



MỤC LỤC

Chương 4 GIỚI HẠN TRANG 2

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	2
1.1. Giới hạn hữu hạn của dãy số	2
1.1.1. Định nghĩa	2
1.1.2. Một vài giới hạn đặc biệt	2
1.2. Định lý về giới hạn hữu hạn	2
1.3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	3
1.4. Giới hạn vô cực	3
1.4.1. Định nghĩa	3
1.4.2. Một vài giới hạn đặc biệt	3
1.4.3. Định lý	3
1.5. Bài tập	3
BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM	8
2.1. Định nghĩa	8
2.2. Định lý	8
2.3. Bài tập	8
BÀI 3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ	18
3.1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực	18
3.2. Giới hạn vô cực của hàm số	18
3.2.1. Giới hạn vô cực	18
3.2.2. Một vài giới hạn đặc biệt	18
3.3. Bài tập	18
BÀI 4. GIỚI HẠN MỘT BÊN CỦA HÀM SỐ	31
4.1. Định nghĩa	31
4.2. Định lý	31
4.3. Bài tập	31
BÀI 5. HÀM SỐ LIÊN TỤC	39
5.1. Hàm số liên tục tại một điểm	39
5.2. Hàm số liên tục trên một khoảng	39
5.3. Một số định lý cơ bản	40
5.4. Bài tập	40
ÔN TẬP CHƯƠNG	45



Chương 4

GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1.1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

1.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.1.1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 4.1.2. Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

1.1.2. Một vài giới hạn đặc biệt

- ① $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;
- ② $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;
- ③ Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$.

Chú ý. Từ nay về sau thay cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

1.2. Định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 4.1.2.

- ① Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

$$\star \lim (u_n + v_n) = a + b.$$

$$\star \lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b.$$

$$\star \lim (u_n - v_n) = a - b.$$

$$\star \lim \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \frac{a}{b} \text{ (nếu } b \neq 0 \text{)}.$$

- ② Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0. \end{cases}$



1.3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q} \quad (|q| < 1).$$

1.4. Giới hạn vô cực

1.4.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.1.3.

☆ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

☆ Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim (-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nhận xét: $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim (-u_n) = -\infty$.

1.4.2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

- ① $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- ② $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

1.4.3. Định lí

Định lý 4.1.3.

- ① Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- ② Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- ③ Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$.

1.5. Bài tập

Dạng 1.1. Tính giới hạn $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ với $P(n), Q(n)$ là các đa thức

Rút lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu, rồi sử dụng các công thức sau:





$$\star \lim \frac{c}{n^k} = 0, (k \in \mathbb{N}^*, c \in \mathbb{R})$$

$$\star \lim n^k = +\infty (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\star \begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = +\infty$$

$$\star \begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = +\infty$$

$$\star \begin{cases} \lim u_n = +\infty \\ \lim v_n = a < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = -\infty$$

$$\star \begin{cases} \lim u_n = -\infty \\ \lim v_n = a > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = -\infty$$

Ví dụ 1. Tính giới hạn $\lim \frac{4n^2 - n - 1}{2n^2 + 3}$

Bài tập 1. Tính giới hạn $\lim \frac{n^2 - n - 1}{2n^2 + 3n}$

Bài làm

Phương pháp giải nhanh

Nếu bậc tử $P(n)$ bằng bậc mẫu $Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ bằng hệ số bậc cao nhất của tử chia cho hệ số bậc cao nhất của mẫu.

Ví dụ 2. Tính giới hạn $\lim \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}$

Bài tập 2. Tính giới hạn $\lim \frac{n - n + 3}{n^2 + 2n + 1}$

Bài làm



Phương pháp giải nhanh

Nếu bậc tử $P(n)$ nhỏ hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$.

Vì dụ 3. Tính giới hạn $\lim \frac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2}$

Bài tập 3. Tính giới hạn $\lim \frac{-n^2 - 11n + 1}{n - 2}$

Bài làm

Phương pháp giải nhanh

- ☆ Nếu bậc tử $P(n)$ lớn hơn bậc mẫu $Q(n)$ thì $\lim \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$.
- ☆ Để biết là $+\infty$ hay $-\infty$ ta dựa vào dấu của giới hạn trong tích theo quy tắc “cùng dấu thì tích dương, trái dấu thì tích âm”.
- ☆ Về trắc nghiệm, đó chính là **tích** của hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu.

