2+1}$

$\longrightarrow S_1=\left[\dfrac{6}{m^2+1};+\infty\right)$.

Bất phương trình $3x-1\leq x+5\leftrightarrow x\leq 3\longrightarrow S_2=(-\infty;3]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow \dfrac{6}{m^2+1} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$. **Chọn C.**

Câu 68. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \ge x^2 + 7x + 1 \\ 2m \le 8 + 5x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \dfrac{72}{13}$. **B.** $m > \dfrac{72}{13}$. **C.** $m < \dfrac{72}{13}$. **D.** $m \ge \dfrac{72}{13}$.

Lời giải. Bất phương trình $(x-3)^2 \ge x^2 + 7x + 1 \leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \ge x^2 + 7x + 1 \leftrightarrow x \le \dfrac{8}{13}$

$\longrightarrow S_1 = \left(-\infty; \dfrac{8}{13}\right]$.

Bất phương trình $2m \le 8 + 5x \Leftrightarrow x \ge \dfrac{2m-8}{5} \longrightarrow S_2 = \left[\dfrac{2m-8}{5}; +\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow \dfrac{8}{13} = \dfrac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m = \dfrac{72}{13}$. **Chọn A.**

Câu 69. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} mx \le m - 3 \\ (m+3)x \ge m - 9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = 1$. **B.** $m = -2$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = -1$.

Lời giải. Giả sử hệ có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{m-3}{m} = \dfrac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m = 1$.

Thử lại với $m = 1$, hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} x \le -2 \\ x \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$.

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Câu 70. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2m(x+1) \ge x + 3 \\ 4mx + 3 \ge 4x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \dfrac{5}{2}$. **B.** $m = \dfrac{3}{4}$. **C.** $m = \dfrac{3}{4}$; $m = \dfrac{5}{2}$. **D.** $m = -1$.

Lời giải. Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} (2m-1)x \ge 3 - 2m \\ (4m-4)x \ge -3 \end{cases}$..

Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{3-2m}{2m-1} = \dfrac{-3}{4m-4}$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 26m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{4}$ hoặc $m = \dfrac{5}{2}$.

Thử lại

- Với $m = \dfrac{3}{4}$, hệ trở thành $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{2} - 1\right)x \ge 3 - \dfrac{3}{2} \\ -x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$: thỏa mãn.
- Với $m = \dfrac{5}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} 4x \ge -2 \\ 6x \ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{1}{2}$: không thỏa mãn.

Vậy $m=\dfrac{3}{4}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 71. Hệ bất phương trình $\begin{cases}3x+4>x+9\\1-2x\le m-3x+1\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>\dfrac{5}{2}$. **B.** $m\ge\dfrac{5}{2}$. **C.** $m<\dfrac{5}{2}$. **D.** $m\le\dfrac{5}{2}$.

Lời giải. Bất phương trình $3x+4>x+9\leftrightarrow 2x>5\leftrightarrow x>\dfrac{5}{2}\longrightarrow S_1=\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $1-2x\le m-3x+1\leftrightarrow x\le m\longrightarrow S_2=(-\infty;m]$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2=\varnothing\Leftrightarrow m\le\dfrac{5}{2}$. **Chọn D.**

Câu 72. Hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+7\ge 8x+1\\m+5<2x\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>-3$. **B.** $m\ge-3$. **C.** $m<-3$. **D.** $m\le-3$.

Lời giải. Bất phương trình $2x+7\ge 8x+1\leftrightarrow -6x\ge-6\leftrightarrow x\le 1\longrightarrow S_1=(-\infty;1]$.

Bất phương trình $m+5<2x\leftrightarrow x>\dfrac{m+5}{2}\longrightarrow S_2=\left(\dfrac{m+5}{2};+\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2=\varnothing\Leftrightarrow 1\le\dfrac{m+5}{2}\Leftrightarrow m\ge-3$. **Chọn B.**

Câu 73. Hệ bất phương trình $\begin{cases}(x-3)^2\ge x^2+7x+1\\2m\le 8+5x\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>\dfrac{72}{13}$. **B.** $m\ge\dfrac{72}{13}$. **C.** $m<\dfrac{72}{13}$. **D.** $m\le\dfrac{72}{13}$.

Lời giải. Bất phương trình $(x-3)^2\ge x^2+7x+1\leftrightarrow x^2-6x+9\ge x^2+7x+1$

$\leftrightarrow -6x+9\ge+7x+1\leftrightarrow 8\ge 13x\leftrightarrow x\le\dfrac{8}{13}\longrightarrow S_1=\left(-\infty;\dfrac{8}{13}\right]$.

Bất phương trình $2m\le 8+5x\leftrightarrow 2m-8\le 5x\leftrightarrow x\ge\dfrac{2m-8}{5}\longrightarrow S_2=\left[\dfrac{2m-8}{5};+\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2=\varnothing\Leftrightarrow\dfrac{8}{13}<\dfrac{2m-8}{5}\Leftrightarrow m>\dfrac{72}{13}$. **Chọn A.**

Câu 74. Hệ bất phương trình $\begin{cases}3x+5\ge x-1\\(x+2)^2\le(x-1)^2+9\\mx+1>(m-2)x+m\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>3$. **B.** $m\ge3$. **C.** $m<3$. **D.** $m\le3$.

Lời giải. Bất phương trình $3x+5\ge x-1\leftrightarrow 2x\ge-6\leftrightarrow x\ge-3\longrightarrow S_1=[-3;+\infty)$.

Bất phương trình $(x+2)^2\le(x-1)^2+9\leftrightarrow x^2+4x+4\le x^2-2x+1+9$

$\leftrightarrow 4x+4\le-2x+1+9\leftrightarrow 6x\le 6\leftrightarrow x\le 1\longrightarrow S_2=(-\infty;1]$.

Suy ra $S_1\cap S_2=[-3;1]$.

Bất phương trình $mx+1>(m-2)x+m\leftrightarrow mx+1>mx-2x+m$

$\leftrightarrow 1>-2x+m\leftrightarrow 2x>m-1\leftrightarrow x>\dfrac{m-1}{2}\longrightarrow S_3=\left(\dfrac{m-1}{2};+\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (S_1 \cap S_2) \cap S_3 = \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{m-1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 3$. **Chọn B.**

Câu 75. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2(x-3) < 5(x-4) \\ mx+1 \leq x-1 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \leq 1$.

Lời giải. Bất phương trình $2(x-3) < 5(x-4) \leftrightarrow x > \dfrac{14}{3} \longrightarrow S_1 = \left(\dfrac{14}{3}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $mx+1 \leq x-1 \leftrightarrow (m-1)x \leq -2$. $(*)$

- Với $m = 1$, khi đó $(*)$ trở thành $0x \leq -2$: vô nghiệm $\longrightarrow$ hệ vô nghiệm.

$\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m = 1$.

- Với $m > 1$, ta có $(*) \leftrightarrow x \leq \dfrac{-2}{m-1} \longrightarrow S_2 = \left(-\infty; \dfrac{-2}{m-1}\right]$

$\longrightarrow$ hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow\Leftrightarrow \dfrac{-2}{m-1} \leq \dfrac{14}{3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-6}{3(m-1)} \leq \dfrac{14(m-1)}{3(m-1)} \Leftrightarrow -6 \leq 14(m-1) \Leftrightarrow m \geq \dfrac{4}{7}$ (do với $m > 1 \rightarrow m-1 > 0$).

$\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m > 1$.

- Với $m < 1$, ta có $(*) \leftrightarrow x \geq \dfrac{-2}{m-1} \longrightarrow S_2 = \left[\dfrac{-2}{m-1}; +\infty\right)$.

Khi đó $S_1 \cap S_2$ luôn luôn khác rỗng nên $m < 1$ không thỏa mãn.

Vậy $m \geq 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm. **Chọn B.**

○ Bài 03

DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x)=ax+b$ trong đó a,b là hai số đã cho, $a\neq 0$.

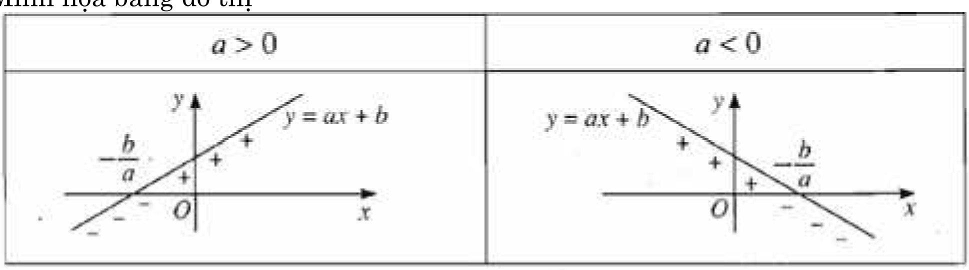
2. Dấu của nhị thức bậc nhất

Định lí

Nhị thức $f(x)=ax+b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy giá trị trong khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)=ax+b$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Minh họa bằng đồ thị



II – XÉT DẤU TÍCH, THƯƠNG CÁC NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong $f(x)$ ta suy ra được dấu của $f(x)$. Trường hợp $f(x)$ là một thương cũng được xét tương tự.

III – ÁP DỤNG VÀO GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Giải bất phương trình $f(x)>0$ thực chất là xét xem biểu thức $f(x)$ nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết $f(x)$ nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã xét dấu biểu thức $f(x)$.

1. Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ. Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x}\geq 1$.

Giải. Ta biến đổi tương đương bất phương trình đã cho

$$\frac{1}{1-x}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}\geq 0$$

Xét dấu biểu thức $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$ ta suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $0\le x<1$.

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ. Giải bất phương trình $|-2x+1|+x-3<5$.

Giải. Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có

$$|-2x+1|=\begin{cases}-2x+1 & \text{neu } -2x+1\ge 0\\ -(-2x+1) & \text{neu } -2x+1<0.\end{cases}$$

Do đó, ta xét phương trình trong hai khoảng

a) Với $x\le\dfrac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình $\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\(-2x+1)+x-3<5\end{cases}$ hay $\begin{cases}x\le\dfrac{1}{2}\\-x<7\end{cases}$.

Hệ này có nghiệm là $-7<x\le\dfrac{1}{2}$.

b) Với $x>\dfrac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình $\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\(2x-1)+x-3<5\end{cases}$ hay $\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\x<3\end{cases}$.

Hệ này có nghiệm là $\dfrac{1}{2}<x<3$.

Tổng hợp lại tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của hai khoảng $\left(-7;\dfrac{1}{2}\right]$ và $\left(\dfrac{1}{2};3\right)$.

Kết luận. Bất phương trình đã cho có nghiệm là $-7<x<3$.

Bằng cách áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình dạng $|f(x)|\le a$ và $|f(x)|\ge a$ với $a>0$ đã cho.

Ta có

$$\begin{array}{l}|f(x)|\le a\Leftrightarrow -a\le f(x)\le a\\ |f(x)|\ge a\Leftrightarrow f(x)\le -a \text{ hoặc } f(x)\ge a\end{array}\qquad (a>0)$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. XÉT DẤU NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Câu 1. Cho biểu thức $f(x)=2x-4$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x)\ge 0$ là

A. $x\in[2;+\infty)$. **B.** $x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $x\in(-\infty;2]$. **D.** $x\in(2;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $f(x)\ge 0\Leftrightarrow 2x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2\Leftrightarrow x\in[2;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 2. Cho biểu thức $f(x)=(x+5)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\le 0$ là

A. $x\in(-\infty;5)\cup(3;+\infty)$. **B.** $x\in(3;+\infty)$.

C. $x\in(-5;3)$. **D.** $x\in(-\infty;-5]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow(x+5)(3-x)=0$.

Phương trình $x+5=0\Leftrightarrow x=-5$ và $3-x=0\Leftrightarrow x=3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[3;+\infty)$. **Chọn D.**

Câu 3. Cho biểu thức $f(x)=x(x-2)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)<0$ là

A. $x\in(0;2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

C. $x\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$. **D.** $x\in(-\infty;0)\cup(2;3)$.

Lời giải. Ta có $x=0$; $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $3-x=0\Leftrightarrow x=3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(0;2)\cup(3;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 4. Cho biểu thức $f(x)=9x^2-1$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x)<0$ là

A. $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$. **B.** $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow 9x^2-1=0\Leftrightarrow(3x-1)(3x+1)=0$.

Phương trình $3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ và $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **Chọn D.**

Câu 5. Cho biểu thức $f(x)=(2x-1)(x^3-1)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\ge 0$ là

A. $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

B. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$.

D. $x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Lời giải. Ta có $(2x-1)\left(x^3-1\right)=0\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0$.

Phương trình $2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$; $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ và $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 6. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x)\leq 0$ là

A. $x\in(-\infty;2]$.

B. $x\in(-\infty;2)$.

C. $x\in(2;+\infty)$.

D. $x\in[2;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $f(x)\leq 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{3x-1}\leq 0\Leftrightarrow 3x-6<0\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty;2)$. **Chọn A.**

Câu 7. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{(x+3)(2-x)}{x-1}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)>0$ là

A. $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

B. $x\in(-3;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $x\in(-3;1)\cup(1;2)$.

D. $x\in(-\infty;-3)\cup(1;2)$.

Lời giải. Phương trình $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$; $2-x=0\Leftrightarrow x=2$ và $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(1;2)$. **Chọn D.**

Câu 8. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{(4x-8)(2+x)}{4-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$ là

A. $x\in(-\infty;-2]\cup[2;4)$.

B. $x\in(3;+\infty)$.

C. $x\in(-2;4)$.

D. $x\in(-2;2)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải. Phương trình $4x-8=0\Leftrightarrow x=2$; $2+x=0\Leftrightarrow x=-2$ và $4-x=0\Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$4x-8$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in x\in(-\infty;-2]\cup[2;4)$. **Chọn A.**

Câu 9. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{(x-5)(1-x)}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$ là

A. $x\in(-\infty;0]\cup(3;+\infty)$.

B. $x\in(-\infty;0]\cup(1;5)$.

C. $x\in[0;1)\cup[3;5)$.

D. $x\in(-\infty;0)\cup(1;5)$.

Lời giải. Phương trình $x=0$; $x-3=0\Leftrightarrow x=3$; $x-5=0\Leftrightarrow x=5$ và $1-x=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	||	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	||	$-$	|	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in[0;1)\cup[3;5)$. **Chọn C.**

Câu 10. Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\leq 0$ là

A. $x\in(0;3]\cup(4;+\infty)$.

B. $x\in(-\infty;0]\cup[3;4)$.

C. $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$.

D. $x\in(-\infty;0)\cup(3;4)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x}=\dfrac{4x-12}{x(x-4)}$.

Phương trình $4x-12=0\Leftrightarrow x=3$; $x=0$ và $x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x)\leq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$. **Chọn C.**

Câu 11. Cho biểu thức $f\left(x\right)=\dfrac{2-x}{x+1}+2$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f\left(x\right)<0$ là

A. $x\in\left(-\infty;-1\right)$.

B. $x\in\left(-1;+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-4;-1\right)$.

D. $x\in\left(-\infty;-4\right)\cup\left(-1;+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{2-x}{x+1}+2=\dfrac{2-x+2\left(x+1\right)}{x+1}=\dfrac{x+4}{x+1}$.

Phương trình $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-4;-1\right)$. **Chọn C.**

Câu 12. Cho biểu thức $f\left(x\right)=1-\dfrac{2-x}{3x-2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f\left(x\right)\leq 0$ là

A. $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

B. $x\in\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

C. $x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right]$.

D. $x\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=1-\dfrac{2-x}{3x-2}=\dfrac{3x-2-2+x}{3x-2}=\dfrac{4x-4}{3x-2}$.

Phương trình $4x-4=0\Leftrightarrow x=1$ và $3x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f\left(x\right)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f\left(x\right)\leq 0\Leftrightarrow x\in\left(\dfrac{2}{3};1\right]$. **Chọn C.**

Câu 13. Cho biểu thức $f\left(x\right)=\dfrac{-4}{3x+1}-\dfrac{3}{2-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f\left(x\right)>0$ là

A. $x\in\left(-\dfrac{11}{5};-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[2;+\infty\right)$.

B. $x\in\left(-\dfrac{11}{5};-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{11}{5}\right]\cup\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$.

D. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{11}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=-\dfrac{4}{3x+1}-\dfrac{3}{2-x}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{3x+1}=\dfrac{5x+11}{\left(x-2\right)\left(3x+1\right)}$.

Phương trình $5x+11=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{11}{5}$; $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{11}{5}$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$5x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f\left(x\right)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{11}{5};-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **Chọn B.**

Câu 14. Cho biểu thức $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{3}{x+3}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f\left(x\right)<0$ là

A. $x\in\left(-12;-4\right)\cup\left(-3;0\right)$.

B. $x\in\left(-\dfrac{11}{5};-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{11}{5}\right]\cup\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$.

D. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{11}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3};2\right)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{3}{x+3}<0\Leftrightarrow\dfrac{x+12}{x\left(x+3\right)\left(x+4\right)}<0$.

Phương trình $x+12=0\Leftrightarrow x=-12$; $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ và $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-12		-4		-3		0		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f\left(x\right)$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-12;-4\right)\cup\left(-3;0\right)$. **Chọn A.**

Câu 15. Cho biểu thức $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}{x^2-1}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của x thỏa mãn bất phương trình $f\left(x\right)<1$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $1-f\left(x\right)=1-\dfrac{\left(x-3\right)\left(x+2\right)}{x^2-1}=1-\dfrac{x^2-x-6}{x^2-1}=\dfrac{x+5}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}$.

Phương trình $x+5=0\Leftrightarrow x=-5$; $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	

$x-1$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$1-f(x)$	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $1-f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-5;-1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Vấn đề 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $(2x+8)(1-x)>0$ có dạng $(a;b)$. Khi đó $b-a$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** không giới hạn.

Lời giải. Đặt $f(x)=(2x+8)(1-x)$

Phương trình $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

y x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$2x+8$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)>0 \Leftrightarrow -4<x<1 \Leftrightarrow x\in(-4;1)$.

Khi đó $b=1,\ a=-4 \Rightarrow b-a=5$. **Chọn B.**

Câu 17. Tập nghiệm $S=(-4;5)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

A. $(x+4)(x+5)<0$. **B.** $(x+4)(5x-25)<0$.

C. $(x+4)(5x-25)\ge 0$. **D.** $(x-4)(x-5)<0$.

Lời giải. Phương trình $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.

Phương trình $x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ và $5x-25=0 \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-4		4		5		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+4)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$(x+4)(x-5)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-4)(x-5)$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S=(-4;5)$ là nghiệm của bất phương trình $(x+4)(5x-25)<0$. **Chọn B.**

Câu 18. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $(x+3)(x-1)\le 0$ là

A. 1. **B.** -4. **C.** -5. **D.** 4.

Lời giải. Đặt $f(x)=(x+3)(x-1)$

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $(x+3)(x-1)\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[-3;1]$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-3,-2,-1,0,1$.

Suy ra tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng -5. **Chọn C.**

Câu 19. Tập nghiệm $S=[0;5]$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

A. $x(x-5)<0$. **B.** $x(x-5)\le 0$. **C.** $x(x-5)\ge 0$. **D.** $x(x-5)>0$.

Lời giải. Đặt $f(x)=x(x-5)$. Phương trình $x=0$ và $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $x\in[0;5] \Leftrightarrow f(x)\le 0 \Leftrightarrow x(x-5)\le 0$. **Chọn B.**

Câu 20. Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $x(x-2)(x+1)>0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Đặt $f(x)=x(x-2)(x+1)$.

Phương trình $x=0$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là 3. **Chọn B.**

Câu 21. Tập nghiệm $S=(-\infty;3)\cup(5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

A. $(x+3)(x-5)(14-2x)\le 0$. **B.** $(x-3)(x-5)(14-2x)>0$.

C. $(x-3)(x-5)(14-2x)<0$. **D.** $(x+3)(x-5)(14-2x)<0$.

Lời giải. Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Và $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$; $14-2x=0 \Leftrightarrow x=7$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	3	5	7	$+$

$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-5$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$14-2x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$(x+3)(x-5)(14-2x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$(x-3)(x-5)(14-2x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S=(-\infty;3)\cup(5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình $(x-3)(x-5)(14-2x)>0$. **Chọn B.**

Câu 22. Hỏi bất phương trình $(2-x)(x+1)(3-x)\le 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên dương ?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải. Đặt $f(x)=(2-x)(x+1)(3-x)$

Phương trình $2-x=0\Leftrightarrow x=2$; $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $3-x=0\Leftrightarrow x=3$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;3]$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên dương. **Chọn D.**

Câu 23. Tích của nghiệm nguyên âm lớn nhất và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1)>0$ là

A. -9. **B.** -6. **C.** -4. **D.** 8.

Lời giải. Bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1)>0\Leftrightarrow 3(x-2)^2(x+2)(x-1)>0$

Vì $(x-2)^2>0,\forall x\neq 2$ nên bất phương trình trở thành $\begin{cases}x\neq 2\\(x+2)(x-1)>0\end{cases}$.

Đặt $f(x)=(x+2)(x-1)$. Phương trình $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$ và $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Kết hợp với điều kiện $x\neq 2$, ta được $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Do đó, nghiệm nguyên âm lớn nhất của bất phương trình là -3 và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình là 3. Vậy tích cần tính là $(-3).3=-9$. **Chọn A.**

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $2x(4-x)(3-x)(3+x)>0$ là

A. Một khoảng **B.** Hợp của hai khoảng.

C. Hợp của ba khoảng. **D.** Toàn trục số.

Lời giải. Đặt $f(x)=2x(4-x)(3-x)(3+x)$.

Phương trình $2x=0 \Leftrightarrow x=0$; $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$;

Và $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$; $3+x=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		0		3		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3-x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 0<x<3 \\ x<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3)\cup(0;3)\cup(4;+\infty)$.

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là hợp của ba khoảng. **Chọn C.**

Câu 25. Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải. Bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $f(x)=x(x+2)$. Phương trình $x=0$ và $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq -2 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$, ta được tập nghiệm $S=[1;+\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là $x=1$. **Chọn C.**

Vấn đề 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Câu 26. Bất phương trình $\dfrac{2-x}{2x+1} \geq 0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$. **B.** $S=\left[-\dfrac{1}{2};2\right]$. **C.** $S=\left(-\dfrac{1}{2};2\right]$. **D.** $S=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

Lời giải. Đặt $f(x)=\dfrac{2-x}{2x+1}$. Ta có $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\dfrac{1}{2}$	2	$+\infty$

$2-x$	$+$	|	$+$	0	$-$
$2x+1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$f(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x\leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{1}{2};2\right]$. **Chọn C.**

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(3-x)(x-2)}{x+1}\leq 0$ là

A. $S=(-1;2]\cup[3;+\infty)$.
B. $S=(-\infty;1)\cup[2;3]$.
C. $S=[-1;2]\cup[3;+\infty)$.
D. $S=(-1;2)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải. Đặt $f(x)=\frac{(3-x)(x-2)}{x+1}$. Ta có $\begin{cases}3-x=0\Leftrightarrow x=3\\ x-2=0\Leftrightarrow x=2\end{cases}$; $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x\leq 2\\ x\geq 3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;2]\cup[3;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 28. Bất phương trình $\frac{3}{2-x}<1$ có tập nghiệm là

A. $S=(-1;2)$.
B. $S=[-1;2)$.
C. $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.
D. $S=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải. Bất phương trình $\frac{3}{2-x}<1\Leftrightarrow\frac{3}{2-x}-1<0\Leftrightarrow\frac{x+1}{2-x}<0$.

Đặt $f(x)=\frac{x+1}{2-x}$. Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $2-x=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 29.Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x-3}{x^2-4}\geq 1$ là

A. $S=(-\infty;-2)\cup(-1;2)$. **B.** $S=(-2;1]\cup(2;+\infty)$.

C. $S=[-2;1)\cup(2;+\infty)$ **D.** $S=(-2;1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải. Bất phương trình $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}\ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}-1\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}\ge 0$.

Đặt $f(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)}$. Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x\le -1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;-1]\cup(2;+\infty)$. Chọn B.

Câu 30. Bất phương trình $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}<0$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-3)\cup(-1;1)$.

C. $S=(-3;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $S=(-3;1)\cup(-1;+\infty)$.

Lời giải. Bất phương trình $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}<0\Leftrightarrow \dfrac{2x+6}{(x-1)(x+1)}<0$.

Đặt $f(x)=\dfrac{2x+6}{(x-1)(x+1)}$. Ta có $2x+6=0\Leftrightarrow x=-3$ và $(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ -1<x<1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-3)\cup(-1;1)$. **Chọn B.**

Câu 31. Bất phương trình $\dfrac{3}{1-x}\ge\dfrac{5}{2x+1}$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2}{11};1\right)$. **B.** $S=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{11}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{2}{11};1\right)$. **D.** $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{2}{11};1\right)$.

Lời giải. Bất phương trình $\dfrac{3}{1-x}\ge\dfrac{5}{2x+1}\Leftrightarrow\dfrac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}\ge 0$.

Đặt $f(x)=\dfrac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}$. Ta có $11x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{11}$; $\begin{cases}1-x=0 \Leftrightarrow x=1\\ 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{11}$		1		$+\infty$
$11x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{2}{11}\leq x<1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2}{11};1\right)$. **Chọn A.**

Câu 32. Bất phương trình $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\leq 2$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-1;\dfrac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$.

B. $S=(-\infty;-1]\cup(1;+\infty)$.

C. $S=\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

D. $S=(-\infty;-1]\cup\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Lời giải. Bất phương trình $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-3x}{(x-1)(x+1)}\leq 0$.

Đặt $f(x)=\dfrac{1-3x}{(x-1)(x+1)}$. Ta có $1-3x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$; $\begin{cases}x-1=0 \Leftrightarrow x=1\\ x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$1-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x\leq\dfrac{1}{3}.\\ x>1\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-1;\dfrac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 33. Bất phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+4}<\dfrac{3}{x+3}$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;-12)\cup(-4;3)\cup(0;+\infty)$.

B. $S=[-12;-4)\cup(-3;0)$.

C. $S=(-\infty;-12)\cup[-4;3]\cup(0;+\infty)$.

D. $S=(-12;-4)\cup(-3;0)$.

Lời giải. Bất phương trình $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x+4}<\dfrac{3}{x+3}\Leftrightarrow \dfrac{x+12}{x(x+3)(x+4)}<0.$

Đặt $f(x)=\dfrac{x+12}{x(x+3)(x+4)}$. Ta có $x+12=0\Leftrightarrow x=-12;$ $\begin{cases}x+3=0\Leftrightarrow x=-3\\ x+4=0\Leftrightarrow x=-4\end{cases}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-12		-4		-3		0		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-12<x<-4\\ -3<x<0\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-12;-4)\cup(-3;0)$. **Chọn D.**

Câu 34. Bất phương trình $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{(x-1)^2}$ có tập nghiệm S là

A. $T=(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup[1;3].$ **B.** $T=[-1;0)\cup(-3;+\infty).$

C. $T=(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;3).$ **D.** $T=(-1;0]\cup(-3;+\infty).$

Lời giải. Bất phương trình $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0.$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2-(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}<0\Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}<0\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ \dfrac{x(x-3)}{x+1}<0\end{cases} \text{ (vì } (x-1)^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\text{).}$$

Đặt $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{x+1}$. Ta có $x-3=0\Leftrightarrow x=3$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-1\\ 0<x<3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x\neq 1$, ta được tập nghiệm $S=(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;3)$. **Chọn C.**

Câu 35. Bất phương trình $\dfrac{x+4}{x^2-9}-\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{4x}{3x-x^2}$ có nghiệm nguyên lớn nhất là

A. $x=2.$ **B.** $x=1.$ **C.** $x=-2.$ **D.** $x=-1.$

Lời giải. Bất phương trình tương đương với

$$\frac{x(x+4)}{x(x-3)(x+3)}-\frac{2x(x-3)}{x(x-3)(x+3)}<-\frac{4x(x+3)}{x(x-3)(x+3)}\Leftrightarrow\frac{3x+22}{(x-3)(x+3)}<0.$$

Đặt $f(x)=\frac{3x+22}{(x-3)(x+3)}$. Ta có $3x+22=0\Leftrightarrow x=-\frac{22}{3}$; $\begin{cases}x-3=0\Leftrightarrow x=3\\x+3=0\Leftrightarrow x=-3\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{22}{3}$		-3		3		$+\infty$
$3x+22$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$x-3$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{22}{3}\right)\cup(-3;3)$.

Vậy nghiệm nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình là $x=2$. **Chọn A.**

Vấn đề 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Câu 36. Tất cả các giá trị của x thoả mãn $|x-1|<1$ là

A. $-2<x<2$. **B.** $0<x<1$. **C.** $x<2$. **D.** $0<x<2$.

Lời giải. Ta có $|x-1|<1\Leftrightarrow -1<x-1<1\Leftrightarrow 0<x<2$. **Chọn D.**

Câu 37. Nghiệm của bất phương trình $|2x-3|\le 1$ là

A. $1\le x\le 3$. **B.** $-1\le x\le 1$. **C.** $1\le x\le 2$. **D.** $-1\le x\le 2$.

Lời giải. Ta có $|2x-3|\le 1\Leftrightarrow -1\le 2x-3\le 1\Leftrightarrow 2\le 2x\le 4\Leftrightarrow 1\le x\le 2$. **Chọn C.**

Câu 38. Bất phương trình $|3x-4|\le 2$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty)$.

B. $\left[\frac{2}{3};2\right]$.

C. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$.

D. $[2;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $|3x-4|\le 2\Leftrightarrow -2\le 3x-4\ge 2\Leftrightarrow 2\le 3x\le 6\Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x\le 2$. **Chọn B.**

Câu 39. Bất phương trình $|1-3x|>2$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

B. $(1;+\infty)$.

C. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải. Ta có $|1-3x|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-3x>2\\1-3x<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1>3x\\3x>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\frac{1}{3}\\x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 40. Tập nghiệm của bất phương trình $|x-3|>-1$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-3;3)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải. Vì $|x-3|\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên suy ra $|x-3|>-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $|5x-4|\ge 6$ có dạng $S=(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính tổng $P=5a+b$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải. Cách 1. Bất phương trình $|5x-4|\ge 6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x-4\ge 6\\5x-4\le -6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x\ge 10\\5x\le -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le -\frac{2}{5}\end{array}\right..$

Cách 2. TH1. Với $5x-4\ge 0$, bất phương trình $|5x-4|\ge 6\Leftrightarrow 5x-4\ge 6\Leftrightarrow x\ge 2$.

TH2. Với $5x-4<0$, bất phương trình $|5x-4|\ge 6\Leftrightarrow -5x+4\ge 6\Leftrightarrow 5x\le -2\Leftrightarrow x\le -\frac{2}{5}$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup[2;+\infty)$.

Mặt khác $S=(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$ suy ra $\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=2\end{cases}\Rightarrow 5a+b=5.\left(-\frac{2}{5}\right)+2=0$. **Chọn C.**

Câu 42. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right|\ge 2$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải. Điều kiện: $x+1\ne 0\Leftrightarrow x\ne -1$.

Bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right|\ge 2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2-x}{x+1}\ge 2\\\frac{2-x}{x+1}\le -2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2-x}{x+1}-2\ge 0\\\frac{2-x}{x+1}+2\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}-\frac{3x}{x+1}\ge 0 & (1)\\\frac{4+x}{x+1}\le 0 & (2)\end{array}\right.$

Giải (1), ta có bất phương trình $(1)\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}\le 0\Leftrightarrow -1<x\le 0$.

Giải (2), ta có bất phương trình $(2)\Leftrightarrow -4\le x<-1$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;-1)\cup(-1;0]$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên x cần tìm là $x=\{-4;-3;-2;0\}$. **Chọn B.**

Câu 43. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $1\le|x-2|\le 4$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải. Bất phương trình $1\le|x-2|\le 4\Leftrightarrow\begin{cases}|x-2|\le 4\\|x-2|\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le x-2\le 4\\\left[\begin{array}{l}x-2\ge 1\\x-2\le -1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 6\\\left[\begin{array}{l}x\ge 3\\x\le 1\end{array}\right.\end{cases}$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;1]\cup[3;6]$.

