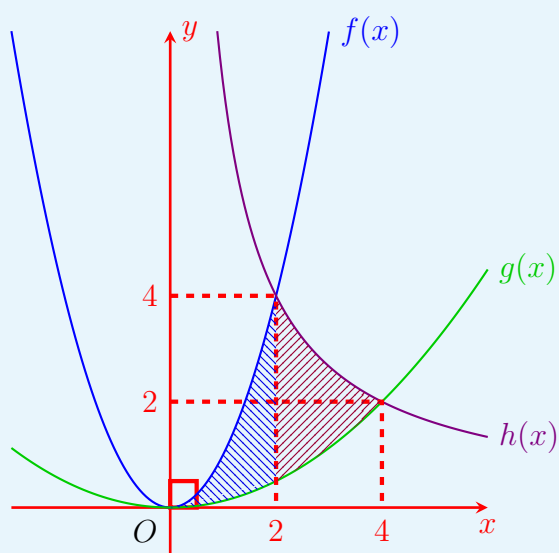


12

CHUYÊN ĐỀ CHỌN LỌC TOÁN

NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN



$$S = \int_0^2 (f(x) - g(x)) \, dx + \int_2^4 (h(x) - g(x)) \, dx$$

MATHEMATICS

MỤC LỤC

CHƯƠNG 3	NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	TRANG	3
Bài 1	Nguyên hàm	3	
A	Các khái niệm	3	
B	Tính chất	3	
C	Các dạng bài tập	3	
	Dạng 1. Sử dụng bảng nguyên hàm	3	
	Dạng 2. Nguyên hàm hàm phân thức	8	
Bài 2	Tích phân	11	
A	Các khái niệm	11	
B	Tính chất	11	
C	Các dạng bài tập	11	
	Dạng 1. Biến đổi và sử dụng bảng nguyên hàm	11	
Bài 3	Phương pháp đổi biến	17	
	Dạng 1. Nguyên hàm đổi biến loại 1	17	
	Dạng 2. Nguyên hàm đổi biến loại 2	21	
	Dạng 3. Tích phân đổi biến	24	
Bài 4	Nguyên hàm, tích phân bằng phương pháp từng phần	33	
	Dạng 1. Nguyên hàm từng phần	33	
	Dạng 2. Tích phân từng phần	42	
Bài 5	Ứng dụng của tích phân	48	
	Dạng 1. Tính diện tích hình phẳng	48	
	Dạng 2. Tính thể tích vật thể	56	
Bài 6	Các dạng toán nâng cao	57	
	Dạng 1. Các bài toán lý thuyết	57	
	Dạng 2. Tích phân hàm ẩn	62	
	Dạng 3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều biểu thức	71	
	Dạng 4. Ứng dụng tích phân giải các bài toán khảo sát hàm số	77	



Thầy NGUYỄN NGỌC DŨNG - THPT TẠ QUANG BỬU

CHỦ ĐỀ 1. NGUYÊN HÀM

A CÁC KHÁI NIỆM

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathcal{K}$.

- $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{K}$.
- Kí hiệu: $\int f(x) dx = F(x) + C, C$ là hằng số.
- Như vậy $\int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{K}$

B TÍNH CHẤT

1. $\int f'(x) dx = f(x) + C;$
2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, k = \text{const};$ (kéo hằng số ra ngoài)
3. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$ (nguyên hàm của tổng bằng tổng các nguyên hàm)

C CÁC DẠNG BÀI TẬP

DẠNG 1. Sử dụng bảng nguyên hàm

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Tính các nguyên hàm sau:

a $\int x^{2017} dx$

b $\int \frac{1}{x^2} dx$

c $\int \sqrt{x} dx$

d $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$

e $\int \frac{4^x}{2^x} dx.$

f $\int \frac{3^x}{2^x} dx$

VÍ DỤ 2. Tính các nguyên hàm sau:

$$\textcircled{a} I = \int \left(\frac{2}{x^3} - x^5 - \frac{1}{3x} + 2 \right) dx$$

$$\textcircled{b} J = \int (x - 2)(x^2 + x + 1) dx$$

$$\textcircled{c} K = \int \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^5} dx$$

$$\textcircled{d} I = \int e^x (e^{-x} + 1) dx.$$

VÍ DỤ 3. Tính các nguyên hàm sau:

$$\textcircled{a} I = \int (\sin x + \cos x) dx$$

$$\textcircled{b} I = \int \cos 3x dx$$

$$\textcircled{c} I = \int \sin(3x - 1) dx$$

$$\textcircled{d} I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

VÍ DỤ 4. Tính các nguyên hàm sau:

$$\textcircled{a} \int x^8 dx$$

$$\textcircled{b} \int \frac{1}{x^5} dx$$

$$\textcircled{c} \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$\textcircled{d} I = \int \left(\frac{3}{x} - \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{5} \right) dx$$

VÍ DỤ 5. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \cdot \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$

VÍ DỤ 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1}{x^2}$

VÍ DỤ 7. Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx.$

(CÁC VÍ DỤ TRẮC NGHIỆM ĐIỂN HÌNH)

VÍ DỤ 8. Cho $\int f(x) dx = 3x^2 + 2x - 3 + C$. Hỏi $f(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = 6x + 2 + C.$

B. $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + C.$

C. $f(x) = 6x + 2.$

D. $f(x) = x^3 + x^2 - 3x.$

☞ Chọn đáp án **C**.

VÍ DỤ 9. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Tìm

$$I = \int [4x + 1 - f(x)] dx.$$

A. $I = 4x + 1 - F(x) + C.$

B. $I = 2x^2 + x - F(x).$

C. $I = 2x^2 + x - F(x) + C.$

D. $I = (2x^2 + x) \cdot F(x) + C.$

☞ Chọn đáp án **C**.

VÍ DỤ 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 + \cos 2x$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $f(0) = \pi.$

B. $f(x) = 2x + \frac{\sin 2x}{2} + \pi.$

C. $f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + \pi.$

D. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

☞ Chọn đáp án **C**.

VÍ DỤ 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2$ là

- A. $x^4 + x^3 + C$. B. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C$. C. $\frac{x^4}{4} + x^3 + C$. D. $3x^2 + 6x + C$.

🐭 Chọn đáp án **(C)**

VÍ DỤ 12. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln |3x+1| + C$. B. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln |3x+1| + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln(3x+1) + C$. D. $\int f(x) dx = \ln |3x+1| + C$.

🐭 Chọn đáp án **(B)**

VÍ DỤ 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ là

- A. $-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$. B. $\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$.
C. $\cos 2x + \sin 3x + C$. D. $-\cos 2x - \sin 3x + C$.

🐭 Chọn đáp án **(A)**

VÍ DỤ 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 5x \sin 2x$ là

- A. $\frac{\cos 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + C$. B. $\frac{\sin 3x}{6} - \frac{\sin 7x}{14} + C$.
C. $\frac{\cos 3x}{6} + \frac{\cos 7x}{14} + C$. D. $\frac{\sin 3x}{6} - \frac{\cos 7x}{14} + C$.

🐭 Chọn đáp án **(B)**

VÍ DỤ 15. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x} + 1$ là

- A. $3e^{3x} + x + C$. B. $3e^{3x} + C$. C. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. D. $\frac{1}{3}e^{3x} + x + C$.

🐭 Chọn đáp án **(D)**

VÍ DỤ 16. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3^{2x} \cdot 7^x$ là

- A. $63^x \cdot \ln 63 + C$. B. $63^x + C$. C. $\frac{21^x}{\ln 21} + C$. D. $\frac{63^x}{\ln 63} + C$.

🐭 Chọn đáp án **(D)**

VÍ DỤ 17. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x+5)^9$ là

- A. $\frac{1}{10}(2x+5)^{10} + C$. B. $18(2x+5)^8 + C$. C. $9(2x+5)^8 + C$. D. $\frac{1}{20}(2x+5)^{10} + C$.

🐭 Chọn đáp án **(D)**

VÍ DỤ 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$. Biết x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính $f(e)$.

