Kỹ thuật 'chọn' trong trắc nghiệm tích phân và số phức

Gv. Trần Lê Quyền[0]

Một nguyên tắc cơ bản khi xây dựng nên các bài toán đại số chính là: thiết lập sự cân bằng giữa số ẩn số và số phương trình lập nên từ các dữ kiện.

Lấy ý tưởng đó, bài viết này tổng hợp và giới thiệu vài cách xử lí nhanh một số bài toán số phức và tích phân bằng một kiểu chọn đặc biệt. Tôi cố tình không phân chia ra các đề mục để tách biệt giữa số phức và tích phân vì xét dưới góc nhìn này, chúng hoàn toàn giống nhau!

Ví dụ 1. Cho hai số phức $z_1 = a_1 + b_1 i$ và $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(a_1, b_1.a_2, b_2 \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| = m$. Khi đó $a_1a_2 + b_1b_2$ bằng

A. 0 B. 1 C. m D. $m^2 - 1$

Giải. Chọn $z_1 = i, z_2 = 0$ thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| = 1$ thì ta có

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 0.0 + 1.0 = 0.$$

Chọn A. □

Ví dụ 2. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)^2$.

A. $1 - i$ B. $-1 - i$ C. -1 D. $1 + i$

Giải. Chọn $z_2 = 1$ (thỏa mãn $|z_2| = 1$). Vẫn còn lại 2 dữ kiện để khai thác, thế nên đặt $z_1 = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$, ta có

$$\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_1 - z_2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy chọn $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$. Bây giờ thay vào P,

$$P = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}\right)^2 = -1.$$

Chọn C. □

[0] **Nhận luyện thi theo nhóm hoặc cá nhân khu vực Q6, TP.HCM 01226678435**

Sau khi cố định z_2, chúng ta vẫn còn lại 2 dữ kiện (cho phép lập được 2 phương trình). Số phương trình này cân bằng với số ẩn số (phần thực, phần ảo) cần để xác định z_1. Ngoài ra, có thể chọn z_2 khác đi, miễn sao đảm bảo $|z_2| = 1$.

Dưới đây là một ví dụ hoàn toàn tương tự 1 nhưng được phát biểu khác đi.

Ví dụ 3. Cho z_1, z_2 là hai số phức thoả mãn phương trình $|2z - i| = |2 + iz|$, biết $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{3}$

GIẢI. Đặt $z = x + yi$, từ liên hệ $|2z - i| = |2 + iz|$ ta thu được $x^2 + y^2 = 1$ hay $|z_1| = |z_2| = 1$, kết hợp với $|z_1 - z_2| = 1$ ta lại chọn $z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = 1$ để thu được $P = \sqrt{3}$. □

Ví dụ 4. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$ là số thuần ảo.
B. $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$ là số nguyên tố.
C. $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$ là số thực âm.
D. $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = 1$.

GIẢI. Chọn $z_3 = 1$, khi đó ta có $z_1 + z_2 = -1$ nên có thể viết

$$z_1 = x + yi,\ \ z_2 = -1 - x - yi\ (x, y \in \mathbb{R}).$$

Khai thác điều kiện $|z_1| = |z_2| = 1$ đưa tới giải hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (-1 - x)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy chọn $z_1 = 1, z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, thấy chỉ có B đúng. □

Với cùng cách chọn này, ta cũng xử lí được cho bài toán sau:

Ví dụ 5. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ B. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$
C. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$ D. $|z_1^2 + z_2^2 + z_3^2| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$

Ví dụ 6. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right| \leq 2$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = z + \dfrac{1}{z}$.

A. Đường tròn tâm $O, r = 2$ B. Hình tròn tâm $O, r = 2$
C. Đường tròn tâm $O, r = \sqrt[3]{2}$ D. Hình tròn tâm $O, r = \sqrt[3]{2}$

GIẢI. Chọn $z = 1$ thỏa mãn $\left|z^3 + \dfrac{1}{z^3}\right| \leq 2$, khi đó $w = z + \dfrac{1}{z} = 2$ có điểm biểu diễn là $M(2;0)$ mà $OM = 2$ nên loại C và D. Lại chọn $z = i$, khi đó $w = 0$ nên chọn B. □

Ví dụ 7. Cho $\displaystyle\int_0^1 f(3x-1)\mathrm{d}x = 3$. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

A. $\displaystyle\int_{-2}^1 f(x+1)\mathrm{d}x = 9$ B. $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x+1)\mathrm{d}x = 1$
C. $\displaystyle\int_0^1 f(x+1)\mathrm{d}x = 9$ D. $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x+1)\mathrm{d}x = 9$