Vậy số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình là 8. **Chọn D.**

Câu 44. Bất phương trình : $|3x-3|\le|2x+1|$ có nghiệm là

A. $[4;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$. **C.** $\left[\frac{2}{5};4\right]$. **D.** $(-\infty;4]$.

Lời giải. Ta có $|3x-3|\le|2x+1|\Leftrightarrow|3x-3|^2\le|2x+1|^2\Leftrightarrow(3x-3)^2-(2x+1)^2\le 0$

$\Leftrightarrow(3x-3-2x-1)(3x-3+2x+1)\le 0\Leftrightarrow(x-4)(5x-2)\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le x\le 4.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{2}{5};4\right]$. **Chọn C.**

Câu 45. Bất phương trình $|x-3|>|2x+4|$ có nghiệm là

A. $\left(-7;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(7;-\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-7;-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-\infty;-7)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $|x-3|>|2x+4|\Leftrightarrow|x-3|^2>|2x+4|^2\Leftrightarrow(x-3)^2-(2x+4)^2>0$

$\Leftrightarrow(x-3-2x-4)(x-3+2x+4)>0\Leftrightarrow(-x-7)(3x+1)>0\Leftrightarrow-7<x<-\frac{1}{3}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-7;-\frac{1}{3}\right)$. **Chọn C.**

Câu 46. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x trong $[-2017;2017]$ thỏa mãn bất phương trình $|2x+1|<3x$?

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 4032. **D.** 4034.

Lời giải. TH1. Với $2x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2}$, khi đó $|2x+1|<3x\Leftrightarrow 2x+1<3x\Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp với điều kiện $x\ge-\frac{1}{2}$ suy ra $S_1=(1;+\infty)$.

TH2. Với $2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$, khi đó $|2x+1|<3x\Leftrightarrow-2x-1<3x\Leftrightarrow x>-\frac{1}{5}$.

Kết hợp với điều kiện $x<-\frac{1}{2}$ suy ra $S_2=\varnothing$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=(1;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 47. Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $x+12\ge|2x-4|$ là

A. 5. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 16.

Lời giải. TH1. Với $2x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$, ta có $x+12\ge|2x-4|\Leftrightarrow x+12\ge 2x-4\Leftrightarrow x\le 16$.

Kết hợp với điều kiện $x\ge 2$, ta được tập nghiệm $S_1=[2;16]$.

TH2. Với $2x-4<0\Leftrightarrow x<2$, ta có $x+12\ge-2x+4\Leftrightarrow 3x\ge-8\Leftrightarrow x\ge-\frac{8}{3}$.

Kết hợp với điều kiện $x<2$, ta được tập nghiệm $S_2=\left[-\frac{8}{3};2\right)$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=\left[-\frac{8}{3};16\right]$.

Vậy số nghiệm nguyên x thỏa mãn bất phương trình là 19. **Chọn B.**

Câu 48. Bất phương trình $|3x-4|\ge x-3$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty;\frac{7}{4}\right]$. **B.** $\left[\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right]$. **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có $|3x-4|\ge x-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-4\ge x-3\\3x-4\le-(x-3)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x\ge1\\4x\le7\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{1}{2}\\x\le\frac{7}{4}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right]$. **Chọn B.**

Câu 49. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x-1|}{x+2}<1$ là

A. $S=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **D.** $S=\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải. Điều kiện: $x+2\ne0\Leftrightarrow x\ne-2$.

TH1. Với $x-1\ge0\Leftrightarrow x\ge1,$ ta có $\frac{|x-1|}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{3}{x+2}>0\Leftrightarrow x>-2.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge1,$ ta được tập nghiệm $S_1=(1;+\infty)$.

TH2. Với $x-1<0\Leftrightarrow x<1,$ ta có $\frac{|x-1|}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{1-x}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x+2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>-\frac{1}{2}\\x<-2\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x<1,$ ta được tập nghiệm là $S_2=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **Chọn B.**

Câu 50. Nghiệm của bất phương trình $\frac{|x+2|-x}{x}\le2$ là

A. $(0;1]$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

C. $(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$. **D.** $[0;1]$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ne0$.

TH1. Với $x+2\ge0\Leftrightarrow x\ge-2,$ ta có $\frac{|x+2|-x}{x}\le2\Leftrightarrow\frac{x+2-x}{x}\le2\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}\le0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge1\\x<0\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x\ge-2,$ ta được tập nghiệm $S_1=(-2;0)\cup[1;+\infty)$.

TH2. Với $x+2<0\Leftrightarrow x<-2,$ ta có $\frac{|x+2|-x}{x}\le2\Leftrightarrow\frac{-x-2-x}{x}\le2\Leftrightarrow-\frac{2x+2}{x}\le2$

$$\Leftrightarrow-\frac{x+1}{x}\le1\Leftrightarrow\Leftrightarrow1+\frac{x+1}{x}\ge0\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x}\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>0\\x\le-\frac{1}{2}\end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện $x<-2,$ ta được tập nghiệm là $S_2=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 52. Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $|x+2|+|-2x+1|\le x+1$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải. Xét bất phương trình $|x+2|+|-2x+1|\le x+1$ $(*)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-2x+1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	

TH1. Với $x<-2,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow(-x-2)+(-2x+1)\le x+1\Leftrightarrow -2\le 4x\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x<-2,$ ta được tập nghiệm $S_1=\varnothing.$

TH2. Với $-2\le x<-\frac{1}{2},$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+2-2x+1\le x+1\Leftrightarrow 2x\ge 2\Leftrightarrow x\ge 1.$

Kết hợp với điều kiện $-2\le x<\frac{1}{2},$ ta được tập nghiệm $S_2=\varnothing.$

TH3. Với $x\ge\frac{1}{2},$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+2-(-2x+1)\le x+1\Leftrightarrow 2x\le 0\Leftrightarrow x\le 0.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge\frac{1}{2},$ ta được tập nghiệm $S_3=\varnothing.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\varnothing.$ **Chọn D.**

Câu 52. Bất phương trình $|x+2|-|x-1|<x-\frac{3}{2}$ có tập nghiệm là

A. $(-2;+\infty).$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right).$ **C.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right).$ **D.** $\left(\frac{9}{2};+\infty\right).$

Lời giải. Xét bất phương trình $|x+2|-|x-1|\le x-\frac{3}{2}$ $(*)$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	

TH1. Với $x<-2,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -x-2+x-1<x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x<-2,$ ta được tập nghiệm $S_1=\varnothing.$

TH2. Với $-2\le x<1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+2+x-1<x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x<-\frac{5}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $-2\le x<1,$ ta được tập nghiệm $S_2=\varnothing.$

TH3. Với $x\ge 1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+2-x+1<x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x>\frac{9}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 1,$ ta được tập nghiệm $S_3=\left(\frac{9}{2};+\infty\right).$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left(\frac{9}{2};+\infty\right).$ **Chọn D.**

Câu 53. Tập nghiệm của bất phương trình $|x+1|-|x-2|\ge 3$ là

A. $[-1;2].$ **B.** $[2;+\infty).$ **C.** $(-\infty;-1).$ **D.** $(-2;1).$

Lời giải. Xét bất phương trình $|x+1|-|x-2|\ge 3 \qquad (*)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	

TH1. Với $x<-1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -x-1+x-2\ge 3\Leftrightarrow -3\ge 3$ (vô lý) suy ra $S_1=\varnothing.$

TH2. Với $-1\le x<2,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+1+x-2\ge 3\Leftrightarrow 2x\ge 4\Leftrightarrow x\ge 2.$

Kết hợp với điều kiện $-1\le x<2,$ ta được tập nghiệm $S_2=\varnothing.$

TH3. Với $x\ge 2,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+1-x+2\ge 3\Leftrightarrow 3\ge 3$ (luôn đúng).

Kết hợp với điều kiện $x\ge 2,$ ta được tập nghiệm $S_3=[2;+\infty).$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2\cup S_3=[2;+\infty).$ **Chọn B.**

Câu 54. Tập nghiệm của bất phương trình $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right|<\left|\dfrac{10}{x-1}\right|$ là

A. một khoảng. **B.** hai khoảng. **C.** ba khoảng. **D.** toàn trục số.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\ne -2\\ x\ne 1\end{cases}.$

Bất phương trình $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right|<\left|\dfrac{10}{x-1}\right|\Leftrightarrow \dfrac{1}{|x+2|}<\dfrac{2}{|x-1|}\Leftrightarrow |x-1|-2|x+2|<0 \qquad (*).$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	

TH1. Với $x<-2,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -x+1+2(x+2)<0\Leftrightarrow x<-5.$

Kết hợp với điều kiện $x<-2,$ ta được tập nghiệm $S_1=(-\infty;-5).$

TH2. Với $-2<x<1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -x+1-2(x+2)<0\Leftrightarrow 3x>-3\Leftrightarrow x>-1.$

Kết hợp với điều kiện $-2<x<1,$ ta được tập nghiệm $S_2=(-1;1).$

TH3. Với $x>1$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x-1-2(x+2)<0\Leftrightarrow x>-5.$

Kết hợp với điều kiện $x>1,$ ta được tập nghiệm $S_3=(1;+\infty).$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=S_1\cup S_2\cup S_3=(-\infty;-5)\cup(-1;1)\cup(-1;+\infty).$

Chọn C.

Câu 55. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right|\le 1$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải. Điều kiện: $x+1\ne 0\Leftrightarrow x\ne -1.$

TH1. Với $x\ge 0,$ ta có $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right|\le 1\Leftrightarrow \left|\dfrac{2-3x}{x+1}\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le \dfrac{2-3x}{x+1}\le 1\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{3}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0,$ ta được tập nghiệm $S_1=\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{2}\right].$

TH2. Với $x<0,$ ta có $\left|\frac{2-3|x|}{1+x}\right|\le 1\Leftrightarrow\left|\frac{2+3x}{x+1}\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le\frac{2+3x}{x+1}\le 1\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le x\le -\frac{1}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x<0,$ ta được tập nghiệm $S_2=\left[-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right].$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=\left[\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]\cup\left[-\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right].$

Vậy số nghiệm nguyên x cần tìm là 1 $(x=1).$ **Chọn A.**

❍ Bài 04

BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \le c \qquad (1)$$

$$(ax + by < c;\ ax + by \ge c;\ ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

II – BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \le c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax + by \ge c$)

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc tọa độ O)

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c.

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \le c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \le c$.

Chú ý

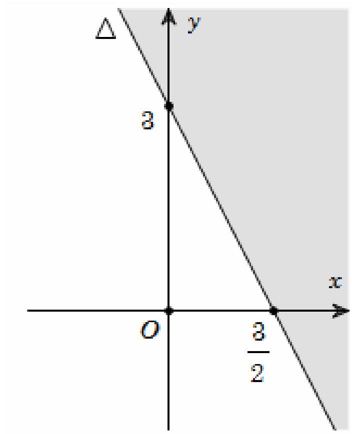
Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 \le c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0 + by_0 < c$.

Ví dụ. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $2x + y \le 3$

Giải

Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x+y=3$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$, ta thấy $O \notin \Delta$ và có $2.0+0<3$ nên nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền không bị tô đậm trong hình bên).



III – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó là được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y\le 6 \\ x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

Giải. Vẽ các đường thẳng

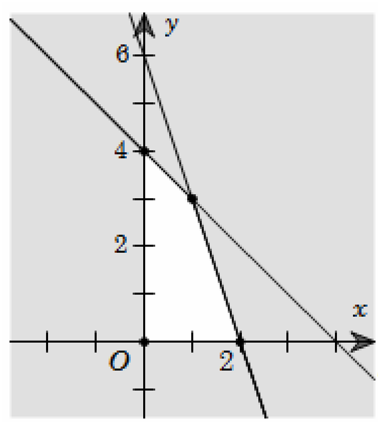
$d_1: 3x+y=6$

$d_2: x+y=4$

$d_2: x=0 \quad (Oy)$

$d_2: y=0 \quad (Ox)$

Vì điểm $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) không chứa điểm M_0. Miền không bị tô đậm (hình tứ giác $OCIA$ kể cả bốn cạnh AI, IC, CO, OA) trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho.



IV – ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ

Giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Loại bài toán này được nghiên cứu trong một ngành toán học có tên gọi là Quy hoạch tuyến tính.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $2x^2+3y>0$. **B.** $x^2+y^2<2$. **C.** $x+y^2\geq 0$. **D.** $x+y\geq 0$.

Lời giải. Theo định nghĩa thì $x+y\geq 0$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Các bất phương trình còn lại là bất phương trình bậc hai. **Chọn D.**

Câu 2. Cho bất phương trình $2x+3y-6\leq 0$ (1) .Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.

B. Bất phương trình (1) vô nghiệm.

C. Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

D. Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải. Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng $(d): 2x+3y-6=0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn điểm $O(0;0)$ không thuộc đường thẳng đó. Ta thấy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (d) chứa điểm $O(0;0)$ kể cả (d).

Vậy bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm. **Chọn C.**

Câu 3. Miền nghiệm của bất phương trình: $3x+2(y+3)>4(x+1)-y+3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(3;0)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(2;1)$. **D.** $(0;0)$.

Lời giải. Ta có $3x+2(y+3)>4(x+1)-y+3 \Leftrightarrow -x+3y-1>0$.

Vì $-2+3.1-1>0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(2;1)$. **Chọn C.**

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình: $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(0;0)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(-5;3)$.

Lời giải. Ta có $3(x-1)+4(y-2)<5x-3 \Leftrightarrow -2x+4y-8<0$.

Vì $-2.0+4.0-8<0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(0;0)$. **Chọn A.**

Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng không chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $(0;0)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(4;2)$. **D.** $(1;-1)$.

Lời giải. Ta có $-x+2+2(y-2)<2(1-x) \Leftrightarrow x+2y<4$.

Vì $-4+2.2<4$ là mệnh đề sai nên nên $(-4;2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình. **Chọn C.**

Câu 6. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không thuộc nghiệm của bất phương trình : $x-4y+5>0$

A. $(-5;0)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(0;0)$. **D.** $(1;-3)$.

Lời giải. Vì $-5-4.0+5>0$ là mệnh đề sai nên $(-5;0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình. **Chọn A.**

Câu 7. Điểm $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình:

A. $-3x+2y-4>0.$ **B.** $x+3y<0.$

C. $3x-y>0.$ **D.** $2x-y+4>0.$

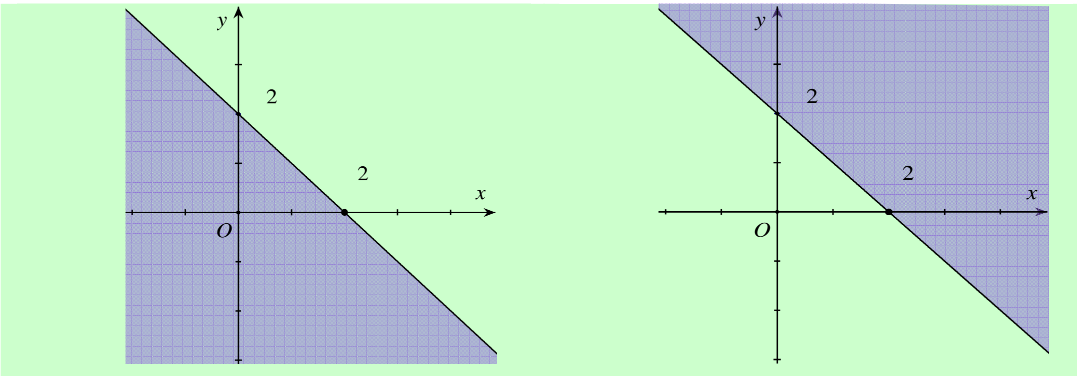
Lời giải. Vì $-3.(-1)+2.3-4>0$ là mệnh đề đúng nên $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-3x+2y-4>0$. **Chọn A.**

Câu 8. Cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây ?