Dạng 1.2. Tính giới hạn $\lim \frac{P(n)}{Q(n)}$ với $P(n), Q(n)$ là các hàm mũ a^n

Áp dụng $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

Sử dụng công thức mũ, rồi chia cả tử và mẫu cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất.

Công thức cần nhớ

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Vì dụ 4. Tính giới hạn $\lim \frac{1 - 3^{n+2}}{2^n + 3^n}$

Bài tập 4. Tính giới hạn

$$\lim \frac{2 - 5^{n-2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$$

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphuc>





Phương pháp giải nhanh

Ta chia cho a^n với $|a|$ là cơ số lớn nhất vì sau khi chia luôn tạo ra cơ số có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1 để áp dụng công thức $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$

Dạng 1.3. Tính giới hạn của dãy số chứa căn thức



Rút lũy thừa bậc cao hoặc liên hợp và sử dụng $\lim n^k = \infty$.

Chú ý. Dấu hiệu nhận dạng liên hợp (dạng $\infty \cdot 0$) là sau khi rút n có mũ cao trong căn và nhóm thừa số, xuất hiện số 0.

Vì dụ 5. Tính giới hạn

$$\lim (n^2 + 3n + 5)$$

Bài tập 5. Tính giới hạn

$$\lim (5n - n^2 + 1)$$

Bài làm

Phương pháp giải nhanh

Cho u_n có dạng đa thức (bậc lớn hơn 0) của n .

- ★ Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số dương thì $\lim u_n = +\infty$.
- ★ Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số âm thì $\lim u_n = -\infty$.



Ví dụ 6. Tính giới hạn

$$\lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n)$$

Bài tập 6. Tính giới hạn

$$\lim (\sqrt{2n^2 - n + 2} - 2n)$$

Bài làm

Ví dụ 7. Tính giới hạn

$$\lim (\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n)$$

Bài tập 7. Tính giới hạn

$$\lim (\sqrt{4n^2 + 2n - 4} - 2n)$$

Bài làm

Chú ý. Liên hợp là hình thức trục căn dựa vào hằng đẳng thức

$$\begin{cases} (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \\ (a \pm b)(a^2 \pm ab + b^2) = a^3 \pm b^3 \end{cases}$$

$$\star \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\star \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{a + b}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$\star \sqrt{a} - b = \frac{a - b^2}{\sqrt{a} + b}$$

$$\star \sqrt[3]{a} - b = \frac{a - b^3}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + b^2}$$

$$\star \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$$

$$\star \sqrt[3]{a} + b = \frac{a + b^3}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + b^2}$$

Ví dụ 8. Tính giới hạn

$$\lim (\sqrt[3]{n + 2} - \sqrt[3]{n})$$

Bài tập 8. Tính giới hạn

$$\lim (\sqrt[3]{2n + 3} - \sqrt[3]{2n})$$

Bài làm



BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

2.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.2.1. Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

2.2. Định lí

Định lý 4.2.1.

① Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \text{ (nếu } M \neq 0 \text{);}$$

② Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

2.3. Bài tập

Dạng 2.1. Hàm số có giới hạn hữu hạn



Ví dụ 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$

Bài tập 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 2x + 10)$

Bài làm

Ví dụ 2. Tính $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x - 4|$

Bài tập 2. Tính $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x - 2|$



Bài làm

Vì dụ 3. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$

Bài tập 3. Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}$

Bài làm

Vì dụ 4. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 2} - x}{x - 1}$

Bài tập 4. Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 2}$

Bài làm

Dạng 2.2. Hàm số có giới hạn hữu hạn vô định $\frac{0}{0}$

Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

- ☆ Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước.
- ☆ Nếu $f(x)$ hay $g(x)$ có chứa căn thức thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.
- ☆ Liên hợp của biểu thức
 - ◇ $\sqrt{a} - b$ là $\sqrt{a} + b$
 - ◇ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ là $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
 - ◇ $\sqrt[3]{a} - b$ là $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + b^2$
 - ◇ $\sqrt[3]{a} + b$ là $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + b^2$

Cần nhớ: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

Rút nhân tử chung

Vì dụ 5. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Bài tập 5. Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