- A. $2e + 1$. B. 3 . C. 2 . D. e .

🐭 Chọn đáp án **(B)**

🎀🎀🎀 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 🎀🎀🎀

CÂU 1. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các công thức sau, công thức nào **sai**?

- A. $\int f(x) \cdot g(x) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.
B. $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$.

$$C. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx.$$

$$D. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

CÂU 2. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos 2x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ là

- A. $\frac{1}{2} \sin 2x + 2\pi$. B. $x + \sin 2x + \frac{3\pi}{2}$. C. $\sin x + 2\pi$. D. $2x + 2\pi$.

CÂU 3. Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 3$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}x^4 + 3x + C$. B. $\int f(x) dx = 2x^4 + 3x + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}x^4 + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{4}x^4 + 3x + C$.

CÂU 4. $\int \frac{1}{2x-1} dx$ bằng

- A. $\ln |2x-1| + C$. B. $\frac{1}{2} \ln |2x-1| + C$.
C. $2 \ln |2x-1| + C$. D. $-2 \ln |2x-1| + C$.

CÂU 5. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{7x-5}$ là

- A. $2 \ln |7x-5| + C$. B. $\frac{2}{7} \ln |7x-5| + C$.
C. $\frac{1}{7} \ln |7x-5| + C$. D. $-\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{(7x-5)^2} + C$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x) = 2x + 4x^3$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $\int f(x) dx = 3x^4 + x^2 + C$. B. $\int f(x) dx = x^4 + x^2 + C$.
C. $\int f(x) dx = 3x^4 + 2x^2 + C$. D. $\int f(x) dx = x^4 + 2x^2 + C$.

CÂU 7. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$ là

- A. $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$. B. $-\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$.
C. $-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$. D. $-\frac{2}{x^2} - 2x + C$.

CÂU 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos(2x+3)$ là

- A. $-\frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$. B. $\sin(2x+3) + C$.
C. $\frac{1}{2} \sin(2x+3) + C$. D. $-\sin(2x+3) + C$.

CÂU 9. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \frac{2}{x}$ là

- A. $\cos x - \frac{2}{x^2} + C$. B. $-\cos x + 2 \ln |x| + C$.
C. $-\cos x - 2 \ln |x| + C$. D. $\cos x + 2 \ln |x| + C$.

CÂU 10. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là

- A. $\tan x + C$. B. $\tan x - x + C$. C. $x - \tan x + C$. D. $\tan x + x + C$.

CÂU 11. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 - \sin x$ là

- A. $3x^3 - \cos x + C$. B. $x^3 + \cos x + C$. C. $3x^3 + \cos x + C$. D. $x^3 - \cos x + C$.

CÂU 12. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

- A. $-\frac{\cos 3x}{3} + C$. B. $\frac{\cos 3x}{3} + C$. C. $-\frac{\sin 3x}{3} + C$. D. $-\cos 3x + C$.

CÂU 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 8 \sin x$ là

- A. $x^3 - 8 \cos x + C$. B. $6x - 8 \cos x + C$. C. $6x + 8 \cos x + C$. D. $x^3 + 8 \cos x + C$.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x) = \sin(3x + 1)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C$. B. $\int f(x) dx = -3 \cos(3x + 1) + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \cos(3x + 1) + C$. D. $\int f(x) dx = 3 \cos(3x + 1) + C$.

CÂU 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cos x$ là

- A. $\frac{1}{4} \cos 2x + C$. B. $-\frac{1}{4} \cos 2x + C$. C. $\sin 2x + C$. D. $-\sin x \cos x + C$.

CÂU 16. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ và đồ thị hàm số $y = F(x)$ đi qua điểm $M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$. Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$. B. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$. C. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

CÂU 17. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{-2x+1}$ là

- A. $2e^{-2x+1} + C$. B. $-2e^{-2x+1} + C$. C. $\frac{1}{2}e^{-2x+1} + C$. D. $-\frac{1}{2}e^{-2x+1} + C$.

CÂU 18. Biết $\int f(x) dx = e^x + \sin x + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x) = e^x - \sin x$. B. $f(x) = e^x - \cos x$. C. $f(x) = e^x + \cos x$. D. $f(x) = e^x + \sin x$.

CÂU 19. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 2^x - 3$ là

- A. $\frac{2^x}{\ln 2} + 3x + C$. B. $2^x - \frac{3}{x} + C$. C. $2^x - 3x + C$. D. $\frac{2^x}{\ln 2} - 3x + C$.

CÂU 20. Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3^{2x} \cdot 7^x$ là

- A. $63^x \cdot \ln 63 + C$. B. $63^x + C$. C. $\frac{21^x}{\ln 21} + C$. D. $\frac{63^x}{\ln 63} + C$.

CÂU 21. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)^8$ là

- A. $\frac{(2x - 1)^9}{9} + C$. B. $\frac{(1 - 2x)^9}{18} + C$. C. $\frac{(2x - 1)^9}{18} + C$. D. $\frac{(1 - 2x)^9}{9} + C$.

CÂU 22. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x$ là

- A. $\frac{84^x}{\ln 84} + C$. B. $\frac{2^{2x} \cdot 3^x \cdot 7^x}{\ln 4 \cdot \ln 3 \cdot \ln 7} + C$.
C. $84^x + C$. D. $84^x \cdot \ln 84 + C$.

CÂU 23. Cho hàm số $f(x) = 2e^{2x-1} + \frac{1}{x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\int f(x) dx = e^{2x-1} - \frac{1}{x^2} + C$. B. $\int f(x) dx = 4e^{2x-1} - \frac{1}{x^2} + C$.
C. $\int f(x) dx = 2e^{2x-1} + \ln|x| + C$. D. $\int f(x) dx = e^{2x-1} + \ln|x| + C$.

CÂU 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{(3x - 2)^3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$A. \int f(x) dx = \frac{1}{6(3x-2)^2} + C.$$

$$B. \int f(x) dx = -\frac{1}{6(3x-2)^2} + C.$$

$$C. \int f(x) dx = -\frac{1}{3(3x-2)^2} + C.$$

$$D. \int f(x) dx = \frac{1}{3(3x-2)^2} + C.$$

CÂU 25. Cho $\int f(x) dx = (x^3 + 1)^3 + C$

$$A. f(x) = 3(x^3 + 1)^2.$$

$$B. f(x) = 3x^2(x^3 + 1)^2.$$

$$C. f(x) = 9x^2(x^3 + 1)^2.$$

$$D. f(x) = 18x^2(x^3 + 1)^2.$$

CÂU 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = x + \sin x$ và $f(0) = 1$. Khi đó hàm số $f(x)$ là

$$A. \frac{x^2}{2} - \cos x + 2.$$

$$B. \frac{x^2}{2} - \cos x - 2.$$

$$C. \frac{x^2}{2} + \cos x + \frac{1}{2}.$$

$$D. \frac{x^2}{2} + \cos x.$$

CÂU 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2xf(x) + x^2f'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = 0$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

$$A. -2.$$

$$B. 1.$$

$$C. 6.$$

$$D. -1.$$

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. A	2. A	3. A	4. B	5. B	6. B	7. B	8. C	9. B	10. B
11. B	12. A	13. A	14. A	15. B	16. C	17. D	18. C	19. D	20. D
21. C	22. A	23. D	24. B	25. C	26. A	27. A			

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

Câu 27. Ta có $2xf(x) + x^2f'(x) = 1 \Leftrightarrow [x^2f(x)]' = 1 \Leftrightarrow x^2f(x) = x + C$ (C là hằng số).