A. $2x-3y-1>0$. **B.** $x-y<0$. **C.** $4x>3y$. **D.** $x-3y+7<0$.

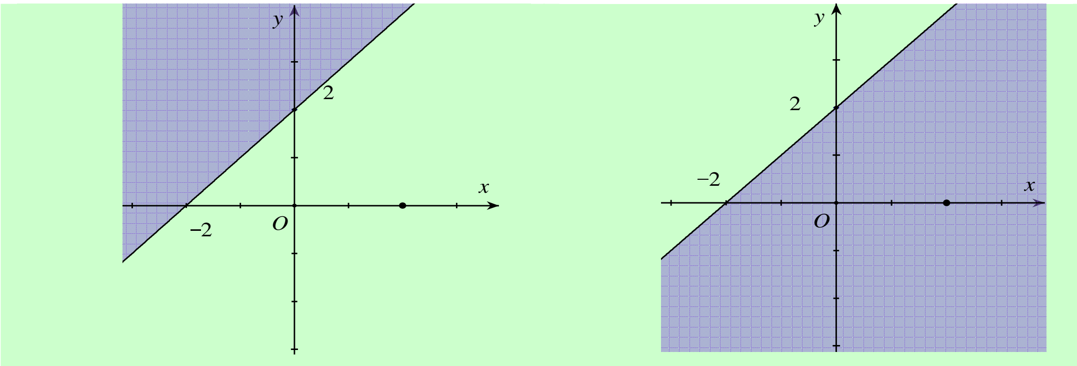
Lời giải. Vì $2-3<0$ là mệnh đề đúng nên cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x-y<0$. **Chọn B.**

Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $x+y\le 2$ là phần tô đậm trong hình vẽ của hình vẽ nào, trong các hình vẽ sau?



y
2
2
x
O
y
2
2
x
O

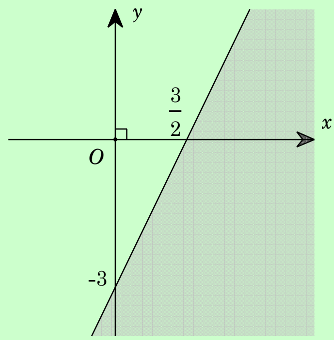
A	B


y
2
x
O
−2
y
2
−2
x
O

C	D

Lời giải. Đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ đi qua hai điểm $A(2;0), B(0;2)$ và cặp số $(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x-y\leq 2$ nên Hình 1 biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x+y\leq 2$. **Chọn A.**

Câu 10. Phần tô đậm trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?



A. $2x-y<3$. **B.** $2x-y>3$. **C.** $x-2y<3$. **D.** $x-2y>3$.

Lời giải. Đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ và $B(0;-3)$ nên có phương trình $2x-y=3$.

Mặt khác, cặp số $(0;0)$ không thỏa mãn bất phương trình $2x-y>3$ nên phần tô đậm ở hình trên biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x-y>3$. **Chọn B.**

Vấn đề 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Câu 11. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+3y-2\geq 0 \\ 2x+y+1\leq 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $M(0;1)$. **B.** $N(-1;1)$. **C.** $P(1;3)$. **D.** $Q(-1;0)$.

Lời giải. Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $M(0;1)\Rightarrow \begin{cases} 0+3.1-2\geq 0 \\ 2.0+1+1\leq 0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ hai sai nên A sai.

Với $N(-1;1)\Rightarrow \begin{cases} -1+3.1-2\geq 0 \\ 2.(-1)+1+1\leq 0 \end{cases}$: Đúng. **Chọn B.**

Câu 12. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-5y-1>0 \\ 2x+y+5>0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$. **B.** $M(1;0)$. **C.** $N(0;-2)$. **D.** $P(0;2)$.

Lời giải. Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.0-5.0-1>0 \\ 2.0+0+5>0 \\ 0+0+1<0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất và thứ ba sai nê A sai.

Với $M(1;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.1-5.0-1>0 \\ 2.1+0+5>0 \\ 1+0+1<0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ ba sai nên B sai.

Với $N(0;-3) \Rightarrow \begin{cases} 2.0-5.(-3)-1>0 \\ 2.0+(-2)+5>0 \\ 0+(-2)+1<0 \end{cases}$: Đúng. **Chọn C.**

Câu 13. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3y}{2} \leq 2 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $N(1;1)$. **D.** $P(5;1)$.

Lời giải. Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0}{2}+\dfrac{0}{3}-1 \geq 0 \\ 0 \geq 0 \\ 0+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3.0}{2} \leq 2 \end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất sai nên A sai.

Với $M(2;1) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{3}-1 \geq 0 \\ 2 \geq 0 \\ 2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3.1}{2} \leq 2 \end{cases}$: Đúng. **Chọn B.**

Câu 14. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y \geq 9 \\ x \geq y-3 \\ 2y \geq 8-x \\ y \leq 6 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$. **B.** $M(1;2)$. **C.** $N(2;1)$. **D.** $P(8;4)$.

Lời giải. Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình. **Chọn D.**

Câu 15. Điểm $M(0;-3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trìnhnào sau đây?

A. $\begin{cases} 2x-y \leq 3 \\ 2x+5y \leq 12x+8 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} 2x-y > 3 \\ 2x+5y \leq 12x+8 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} 2x-y > -3 \\ 2x+5y \leq 12x+8 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} 2x-y \leq -3 \\ 2x+5y \geq 12x+8 \end{cases}$.

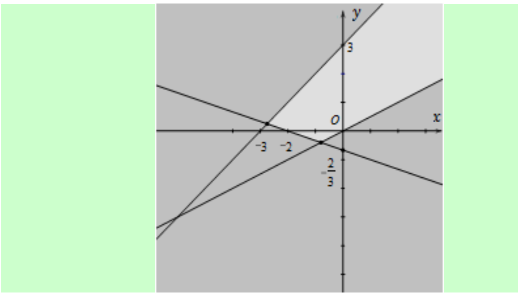
Lời giải. Thay tọa độ $M(0;-3)$ lần lượt vào từng hệ bất phương trình. **Chọn A.**

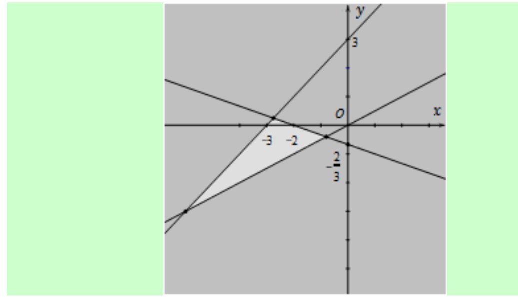
Câu 16. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$. **B.** $M(1;1)$. **C.** $N(-1;1)$. **D.** $P(-1;-1)$.

Lời giải. Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình. **Chọn C.**

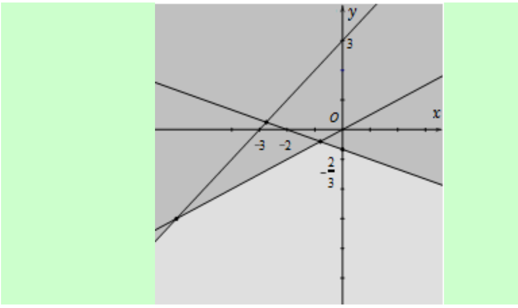
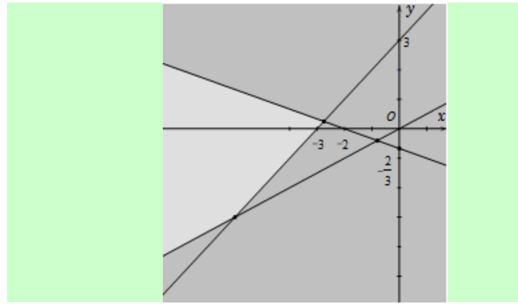
Câu 17. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ y-x<3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?


y
3
O
x
−3
−2
−2/3


y
3
O
x
−3
−2
−2/3

A.

B.

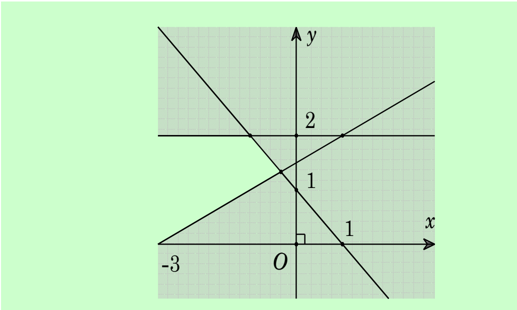

y
3
O
x
−3
−2
$-\frac{2}{3}$

y
3
O
x
−3
−2
$-\frac{2}{3}$

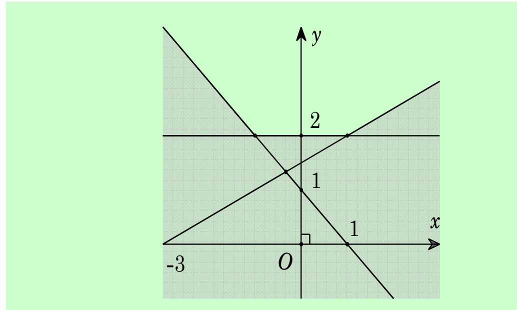
C. **D.**

Lời giải. Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Chọn A.

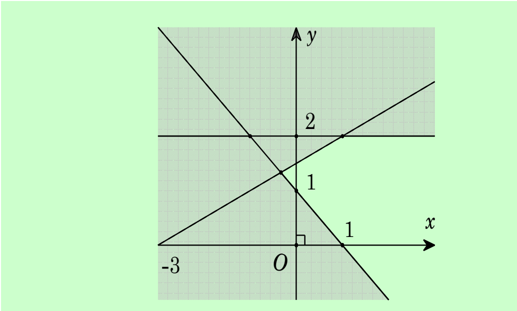
Câu 18. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-1>0 \\ y\geq 2 \\ -x+2y>3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?

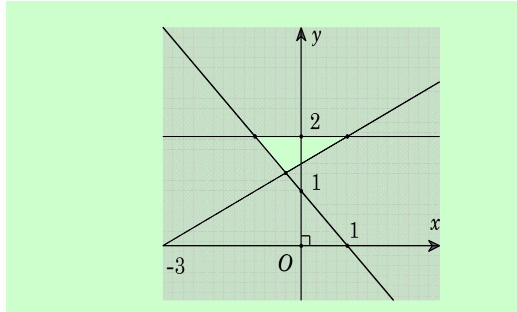

y
2
1
1
x
-3
O


y
2
1
1
x
-3
O

A.

B.


y
2
1
1
x
-3
O


y
2
1
1
x
-3
O

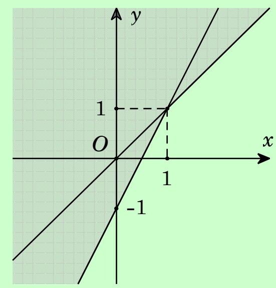
C.

D.

Lời giải. Chọn điểm $M\left(0;4\right)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Chọn B.

Câu 19. Phần không tô đậm trong hình vẽ bên (không chứa biên), biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ 2x-y\geq 1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x-y>0 \\ 2x-y>1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x-y<0 \\ 2x-y>1 \end{cases}$.

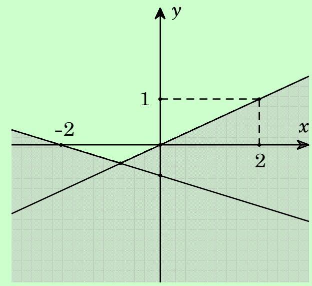
D. $\begin{cases} x-y<0 \\ 2x-y<1 \end{cases}$.

Lời giải. Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A.

Chọn điểm $M\left(1;0\right)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 1-0>0 \\ 2.1-0>1 \end{cases}$: Đúng và miền nghiệm không chứa biên. **Chọn B.**

Câu 20. Phần không tô đậm trong hình vẽ bên (không chứa biên), biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\ge -2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x-2y>0 \\ x+3y<-2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\le -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \end{cases}$.

Lời giải. Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A và C.
Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 0-2.1>0 \\ 0+3.1<-2 \end{cases}$: Sai. Vậy ta **Chọn D.**

Vấn đề 3. BÀI TOÁN TỐI ƯU

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x,y)=ax+by$ với $(x;y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.
Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.
Bước 2: Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.
Bước 3: Kết luận:
- Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
- Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

Câu 21. Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x;y)=y-x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là

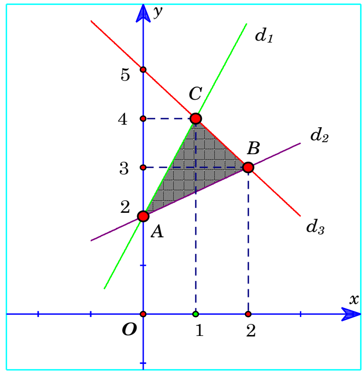
A. $F_{\min}=1$. **B.** $F_{\min}=2$. **C.** $F_{\min}=3$. **D.** $F_{\min}=4$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x-2\le 0 \\ 2y-x-4\ge 0. \\ x+y-5\le 0 \end{cases} \quad (*)$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng

$$d_1: y-2x-2=0,\quad d_2: 2y-x-4=0,\quad d_3: x+y-5=0.$$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là phần mặt phẳng (tam giác ABC kể cả biên) tô màu như hình vẽ.



Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ $(*)$ là $A(0;2)$, $B(2;3)$, $C(1;4)$.

Ta có $\begin{cases} F(0;2)=2 \\ F(2;3)=1 \\ F(1;4)=3 \end{cases} \longrightarrow F_{\min}=1$. **Chọn A.**

Câu 22. Biểu thức $F(x;y)=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} 2x-y\ge 2 \\ x-2y\le 2 \\ x+y\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$ tại điểm M có toạ độ là:

A. $(4;1)$. **B.** $\left(\frac{8}{3};-\frac{7}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **D.** $(5;0)$.

Lời giải. Ta đi giải các hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y=2 \\ x-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{3} \\ y=\frac{8}{3} \end{cases}; \quad \begin{cases} x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}.$$

Suy ra chỉ có đáp án A và C là đỉnh của đa giác miền nghiệm.

So sánh $F(x;y)=y-x$ ứng với tọa độ ở đáp án A và C, ta được đáp án $(4;1)$. **Chọn A.**

Câu 23. Cho x,y thoả mãn hệ $\begin{cases} x+2y-100\le 0 \\ 2x+y-80\le 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=(x;y)=40000x+30000y$.

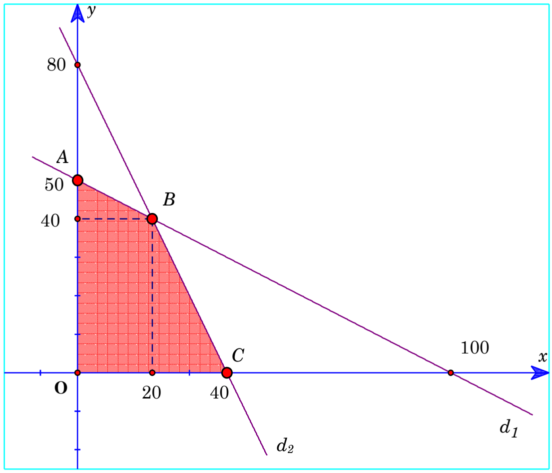
A. $P_{\max}=2000000$. **B.** $P_{\max}=2400000$.

C. $P_{\max}=1800000$. **D.** $P_{\max}=1600000$.

Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng

$$d_1: x+2y-100=0, \quad d_2: 2x+y-80=0.$$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng (tứ giác $OABC$ kể cả biên) tô màu như hình vẽ.



Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0)$, $A(0;50)$, $B(20;40)$, $C(40;0)$.