Bài làm



Vì dụ 6. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1}$

Bài tập 6. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

Bài làm

Vì dụ 7. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{3x^2 - x - 2}$

Bài tập 7. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 3x + 1}$

Bài làm

Vì dụ 8. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

Bài tập 8. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$

Bài làm

Vì dụ 9. Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$

Bài tập 9. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{-2x^2 + 6x - 4}$



Bài làm

Vì dụ 10. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^3 - 2x - 1}$

Bài tập 10. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - 3x + 2}$

Bài làm

Vì dụ 11. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

Bài tập 11. Tính $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x^3 + 8}$

Bài làm

Vì dụ 12. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

Bài tập 12. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>



Ví dụ 13. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$

Bài tập 13. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$

Bài làm

Ví dụ 14. Tính
 $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x - 2} + \frac{1}{x^2 - 5x - 6} \right)$

Bài tập 14. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1} \right)$

Bài làm

Nhân lượng liên hợp loại 1



Ví dụ 15. Tính $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6}$

Bài tập 15. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3}$

Bài làm

Ví dụ 16. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$

Bài tập 16. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{4+x}-2}$

Bài làm

Ví dụ 17. Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$

Bài tập 17. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x^2-3x}-x}{2x-6}$

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>



Vì dụ 18. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$

Bài tập 18. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}$

Bài làm

Vì dụ 19. Tính $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{9x - x^2}$

Bài tập 19. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x^2 + x - 10}$

Bài làm

Vì dụ 20. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7-2x} + x - 2}{x^2 - 1}$

Bài tập 20. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 5 - \sqrt{2x^2 + x + 8}}{x^2 + 3x + 2}$



Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>

Vì dụ 21. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2} - 2}{x-2}$

Bài tập 21. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{x^2-1} - 2}{x-3}$

Bài làm

Nhân lượng liên hợp loại 2

Vì dụ 22. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+8} - 3}$

Bài tập 22. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+6}}$

Bài làm



Hằng số vắng

Vì dụ 23. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$

Bài tập 23. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+2} + \sqrt{5x+4} - 5}{x-1}$

Bài làm

Dạng 2.3. Hàm số có giới hạn vô cực vô định $\frac{0}{0}$



Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

☆ Nếu L và $g(x)$ cùng dấu thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

☆ Nếu L và $g(x)$ trái dấu thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$



Vì dụ 24. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{(x - 1)^2}$

Bài tập 24. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 1}{(x - 2)^2}$

Bài làm

Vì dụ 25. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 5}{(x - 2)^2}$

Bài tập 25. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 10}{(x - 3)^2}$

Bài làm

Vì dụ 26. Tính $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^3}$

Bài tập 26. Tính $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 2}{(x - 2)^3}$

Bài làm

BÀI 3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

3.1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa 4.3.1.

- ① Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

- ② Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; a)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Chú ý. Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

3.2. Giới hạn vô cực của hàm số

3.2.1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4.3.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$$

3.2.2. Một vài giới hạn đặc biệt

- ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

3.3. Bài tập



Dạng 3.1. Hàm số có giới hạn vô cực



- ☆ Đối với $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ với $f(x)$ là đa thức ta rút bậc cao nhất của x và áp dụng công thức khi $x \rightarrow \infty$.
- ☆ Đối với $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)}$ với $f(x)$ là đa thức ta rút bậc cao nhất của x ra ngoài dấu căn và áp dụng công thức khi $x \rightarrow \infty$.

Ví dụ 1. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$

Bài tập 1. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 5x^2 + 8x + 1)$

Bài làm

Ví dụ 2. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2)$

Bài tập 2. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 1)$

Bài làm

Ví dụ 3. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1)$

Bài tập 3. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3)$

Bài làm

Ví dụ 4. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

Bài tập 4. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>



Bài làm

Ví dụ 5. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

Bài tập 5. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

Bài làm

Ví dụ 6. Tính
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1})$

Bài tập 6. Tính
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1})$

Bài làm



Phương pháp giải nhanh

- ☆ Giới hạn của hàm đa thức tại $+\infty$ phụ thuộc vào **hệ số** của lũy thừa bậc cao nhất.
- ☆ Giới hạn của hàm đa thức tại $-\infty$ phụ thuộc vào **bậc và hệ số** của lũy thừa bậc cao nhất.