Với $x = 1 \Rightarrow 1^2 \cdot f(1) = 1 + C \Leftrightarrow C = f(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

$$\text{Suy ra } x^2f(x) = x - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -2.$$

👉 Chọn đáp án **(A)**

📁 DẠNG 2. Nguyên hàm hàm phân thức

❖❖❖ VÍ DỤ MINH HỌA ❖❖❖

VÍ DỤ 1. Biết $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$ với a, b nguyên. Tính giá trị $T = a + b$.

$$A. T = 1.$$

$$B. T = 0.$$

$$C. T = 6.$$

$$D. T = 5.$$

👉 Chọn đáp án **(A)**

VÍ DỤ 2. Cho một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ là $F(x)$ và $F(0) = 3$. Khi đó $F(x)$ bằng

$$A. x + \frac{2}{(x-1)^2} + 3.$$

$$B. x - 2 \ln|x-1| + 3.$$

C. $x + 2\ln(x - 1) + 3$.

D. $x + 2\ln|x - 1| + 3$.

Chọn đáp án **D**

VÍ DỤ 3. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x + 1}{(x + 1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $2\ln(x + 1) + \frac{1}{x + 1} + C$.

B. $\ln(x + 1) - \frac{2}{x + 1}$.

C. $2\ln(x + 1) + \frac{2}{x + 1} + C$.

D. $2\ln(x + 1) - \frac{1}{x + 1}$.

Chọn đáp án **A**

❖❖❖ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ❖❖❖

CÂU 1. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x}{x + 1}$.

A. $x - \ln(x + 1) + C$.

B. $x + \ln|x + 1| + C$.

C. $x + \ln(x + 1) + C$.

D. $x - \ln|x + 1| + C$.

CÂU 2. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.

A. $x + \frac{1}{x - 2} + C$.

B. $\frac{x^2}{2} + \ln|x - 2| + C$.

C. $x^2 + \ln|x - 2| + C$.

D. $1 + \frac{1}{(x - 2)^2} + C$.

CÂU 3. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(x + 1)^2}{x^2}$.

A. $x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

B. $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

C. $x - 2\ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

D. $x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$.

CÂU 4. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x^2 + 3x + 1}$.

A. $\ln\left|\frac{2x + 1}{x + 1}\right| + C$. B. $\ln\left|\frac{x + 1}{2x + 1}\right| + C$. C. $\ln\left|\frac{2x - 1}{x - 1}\right| + C$. D. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x + 1}{x + 1}\right| + C$.

CÂU 5. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$.

A. $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x - 1| + C$.

B. $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x + 1| + C$.

C. $\frac{(x + 1)^2}{2} + 2\ln|x + 1| + C$.

D. $\frac{x^2}{2} - x + 2\ln|x + 1| + C$.

CÂU 6. Tìm họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

A. $\ln\left|\frac{x - 2}{x - 1}\right| + C$.

B. $\ln\left|\frac{x - 1}{x - 2}\right| + C$.

C. $\ln(x - 2)(x - 1) + C$.

D. $\ln\frac{1}{x - 2} - \ln\frac{1}{x - 1} + C$.

CÂU 7. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$.

A. $\int f(x)dx = -\frac{x^2 + 16}{(x^2 - 16)^2} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 16| + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x - 4}{x + 4}\right| + C$.

D. $\int f(x)dx = \ln|x^2 - 16| + C$.

CÂU 8. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2}$ là

A. $F(x) = 2 \ln |x + 2| - \ln |x + 1| + C.$

B. $F(x) = 2 \ln |x + 1| + \ln |x + 2| + C.$

C. $F(x) = 2 \ln |x + 2| + \ln |x + 1| + C.$

D. $F(x) = 2 \ln |x + 1| - \ln |x + 2| + C.$

CÂU 9. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C.$

C. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+2}{x} \right| + C.$

CÂU 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

A. $\int f(x) dx = -x + 2 \ln |x - 1| + C.$

B. $\int f(x) dx = -x - 2 \ln |x - 1| + C.$

C. $\int f(x) dx = x + 2 \ln |x - 1| + C.$

D. $\int f(x) dx = x - 2 \ln |x - 1| + C.$

CÂU 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 3}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2 - 2x}{2} - 10 \ln |x + 3| + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2 + 4x}{2} - 10 \ln |x + 3| + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2 + 2x}{2} + 10 \ln |x + 3| + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2 - 4x}{2} + 10 \ln |x + 3| + C.$

CÂU 12. Tìm một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{5-x}{3-2x-x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \ln \frac{(x+3)^2}{|x-1|}.$

B. $\int f(x) dx = -\ln \frac{(x+3)^2}{|x-1|} + C.$

C. $\int f(x) dx = \ln \frac{(x+3)^2}{|x-1|} + C.$

D. $\int f(x) dx = -\ln \frac{(x-3)^2}{|x+1|} + C.$

CÂU 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$ là

A. $F(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

B. $F(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{4(1-x)^4} + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{4(1-x)^4} + C.$

CÂU 14. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - x}{(x+1)^2}$ là

A. $F(x) = x + 1 - \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} + C.$

B. $F(x) = x + 1 - 3 \ln |x + 1| - \frac{2}{x+1} + C.$

C. $F(x) = x + 1 - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} + C.$

D. $F(x) = x + 1 - 3 \ln |x + 1| + \frac{2}{x+1} + C.$

CÂU 15. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4x-3}{x^2-3x+2}$ là

A. $F(x) = 4 \ln |x - 2| + \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C.$

B. $F(x) = 4 \ln |x - 2| - \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| + C.$

C. $F(x) = -4 \ln |x - 2| - \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$

D. $F(x) = 4 \ln |x - 2| - \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. A	2. B	3. D	4. A	5. C	6. A	7. B	8. D	9. B	10. C
11. D	12. A	13. A	14. B	15. D					

➡➡➡ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ➡➡➡

📁 CHỦ ĐỀ 2. TÍCH PHÂN

A CÁC KHÁI NIỆM

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

⚠ Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

B TÍNH CHẤT

Ⓐ $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$

Ⓑ $\int_a^a f(x) dx = 0.$

Ⓒ $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

Ⓓ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$

Ⓔ $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

Ⓕ $\int_a^b k dx = k(b - a), k = \text{const.}$

Ⓖ $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$

Ⓗ $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

C CÁC DẠNG BÀI TẬP

📁 DẠNG 1. Biến đổi và sử dụng bảng nguyên hàm

B1. Biến đổi để đưa $f(x)$ về các hàm đơn giản (có thể tìm nguyên hàm được nhờ bảng nguyên hàm).

B2. Tìm một nguyên hàm của các hàm đơn giản đó.

B3. Áp dụng công thức $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

❖❖❖ BÀI TẬP TỰ LUẬN ❖❖❖

BÀI 1. Tính các tích phân sau:

(a) $I = \int_1^2 (3x^2 - 4x + 3) dx$ (b) $J = \int_2^3 \left(\frac{1}{x^2} - x^2 + \frac{1}{2} \right) dx$ (c) $K = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx$

BÀI 2. Tính các tích phân sau:

(a) $I = \int_1^2 \frac{6x^3 - 2x + 3}{x^2} dx$ (b) $J = \int_{-2}^{-1} \frac{(x-1)^2}{x^4} dx$

BÀI 3. Tính các tích phân sau:

(a) $I = \int_0^1 (x + e^x) dx$ (b) $J = \int_1^2 (4x^3 + \sqrt{x}) dx$ (c) $K = \int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

BÀI 4. Tính các tích phân sau:

(a) $I = \int_1^3 (\sqrt{x} - 2\sqrt[5]{x}) dx$ (b) $J = \int_1^4 \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2} dx$

BÀI 5. Tính các tích phân sau:

(a) $I = \int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1} \right) dx$ (b) $J = \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx$ (c) $K = \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

BÀI 6. Tính giá trị của hằng số a để có đẳng thức

$$\int_1^2 (a^2 + (4 - 4a)x + 4x^3) dx = 12.$$

❖❖❖ VÍ DỤ MINH HỌA ❖❖❖

VÍ DỤ 1 (THPTQG 2017). Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = 2$. B. $a - 2b = 0$. C. $a + b = -2$. D. $a + 2b = 0$.

👉 Chọn đáp án (D)

VÍ DỤ 2 (THPTQG 2017). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$.

- A. 7. B. $5 + \frac{\pi}{2}$. C. 3. D. $5 + \pi$.