GIẢI. Chọn $f(x) = 3$, việc này đảm bảo rằng $\displaystyle\int_0^1 f(3x-1)\mathrm{d}x = \int_0^1 3\mathrm{d}x = 3$. Khi đó $f(x+1) = 3$, thay vào các phương án thấy chỉ có A đúng. □

Với chỉ một điều kiện được cho: $\displaystyle\int_0^1 f(3x-1)\mathrm{d}x = 3$, ta cần chọn $f(x)$ sao cho nó phụ thuộc vào 1 ẩn. Chẳng hạn, $f(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$3 = \int_0^1 k.\mathrm{d}x = kx\Big|_0^1 = k,$$

vậy chọn $k = 3$. Có thể chỉ ra qui tắc ở đây là: nếu $\displaystyle\int_a^b f(x) = c$ ($a \neq b$) thì chọn $k = \dfrac{c}{b-a}$. Ngoài ra, cũng có thể chọn $f(x) = kx, f(x) = kx^2, \ldots$.

Ví dụ 8. Nếu $f(1) = 12, f'(x)$ liên tục và $\displaystyle\int_1^4 f'(x)\mathrm{d}x = 17$, giá trị của $f(4)$ bằng

A. 29 B. 5 C. 19 D. 9

GIẢI. Dựa vào số liên hệ được cho, chọn $f(x) = ax + b$, ta có

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ ax\Big|_1^4 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{3} \\ b = \frac{19}{3} \end{cases}$$

Đến đây thu được $f(4) = 29$. □

Ví dụ 9. Cho $f(x)$ là hàm số lẻ có đạo hàm trên $[-3;3]$ và $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x = 20$. Tính

$\int_{-1}^{-3} f(x)\mathrm{d}x$.

A. 20 B. $\frac{15}{4}$ C. -20 D. $-\frac{15}{4}$

Giải. Vì $f(x)$ là hàm số lẻ và điều kiện chỉ sinh ra một phương trình nên chọn $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$. Ta có

$$\left.\frac{ax^2}{2}\right|_{-1}^{3} = 20 \Leftrightarrow a = 5.$$

Bây giờ, thay $f(x) = 5x$ ta tính được $\int_{-1}^{-3} (5x) = 20$, chọn A. □

Nhắc lại, hàm số $f(x)$ với tập xác định D được gọi là *hàm số lẻ* nếu với mọi $x \in D$ ta có

(1) $-x \in D$ và

(2) $f(-x) = -f(x)$

Như vậy $f(x) = ax, g(x) = ax^3 + bx, \ldots$ $(a \neq 0)$ là các hàm số lẻ.

Ngoài ra, nếu thay thế (2) bởi điều kiện $f(-x) = f(x)$ thì khi đó, $f(x)$ là một hàm số chẵn.

Ví dụ 10. Cho $f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_{1}^{3} f(-2x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$.

A. 11 B. 5 C. 14 D. 2

Giải. Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên chọn $f(x) = ax^2 + b$. Khi đó $f(-2x) = 4ax^2 + b$ và ta có hệ

$$\begin{cases} a\frac{x^3}{3} + bx\Big|_{-1}^{2} = 8 \\ 4a\frac{x^3}{3} + bx\Big|_{1}^{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{14} \\ b = \frac{115}{42} \end{cases}$$

Cuối cùng

$$\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{6} \left(-\frac{1}{14}x^2 + \frac{115}{42}\right)\mathrm{d}x = 14.$$

□

Sau cùng là một số bài tập áp dụng.

BT 1. Biết rằng $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 5, \int_3^6 f(x+2)\mathrm{d}x = 7$. Tính $\int_0^4 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. 5 B. 6 C. 7 D. 10

BT 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 9$, $\int_1^9 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính giá trị của biểu thức $\int_0^3 \left[f\left(\frac{x}{3}\right) + f(3x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 4 B. -4 C. 9 D. -9

BT 3. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$, $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó giá trị của tổng $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2 B. 4 C. -2 D. 6

BT 4. Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3], f(0) = 2$ và $\int_0^3 f'(x) = 5$. Tính $f(3)$.

A. 2 B. -3 C. 0 D. 7

BT 5. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x$

A. 12 B. 7 C. 20 D. 13

BT 6. Cho $f(x)$ là hàm số lẻ có đạo hàm trên $[-4;4]$. Biết rằng $\int_{-1}^4 f(x) = 24$ và $\int_0^{-1} f(x) = \frac{3}{4}$. Tính $\int_0^4 f(-x)\mathrm{d}x$.

A. 42 B. -72 C. -42 D. 27

BT 7. Cho z là số phức thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính giá trị của $z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}}$.

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

BT 8. Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z-1}{2+iz}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $|A| \leq 1$ B. $|A| \geq 1$ C. $|A| < 1$ D. $|A| > 1$

BT 9. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$, $|z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. 2 B. 3 C. 1 D. 4