Dạng 3.2. Hàm số có giới hạn vô định $\frac{\infty}{\infty}$



Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ khi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

- ☆ Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến số x trong **mẫu thức** hoặc phân tích tử và mẫu thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước.
- ☆ Nếu $f(x)$ hay $g(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức, thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn), trước khi chia tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của x .

Bậc tử bằng bậc mẫu

Ví dụ 7. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{2x + 1}$

Bài tập 7. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{4x + 1}$

Bài làm

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 8. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2}$

Bài tập 8. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{-x^2 - 2}$

Bài làm

.....

.....

.....

.....

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>



Ví dụ 9. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 6x^3}$

Bài tập 9. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^3 + 3}$

Bài làm

Ví dụ 10. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}$

Bài tập 10. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1}$

Bài làm

Ví dụ 11. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2 (7x+2)^2}{(2x+1)^4}$

Bài tập 11. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2 (7x+2)^2}{(2x+1)^4}$

Bài làm



Ví dụ 12. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{3x - 1}$

Bài tập 12. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{3x - 1}$

Bài làm

Ví dụ 13. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2x}}{3x - 1}$

Bài tập 13. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2x}}{3x - 1}$

Bài làm

Phương pháp giải nhanh

Giới hạn của hàm phân thức $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{Hệ số bậc cao nhất của tử}}{\text{Hệ số bậc cao nhất của mẫu}}$$

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>

**Bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu**

Ví dụ 14. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{2x^2 + x + 1}$

Bài tập 14. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 1}$

Bài làm

Ví dụ 15. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + x}$

Bài tập 15. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 2x + 1}$

Bài làm

Ví dụ 16. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 2x + 1}{x^4 + 3x^2 + x}$

Bài tập 16. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x}{x^4 + 2x + 1}$

Bài làm



Phương pháp giải nhanh

Giới hạn của hàm phân thức $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Bậc tử lớn hơn bậc mẫu

Vì dụ 17. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 2}{3x^2 - x - 1}$

Bài tập 17. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 2}{3x^2 - x - 1}$

Bài làm

.....

.....

.....

.....

.....

Vì dụ 18. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{-x^3 + 2x - 2}$

Bài tập 18. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{-x^3 + 2x - 2}$

Bài làm

.....

.....

.....

.....

.....

Vì dụ 19. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{-x^3 + 2x - 2}$

Bài tập 19. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{-x^3 + 2x - 2}$

Bài làm



Ví dụ 20. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - x + 3}{x - 4}$

Bài tập 20. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2x + 3}{5 - x}$

Bài làm

Ví dụ 21. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - 3)^2 (4x + 7)^3}{(3x - 4)^2 (5x^2 - 1)}$

Bài tập 21. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 3)^2 (4x + 7)^3}{(3x - 4)^2 (5x^2 - 1)}$

Bài làm



Phương pháp giải nhanh

Giới hạn của hàm phân thức $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nếu bậc tử lớn hơn bậc mẫu thì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Dạng 3.3. Hàm số có giới hạn vô định $\infty - \infty$



Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)]$ khi $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ và $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$

- ☆ Nhân hoặc chia với biểu thức liên hợp (nếu có căn thức) hoặc quy đồng để đưa về cùng một phân thức (nếu chưa nhiều phân thức).

Ví dụ 22. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Bài tập 22. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

Bài làm

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 23. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x)$

Bài tập 23. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x)$

Bài làm

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 24. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)$

Bài tập 24. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - x)$



Bài làm

Vì dụ 25. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$

Bài tập 25. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$

Bài làm

Vì dụ 26. Tính
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})$

Bài tập 26. Tính
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})$

Bài làm



Ví dụ 27. Tính

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3})$$

Bài tập 27. Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 4x - 3})$$

Bài làm

Ví dụ 28. Tính

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 2 - \sqrt{9x^2 + 12x - 3})$$

Bài tập 28. Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 2 - \sqrt{9x^2 + 12x - 3})$$

Bài làm

Ví dụ 29. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x)$

Bài tập 29. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x)$

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>

Dạng 3.4. Hàm số có giới hạn vô định $0 \cdot \infty$ 

Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x) v(x)]$ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \pm \infty$

☆ Ta có thể biến đổi $\lim_{x \rightarrow x_0} [u(x) v(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\lim_{x \rightarrow \infty} [u(x) v(x)] =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$ để đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.