Chọn đáp án **A**

VÍ DỤ 3 (THPT Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - 2017).

Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$, ta được kết quả là $a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Khi đó, tổng $a + b + c$ bằng

- A. 1. B. -1. C. 2. D. 0.

Chọn đáp án **D**

VÍ DỤ 4 (THPT Chuyên ĐH Sư Phạm Hà Nội - lần 4 - 2017).

Tìm $\alpha < 0$ để $\int_{\alpha}^0 (3^{-2x} - 2 \cdot 3^{-x}) dx \geq 0$.

- A. $-1 \leq \alpha < 0$. B. $\alpha \leq -1$. C. $\alpha \leq -3$. D. $\alpha = -3$.

Chọn đáp án **B**

❖❖❖ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ❖❖❖

CÂU 1. Tìm $a \in \mathbb{R}$ để $\int_1^a (a - 4x) dx \geq 6 - 5a$.

- A. $a \in \emptyset$. B. $a = 2$. C. $a > 0$. D. $a \neq 2$.

CÂU 2. Tính $I = \int_0^2 \min(1; x^2) dx$.

- A. 2. B. $\frac{8}{3}$. C. 0. D. $\frac{4}{3}$.

CÂU 3. Tích phân $I = \int_1^e \frac{dx}{x - 3}$ bằng

- A. $\ln \frac{3 - e}{2}$. B. $\ln \frac{3 - e}{4}$. C. $\ln \frac{3 + e}{4}$. D. $\ln \frac{e - 3}{2}$.

CÂU 4. Cho $a \in (0; \frac{\pi}{2})$. Tính $J = \int_0^a \frac{29}{\cos^2 x} dx$ theo a .

- A. $J = \frac{1}{29} \tan a$. B. $J = -29 \tan a$. C. $J = 29 \tan a$. D. $J = 29 \cot a$.

CÂU 5. Cho số thực $m > 1$. Tính $K = \int_1^m \left(\frac{1}{x^3} + 2 \right) dx$ theo m .

- A. $K = \frac{4m^3 - 1}{2 \cdot m^2} + \frac{3}{2}$. B. $K = 3 - \frac{3}{m^4}$.
C. $K = 2m - \frac{2}{m^2}$. D. $K = \frac{4m^3 - 1}{2 \cdot m^2} - \frac{3}{2}$.

CÂU 6. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} = \ln c$. Giá trị của c là

- A. 9. B. $\sqrt{3}$. C. 3. D. 1.

CÂU 7. Tìm số b âm để tích phân $\int_b^0 (x^2 + x)dx$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. -3. B. -1. C. 0. D. -2.

CÂU 8. Cho tích phân $I = \int_2^3 (x^2 + x + 1)dx$. Ta có

- A. $I = (x^2 + x + 1) \Big|_2^3$. B. $I = (3x^3 + 2x^2 + x) \Big|_2^3$.
C. $I = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_2^3$. D. $I = (2x + 1) \Big|_2^3$.

CÂU 9. Tính giá trị của tích phân $\int_0^{2017\pi} \sin 2x dx$.

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

CÂU 10. Giá trị nào của b để $\int_1^b (2x - 6) dx = 0$?

- A. $b = 0$ hoặc $b = 3$. B. $b = 0$ hoặc $b = 1$.
C. $b = 5$ hoặc $b = 0$. D. $b = 1$ hoặc $b = 5$.

CÂU 11. Biết $\int_0^a (2x - 4) dx = -4$, hãy tìm a .

- A. $a = -4$. B. $a = 4$. C. $a = -2$. D. $a = 2$.

CÂU 12. Biết $\int_0^1 \left(e^{2x} + \frac{3}{x+1} \right) dx = \frac{e^2}{2} + a \ln 2 + b$, trong đó a, b là các số hữu tỉ, tính giá trị của $a + b$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

CÂU 13. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{2017\pi}{2}} \cos x dx$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = -1$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

CÂU 14. Tìm số thực $a < 0$ thỏa mãn $\int_1^a (x^3 - 6x) dx = \frac{875}{4}$.

- A. $a = -4$. B. $a = -5$. C. $a = -6$. D. $a = -3$.

CÂU 15. Tính $\int_1^2 (2ax + b) dx$.

- A. $a + b$. B. $3a + 2b$. C. $a + 2b$. D. $3a + b$.

CÂU 16. Biết $\int_1^3 \frac{1}{2x+3} dx = m \ln 5 + n \ln 3, (m, n \in \mathbb{R})$. Tính $P = m - n$.

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = -\frac{3}{2}$.

CÂU 17. Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx = \frac{1}{64}$ và $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \ln m$, với m, n là các số nguyên dương. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. $1 < n + m < 5$. B. $n = m$. C. $n > m$. D. $n < m$.

CÂU 18. Tìm số thực m sao cho $\int_1^m (x^2 - 2x + 5) dx = \frac{32}{3}$.

- A. $m = 4$. B. $m = 5$. C. $m = 3$. D. $m = 2$.

CÂU 19. Có bao nhiêu số thực $a \in (0; 2017)$ sao cho $I = \int_0^a \cos x dx = 0$?

- A. 642. B. 321. C. 643. D. 322.

CÂU 20. Tìm tham số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m (2x - 3) dx = 2$.

- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{17}{9}$.

CÂU 21. Biết rằng $\int_1^2 \frac{x-1}{x} dx = a - \ln b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tích $P = a \cdot b$.

- A. $P = -4$. B. $P = 4$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

CÂU 22. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = \frac{3}{2}$. Tính $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

- A. $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}$. B. $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e + 2$. C. $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2e + 1$. D. $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e + 1$.

CÂU 23. Có bao nhiêu số thực a thuộc khoảng $(0; 2017)$ sao cho $\int_0^a \sin x dx = 0$?

- A. 1008. B. 320. C. 322. D. 321.

CÂU 24. Tính tích phân $\int_0^{2017\pi} (\sin x + \cos x) dx$.

- A. $I = 3$. B. $I = 1$. C. $I = 0$. D. $I = 2$.

CÂU 25. Tính $I = \int_0^1 x(1+x^2) dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{3}{4}$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = \frac{5}{4}$.

CÂU 26. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ và $F(1) = 3$. Tính $F(0)$.

- A. $F(0) = 1$. B. $F(0) = 0$. C. $F(0) = 5$. D. $F(0) = 3$.

CÂU 27. Xét $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $I = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2-1} = -1.$

B. $I = \frac{1}{x} \Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

C. $I = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$

D. $I = \ln|x|^2 \Big|_1^2 = \ln 4.$

CÂU 28. Giả sử $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị $a - b$ là

A. $-\frac{3}{10}.$

B. $-\frac{1}{6}.$

C. 0.

D. $\frac{1}{5}.$

CÂU 29. Tính tích phân $I = \int_0^1 e^{\frac{1}{2017}x} dx$.

A. $I = \frac{1}{2017} (e^{-2017} - 1).$

B. $I = 2017 (e^{-2017} - 1).$

C. $I = \frac{1}{2017} (e^{2017} - 1).$

D. $I = 2017 \left(e^{\frac{1}{2017}} - 1\right).$

CÂU 30. Có bao nhiêu giá trị của a thỏa $\int_0^a (2x + 5) dx = a - 4$?

A. 0.

B. 1.

C. -2.

D. vô số.

CÂU 31. Nếu $\int_a^b \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} (a \geq 0, b \geq 0)$ thì

A. $b^2 - a^2 = 1.$

B. $b\sqrt{b} - a\sqrt{a} = 1.$

C. $\sqrt{b} - \sqrt{a} = 1.$

D. $b + a = 1.$

CÂU 32. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx$, trong đó a, b là các hằng số, biết $f'(1) = 3$ và

$\int_0^1 f(x) dx = 1$. Tính giá trị của b .

A. $b = -1.$

B. $b = 2.$

C. $b = \frac{3}{2}.$

D. $b = \frac{3}{4}.$

CÂU 33. Biết tích phân $\int_2^4 \frac{dx}{3-2x} = \frac{1}{a} \ln \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương nhỏ hơn 10.