Ta có $\begin{cases} P(0;0)=0 \\ P(0;50)=1500000 \\ P(20;40)=2000000 \\ P(40;0)=1600000 \end{cases} \longrightarrow P_{\max}=2000000.$ **Chọn A.**

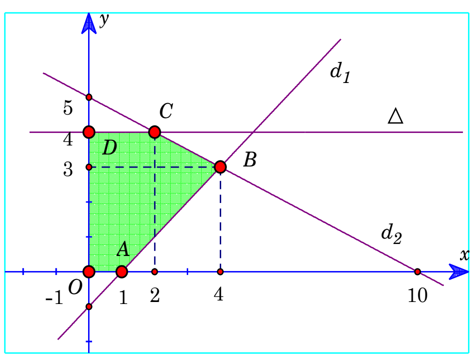
Câu 24. Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x;y)=x+2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0\le y\le 4 \\ x\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ x+2y-10\le 0 \end{cases}$ là

A. $F_{\max}=6.$ **B.** $F_{\max}=8.$ **C.** $F_{\max}=10.$ **D.** $F_{\max}=12.$

Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng

$$d_1: x-y-1=0,\quad d_2: x+2y-10=0,\quad \Delta: y=4.$$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng (ngũ giác $OABCD$ kể cả biên) tô màu như hình vẽ.



Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(4;3)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$.

Ta có $\begin{cases} F(0;0)=0 \\ F(1;0)=1 \\ F(4;3)=10 \\ F(2;4)=10 \\ F(0;4)=8 \end{cases} \longrightarrow F_{\max}=10.$ **Chọn C.**

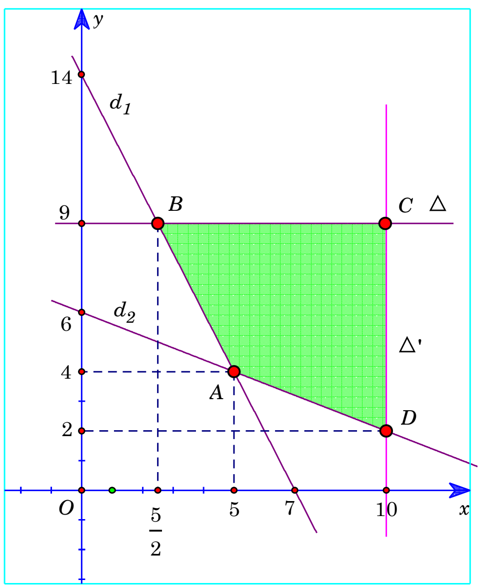
Câu 25. Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x;y)=4x+3y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x+y \ge 14 \\ 2x+5y \ge 30 \end{cases}$ là

A. $F_{\min}=23.$ **B.** $F_{\min}=26.$ **C.** $F_{\min}=32.$ **D.** $F_{\min}=67.$

Lời giải. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng

$$d_1: 2x+y-14=0, \quad d_2: 2x+5y-30=0, \quad \Delta: y=9, \quad \Delta': x=10.$$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng (tứ giác $ABCD$ kể cả biên) tô màu như hình vẽ.



Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

Ta có $\begin{cases} F(5;4)=32 \\ F\left(\frac{5}{2};9\right)=37 \\ F(10;9)=67 \\ F(10;2)=46 \end{cases} \longrightarrow F_{\min}=32.$ **Chọn C.**

Câu 26. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

A. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo. **B.** 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.

C. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo. **D.** 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Lời giải. Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế.

Suy ra $30x+10y$ là số gam đường cần dùng;

$x+y$ là số lít nước cần dùng;

$x+4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 30x+10y\leq 210 \\ x+y\leq 9 \\ x+4y\leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 3x+y\leq 21 \\ x+y\leq 9 \\ x+4y\leq 24 \end{cases}$. $(*)$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P=60x+80y$.

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn $(*)$. **Chọn C.**

Câu 27. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

● Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;

● Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

A. 30 kg loại I và 40 kg loại II. **B.** 20 kg loại I và 40 kg loại II.

C. 30 kg loại I và 20 kg loại II. **D.** 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Lời giải. Gọi $x\geq 0, y\geq 0$ (kg) lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x+4y\leq 200$.

Tổng số giờ làm việc: $30x+15y\leq 1200$.

Lợi nhuận tạo thành: $L=40x+30y$ (nghìn).

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x\geq 0,\ \ y\geq 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 2x+4y\leq 200 \\ 30x+15y\leq 1200 \end{cases}$

sao cho $L=40x+30y$ đạt giá trị lớn nhất. **Chọn B.**

Câu 28. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

A. 600 đơn vị Vitamin A, 400 đơn vị Vitamin B.

B. 600 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B.

C. 500 đơn vị Vitamin A, 500 đơn vị Vitamin B.

D. 100 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B.

Lời giải. Gọi $x \geq 0$, $y \geq 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B nên ta có: $400 \leq x + y \leq 1000$.

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \leq 600$, $y \leq 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \leq y \leq 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x, y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0$, $y \geq 0$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \\ 0,5x \leq y \leq 3x \end{cases}$ để $T(x, y) = 9x + 7,5y$ đạt giá trị nhỏ nhất. **Chọn D.**

Câu 29. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

A. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

B. Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.

C. Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

D. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Lời giải. Gọi $x \geq 0$, $y \geq 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \geq 0$, $y \geq 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$ sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất. **Chọn A.**

Câu 30. Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A lãi 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy II trong 2 giờ và máy III trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B lãi được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy II trong 3 giờ và máy III trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy III hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

A. Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B.

B. Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B.

C. Sản xuất $\dfrac{10}{3}$ tấn sản phẩm A và $\dfrac{49}{9}$ tấn sản phẩm B.

D. Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A.

Lời giải. Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ (tấn) là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B. Ta có:

$x+6y$ là thời gian hoạt động của máy I.

$2x+3y$ là thời gian hoạt động của máy II.

$3x+2y$ là thời gian hoạt động của máy III.

Số tiền lãi của nhà máy: $T=4x+3y$ (triệu đồng).

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn $\begin{cases} x+6y \leq 36 \\ 2x+3y \leq 23 \\ 3x+2y \leq 27 \end{cases}$ để $T=4x+3y$ đạt giá trị lớn nhất. **Chọn B.**

❍ Bài 05

DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Người ta đã chứng minh được định lí về dấu tam thức bậc hai sau đây

Định lý

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, trừ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

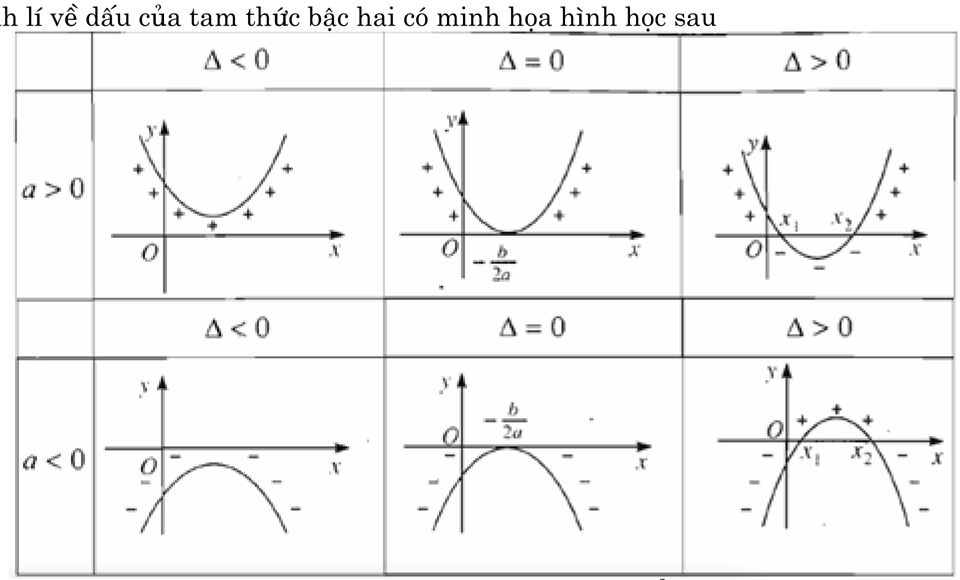
Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ trong đó x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $f(x)$.

Chú ý

Trong định lí trên, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac$.

Minh họa hình học

Định lí về dấu của tam thức bậc hai có minh họa hình học sau



II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc hai

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2+bx+c<0$ (hoặc $ax^2+bx+c\le 0,\ ax^2+bx+c>0,\ ax^2+bx+c\ge 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a\ne 0$.

2. Giải bất phương trình bậc hai

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a<0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a>0$).

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Vấn đề 1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Câu 1. Cho $f(x)=ax^2+bx+c\ \ (a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\ge 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a>0 \\ \Delta< 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a<0 \\ \Delta> 0 \end{cases}$.

Lời giải. $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a>0$ và $\Delta<0$. **Chọn C.**

Câu 2. Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\ge 0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a>0 \\ \Delta< 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a<0 \\ \Delta> 0 \end{cases}$.

Lời giải. $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a>0$ và $\Delta\le 0$. **Chọn A.**

Câu 3. Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a<0 \\ \Delta= 0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a>0 \\ \Delta< 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a<0 \\ \Delta< 0 \end{cases}$.

Lời giải. $f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a<0$ và $\Delta<0$. **Chọn D.**

Câu 4. Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\ge 0 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a>0 \\ \Delta< 0 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a<0 \\ \Delta> 0 \end{cases}$.

Lời giải. $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a>0$ và $\Delta\le 0$. **Chọn A.**

Câu 5. Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$ có $\Delta=b^2-4ac<0$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

A. $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

C. $f(x)$ không đổi dấu. **D.** Tồn tại x để $f(x)=0$.

Lời giải. Vì $\Delta<0$ và $a\ne 0$ nên $f(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. **Chọn C.**

Câu 6. Tam thức bậc hai $f(x)=2x^2+2x+5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x\in(0;+\infty)$. **B.** $x\in(-2;+\infty)$.

C. $x\in\mathbb{R}$. **D.** $x\in(-\infty;2)$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} a=2>0 \\ \Delta'=1-2.5=-9<0 \end{cases}\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Chọn **C.**

Câu 7. Tam thức bậc hai $f\left(x\right)=-x^2+5x-6$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\infty;2\right)$. **B.** $\left(3;+\infty\right)$.

C. $x\in\left(2;+\infty\right)$. **D.** $x\in\left(2;3\right)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(2;3\right)$. **Chọn D.**

Câu 8. Tam thức bậc hai $f\left(x\right)=x^2+\left(\sqrt{5}-1\right)x-\sqrt{5}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\sqrt{5};1\right)$. **B.** $x\in\left(-\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. **D.** $x\in\left(-\infty;1\right)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. **Chọn C.**

Câu 9. Tam thức bậc hai $f\left(x\right)=-x^2+3x-2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **B.** $x\in\left[1;2\right]$.

C. $x\in\left(-\infty;1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **D.** $x\in\left(1;2\right)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$. **Chọn B.**

Câu 10. Số giá trị nguyên của x để tam thức $f\left(x\right)=2x^2-7x-9$ nhận giá trị âm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{9}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0 \Leftrightarrow -1<x<\frac{9}{2}$.

Mà x nguyên nên $x \in \{0;1;2\}$. **Chọn A.**

Câu 11. Tam thức bậc hai $f(x)=x^2+\left(1-\sqrt{3}\right)x-8-5\sqrt{3}$:

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.

B. Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Âm với mọi $x \in \left(-2-\sqrt{3};1+2\sqrt{3}\right)$.

D. Âm với mọi $x \in (-\infty;1)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{3} \\ x=1+2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$1+2\sqrt{3}$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0 \Leftrightarrow -2-\sqrt{3}<x<1+2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 12. Tam thức bậc hai $f(x)=\left(1-\sqrt{2}\right)x^2+\left(5-4\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}+6$

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. **B.** Dương với mọi $x \in \left(-3;\sqrt{2}\right)$.

C. Dương với mọi $x \in \left(-4;\sqrt{2}\right)$. **D.** Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)>0 \Leftrightarrow -3<x<\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Câu 13. Cho $f(x)=x^2-4x+3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là:

A. $f(x)<0, \forall x \in (-\infty;1] \cup [3;+\infty)$ **B.** $f(x) \le 0, \forall x \in [1;3]$

C. $f(x) \ge 0, \forall x \in (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$ **D.** $f(x)>0, \forall x \in [1;3]$

Lời giải. Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$. **Chọn B.**

Câu 14. Dấu của tam thức bậc 2: $f(x)=-x^2+5x-6$ được xác định như sau:

A. $f(x)<0$ với $2<x<3$ và $f(x)>0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

B. $f(x)<0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)>0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

C. $f(x)>0$ với $2<x<3$ và $f(x)<0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

D. $f(x)>0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)<0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

Lời giải. Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	

Dựa vào bảng xét dấu ta được $f(x)>0$ với $2<x<3$ và $f(x)<0$ với $x<2$ hoặc $x>3$. **Chọn C.**

Câu 15. Cho các tam thức $f(x)=2x^2-3x+4; g(x)=-x^2+3x-4; h(x)=4-3x^2$. Số tam thức đổi dấu trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Vì $f(x)=0$ vô nghiệm, $g(x)=0$ vô nghiệm, $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt nên chỉ có $h(x)$ đổi dấu trên $\mathbb{R}$. **Chọn B.**

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình: $2x^2-7x-15 \geq 0$ là:

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right] \cup [5;+\infty)$. **B.** $\left[-\frac{3}{2};5\right]$.

C. $(-\infty;-5] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[-5;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải. Ta có $2x^2-7x-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu $2x^2-7x-15\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 5 \\ x\leq -\frac{3}{2} \end{array}\right.$. **Chọn A.**

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình: $-x^2+6x+7\geq 0$ là:

A. $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$. **B.** $[-1;7]$.

C. $(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$. **D.** $[-7;1]$.

Lời giải. Ta có $-x^2+6x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $-x^2+6x+7\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 7$. **Chọn B.**

Câu 18. Giải bất phương trình $-2x^2+3x-7\geq 0$.

A. $S=0$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\varnothing$. **D.** $S=\mathbb{R}$.

Lời giải. Ta có $-2x^2+3x-7=0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $-2x^2+3x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$. **Chọn C.**

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$.

C. $(1;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0 \Leftrightarrow 1<x<2$. **Chọn C.**

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+5x-4<0$ là

A. $[1;4]$. **B.** $(1;4)$.

C. $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=-x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>4 \end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1<0$ là:

A. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right)$.

B. $\varnothing$.

C. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$.

D. $\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<1$. **Chọn A.**

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $6x^2+x-1\leq 0$ là

A. $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right]$.

B. $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải. Ta có $f(x)=6x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{3} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\leq x\leq \dfrac{1}{3}$. **Chọn A.**

Câu 23. Số thực dương lớn nhất thỏa mãn $x^2-x-12\leq 0$ là ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=x^2-x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)\le 0\Leftrightarrow -3\le x\le 4$. Suy ra số thực dương lớn nhất thỏa $x^2-x-12\le 0$ là 4. **Chọn D.**

Câu 24. Bất phương trình nào sau đây có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

A. $-3x^2+x-1\ge 0.$ **B.** $-3x^2+x-1>0.$ **C.** $-3x^2+x-1<0.$ **D.** $3x^2+x-1\le 0.$

Lời giải. Xét $f\left(x\right)=-3x^2+x-1$ có $a=-3<0,\ \Delta=1^2-4.(-3).(-1)=-11<0$ nên $f\left(x\right)<0,\forall x$ tức là tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$. **Chọn C.**

Câu 25. Cho bất phương trình $x^2-8x+7\ge 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình.

A. $(-\infty;0]$. **B.** $[8;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[6;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $f\left(x\right)=x^2-8x+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=7\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f\left(x\right)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 1\\x\ge 7\end{array}\right.$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]\cup[7;+\infty)$.

Vì $\dfrac{13}{2}\in[6;+\infty)$ và $\dfrac{13}{2}\notin S$ nên $[6;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Vấn đề 2. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Câu 26. Giải bất phương trình $x\left(x+5\right)\le 2\left(x^2+2\right)$.

A. $x\le 1$. **B.** $1\le x\le 4$. **C.** $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $x\ge 4$.

Lời giải. Bất phương trình $x\left(x+5\right)\le 2\left(x^2+2\right)\Leftrightarrow x^2+5x\le 2x^2+4\Leftrightarrow x^2-5x+4\ge 0$

Xét phương trình $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2-5x+4\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 27. Biểu thức $(3x^2-10x+3)(4x-5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **B.** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$.