☆ Tuy nhiên, trong nhiều bài tập, ta chỉ cần biến đổi đơn giản như đưa biểu thức vào trong/ra ngoài dấu căn, quy đồng mẫu thức ... là đưa về dạng quen thuộc.

Ví dụ 30. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} \right)$

Bài tập 30. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\frac{4x+1}{2x^3+x^2+2}} \right)$

Bài làm

Ví dụ 31. Tính

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2+x) \sqrt{\frac{x-1}{x^4+x^2+1}} \right]$$

Bài tập 31. Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(3+x) \sqrt{\frac{x-2}{x^4+x^2+1}} \right]$$

Bài làm



Ví dụ 32. Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(1 - 5x) \sqrt{\frac{16x + 1}{x^3 - x + 2}} \right]$$

Bài tập 32. Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(1 + x) \sqrt{\frac{4x - 3}{x^3 + 5x - 4}} \right]$$

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>

BÀI 4. GIỚI HẠN MỘT BÊN CỦA HÀM SỐ

4.1. Định nghĩa

Định nghĩa 4.4.1.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0; b)$.

Số L được gọi là **giới hạn bên phải** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

☆ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; x_0)$.

Số L được gọi là **giới hạn bên trái** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

4.2. Định lí

Định lý 4.4.1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

4.3. Bài tập

**Dạng 4.1. Tìm giới hạn một bên của hàm số**

Khi hàm số không xác định tại x_0 thì ta áp dụng các quy tắc về giới hạn vô cực. Đó là các quy tắc áp dụng cho các dạng $L \cdot \infty$; $\frac{L}{\infty}$; $\frac{L}{0}$

Chú ý.

$$\star x \rightarrow x_0^+ \Rightarrow x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$$

$$\star x \rightarrow x_0^- \Rightarrow x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$$

Ví dụ 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{3x + 1}$

Bài tập 1. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 1}{2}$

Bài làm

Ví dụ 2. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 3}{x - 1}$

Bài tập 2. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x - 3}{x - 3}$

Bài làm

Ví dụ 3. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}$

Bài tập 3. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 15}{x - 3}$

Bài làm



Ví dụ 4. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2-x}{3-x}$

Bài tập 4. Tính $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2-x}{4-x}$

Bài làm

Ví dụ 5. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4}$

Bài tập 5. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{2x-2}$

Bài làm

Ví dụ 6. Tính $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2}$

Bài tập 6. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-5}{(x-3)^2}$

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>



Ví dụ 7. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x - 8}{(3 - x)^2}$

Bài tập 7. Tính $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x - 8}{(4 - x)^2}$

Bài làm

Ví dụ 8. Tính $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$

Bài tập 8. Tính $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$

Bài làm

Ví dụ 9. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$

Bài tập 9. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$

Bài làm



Vì dụ 10. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

Bài tập 10. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$

Bài làm

Vì dụ 11. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{5x-15}$

Bài tập 11. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{5x-15}$

Bài làm

Phương pháp giải nhanh

☆ Dạng $\frac{L}{\infty}$: Giới hạn là 0.

☆ Dạng $L \cdot \infty$ và $\frac{L}{0}$: Giới hạn là ∞ .

Dạng 4.2. Giới hạn của hàm số tại một điểm





Vì dụ 12. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x - 9|}{x - 3}$

Bài tập 12. Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|2x - 8|}{x - 4}$

Bài làm

Vì dụ 13. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$

Bài tập 13. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x - 3|}{x - 3}$

Bài làm

Vì dụ 14. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3}$

Bài tập 14. Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - 16|}{x - 4}$

Bài làm



Vì dụ 15. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$

Bài tập 15. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$

Bài làm

Vì dụ 16. Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 5}{x - 4}$

Bài tập 16. Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 5}{x - 5}$

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>

**Ví dụ 17.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 5x^4 - 6x^2 - x & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.**Bài tập 17.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ 1 - \sqrt{7x^2 + 2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.**Bài làm****Ví dụ 18.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.**Bài tập 18.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4 - x^2}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ 1 - 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

Tính $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.**Bài làm**



Dạng 4.3. Tìm tham số m để hàm số có giới hạn tại một điểm cho trước



Ví dụ 19. Tìm m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

có giới hạn tại $x = 1$.

Bài tập 19. Tìm m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$$

có giới hạn tại $x = -1$.