Tính $a + b - c$.

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

CÂU 34. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = 0$. Tính tích phân $I =$

$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

A. $I = -2.$

B. $I = 1.$

C. $I = \frac{1}{2}.$

D. $I = 2.$

CÂU 35. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ và $F(3) = 3$. Tính $F(8)$.

A. $F(8) = 5.$

B. $F(8) = 3.$

C. $F(8) = 7.$

D. $F(8) = 2.$

1. B	2. D	3. A	4. C	5. D	6. B	7. B	8. C	9. D	10. D
11. D	12. B	13. D	14. C	15. D	16. D	17. B	18. C	19. A	20. A
21. D	22. D	23. D	24. C	25. B	26. A	27. C	28. C	29. D	30. B
31. B	32. C	33. A	34. A	35. A					

CHỦ ĐỀ 3. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

DẠNG 1. Nguyên hàm đổi biến loại 1

Công thức: $\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f(t)dt$ với $t = u(x)$

B1: Đặt $t = u(x)$.

B2: Tính vi phân $dt = u'(x)dx$.

B3: Viết lại nguyên hàm ban đầu theo biến t : $\int f(x)dx = \int g(t)dt$.

B4: Tính nguyên hàm theo biến t rồi chuyển lại biến x .



- Nguyên tắc: đặt t bằng cái gì thì dt phải là phần còn lại, do đó cần nhẩm trước xem đặt vậy có phù hợp hay không.
- Trong một số trường hợp, ta không dễ dàng nhìn ra cách đặt ẩn ngay mà phải qua một số phép biến đổi trung gian.

☑ DẤU HIỆU CHUNG:

- ★ Nếu có **căn** thì đặt $t = \text{căn}$.
- ★ Nếu có **mẫu** thì đặt $t = \text{mẫu}$.
- ★ Nếu có **lũy thừa bậc cao** thì đặt $t = \text{lũy thừa bậc cao}$.

☑ DẤU HIỆU CỤ THỂ:

DẤU HIỆU	CÓ THỂ ĐẶT	VÍ DỤ	CÁCH ĐẶT
Có $\sqrt{f(x)}$	Đặt $t = \sqrt{f(x)}$	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$	Đặt $t = \sqrt{x+1}$
Có $(ax+b)^\alpha$	Đặt $t = ax+b$	$\int x(2x-1)^9 dx$	Đặt $t = 2x-1$
Có $a^{f(x)}$	Đặt $t = f(x)$	$\int \frac{e^{\tan x+1}}{\cos^2 x} dx$	Đặt $t = \tan x+1$
Có $\ln x$ và $\frac{dx}{x}$	Đặt $t = \ln x$ hoặc $t =$ biểu thức chứa $\ln x$	$\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx$	$t = \sqrt{2+\ln x}$

Có $e^x dx$	Đặt $t = e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x	$\int e^{2x} \sqrt{2e^x - 1} dx \rightarrow t = \sqrt{2e^x - 1}$
Có $\sin x dx$	Đặt $t = \cos x$	$\int \cos^4 x \sin x dx \rightarrow$ Đặt $t = \cos x$
Có $\cos x dx$	Đặt $t = \sin x$	$\int \cos x \sqrt[3]{\sin x} dx \rightarrow$ Đặt $t = \sin x$
Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	Đặt $t = \tan x$	$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\cos^2 x} dx \rightarrow$ Đặt $t = \tan x$
Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	Đặt $t = \cot x$	$\int \frac{e^{\cot x}}{2 \sin^2 x} dx \rightarrow$ Đặt $t = \cot x$

❖❖❖ VÍ DỤ MINH HỌA ❖❖❖

VÍ DỤ 1 (Hàm căn thức và lũy thừa bậc cao).

Tính các nguyên hàm sau:

a $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$

b $\int x \sqrt[3]{x+1} dx$

c $\int x(2x-1)^{20} dx$

d $\int x(2-3x^2)^8 dx$

e $\int \frac{x}{1+\sqrt{2x+1}} dx$

f $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx$

g $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1-2x^2)^2} dx$

h $\int \frac{(x-1)^{20}}{(x+2)^{22}} dx$

VÍ DỤ 2 (Hàm loga và mũ). Tính các nguyên hàm sau:

a $\int \frac{1 + \ln^2 x}{x} dx$

b $\int \frac{\sqrt{2 + \ln x} \ln x}{x} dx$

c $\int \frac{x \ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx$

d $\int \frac{1}{2x\sqrt{2 + \ln x}} dx$

e $\int \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$

f $\int e^{2x} \sqrt{2e^x - 1} dx$

g $\int \frac{1}{2e^{-x} - 1} dx$

h $\int \frac{e^{\cot x}}{1 - \cos 2x} dx$

VÍ DỤ 3 (Hàm lượng giác dạng $\int \cos^n x \cdot \sin^m x dx$).

Ghi nhớ: Nếu $\sin$ mũ lẻ thì đặt t bằng $\cos$, nếu $\cos$ mũ lẻ thì đặt t bằng $\sin$, còn nếu cả hai đều mũ chẵn thì hạ bậc.

a $\int \cos^4 x \cdot \sin x \, dx$

b $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x \, dx$

c $\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$

d $\int \cos x \cdot \sqrt[3]{\sin x} \, dx$

e $\int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} \, dx$

f $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} \, dx$

VÍ DỤ 4 (Hàm lượng giác tổng hợp).

a $\int \frac{\sin^3 x}{1 + 2 \cos x} \, dx$

b $\int \frac{1 + \tan x}{\cos^2 x} \, dx$

c $\int \frac{\tan x}{\cos^3 x} \, dx$

d $\int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{3} \sin x + 1} \, dx$

VÍ DỤ 5 (Đổi biến theo tan của góc chia đôi).

Tính các nguyên hàm sau:

a $\int \frac{1}{\sin x} \, dx$

b $\int \frac{1}{\cos x} \, dx$

c $\int \frac{1}{\cos x - \sin x + 1} \, dx$

d $\int \frac{\tan^4 x}{\cos 2x} \, dx$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

CÂU 1. Tính các nguyên hàm sau:

a $\int x \sqrt{x+1} \, dx$

b $\int x \sqrt{1-x^2} \, dx$

c $\int (x+2) \sqrt[3]{1-x} \, dx$

d $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+2}} \, dx$

e $\int \frac{x^2}{(x-3)^{21}} \, dx$

f $\int \frac{(x+1)^8}{(2x-1)^{10}} \, dx$

g $\int \frac{x}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{x+2}} \, dx$

CÂU 2. Tính các nguyên hàm sau:

a $\int \sin x \cos^3 x \, dx$

b $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} \, dx$

c $\int e^{2 \cos x} \sin x \, dx$

d $\int \frac{e^{\tan x + 1}}{\cos^2 x} \, dx$

CÂU 3. Tính các nguyên hàm sau:

a $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$

b $\int \frac{2 - \ln^3 x}{x \ln x} \, dx$

c $\int \frac{\ln^2 x \, dx}{x(1 + \sqrt{\ln x + 1})}$

d $\int \frac{e^x \, dx}{1 + \sqrt{e^x + 2}}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Nguyên hàm $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx$ ($x > 0$) bằng

- A. $x + \ln^2 x + C$. B. $\ln^2 x + \ln x + C$.
C. $\frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + C$. D. $x + \frac{1}{2} \ln^2 x + C$.

CÂU 2. Tìm hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = -\sin x(4\cos x + 1)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

- A. $F(x) = \cos 2x + \cos x - 1$. B. $F(x) = -2\cos 2x + \cos x - 3$.
C. $F(x) = \cos 2x + \cos x$. D. $F(x) = -\cos 2x - \cos x - 2$.

CÂU 3. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)^{20}$.