C. $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)\cup(3;+\infty)$. **D.** $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Lời giải. Đặt $f(x)=(3x^2-10x+3)(4x-5)$

Phương trình $3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ và $4x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		+	0	–	|	–	0	+	
$4x-5$		–	|	–	0	+	|	+	
$f(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$. **Chọn B.**

Câu 28. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

A. $x-2\le 0$ và $x^2(x-2)\le 0$. **B.** $x-2<0$ và $x^2(x-2)>0$.

C. $x-2<0$ và $x^2(x-2)<0$. **D.** $x-2\ge 0$ và $x^2(x-2)\ge 0$.

Lời giải. Đặt $f(x)=x^2(x-2)$.

Phương trình $x^2=0\Leftrightarrow x=0$ và $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		+	0	+	|	+	
$x-2$		–	|	–	0	+	
$f(x)$		–	0	–	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy rằng bất phương trình $x-2\ge 0\Leftrightarrow x^2(x-2)\ge 0$. **Chọn D.**

Câu 29. Biểu thức $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$ âm khi

A. $x\in(1;2)$. **B.** $x\in(-3;-2)\cup(1;2)$.

C. $x\in\mathbb{R}$. **D.** $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

D. $x\ge 4$.

Lời giải. Đặt $f(x)=\left(4-x^2\right)\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+5x+9\right)$

Phương trình $4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Phương trình $x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Ta có $x^2+5x+9=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0\Rightarrow x^2+5x+9=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-2		1		2	
$4-x^2$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
x^2+5x+9		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\left(4-x^2\right)\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+5x+9\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-3\\-2<x<1\\x>2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$. **Chọn D.**

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8\geq 0$ là

A. $x\in[-4;-1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $x\in(-4;-1)\cup(2;+\infty)$.

C. $x\in[-1;+\infty)$. **D.** $x\in(-\infty;-4]\cup[-1;2]$.

Lời giải. Bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8\geq 0\Leftrightarrow(x-2)\left(x^2+5x+4\right)\geq 0$.

Phương trình $x^2+5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-1\end{array}\right.$ và $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		2	
x^2+5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$(x-2)\left(x^2+5x+4\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $(x-2)\left(x^2+5x+4\right)\geq 0\Leftrightarrow x\in[-4;-1]\cup[2;+\infty)$.

Chọn A.

Vấn đề 3. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Câu 31. Biểu thức $f(x)=\dfrac{11x+3}{-x^2+5x-7}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\dfrac{3}{11};+\infty\right)$. **B.** $x\in\left(-\dfrac{3}{11};5\right)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{11}\right)$. **D.** $x\in\left(-5;-\dfrac{3}{11}\right)$.

Lời giải. Ta có $-x^2+5x-7=-\left(x^2-5x+7\right)=-\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, bất phương trình $f(x)>0\Leftrightarrow 11x+3<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{3}{11}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{11}\right)$. **Chọn C.**

Câu 32. Tập nghiệm S của bất phương trình $\dfrac{x-7}{4x^2-19x+12}>0$ là

A. $S=\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)\cup(4;7)$. **B.** $S=\left(\dfrac{3}{4};4\right)\cup(7;+\infty)$.

C. $S=\left(\dfrac{3}{4};4\right)\cup(4;+\infty)$. **D.** $S=\left(\dfrac{3}{4};7\right)\cup(7;+\infty)$.

Lời giải. Điều kiện: $4x^2-19x+12\neq 0\Leftrightarrow (x-4)(4x-3)\neq 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4\\ x\neq \dfrac{3}{4}\end{cases}.$

Phương trình $x-7=0\Leftrightarrow x=7$ và $4x^2-19x+12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4\\ x=\dfrac{3}{4}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		4		7		$+\infty$
$x-7$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$4x^2-19x+12$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $\dfrac{x-7}{4x^2-19x+12}>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{4}<x<4\\ x>7\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{3}{4};4\right)\cup(7;+\infty)$. **Chọn B.**

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{2x}{2x-x^2}$

?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4\neq 0 \\ x+2\neq 0 \\ 2x-x^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$.

Bất phương trình $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2x}{x^2-2x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+9}{x^2-4}<0.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		-2		2		$+\infty$
$2x+9$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-4		$+$	|	$+$	‖	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\dfrac{2x+9}{x^2-4}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right)\cup(-2;2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x $(x=1)$ thỏa mãn yêu cầu.

Chọn C.

Câu 34. Tập nghiệm S của bất phương trình $\dfrac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\leq -1$ là

A. Hai khoảng. **B.** Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn. **D.** Ba khoảng.

Lời giải. Điều kiện: $x^2-3x-10\neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 5 \end{cases}$.

Bất phương trình

$\dfrac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\leq -1 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}+1\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10}\leq 0 \qquad (*)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		3		5		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x^2-3x-10$		$+$	‖	$-$	|	$-$	|	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $(*)\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup[1;3]\cup(5;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+5x+6}\leq 0$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải. Bất phương trình $\dfrac{x^4-x^2}{x^2+5x+6}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2(x^2-1)}{x^2+5x+6}\leq 0 \qquad (*)$.

Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+5x+6} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+5x+6} \leq 0 \end{array}\right..$$

Phương trình $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$ và $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right..$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+5x+6		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-3;-2) \cup [-1;1]$

Kết hợp với $x \in \mathbb{Z}$, ta được $x = \{-1;0;1\}$. Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên cần tìm.

Chọn D.

Vấn đề 4. ỨNG DỤNG VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI ĐỂ TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Câu 36. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\mathrm{D} = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$.

B. $\mathrm{D} = [2;+\infty)$.

C. $\mathrm{D} = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty)$.

D. $\mathrm{D} = \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$.

Phương trình $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right..$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup [2;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 37. Giá trị nguyên dương lớn nhất để hàm số $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ xác định là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $5 - 4x - x^2 \geq 0$.

Phương trình $5 - 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 \end{array}\right..$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$5-4x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $5-4x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5;1]$.

Vậy nghiệm dương lớn nhất để hàm số xác định là $x=1$. **Chọn A.**

Câu 38. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5}}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;1)$. **C.** $\mathrm{D}=[-5;1]$. **D.** $\mathrm{D}=\left[-5;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5} \geq 0$.

Phương trình $\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow (x+5)\left(x-\sqrt{5}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-5;\sqrt{5}\right]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\left[-5;\sqrt{5}\right]$. **Chọn D.**

Câu 39. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{3-x}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1;-4\}$.
B. $\mathrm{D}=[-4;1]$.
C. $\mathrm{D}=(-4;1)$.
D. $\mathrm{D}=(-\infty;4)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $4-3x-x^2>0$.

Phương trình $4-3x-x^2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$4-3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $4-3x-x^2>0 \Leftrightarrow x \in (-4;1)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-4;1)$. **Chọn C.**

Câu 40. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{1;\dfrac{1}{3}\right\}$.
B. $\mathrm{D}=\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.
C. $\mathrm{D}=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.
D. $\mathrm{D}=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $3x^2-4x+1>0$.

Phương trình $3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$

$3x^2-4x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $3x^2-4x+1>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **Chọn C.**

Câu 41. Tìm tập xác đinh D của hàm số $y=\sqrt{x^2+x-6}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}$.

A. $D=[-4;-3]\cup[2;+\infty)$.
B. $D=(-4;+\infty)$.
C. $D=(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$.
D. $D=(-4;-3]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+x-6\geq 0 \\ x+4>0 \end{cases}$.

Phương trình $x^2+x-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 \end{array}\right.$ và $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\begin{cases} x^2+x-6\geq 0 \\ x+4>0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in(-4;-3]\cup[2;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-4;-3]\cup[2;+\infty)$. **Chọn A.**

Câu 42. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{x^2+2x+3}+\frac{1}{\sqrt{5-2x}}$.

A. $D=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $D=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]$. **C.** $D=\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+2x+3\geq 0 \\ 5-2x>0 \end{cases}$.

Phương trình $x^2+2x+3=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$ và $5-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
x^2+2x+3		$+$	$\vert$	$+$	
$5-2x$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases} x^2+2x+3\geq 0 \\ 5-2x>0 \end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **Chọn A.**

Câu 43. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=\sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1}$.

A. $D=[4;+\infty)$.
B. $D=(-5;-3]\cup(3;4]$.
C. $D=(-\infty;-5)$.
D. $D=(-5;3)\cup(3;4]$.

Lời giải. Hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1\geq 0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x^2-x+12}{-x^2-2x+15}\geq 0.$

Phương trình $x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$ và $-x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=3 \end{array}\right..$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-3		3		4		$+\infty$
x^2-x-12		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$-x^2-2x+15$		$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)$		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\dfrac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-5;-3]\cup(3;4].$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-5;-3]\cup(3;4].$ **Chọn B.**

Câu 44. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}}.$

A. $\mathrm{D}=[-4;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

B. $\mathrm{D}=(-\infty;-4]\cup\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right).$

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-4]\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

D. $\mathrm{D}=\left[-4;-\dfrac{1}{2}\right).$

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}\geq 0.$

Phương trình $x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \end{array}\right.$ và $2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right..$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
x^2+5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2x^2+3x+1$		$+$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$					

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-4]\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-4]\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$ **Chọn C.**

Câu 45. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+x-12}-2\sqrt{2}}.$

A. $\mathrm{D}=(-5;4].$

B. $\mathrm{D}=(-\infty;-5)\cup(4;+\infty).$

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-4]\cup[3;+\infty).$

D. $\mathrm{D}=(-\infty;-5]\cup[4;+\infty).$

Lời giải. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x^2+x-12}-2\sqrt{2}\geq 0 \\ x^2+x-12\geq 0 \end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12\geq 8 \\ x^2+x-12\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+x-12\geq 8 \Leftrightarrow x^2+x-20\geq 0.$$

Phương trình $x^2+x-20=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
x^2+x-20		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2+x-20 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-5] \cup [4;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-5] \cup [4;+\infty)$. **Chọn B.**

Vấn đề 5. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VÔ NGHIỆM – CÓ NGHIỆM – CÓ HAI NGHIỆM PHÂN BIỆT

Câu 46. Phương trình $x^2-(m+1)x+1=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m>1$. **B.** $-3<m<1$.

C. $m \le -3$ hoặc $m \ge 1$. **D.** $-3 \le m \le 1$.

Lời giải. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x<0 \Leftrightarrow (m+1)^2-4<0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-3<0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3)<0 \Leftrightarrow -3<m<1$. **Chọn B.**

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm

$(2m^2+1)x^2-4mx+2=0$.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m>3$. **C.** $-\frac{3}{5}<m<3$. **D.** $m>-\frac{3}{5}$.

Lời giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2m^2+1 \ne 0 \\ \Delta'_x=4m^2-2(2m^2+1)=-2<0 \end{array}\right.$, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$$

vô nghiệm ?

A. $m<0$. **B.** $m>2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$. **D.** $\left\{\begin{array}{l} m \ne 2 \\ 1<m<3 \end{array}\right.$.

Lời giải. Xét phương trình $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$ $(*)$.

TH1. Với $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$, khi đó $(*) \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Suy ra với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Do đó $m=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 2$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow (2m-3)^2-(m-2)(5m-6)<0 \Leftrightarrow 4m^2-12m+9-(5m^2-16m+12)<0$

$\Leftrightarrow -m^2+4m-3<0 \Leftrightarrow m^2-4m+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$.

Do đó, với $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 49. Phương trình $mx^2-2mx+4=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0<m<4$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>4 \end{array}\right.$. **C.** $0\le m\le 4$. **D.** $0\le m<4$.

Lời giải. Xét phương trình $mx^2-2mx+4=0 \quad (*)$.

TH1. Với $m=0$, khi đó phương trình $(*)\Leftrightarrow 4=0$ (vô lý).

Suy ra với $m=0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2. Với $m\ne 0$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow m(m-4)<0\Leftrightarrow 0<m<4$

Kết hợp hai **TH**, ta được $0\le m<4$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Câu 50. Phương trình $\left(m^2-4\right)x^2+2(m-2)x+3=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\ge 0$. **B.** $m=\pm 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -4 \end{array}\right.$.

Lời giải. Xét phương trình $\left(m^2-4\right)x^2+2(m-2)x+3=0 \quad (*)$.

TH1. Với $m^2-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

- Khi $m=2\Rightarrow (*)\Leftrightarrow 3=0$ (vô lý).
- Khi $m=-2\Rightarrow (*)\Leftrightarrow -8x+3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{8}$.

Suy ra với $m=2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2-4\ne 0\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\ne 2 \\ m\ne -2 \end{array}\right.$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow (m-2)^2-3\left(m^2-4\right)<0\Leftrightarrow m^2-4m+4-3m^2+12<0\Leftrightarrow -2m^2-4m+16<0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-8>0\Leftrightarrow (m-2)(m+4)>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-4 \end{array}\right.$.

Suy ra với $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-4 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m<-4 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 51. Cho tam thức bậc hai $f(x)=x^2-bx+3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm ?

A. $b\in\left[-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b\in\left(-2\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

C. $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$.

Lời giải. Để phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0\Leftrightarrow (-b)^2-4.3\ge 0$

$$\Leftrightarrow b^2-12\ge 0\Leftrightarrow b^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow \left(b-2\sqrt{3}\right)\left(b+2\sqrt{3}\right)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b\ge 2\sqrt{3} \\ b\le -2\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 52. Phương trình $x^2+2(m+2)x-2m-1=0$ (m là tham số) có nghiệm khi

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-5 \end{array}\right.$. **B.** $-5\le m\le -1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>-1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m\ge -1 \end{array}\right.$.

Lời giải. Xét phương trình $x^2+2(m+2)x-2m-1=0$, có $\Delta'_x=(m+2)^2+2m+1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0\Leftrightarrow m^2+4m+4+2m+1\ge 0\Leftrightarrow m^2+6m+5\ge 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m+5)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge -1 \\ m\le -5 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Câu 53. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình

$$2x^2+2(m+2)x+3+4m+m^2=0$$

có nghiệm ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải. Xét $2x^2+2(m+2)x+3+4m+m^2=0$, có $\Delta'_x=(m+2)^2-2(m^2+4m+3)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0\Leftrightarrow m^2+4m+4-2m^2-8m-6\ge 0\Leftrightarrow -m^2-4m-2\ge 0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+2\le 0\Leftrightarrow (m+2)^2\le 2\Leftrightarrow -2-\sqrt{2}\le m\le -2+\sqrt{2}$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, ta được $m=\{-3;-2;-1\}$ là các giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 54. Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ có nghiệm.

A. $m\ne 5$. **B.** $-\frac{10}{3}\le m\le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\frac{10}{3} \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\frac{10}{3} \\ 1\le m\ne 5 \end{array}\right.$.

Lời giải. Xét phương trình $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ $(*)$.

TH1. Với $m-5=0\Leftrightarrow m=5$, khi đó $(*)\Leftrightarrow -20x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{20}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{20}$.

TH2. Với $m-5\ne 0\Leftrightarrow m\ne 5$, khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2-(m-5)(m-2)\ge 0\Leftrightarrow 4m^2-(m^2-7m+10)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3m^2+7m-10\ge 0\Leftrightarrow (m-1)(3m+10)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$.

Do đó, với $\left[\begin{array}{l} 5\ne m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 55. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2-2(m+3)x-m+2=0$ có nghiệm.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-2<m<2$.

Lời giải. Xét phương trình $(m-1)x^2-2(m+3)x-m+2=0$ $(*)$.