Bài làm

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 5. HÀM SỐ LIÊN TỤC

5.1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 4.5.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

5.2. Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa 4.5.2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

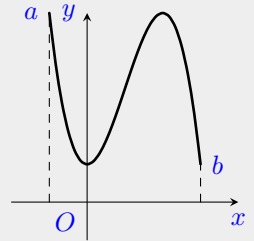
Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng được định nghĩa một cách tương tự.

Nhận xét:



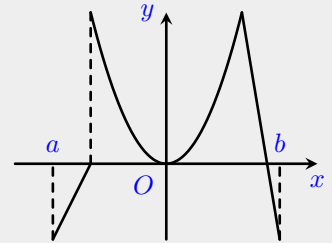
①

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó (tham khảo hình vẽ bên).



②

Hình vẽ bên cho ví dụ về đồ thị của một hàm số không liên tục trên khoảng $(a; b)$.



5.3. Một số định lí cơ bản

Định lý 4.5.1.

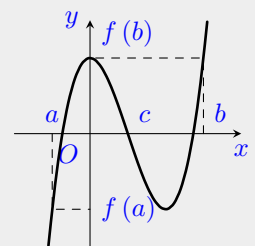
- ① Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.
- ② Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lý 4.5.2. Giả sử $y = f(x)$, $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- ① Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 ;
- ② Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 4.5.3.

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$



5.4. Bài tập

Dạng 5.1. Xét tính liên tục của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 ta làm như sau:

- ☆ Tính $f(x_0)$;
- ☆ Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.



☆ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0 .

☆ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Vì dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \sqrt{x}$$

tại $x_0 = -3$.

Bài tập 1. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

tại $x_0 = -2$.

Bài làm

Vì dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

tại $x_0 = 2$.

Bài tập 2. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

tại $x_0 = 3$.

Bài làm

Vì dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 2$.

Bài tập 3. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{-x - 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2 + 2x & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = -1$.

Bài làm

<https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>



Vì dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 1$.

Bài tập 4. Xét tính liên tục của hàm số

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 1$.

Bài làm

Vì dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 2$.

Bài tập 5. Xét tính liên tục của hàm số

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} & \text{khi } x > -1 \\ \frac{\sqrt{3-x}}{2} & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$$

tại $x_0 = -1$.

Bài làm



Vì dụ 6. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} & \text{khi } x > 3 \\ 2x + 12 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 3$.

Bài tập 6. Xét tính liên tục của hàm số

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - 2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 2$.

Bài làm

Vì dụ 7. Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x+5} - 3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x + 46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 4$.

Bài tập 7. Xét tính liên tục của hàm số

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 1$.

Bài làm



Dạng 5.2. Tìm tham số để hàm số liên tục

**Ví dụ 8.** Tìm m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 1$.**Bài tập 8.** Tìm m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -5m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 0$.

Bài làm

Ví dụ 9. Tìm m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$$

liên tục tại điểm $x_0 = 2$.**Bài tập 9.** Tìm m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \sqrt{m^2x^2 + 8} + 2mx & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Bài làm



Dạng 5.3. Số nghiệm của phương trình trên một khoảng



Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(a; b)$:

- ☆ Chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$.
- ☆ Chứng minh $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Từ đó kết luận phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

Ví dụ 10. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x - 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

Bài làm

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ÔN TẬP CHƯƠNG



Bài tập trắc nghiệm

©âu 1. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 5}{7n^2 + n - 8}$

(A) $\frac{3}{7}$.

(B) $+\infty$.

(C) $-\frac{5}{8}$.

(D) 0.

©âu 2. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} (-3n^3 + 5n - 2)$

(A) -3.

(B) $+\infty$.

(C) $-\infty$.

(D) 3.

©âu 3. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4 \cdot 7^n}{3 \cdot 7^n - 2}$

(A) 1.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{4}{3}$.

(D) -2.

©âu 4. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$

(A) 0.

(B) $+\infty$.

(C) 4.

(D) $\frac{1}{4}$.

©âu 5. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 4x^2 + 10)$

(A) $+\infty$.

(B) 0.

(C) 10.

(D) 15.