- A. $\int f(x) dx = 22(x+1)^{22} - 22(x+1)^{22} + C$.
B. $\int f(x) dx = \frac{(x+1)^{22}}{22} - \frac{(x+1)^{22}}{22} + C$.
C. $\int f(x) dx = 22(x+1)^{22} + 22(x+1)^{22} + C$.
D. $\int f(x) dx = \frac{(x+1)^{22}}{22} + \frac{(x+1)^{22}}{22} + C$.

CÂU 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2\sqrt{4+x^3}$ là

- A. $2\sqrt{x^3+4} + C$. B. $\frac{2}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C$. C. $2\sqrt{(4+x^3)^3} + C$. D. $\frac{1}{9}\sqrt{(4+x^3)^3} + C$.

CÂU 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và $F(0) = 1$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng

- A. $2 - \ln 2$. B. $-1 + \ln 2$. C. $1 + \ln 2$. D. $1 - \ln 2$.

CÂU 6. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos x \sqrt{\sin x + 1}$.

- A. $F(x) = \frac{1}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C$. B. $F(x) = \frac{1 - 2\sin x - 3\sin^2 x}{2\sqrt{\sin x + 1}}$.
C. $F(x) = \frac{2}{3}(\sin x + 1)\sqrt{\sin x + 1} + C$. D. $F(x) = \frac{1}{3}\sin x \sqrt{\sin x + 1} + C$.

CÂU 7. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

- A. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + \frac{1}{15}$. B. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$.
C. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{1}{15}$. D. $F(x) = \frac{1}{6}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x - \frac{4}{15}$.

CÂU 8. Cho $\int 2x(3x-2)^6 dx = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A, B \in \mathbb{Q}$ và $C \in \mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $12A + 7B$ bằng

- A. $\frac{23}{252}$. B. $\frac{241}{252}$. C. $\frac{52}{9}$. D. $\frac{7}{9}$.

CÂU 9. Xét $I = \int x^3(4x^4 - 3)^5 dx$. Bằng cách đặt $u = 4x^4 - 3$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{4} \int u^5 du.$ B. $I = \frac{1}{12} \int u^5 du.$ C. $I = \frac{1}{16} \int u^5 du.$ D. $I = \int u^5 du.$

CÂU 10. Nguyên hàm $\int \frac{(x-2)^{10}}{(x+1)^{12}} dx$ bằng

A. $-\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$ B. $\frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$
C. $\frac{1}{11} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$ D. $\frac{1}{33} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{11} + C.$

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. C	2. C	3. B	4. B	5. C	6. C	7. C	8. D	9. C	10. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

📁 DẠNG 2. Nguyên hàm đổi biến loại 2

- Có $a^2 + x^2$ thì đặt $x = |a| \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = |a| \cot t$ với $t \in (0; \pi)$.
Ví dụ: $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ ta đặt $x = \tan t$ hoặc $x = \cot t$.
- Có $\sqrt{a^2 + x^2}$ thì đặt $x = |a| \tan t$ với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x = |a| \cot t$ với $t \in (0; \pi)$.
Ví dụ: $\int \sqrt{4+x^2} dx$ ta đặt $x = 2 \tan t$ hoặc $x = 2 \cot t$.
- Có $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì đặt $x = |a| \sin t$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ hoặc $x = |a| \cos t$ với $t \in [0; \pi]$.
Ví dụ: $\int \sqrt{4-x^2} dx$ ta đặt $x = 2 \sin t$ hoặc $x = 2 \cos t$.
- Có $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$ với $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ hoặc $x = \frac{|a|}{\cos t}$ với $t \in [0; \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
Ví dụ: $\int \sqrt{x^2 - 9} dx$ ta đặt $x = \frac{3}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{3}{\cos t}$.

❖❖❖ VÍ DỤ MINH HỌA ❖❖❖

VÍ DỤ 1. Tính các nguyên hàm sau:

Ⓐ $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

Ⓑ $\int \sqrt{4+x^2} dx$

Ⓒ $\int \sqrt{4-x^2} dx$

Ⓓ $\int \sqrt{x^2-9} dx$

Ⓔ $\int \sqrt{1+x^2} dx$

Ⓕ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Ⓖ $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx$

Ⓗ $\int \sqrt{(x-1)(2-x)} dx$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2 + 3} dx$.

A. $\arctan \frac{\sqrt{3}x}{3} + C$.

B. $\frac{1}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}x}{3} + C$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{\sqrt{3}x}{3} + C$.

D. $\sqrt{3} \arctan \frac{\sqrt{3}x}{3} + C$.

CÂU 2. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx$.

A. $\frac{1+x}{\sqrt{3}} + C$.

B. $\arctan(1+x)\sqrt{3} + C$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{1+x}{\sqrt{3}} + C$.

D. $\arctan \frac{1-x}{\sqrt{3}} + C$.

CÂU 3. Tìm nguyên hàm $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$.

A. $\frac{1}{4} \arctan x^4 + C$.

B. $\arctan x^4 + C$.

C. $\frac{1}{8} \arctan x^4 + C$.

D. $\frac{1}{2} \arctan x^4 + C$.

CÂU 4. Tìm nguyên hàm $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

A. $\arctan(\sin x) + C$.

B. $\arcsin(\sin x) + C$.

C. $2 \arctan(\sin x) + C$.

D. $\arctan(\sin \frac{x}{2}) + C$.

CÂU 5. Nếu đặt $x = \sqrt{3} \sin t$ thì nguyên hàm $\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}} dx$ trở thành

A. $\int \sin^2 t dt$.

B. $\int \cos^2 t dt$.

C. $3 \int \sin^2 t dt$.

D. $3 \int \sin^2 t dx$.

CÂU 6. Nếu đặt $x = 2 \sin t$ thì nguyên hàm $\int \sqrt{(4-x^2)^3} dx$ trở thành

A. $\int 4(1 + \cos 2t)^2 dt$.

B. $\int 4(1 - \cos 2t)^2 dt$.

C. $\int 4(\cos 2t - 1)^2 dt$.

D. $\int 4(1 + \cos 2t) dt$.

CÂU 7. Tìm nguyên hàm $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$.

A. $\arctan \frac{x-1}{3} + C$.

B. $3 \arctan \frac{x-1}{3} + C$.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x-1}{3} + C$.

D. $\frac{1}{3} \arctan \frac{x-1}{3} + C$.

CÂU 8. Tính nguyên hàm $\int \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx$.

A. $5 \left(\arccos \frac{x}{5} + \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \right) + C$.

B. $10 \left(\arccos x + \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \right) + C$.

C. $5 \left(\arccos \frac{x}{5} + \sqrt{4-x^2} \right) + C$.

D. $5 \left(\arccos \frac{x}{5} - \frac{1}{2} \sqrt{4-x^2} \right) + C$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. A	5. C	6. A	7. D	8. A
------	------	------	------	------	------	------	------

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

Câu 2. Ta có $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + (\sqrt{3})^2} dx$.

Đặt $x+1 = \sqrt{3} \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $dx = \sqrt{3}(1 + \tan^2 t) dt$. Khi đó, ta có

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int dt = \frac{\sqrt{3}}{3} t + C = \arctan \frac{1+x}{\sqrt{3}} + C.$$

🔍 Chọn đáp án **C**

Câu 3. Ta có $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx = \int \frac{x^3}{1+(x^4)^2} dx$.