TH1. Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1,$ khi đó $(*) \Leftrightarrow -2.4x-1+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{8}.$

Suy ra với $m=1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{1}{8}.$

TH2. Với $m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1,$ khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+3)^2-(m-1)(2-m)\geq 0 \Leftrightarrow m^2+6m+9-\left(-m^2+3m-2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow 2m^2+3m+11\geq 0 \Leftrightarrow 2\left(m+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{79}{8}\geq 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ suy ra $\Delta'_x\geq 0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Do đó, với $m\neq 1$ thì phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai **TH**, ta được $m\in\mathbb{R}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 56. Các giá trị m để tam thức $f(x)=x^2-(m+2)x+8m+1$ đổi dấu 2 lần là

A. $m\leq 0$ hoặc $m\geq 28.$ **B.** $m<0$ hoặc $m>28.$

C. $0<m<28.$ **D.** $m>0.$

Lời giải. Tam thức $f(x)$ đổi dấu hai lần $\Leftrightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta_x=(m+2)^2-4(8m+1)>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m^2+4m+4-32m-4>0 \Leftrightarrow m^2-28m>0 \Leftrightarrow m(m-28)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>28 \\ m<0 \end{array}\right..$

Vậy $m<0$ hoặc $m>28$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2+(m+1)x+m-\dfrac{1}{3}=0$ có nghiệm ?

A. $m\in\mathbb{R}.$ **B.** $m>1.$ **C.** $-\dfrac{3}{4}<m<1.$ **D.** $m>-\dfrac{3}{4}.$

Lời giải. Xét $x^2+(m+1)x+m-\dfrac{1}{3}=0,$ có $\Delta_x=(m+1)^2-4\left(m-\dfrac{1}{3}\right)=m^2-2m+\dfrac{7}{3}.$

Ta có $\begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'_m=1-\dfrac{7}{3}=-\dfrac{4}{3}<0 \end{cases}$ suy ra $m^2-2m+\dfrac{7}{3}>0,\ \forall m\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x>0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}.$ **Chọn A.**

Câu 58. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$(m-1)x^2+(3m-2)x+3-2m=0$$

có hai nghiệm phân biệt ?

A. $m\in\mathbb{R}.$ **B.** $2<m<6.$ **C.** $-1<m<6.$ **D.** $-1<m<2.$

Lời giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a=m-1\neq 0 \\ \Delta_x=(3m-2)^2-4(m-1)(3-2m)>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ 9m^2-12m+4-4\left(-2m^2+5m-3\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ 17m^2-32m+16>0 \end{cases} \quad (*).$$

Ta có $\begin{cases} a=17>0 \\ \Delta'_m=16^2-17.16=-16<0 \end{cases}$ suy ra $17m^2-32m+16>0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Do đó, hệ bất phương trình $(*) \Leftrightarrow m \neq 1$. **Chọn B.**

Câu 59. Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
B. $m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.
C. $m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \setminus \{1\}$.
D. $m \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$.

Lời giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 - m^2 + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \setminus \{1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \in \left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \setminus \{1\}$. **Chọn C.**

Câu 60. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt ?

A. $m \in \left(-\infty;-\frac{3}{5}\right) \cup (1;+\infty) \setminus \{3\}$.
B. $m \in \left(-\frac{3}{5};1\right)$.
C. $m \in \left(-\frac{3}{5};+\infty\right)$.
D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 3 \neq 0 \\ \Delta_x = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + 6m + 9 + 4\left(m^2 - 2m - 3\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ (m-1)(5m+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty;-\frac{3}{5}\right) \cup (1;+\infty) \setminus \{3\}$$ là giá trị cần tìm.

Chọn A.

Vấn đề 6. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI CÓ NGHIỆM THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 61. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m > 6$.
B. $m < 6$.
C. $6 > m > 0$.
D. $m > 0$.

Lời giải. Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(m+3) > 0 \\ x_1 + x_2 = m > 0 \\ x_1 x_2 = m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$$ **Chọn A.**

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $2 < m < 6$.
B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

C. $m<0$ hoặc $-3<m<6$. **D.** $-3<m<6$.

Lời giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2\neq 0 \\ m^2-(m-2)(m+3)>0 \\ \dfrac{2m}{m-2}>0 \\ \dfrac{m+3}{m-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<6 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Chọn B.

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2+2(m+1)x+9m-5=0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A. $m<6$. **B.** $\frac{5}{9}<m<1$ hoặc $m>6$.

C. $m>1$. **D.** $1<m<6$.

Lời giải. Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$\begin{cases} \Delta'>0 \\ S<0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2-(9m-5)>0 \\ -2(m+1)<0 \\ 9m-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-7m+6>0 \\ m>\dfrac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ \dfrac{5}{9}<m<1 \end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 64. Phương trình $x^2-(3m-2)x+2m^2-5m-2=0$ có hai nghiệm không âm khi

A. $m\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. **B.** $m\in\left[\frac{5+\sqrt{41}}{4};+\infty\right)$.

C. $m\in\left[\frac{2}{3};\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Lời giải. Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$\begin{cases} \Delta>0 \\ S\geq 0 \\ P\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2-4(2m^2-5m-2)>0 \\ 3m-2\geq 0 \\ 2m^2-5m-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2\geq 0 \\ m^2+8m+12\geq 0 \\ 2m^2-5m-2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\geq \dfrac{5+\sqrt{41}}{4}$. **Chọn B.**

Câu 65. Phương trình $2x^2-(m^2-m+1)x+2m^2-3m-5=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-1$ **hoặc** $m>\frac{5}{2}$. **B.** $-1<m<\frac{5}{2}$.

C. $m\leq -1$ **hoặc** $m\geq \frac{5}{2}$. **D.** $-1\leq m\leq \frac{5}{2}$.

Lời giải. Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac<0 \Leftrightarrow 2.(2m^2-3m-5)<0 \Leftrightarrow -1<m<\frac{5}{2}.$$ **Chọn B.**

Câu 66. Phương trình $(m^2-3m+2)x^2-2m^2x-5=0$ có hai nghiệm trái dấu khi

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $\begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải. Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$ac<0 \Leftrightarrow \left(m^2-3m+2\right).(-5)<0 \Leftrightarrow m^2-3m+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$$ **Chọn B.**

Câu 67. Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m=0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

A. $0<m<2$. **B.** $0<m<1$. **C.** $1<m<2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Lời giải. Phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-2m=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2+2x-2m=0$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2+2(x-m)=0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=m \\ x_2=m-2 \end{cases}.$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1x_2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2 \qquad (\mathrm{I})$.

Với $m \in (0;2)$ suy ra $\begin{cases} x_1>0 \\ x_2<0 \end{cases}$, theo bài ra, ta có $|x_2|>|x_1| \Leftrightarrow |x_2|^2>|x_1|^2 \Leftrightarrow x_2^2-x_1^2>0$

$\Leftrightarrow (x_2-x_1)(x_2+x_1)>0 \Leftrightarrow (m-2-m)(m-2+m)>0 \Leftrightarrow 2m-2<0 \Leftrightarrow m<1$.

Kết hợp với (I), ta được $0<m<1$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 68. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1+x_2+x_1x_2<1$?

A. $1<m<2$. **B.** $1<m<3$. **C.** $m>2$. **D.** $m>3$.

Lời giải. Xét phương trình $(m-1)x^2-2(m-2)x+m-3=0 \qquad (*)$, có $a+b+c=0$.

Suy ra phương trình $(*) \Leftrightarrow (x-1)\left[(m-1)x-m+3\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ (m-1)x=m-3 \end{array}\right.$.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \dfrac{m-3}{m-1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1 \qquad (\mathrm{I})$.

Khi đó, gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m-4}{m-1} \\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{m-1} \end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $x_1+x_2+x_1x_2=\dfrac{3m-7}{m-1}<1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-6}{m-1}<0 \Leftrightarrow 1<m<3$.

Kết hợp với (I), ta được $1<m<3$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 69. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$ khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<3$?

A. $m<2 \ \vee \ m>6$. **B.** $-2<m \neq -1<2 \ \vee \ m>6$.

C. $2<m<6$. **D.** $-2<m<6$.

Lời giải. Xét phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-2=0 \qquad (*)$, có $\Delta'=m+2$.

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m+2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \{-1;2\} \\ m > -2 \end{cases} \qquad (\text{I}).$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m}{m+1} \\ x_1 x_2 = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \dfrac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \dfrac{m-6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 2 \end{array}\right.$.

Kết hợp với (I), ta được $\left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m \in (-2;-1) \cup (-1;2) \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} > 1$.

A. $m \in (-\infty;-2) \cup (-2;-1) \cup (7;+\infty)$. **B.** $m \in (-\infty;-2) \cup \left(-2;-\dfrac{11}{10}\right)$.

C. $m \in (-\infty;-2) \cup (-2;-1)$. **D.** $m \in (7;+\infty)$.

Lời giải. Đặt $f(x) = x^2 - (m-1)x + m + 2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 7 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m \neq -2 \end{cases} . \quad (*)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 1 \\ x_1 x_2 = m + 2 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 . x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} > 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{8m+7}{(m+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m < -\dfrac{7}{8} \end{cases} \xrightarrow{(*)} -2 \neq m < -1$. **Chọn C.**

Vấn đề 7. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM – CÓ NGHIỆM – NGHIỆM ĐÚNG

Câu 71. Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m + 4$ dương với mọi x khi:

A. $-1 < m < \dfrac{11}{4}$. **B.** $-\dfrac{11}{4} < m < 1$. **C.** $-\dfrac{11}{4} \leq m \leq 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > \dfrac{11}{4} \end{array}\right.$.

Lời giải. Tam thức $f(x)$ có $a = 3 > 0$. Do đó $f(x) > 0, \forall x$ khi

$\Delta' = (2m-1)^2 - 3(m+4) = 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{11}{4}$. Chọn **A.**

Câu 72. Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m + 4$ không dương với mọi x khi:

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$. **B.** $m \in \varnothing$.

C. $m=6.$ **D.** $m\in\mathbb{R}.$

Lời giải. Tam thức $f\left(x\right)$ có $a=-2<0$. Do đó $f\left(x\right)\le 0,\forall x$ (không dương) khi $\Delta=\left(m-2\right)^2+8\left(-m+4\right)=m^2-12m+36\le 0\Leftrightarrow m=6$. **Chọn C.**

Câu 73. Tam thức $f\left(x\right)=-2x^2+\left(m+2\right)x+m-4$ âm với mọi x khi:

A. $m<-14$ hoặc $m>2$. **B.** $-14\le m\le 2$.

C. $-2<m<14$. **D.** $-14<m<2$.

Lời giải. Tam thức $f\left(x\right)$ có $a=-2<0$. Do đó $f\left(x\right)<0,\forall x$ khi $\Delta=\left(m+2\right)^2+8\left(m-4\right)=m^2+12m-28\le 0\Leftrightarrow -14<m<2$. **Chọn D.**

Câu 74. Tam thức $f\left(x\right)=x^2-\left(m+2\right)x+8m+1$ không âm với mọi x khi:

A. $m>28.$ **B.** $0\le m\le 28.$ **C.** $m<1.$ **D.** $0<m<28.$

Lời giải. Tam thức $f\left(x\right)$ có $a=1>0$ nên $f\left(x\right)\ge 0,\forall x$ (không âm) khi $\Delta=\left(m+2\right)^2-4\left(8m+1\right)=m^2-28m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 28$. **Chọn B.**

Câu 75. Bất phương trình $x^2-mx-m\ge 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

A. $m\le -4$ hoặc $m\ge 0$. **B.** $-4<m<0$.

C. $m<-4$ hoặc $m>0$. **D.** $-4\le m\le 0$.

Lời giải. Tam thức $f(x)=x^2-mx-m$ có hệ số $a=1>0$ nên bất phương trình $f\left(x\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x$ khi và chỉ khi $\Delta=m^2+4m\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le 0$.

Chọn D.

Câu 76. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2+\left(2m-1\right)x+m<0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m=\frac{1}{2}.$ **B.** $m=-\frac{1}{2}.$ **C.** $m\in\mathbb{R}.$ **D.** Không tồn tại m.

Lời giải. Tam thức $f\left(x\right)=-x^2+\left(2m-1\right)x+m$ có hệ số $a=-1<0$ nên bất phương trình $f\left(x\right)<0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta=\left(2m-1\right)^2+4m=4m^2+1<0\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Chọn D.

Câu 77. Bất phương trình $x^2-\left(m+2\right)x+m+2\le 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

C. $m\in\left[-2;2\right]$. **D.** $m\in\left(-2;2\right)$.

Lời giải. Bất phương trình $f\left(x\right)=x^2-\left(m+2\right)x+m+2\le 0$ khi và chỉ khi $f\left(x\right)>0$ nghiệm đúng với mọi x.

Tam thức $f\left(x\right)=x^2-\left(m+2\right)x+m+2$ có hệ số $a=1>0$ nên $f\left(x\right)>0$ nghiệm đúng với mọi x khi $\Delta=\left(m+2\right)^2-4\left(m+2\right)=m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$. **Chọn D.**

Câu 78. Tam thức $f\left(x\right)=\left(m^2+2\right)x^2-2\left(m+1\right)x+1$ dương với mọi x khi:

A. $m<\frac{1}{2}.$ **B.** $m\le\frac{1}{2}.$ **C.** $m>\frac{1}{2}.$ **D.** $m\ge\frac{1}{2}.$

Lời giải. Tam thức $f\left(x\right)$ có hệ số $a=m^2+2>0,\forall x$ nên $f\left(x\right)$ dương với mọi x khi $\Delta'=\left(m+1\right)^2-\left(m^2+2\right)=2m-1<0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 79. Tam thức $f(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$ không dương với mọi x khi:

Lời giải .

- Với $m=4$, ta có $f(x)=-1<0$: đúng với mọi x.
- Với $m\neq 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2+(2m-8)x+m-5\leq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-4<0 \\ (m-4)^2-(m-4)(m-5)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m-4\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<4.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\leq 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 80. Tam thức $f(x)=mx^2-mx+m+3$ âm với mọi x khi:

A. $m\in(-\infty;-4]$.

B. $m\in(-\infty;-4)$.

C. $m\in(-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$.

D. $m\in(-\infty;-4]\cup(0;+\infty)$.

Lời giải.

- Với $m=0$ thay vào ta được $f(x)=3<0$ (vô lý) suy ra $m=0$ không thỏa mãn.
- Với $m\neq 0$, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \Delta<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m^2-4m(m+3)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -3m^2-12m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m<-4.$$ **Chọn B.**

Câu 81. Tam thức $f(x)=(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$ không âm với mọi x khi:

A. $m\geq -2.$ **B.** $m\leq -2.$ **C.** $m>-2.$ **D.** $m<-2.$

Lời giải. • Với $m=-2$, tam thức bậc hai trở thành $1>0$: đúng với mọi x.

• Với $m\neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2+2(m+2)x+m+3\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ (m+2)^2-(m+2)(m+3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ -m-2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\geq -2$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 82. Bất phương trình $(3m+1)x^2-(3m+1)x+m+4\geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

A. $m>-\frac{1}{3}.$ **B.** $m\geq -\frac{1}{3}.$ **C.** $m>0.$ **D.** $m>15.$

Lời giải. Xét bất phương trình $(3m+1)x^2-(3m+1)x+m+4\geq 0.\quad (*)$

TH1. Với $3m+1=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$, bất phương trình $(*)$ trở thành $4-\frac{1}{3}\geq 0$ (luôn đúng).

TH2. Với $3m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -\frac{1}{3}$, bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1>0 \\ (3m+1)^2-4(3m+1)(m+4)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1>0 \\ 3m^2+46m+15\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-\frac{1}{3}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m\geq -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 83. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(2m^2-3m-2\right)x^2+2(m-2)x-1\leq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $-\dfrac{1}{3}\le m<2.$ **B.** $-\dfrac{1}{3}\le m\le 2.$ **C.** $m\ge -\dfrac{1}{3}.$ **D.** $m\le 2.$

Lời giải. Xét $2m^2-3m-2=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $m=2$

• Khi $m=-\dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành $-5x-1\le 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{5}$: không nghiệm đúng với mọi x.

• Khi $m=2$ thì bất phương trình trở thành $-1\le 0$: nghiệm đúng vơi mọi x.