©âu 6. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 1}{x - 2}$

- (A) 2. (B) $-\infty$. (C) $+\infty$. (D) 0.
- ©âu 7.** Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1}$
 (A) $\frac{1}{2}$. (B) 2. (C) $-\infty$. (D) $+\infty$
- ©âu 8.** Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x - 4)$
 (A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) -2. (D) 2.
- ©âu 9.** Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2}$
 (A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 3. (D) 0.
- ©âu 10.** Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3x + 2}$
 (A) 0. (B) 1. (C) $\frac{5}{3}$. (D) $+\infty$
- ©âu 11.** Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 2020}$
 (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.
- ©âu 12.** Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$
 (A) -1. (B) 1. (C) 7. (D) $+\infty$
- ©âu 13.** Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n^2 + 1)^4 (n + 2)^9}{n^{17} + 1}$
 (A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 16. (D) 1.
- ©âu 14.** Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x + 3} - 3}{x^2 - 4x + 3}$
 (A) $\frac{1}{6}$. (B) 0. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$
- ©âu 15.** Tính $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-2x + 1}{x - 3}$
 (A) $-\infty$. (B) 2. (C) 0. (D) $+\infty$
- ©âu 16.** Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 - n + 2}$
 (A) 1. (B) $+\infty$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $-\infty$
- ©âu 17.** Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^n - 3^n}{2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n}$
 (A) $+\infty$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) $-\infty$. (D) 1.
- ©âu 18.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2. \end{cases}$ Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi m bằng
 (A) 1. (B) -4. (C) -1. (D) 4.
- ©âu 19.** Tính $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{2x^5 + 1}$
 (A) $\frac{1}{2}$. (B) -2. (C) 2. (D) $-\frac{1}{2}$
- ©âu 20.** Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x + 1}{5x - 1}$
 (A) $\frac{4}{5}$. (B) $\frac{5}{4}$. (C) 0. (D) -1.



❶ Câu 21. Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $-\frac{1}{3}$. (C) -1 . (D) 1 .

❷ Câu 22. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 10} - x)$

- (A) $+\infty$. (B) $-\infty$. (C) 0 . (D) $\frac{1}{2}$.

❸ Câu 23. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

- (A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.
(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot x^4 = +\infty$. (D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = +\infty$.

❹ Câu 24. Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ hỏi $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$

bằng bao nhiêu trong các giá trị sau

- (A) $+\infty$. (B) 300 . (C) 20 . (D) $-\infty$.

❺ Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$, các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- (A) Hàm số liên tục tại $x = 3$. (B) Hàm số liên tục tại $x = 2$.
(C) Hàm số liên tục tại $x = 1$. (D) Hàm số liên tục tại $x = 4$.

❻ Câu 26. Dãy số nào sau có giới hạn bằng $\frac{17}{3}$?

- (A) $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 3n^2}$. (B) $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 3n^2}$.
(C) $u_n = \frac{1 - 2n^2}{5n + 3n^2}$. (D) $u_n = \frac{17n^2 - 2}{5n + 3n^2}$.

❼ Câu 27. Giới hạn của dãy số sau đây bằng bao nhiêu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n - 2}$

- (A) 1 . (B) -1 . (C) 0 . (D) $+\infty$.

❽ Câu 28. Giới hạn của dãy số sau đây bằng bao nhiêu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3 \cdot 5^n + 3}{3 \cdot 2^n + 7 \cdot 4^n}$$

- (A) -1 . (B) 1 . (C) $-\infty$. (D) $+\infty$.

❾ Câu 29. Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$$

- (A) ∞ . (B) 2 . (C) $\frac{1}{8}$. (D) 8 .

❿ Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

- (A) $f(x) = x^2 - 3x$. (B) $f(x) = \frac{3x+5}{x-1}$.
(C) $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$. (D) $f(x) = \frac{1}{x}$.

⓫ Câu 31. Cho hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$. Xét phương trình

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

, trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai ?

- (A) (1) có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
(B) (1) có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.
(C) (1) có nghiệm trên $\mathbb{R}$.
(D) Vô nghiệm.

⓬ Câu 32. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0 ?



(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{2n - 1}$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n - 1}{n - 2n^3}$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + n}$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n}{n^3 + 3n}$.

©âu 33. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là 0 ?

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3 \cdot 2^n - 3^n}$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3}{1 - 2^n}$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n}$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)(n - 3)^2}{n - 2n^3}$.

©âu 34. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n - 3n^2) = -\infty$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = +\infty$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^3}{n^2 + 2n} = -\infty$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2} = -\frac{3}{2}$.