Đặt $x^4 = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $x^3 dx = \frac{1}{4}(1 + \tan^2 t) dt$. Khi đó

$$\int \frac{x^3}{1+x^8} dx = \int \frac{x^3}{1+(x^4)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1+\tan^2 t}{1+\tan^2 t} dt = \frac{1}{4} \int dt = \frac{1}{4} t + C = \frac{1}{4} \arctan x^4 + C.$$

🔍 Chọn đáp án **A**

Câu 4. Đặt $\sin x = \tan t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $\cos x dx = (1 + \tan^2 t) dt$. Khi đó

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \frac{1 + \tan^2 t}{1 + \tan^2 t} dt = \int dt = t + C = \arctan(\sin x) + C.$$

🔍 Chọn đáp án **A**

Câu 5. $x = \sqrt{3} \sin t$, suy ra $dx = \sqrt{3} \cos t dt$. Khi đó

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{3-x^2}} dx = \int \frac{3 \sin^2 t \cdot \sqrt{3} \cos t}{\sqrt{3} \cos t} dt = \int 3 \sin^2 t dt.$$

🔍 Chọn đáp án **C**

Câu 6. Đặt $x = 2 \sin t$, suy ra $dx = 2 \cos t dt$. Khi đó

$$\int \sqrt{(4-x^2)^3} dx = \int 16 \cos^4 t dt = \int 16(\cos^2 t)^2 dt = \int 4(1 + \cos 2t)^2 dt.$$

🔍 Chọn đáp án **A**

Câu 7. Ta có $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 9}$.
Đặt $x-1 = 3 \tan t$, ta có

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2 + 9} = \int \frac{1}{\frac{9}{\cos^2 t}} \cdot \frac{3}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{3}t + C = \frac{1}{3} \arctan \frac{x-1}{3} + C.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 8. Đặt $x = 5 \cos 2t$, $t \in (0; \frac{\pi}{2}]$, suy ra $dx = -10 \sin 2t dt$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{5+x}{5-x}} dx &= -10 \int \sqrt{\frac{5(1+\cos 2t)}{5(1-\cos 2t)}} \sin 2t dt = 20 \int \cos^2 t dt \\ &= 10 \int (1 + \cos 2t) dt = 10 \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{x}{5} + \frac{1}{4} \sqrt{4-x^2} \right) + C \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

DẠNG 3. Tích phân đổi biến

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Tích phân $\int_2^7 \frac{x dx}{x^2 + 1}$ bằng $a \ln 2 - b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $2a + b$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.

Chọn đáp án (B)

VÍ DỤ 2. Biết $\int_0^1 x \sqrt{x^2 + 4} dx = \frac{1}{a} (\sqrt{b^3} - c)$ (với $a, b, c \in \mathbb{N}$). Tính $Q = abc$.

- A. $Q = 120$. B. $Q = 15$. C. $Q = -120$. D. $Q = 40$.

Chọn đáp án (A)

VÍ DỤ 3. Biết $I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = ab$.

- A. $P = 15$. B. $P = 10$. C. $P = 20$. D. $P = -10$.

Chọn đáp án (B)

VÍ DỤ 4. Biết $\int_1^e \frac{\sqrt{3 + \ln x}}{x} dx = \frac{a - b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 4$.
Tính giá trị $S = a + b + c$.

- A. $S = 13$. B. $S = 28$. C. $S = 25$. D. $S = 16$.

Chọn đáp án (C)

VÍ DỤ 5. Biết tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + \ln b$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính

$S = a + b$.

A. $S = \frac{5}{4}$.

B. $S = \frac{11}{4}$.

C. $S = \frac{3}{4}$.

D. $S = 2$.

Chọn đáp án **A**.....

❖❖❖ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ❖❖❖

CÂU 1. Cho biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx = a + b \ln 2$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó, đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a - b = 0$.

B. $a^2 - 4b - 1 = 0$.

C. $a^2 - 4b + 1 = 0$.

D. $a^2 - 4b = 0$.

CÂU 2. Biết $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}-1} = a\sqrt{5} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $P = a + b + c$ là

A. $-\frac{5}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 2.

CÂU 3. Cho $I = \int_0^1 x^3 \sqrt[3]{1-x^4} dx$. Đặt $t = \sqrt[3]{1-x^4}$ thì I bằng

A. $-\int_0^1 t^3 dt$.

B. $\int_0^1 \frac{3}{4} t^3 dt$.

C. $\int_0^1 t^3 dt$.

D. $-\int_0^1 \frac{3}{4} dt$.

CÂU 4. Cho $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = a + b \cdot \sqrt{6} + c \cdot \ln \left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12} \right) + d \cdot \ln 2$ với a, b, c, d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a + b + c + d$.

A. $-\frac{3}{20}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{3}{24}$.

D. $-\frac{3}{25}$.

CÂU 5. Cho $\int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}} dx = \frac{a^{2018} - 3^{2018}}{6 \cdot 2018}$. Tính a .

A. 7.

B. 9.

C. 6.

D. 8.

CÂU 6. Biết $I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{x^2-1+\sqrt{x^2+1}} dx = a \ln 5 + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính tổng

$S = 3a + 2b$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. 0.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{5}{3}$.

CÂU 7. Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

A. $I = \int_1^e (3t + 1) dt$.

B. $I = \int_0^1 (3t + 1) dt$.

C. $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{t} dt$.

D. $I = \int_0^1 \frac{3t+1}{e^t} dt$.

CÂU 8. Giả sử $\int_1^3 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \frac{1}{a} \left(b\sqrt{2} - \frac{c\sqrt{10}}{a^3} \right)$ (với $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản).

Khi đó giá trị $a + bc$ bằng

- A. 43. B. 23. C. $y = 33$. D. 13.

CÂU 9. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{5}$.

CÂU 10. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

- A. $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$. B. $I = 2 \int_2^3 \sqrt{t} dt$. C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$. D. $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$.

CÂU 11. Có bao nhiêu giá trị của a trong đoạn $\left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$ thỏa mãn $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \frac{2}{3}$?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

CÂU 12. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x} dx = a\sqrt{5} + b\sqrt{2}$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính giá trị của biểu thức $A = a + b$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{7}{12}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

CÂU 13. Biết rằng $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4\sin x + 7\cos x}{2\sin x + 3\cos x} dx = a + 2\ln \frac{b}{c}$, với $a > 0; b, c \in \mathbb{N}^*$; $\frac{b}{c}$ tối giản.

Hãy tính giá trị biểu thức $P = a - b + c$.

- A. $\pi - 1$. B. $\frac{\pi}{2} + 1$. C. $\frac{\pi}{2} - 1$. D. 1.

CÂU 14. Biết $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c + \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{2}-3)$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -1$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = \frac{5}{2}$.

CÂU 15. Cho tích phân $\int_1^2 \sqrt{\frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^6}} dx = a\sqrt{2} - b\sqrt{5}$ với a, b là các số hữu tỷ. Giá trị của biểu thức $a + b$ bằng

- A. $\frac{7}{8}$. B. $\frac{11}{24}$. C. $\frac{7}{5}$. D. $\frac{11}{5}$.

CÂU 16. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}} = \ln(a\sqrt{6} + b\sqrt{3} + c\sqrt{2} + d)$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $P = a + b + c + d$.

- A. $P = 45$. B. $P = 65$. C. $P = 93$. D. $P = 17$.

CÂU 17. Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = 2 \ln\left(\frac{2 + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 9. D. 7.

CÂU 18. Cho tích phân $I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx = \frac{a}{b} \cdot e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

- A. 24. B. $\frac{1}{6}$. C. 12. D. 1.

CÂU 19. Biết $I = \int_1^2 \frac{x(1 + e^x) + \ln x + 1}{(x \ln x + e^x)^2} dx = \frac{a}{b \ln 2 + e^c} + \frac{2}{e}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 3$. B. $P = 6$. C. $P = 1$. D. $P = 7$.

CÂU 20. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x + \cos x + 2x}{\sin x + 2} dx = \frac{\pi^2}{a} + \ln \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a \cdot b \cdot c$.

- A. $P = 24$. B. $P = 13$. C. $P = 48$. D. $P = 96$.

CÂU 21. Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b - \ln \frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính giá trị của biểu thức $P = ac^3 + b$.

- A. $P = \frac{5}{4}$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = \frac{3}{4}$.

CÂU 22. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + \sin^2 x - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b \ln \frac{\pi}{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính giá trị của biểu thức $T = 8a + b + c$.

- A. 8. B. 3. C. 0. D. 1.