• Khi $\begin{cases} m\ne -\dfrac{1}{2} \\ m\ne 2\end{cases}$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left(2m^2-3m-2\right)x^2+2\left(m-2\right)x-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'\le 0\\ a<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}3m^2-7m-2\le 0\\ 2m^2-3m-2<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{3}\le m\le 2\\ -\dfrac{1}{2}<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}\le m<2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-\dfrac{1}{3}\le m\le 2$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(m^2-4\right)x^2+\left(m-2\right)x+1<0$ vô nghiệm.

A. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{10}{3}\right]\cup\left[2;+\infty\right).$ **B.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{10}{3}\right]\cup\left(2;+\infty\right).$

C. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{10}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right).$ **D.** $m\in\left[2;+\infty\right).$

Lời giải. • Xét $m^2-4=0\Leftrightarrow m=\pm 2.$

Với $m=-2$, bất phương trình trở thành $-4x+1<0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{4}$: không thỏa mãn.

Với $m=2$, bất phương trình trở thành $1<0$: vô nghiệm. Do đó $m=2$ thỏa mãn.

• Xét $m^2-4\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 2$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left(m^2-4\right)x^2+\left(m-2\right)x+1\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4>0\\ \Delta=\left(m-2\right)^2-4\left(m^2-4\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4>0\\ -3m^2-4m+20\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -\dfrac{10}{3}\\ m>2\end{array}\right..$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m\le -\dfrac{10}{3}$ hoặc $m\ge 2$. **Chọn A.**

Câu 85. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{\left(m+4\right)x^2-\left(m-4\right)x-2m+1}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\le 0.$ **B.** $-\dfrac{20}{9}\le m\le 0.$ **C.** $m\ge -\dfrac{20}{9}.$ **D.** $m>0.$

Lời giải. $f\left(x\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$

TH1: $m=-4$ thì $f\left(x\right)=8x+9\ge 0\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{9}{8}\longrightarrow m=-4$ không thỏa.

TH2: $m\ne -4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-4\\ 9m^2+20m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{20}{9}\le m\le 0.$ **Chọn B.**

Câu 86. Hàm số $y=\sqrt{\left(m+1\right)x^2-2\left(m+1\right)x+4}$ có tập xác định là $\mathrm{D}=\mathbb{R}$ khi

A. $-1 \le m \le 3.$ **B.** $-1 < m < 3.$ **C.** $-1 < m \le 3.$ **D.** $m > -1.$

Lời giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.\quad (1)$

- $m = -1$ thì $f(x) = 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}:$ thỏa mãn.
- $m \ne -1$, khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m^2 - 2m - 3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1 \le m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 3.$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-1 \le m \le 3.$ **Chọn A.**

Câu 87. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để biểu thức $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$ luôn dương.

A. $m \ge -\dfrac{5}{8}.$ **B.** $m < -\dfrac{5}{8}.$ **C.** $m < \dfrac{5}{8}.$ **D.** $m \ge \dfrac{5}{8}.$

Lời giải. Ta có $-4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{7}{16} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{5}{8}$. **Chọn B.**

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}.$ **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$

C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty).$ **D.** $m \in [0; 2].$

Lời giải. Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m.$

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' = 0 \longrightarrow f(x) = 0$ tại $x = \dfrac{m-2}{2}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' > 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty).$

Vậy cả ba trường hợp ta thấy bất phương trình đều có nghiệm. **Chọn A.**

Câu 89. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \ge 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}.$ **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$

C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty).$ **D.** $m \in [0; 2].$

Lời giải. Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m.$

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này không có m thỏa mãn.

- $\Delta'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \longrightarrow f(x)=0 \text{ khi } x=-\dfrac{b}{2a}=-1 \\ m=2 \longrightarrow f(x)=0 \text{ khi } x=-\dfrac{b}{2a}=0 \end{array}\right.$, còn ngoài ra thì $f(x)<0$ nên bất phương trình vô nghiệm.

Do đó trường hợp này có $m=0$ hoặc $m=2$ thỏa mãn.

- $\Delta'>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right. \longrightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x\in[x_1;x_2]$.

Do đó trường hợp này có $m<0$ hoặc $m>2$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx^2+2(m+1)x+m-2>0$ có nghiệm.

A. $m\in\mathbb{R}$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $m\in\left(-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải. Đặt $f(x)=mx^2+2(m+1)x+m-2$ và $\Delta'=(m+1)^2-m(m-2)=4m+1$.

- $m=0 \longrightarrow$ bất phương trình trở thành $2x-2>0 \Leftrightarrow x>1$. Do đó $m=0$ thỏa mãn.
- $m>0$, ta biện luận các trường hợp như câu 88. Do đó $m>0$ thỏa mãn.
- $m<0$, ycbt $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{4} \longrightarrow f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x\in(x_1;x_2)$. Do đó $-\dfrac{1}{4}<m<0$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m>-\dfrac{1}{4}$. **Chọn C.**

Vấn đề 8. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Câu 91. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x\ge 0 \\ x^2-4x+3<0 \end{cases}$ là:

A. $S=[1;2)$. **B.** $S=[1;3)$. **C.** $S=(1;2]$. **D.** $S=[2;3)$.

Lời giải. Tập nghiệm của $2-x\ge 0$ là $S_1=(-\infty;2]$.

Tập nghiệm của $x^2-4x+3<0$ là $S_1=(1;3)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(1;2]$. **Chọn C.**

Câu 92. Tìm x thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x^2-11x+28\ge 0 \end{cases}$.

A. $x>3$. **B.** $3<x\le 7$. **C.** $4\le x\le 7$. **D.** $3<x\le 4$.

Lời giải. Tập nghiệm của $x^2-2x-3>0$ là $S_1=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2-11x+28\ge 0$ là $S_2=(-\infty;4]\cup[7;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(-\infty;-1)\cup(3;4]\cup[7;+\infty)$. **Chọn D.**

Câu 93. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-4x+3>0 \\ x^2-6x+8>0 \end{cases}$ là:

A. $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.　　**B.** $S=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$.　　**D.** $S=(1;4)$.

Lời giải. Tập nghiệm của $x^2-4x+3>0$ là $S_1=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2-6x+8>0$ là $S_2=(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **Chọn B.**

Câu 94. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-3x+2\le 0\\ x^2-1\le 0\end{cases}$ là:

A. $S=1$.　　**B.** $S=\{1\}$.　　**C.** $S=[1;2]$.　　**D.** $S=[-1;1]$.

Lời giải. Tập nghiệm của $x^2-3x+2\le 0$ là $S_1=[1;2]$.

Tập nghiệm của $x^2-1\le 0$ là $S_2=[-1;1]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\{1\}$. **Chọn B.**

Câu 95. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases}3x^2-4x+1>0\\ 3x^2-5x+2\le 0\end{cases}$.

A. $x\ge 1$.　　**B.** $x\le\dfrac{1}{3}$.　　**C.** $x\in\varnothing$.　　**D.** $x\le\dfrac{2}{3}$.

Lời giải. Tập nghiệm của $3x^2-4x+1>0$ là $S_1=\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Tập nghiệm của $3x^2-5x+2\le 0$ là $S_2=\left[\dfrac{2}{3};1\right]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\varnothing$. **Chọn C.**

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\begin{cases}-2x^2-5x+4<0\\ -x^2-3x+10>0\end{cases}$?

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

Lời giải. Tập nghiệm của $-2x^2-5x+4<0$ là $S_1=\left(-\infty;\dfrac{-5-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4};+\infty\right)$.

Tập nghiệm của $-x^2-3x+10>0$ là $S_2=(-5;2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\left(-5;\dfrac{-5-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4};2\right)$.

Do đó các giá trị nguyên của x thuộc tập S là $\{-4;1\}$. **Chọn C.**

Câu 97. Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-9<0\\ (x-1)(3x^2+7x+4)\ge 0\end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-1\le x<2$.　　**B.** $-3<x\le-\dfrac{4}{3}$ hoặc $-1\le x\le 1$.

C. $-\dfrac{4}{3}\le x\le -1$ hay $1\le x\le 3$.　　**D.** $-\dfrac{4}{3}\le x\le -1$ hoặc $1\le x<3$.

Lời giải. Tập nghiệm của $x^2-9<0$ là $S_1=(-3;3)$.

Tập nghiệm của $(x-1)(3x^2+7x+4)\ge 0$ là $S_2=\left[\dfrac{-4}{3};-1\right]\cup[1;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\left[\dfrac{-4}{3};-1\right]\cup[1;3)$. **Chọn D.**

Câu 98. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-7x+6<0\\|2x-1|<3\end{cases}$ là:

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải. Tập nghiệm của $x^2-7x+6<0$ là $S_1=(1;6)$.

Tập nghiệm của $|2x-1|<3$ là $S_2=(-1;2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(1;2)$. **Chọn A.**

Câu 99. Hệ bất phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\begin{cases}x^2-2x-3>0\\-2x^2+x-1<0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x^2-2x-3<0\\-2x^2+x-1>0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x^2-2x-3>0\\2x^2+x+1>0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x^2-2x-3<0\\2x^2-x+1>0\end{cases}$.

Lời giải. Đáp án A. Tập nghiệm của $x^2-2x-3>0$ là $S_1=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Tập nghiệm của $-2x^2+x-1<0$ là $S_2=\mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Đáp án B. Tập nghiệm của $x^2-2x-3<0$ là $S_1=(-1;3)$.

Tập nghiệm của $-2x^2+x-1>0$ là $S_2=\varnothing$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\varnothing$.

Đáp án C. Tập nghiệm của $x^2-2x-3>0$ là $S_1=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2+x+1>0$ là $S_2=\mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Đáp án D. Tập nghiệm của $x^2-2x-3<0$ là $S_1=(-1;3)$.

Tập nghiệm của $2x^2-x+1>0$ là $S_2=\mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(-1;3)$. **Chọn B.**

Câu 100. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2+4x+3\geq 0\\2x^2-x-10\leq 0\\2x^2-5x+3>0\end{cases}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Tập nghiệm của $x^2+4x+3\geq 0$ là $S_1=(-\infty;-3]\cup[-1;+\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2-x-10\leq 0$ là $S_2=\left[-2;\dfrac{5}{2}\right]$.

Tập nghiệm của $2x^2-5x+3>0$ là $S_3=(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2\cap S_3=[-1;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

Suy ra nghiệm nguyên là $\{-1;0;2\}$. **Chọn B.**

Câu 101. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+m<0 & (1) \\ 3x^2-x-4\le 0 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>-\frac{8}{3}$. **B.** $m<2$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\ge -\frac{8}{3}$.

Lời giải. Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -1\le x\le \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1=\left[-1;\frac{4}{3}\right]$

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow x<-\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2=\left(-\infty;-\frac{m}{2}\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2=\varnothing \Leftrightarrow -\frac{m}{2}\le -1\Leftrightarrow m\ge 2.$

Chọn C.

Câu 102. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-1\le 0(1) \\ x-m>0(2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ne 1$.

Lời giải. Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Suy ra $S_1=[-1;1]$.

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow x>m$. Suy ra $S_2=(m;+\infty)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow m<1$.

Chọn C.

Câu 103. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x)>0(1) \\ x<m-1(2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m<5$. **B.** $m>-2$. **C.** $m=5$. **D.** $m>5$.

Lời giải. Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -3<x<4$. Suy ra $S_1=(-3;4)$.

Bất phương trình có $S_2=(-\infty;m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow m-1>-3\Leftrightarrow m>-2$.

Chọn B.

Câu 104. Tìm m để $-9<\frac{3x^2+mx-6}{x^2-x+1}<6$ nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $-3<m<6$. **B.** $-3\le m\le 6$. **C.** $m<-3$. **D.** $m>6$.

Lời giải. Bất phương trình đã cho tương tương với

$-9\left(x^2-x+1\right)<3x^2+mx-6<6\left(x^2-x+1\right)$ (do $x^2-x+1>0\forall x\in\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2+(m-9)x+3>0 & (1) \\ 3x^2-(m+6)x+12>0 & (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)}<0 \\ \Delta_{(2)}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2-144<0 \\ (m+6)^2-144<0 \end{cases} \Leftrightarrow -3<m<6.$$

Câu 105. Xác định m để với mọi x ta có $-1\le \frac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7$.

A. $-\frac{5}{3}\le m<1$. **B.** $1<m\le \frac{5}{3}$. **C.** $m\le -\frac{5}{3}$. **D.** $m<1$.

Lời giải. Bất phương trình tương đương $\begin{cases} \dfrac{3x^2+2x+2+m}{2x^2-3x+2} \geq 0 \\ \dfrac{13x^2-26x+14-m}{2x^2-3x+2} > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+2x+2+m \geq 0 (1) \\ 13x^2-26x+14-m > 0 (2) \end{cases}$.

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \leq 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^2 - 4.3(2+m) \leq 0 \\ 26^2 - 4.13(14-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{-5}{3} \\ m < 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 106. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-2mx+1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \neq 1$.

Lời giải. Bất phương trình $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Suy ra $S_1 = (1;+\infty)$.

Bất phương trình $x^2-2mx+1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2-2mx+m^2 \leq m^2-1 \Leftrightarrow (x-m)^2 \leq m^2-1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{m^2-1} \leq x-m \leq \sqrt{m^2-1}$ (điều kiện: $m^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{array}\right.$)

$\Leftrightarrow m-\sqrt{m^2-1} \leq x \leq m+\sqrt{m^2-1}$. Suy ra $S_2 = \left[m-\sqrt{m^2-1}; m+\sqrt{m^2-1}\right]$.

Để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2-1} > 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2-1} > 1-m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-m<0 \\ m^2-1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-m \geq 0 \\ m^2-1 > (1-m)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>1 \\ m \leq -1 \vee m \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq 1 \\ m > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m>1$$

Đối chiếu điều kiện, ta được $m>1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn C.

Câu 107. Tìm m để hệ $\begin{cases} x^2-2x+1-m \leq 0 & (1) \\ x^2-(2m+1)x+m^2+m \leq 0 & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $0 < m < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $0 \leq m \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

C. $0 \leq m < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $0 < m \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta' = m \geq 0$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \left[1-\sqrt{m}; 1+\sqrt{m}\right]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = [m; m+1]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1+\sqrt{m} \\ 1-\sqrt{m} \leq m+1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn B.**

Câu 108. Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-3x-4 \leq 0 (1) \\ (m-1)x-2 \geq 0 (2) \end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1 \le m \le \frac{3}{2}$. **B.** $m \ge \frac{3}{2}$. **C.** $m \in \varnothing$. **D.** $m \ge -1$.

Lời giải. Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow -1 \le x \le 4$. Suy ra $S_1 = [-1;4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \ge 2$: vô nghiệm .

Với $m-1>0 \Leftrightarrow m>1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \ge \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{2}{m-1};+\infty\right)$ .Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \le 4 \Leftrightarrow m \ge \frac{3}{2}$.

Với $m-1<0 \Leftrightarrow m<1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \le \frac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty;\frac{2}{m-1}\right]$ .Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \ge -1 \Leftrightarrow m \le -1$ (không thỏa)

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge \frac{3}{2}$. **Chọn B.**

Câu 109. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2+10x+16 \le 0 (1) \\ mx \ge 3m+1 (2) \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m > -\frac{1}{5}$. **B.** $m > \frac{1}{4}$. **C.** $m > -\frac{1}{11}$. **D.** $m > \frac{1}{32}$.

Lời giải. Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow -8 \le x \le -2$. Suy ra $S_1 = [-8;-2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m=0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x \ge 1$: vô nghiệm .

Với $m>0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \ge \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{3m+1}{m};+\infty\right)$.

Hệbất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.

Với $m<0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \le \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty;\frac{3m+1}{m}\right]$ .Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m} < -8 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{11}$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{11}$. **Chọn C.**

Câu 110. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-2(a+1)x+a^2+1 \le 0 (2) \\ x^2-6x+5 \le 0 (1) \end{cases}$.Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số a là:

A. $0 \le a \le 2$. **B.** $0 \le a \le 4$. **C.** $2 \le a \le 4$. **D.** $0 \le a \le 8$.

Lời giải. Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$. Suy ra $S_1 = [1;5]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = \left[a+1-\sqrt{2a}; a+1+\sqrt{2a}\right]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+\sqrt{2a} \geq 1 \\ a+1-\sqrt{2a} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$. **Chọn A.**