©âu 35. Với k là số nguyên dương, c là hằng số. Kết quả của giới hạn

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^k}$ là

(A) x_0^k .

(B) $+\infty$.

(C) 0.

(D) $-\infty$.

©âu 36. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là -1 ?

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

©âu 37. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $-\frac{1}{2}$?

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{2 - 3n}$.

(B) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{-2n - n^2}$.

(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2 + 3}$.

(D) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^3}{2n^3 + 1}$.

©âu 38. Với k là số nguyên dương. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k$ là

(A) $+\infty$.

(B) $-\infty$.

(C) 0.

(D) x_0^k .

©âu 39. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1 ?

(A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 - 1} - x}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{(x^2 + 1)(2 - x)}}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{8 + 2x} - 2}{\sqrt{x + 2}}$.

©âu 40. Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $+\infty$?

(A) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x + 4}{x - 2}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x + 4}{x - 2}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 4}{x - 2}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 4}{x - 2}$.

©âu 41. Với k là số nguyên dương chẵn. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k$ là

(A) x_0^k .

(B) 0.

(C) $+\infty$.

(D) $-\infty$.

©âu 42. Giới hạn của hàm số nào dưới đây có kết quả bằng 1 ?

(A) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{1 - x}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$.

©âu 43. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau



(A) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} = \frac{3}{2}$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4} = -\frac{1}{16}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x^2 - 1} = -\frac{1}{12}$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{x} = -\frac{1}{6}$.

©âu 44. Tính $\lim \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$

- (A) 1. (B) 0. (C) $\frac{3}{3}$. (D) 2.

©âu 45. Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{3}{2}$. (D) 2.

©âu 46. Tìm m để hàm số $f(x) = x + \sqrt{x - m^2}$ liên tục tại $x = 4$.

- (A) $-2 \leq m \leq 2$. (B) $-2 < m < 2$.
(C) $m \geq 2$. (D) $m \leq -2$.

©âu 47. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a^2 - 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số

liên tục trên $\mathbb{R}$.

- (A) $a = -1; a = 2$. (B) $a = -1; a = -2$.
(C) $a = 1; a = -2$. (D) $a = 1; a = 2$.

©âu 48. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} + 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ 5 - x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Chọn kết luận

sai.

- (A) $f(x)$ liên tục tại $x = 2$. (B) $f(x)$ liên tục trên $[2; +\infty)$.
(C) $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. (D) $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 2)$.

©âu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{2x - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số bị

gián đoạn tại $x = 1$.

- (A) $m \neq \frac{1}{2}$. (B) $m \neq \frac{3}{2}$. (C) $m \neq 1$. (D) $m = \frac{1}{2}$.

©âu 50. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m^2 + 1)x^3 - 4x^2 + 5}{2x^3 + m} = L, (m \in \mathbb{R})$. Tìm m để $L > 1$.

- (A) $m > 1$. (B) $-1 < m < 1$.
(C) $m > 1$ hoặc $m < -1$. (D) $m > -1$.



Bài tập tự luận

Bài tập 11. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{2n^3 - n + 3}$

Bài làm



Đáp số: $\frac{1}{2}$

Bài tập 12. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3^n}{2^n + 4 \cdot 3^n}$

Bài làm

Đáp số: $-\frac{1}{4}$

Bài tập 13. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

Bài làm

Đáp số: 1

Bài tập 14. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

Bài làm



Đáp số: 2

Bài tập 15. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 3} - x)$

Bài làm

Đáp số: $\frac{1}{2}$

Bài tập 16. Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

Bài làm

 <https://www.facebook.com/caothanhphucteacher>



Bài tập 17. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ -2m - 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

Bài làm

Đáp số: $m = 1$

ĐÁP ÁN BÀI 5

1.A	2.C	3.C	4.D	5.C	6.B	7.A	8.B	9.C	10.A
11.C	12.B	13.C	14.A	15.D	16.C	17.B	18.D	19.B	20.B
21.B	22.D	23.D	24.D	25.C	26.D	27.D	28.C	29.C	30.A
31.D	32.D	33.A	34.B	35.C	36.B	37.D	38.D	39.A	40.B
41.C	42.B	43.C	44.A	45.C	46.C	47.C	48.C	49.A	50.C