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. A	2. C	3. B	4. B	5. A	6. B	7. B	8. B	9. B	10. A
11. C	12. A	13. B	14. C	15. A	16. D	17. B	18. A	19. C	20. C
21. B	22. D								

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

Câu 4. Ta có $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = \int_1^4 \frac{x\sqrt{25-x^2}}{x^2} dx = I$. Đặt $t = \sqrt{25-x^2} \Rightarrow \begin{cases} -t dt = x dx \\ x^2 = 25 - t^2 \end{cases}$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 2\sqrt{6}$, $x = 4 \Rightarrow t = 3$. Khi đó,

$$\begin{aligned} I &= \int_{2\sqrt{6}}^3 \frac{-t^2 dt}{25-t^2} \\ &= \int_{2\sqrt{6}}^3 \left[1 - \frac{25}{25-t^2} \right] dt \\ &= \int_{2\sqrt{6}}^3 \left[1 - \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5-t} + \frac{1}{5+t} \right) \right] dt \\ &= \left. t + \frac{5}{2} \ln \left| \frac{5-t}{5+t} \right| \right|_{2\sqrt{6}}^3 \\ &= 3 + \frac{5}{2} \ln \frac{1}{4} - 2\sqrt{6} - \frac{5}{2} \ln \frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}} \\ &= 3 - 5 \ln 2 - 2\sqrt{6} + \frac{5}{2} \ln \frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}. \end{aligned}$$

Vậy $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{5}{2}$, $d = -5$ suy ra $a + b + c + d = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 5. Ta có $I = \int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2019}} dx = \int_1^3 \frac{(x+6)^{2017}}{x^{2017}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{6}{x} \right)^{2017} \cdot \frac{1}{x^2} dx$.

Đặt $t = 1 + \frac{6}{x} \Rightarrow$ nếu $x = 1$ thì $t = 7$; nếu $x = 3$ thì $t = 3$; $dt = -\frac{1}{6x^2} dx$.

Khi đó $I = \frac{1}{6} \int_3^7 t^{2017} dt = \frac{7^{2018} - 3^{2018}}{6 \cdot 2018} \Rightarrow a = 7$.

Chọn đáp án (A)

Câu 13. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \cos x - 6 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{2 \sin x + 3 \cos x} d(2 \sin x + 3 \cos x) + \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \ln |2 \sin x + 3 \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \ln 2 - 2 \ln 3 + \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \ln \frac{2}{3} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\pi}{2} - 2 + 3 = \frac{\pi}{2} + 1$.

Chọn đáp án (B)

Câu 14. Ta có $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+x-\sqrt{1+x^2})dx}{2x} = \left(\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} x \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2x^2} dx$.

$= \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - I$.

Xét $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2x^2} dx$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2}$, khi đó $t dt = x dx$.

Ta có

$I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2}{2(t^2-1)} dt$

$= \frac{1}{2} \left[t \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \right]$

$= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \right] \Big|_{\sqrt{2}}^2$

$= \frac{1}{2} \left[2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right]$

$= \frac{1}{2} \left[2 - \sqrt{2} \ln \sqrt{3} - \ln(\sqrt{2}-1) \right]$.

Vậy $I = \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{2}-3)$.

Do đó $P = a + b + c = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C)

Câu 15. Ta có $I = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^6}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{x^6} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \int_1^2 \frac{1}{x^3} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx.$

Đặt $t = \frac{1}{x}$. Khi đó

+) với $x = 1 \Rightarrow t = 1$, với $x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

+) $dt = -\frac{dx}{x^2}.$

Do đó $I = - \int_1^{\frac{1}{2}} t \cdot \sqrt{1+t^2} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t \sqrt{t^2+1} dt.$

Đặt $u = t^2 + 1$. Khi đó

+) với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{5}{4}$, với $t = 1 \Rightarrow u = 2$.

+) $du = 2t dt.$

Do đó $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{4}}^2 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \left(\sqrt{2^3} - \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^3} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{2} - \frac{5}{24} \sqrt{5}.$

Suy ra $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{24} \Rightarrow a + b = \frac{7}{8}.$

Chọn đáp án **A**

Câu 16.

• Đặt $u = \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ ta có $u^2 = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$ nên $\begin{cases} x+1 = \frac{1}{u^2-1} \\ dx = -\frac{2u}{(u^2-1)^2} du. \end{cases}$

Đổi cận $x = 1$ thì $u = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 2$ thì $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$.

• Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+2}} &= \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}} = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \frac{-\frac{2u}{(u^2-1)^2} du}{\frac{1}{u^2-1} \cdot u} = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \frac{-2du}{u^2-1} \\ &= \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= (\ln(u+1) - \ln(u-1)) \Big|_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{4}{3}}} \\ &= \ln \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \ln(2+\sqrt{3})^2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 \\ &= \ln(-14\sqrt{6} + 20\sqrt{3} - 24\sqrt{2} + 35). \end{aligned}$$

• Vậy $a + b + c + d = 17.$

Chọn đáp án (D)

Câu 17. Ta có $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx$

$\Leftrightarrow dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} \right) \Leftrightarrow dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{\sqrt{(x+1)(x+3)}} dx \Leftrightarrow \frac{2dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$.

Khi $x = 0$ thì $t = 1 + \sqrt{3}$; khi $x = 1$ thì $t = 2 + \sqrt{2}$.

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = 2 \int_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} \frac{dt}{t} = 2 \ln |t| \Big|_{1+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{2}} = 2 \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5.$

Chọn đáp án (B)

Câu 18. Ta có $I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$

Xét $I_1 = \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}} dx.$

Đặt $\begin{cases} u = e^{x+\frac{1}{x}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\ v = x. \end{cases}$

Do đó

$I_1 = x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x} \right) e^{x+\frac{1}{x}} dx.$

Suy ra

$I = x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{12}}^{12} = \frac{143}{12} e^{\frac{145}{12}}.$

Vậy $a = 143, b = 12, c = 145, d = 12$ và $bc - ad = 24.$

Chọn đáp án (A)

Câu 19. Ta có

$I = \int_1^2 \frac{x(1+e^x) + \ln x + 1}{(x \ln x + e^x)^2} dx = - \int_1^2 d \left(\frac{x+1}{x \ln x + e^x} \right) = - \frac{x+1}{x \ln x + e^x} \Big|_1^2 = \frac{-3}{2 \ln 2 + e^2} + \frac{2}{e}.$

Suy ra $a = -3, b = c = 2.$ Vậy

$P = a + b + c = -3 + 2 + 2 = 1.$

Chọn đáp án (C)

Câu 20.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x + \cos x + 2x}{\sin x + 2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x(\sin x + 2) + \cos x}{\sin x + 2} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{\cos x}{\sin x + 2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln |\sin x + 2| \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi^2}{8} + \ln \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

$$P = a \cdot b \cdot c = 48.$$

Chọn đáp án (C)

Câu 21. Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2 + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \cos x + \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(x + \cos x)}{x + \cos x} \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + \ln |x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi^2}{8} + 1 + \ln \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \pi^2 + 1 - \ln \frac{2}{\pi}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1}{8}, b = 1, c = 2.$$

$$\text{Vậy } P = ac^3 + b = 2.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 22. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + \sin^2 x - \sin x}{x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 - \cos^2 x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \cos x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \cos x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

$$\text{Xét } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} dx.$$

$$\text{Đặt } x + \cos x = t \Rightarrow (1 - \sin x) dx = dt.$$

$$\text{Suy ra } B = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \ln |t| \Big|_1^{\frac{\pi}{2}} = \ln \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Vậy } I = A + B = \frac{1}{8}\pi^2 + \ln \frac{\pi}{2} - 1 \text{ và do đó } \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow T = 1.$$

Chọn đáp án **D**.

CHỦ ĐỀ 4. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỪNG PHẦN

DẠNG 1. Nguyên hàm từng phần

1. Công thức nguyên hàm từng phần $\int u dv = uv - \int v du.$

2. Để tính nguyên hàm $\int f(x) dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

- **Bước 1.** Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý $dv = v'(x) dx$). Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u'.dx$.
- **Bước 2.** Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.



Việc lựa chọn u nên theo thứ tự sau: **Lô - Đa - Lượng - Mũ**.

❖❖❖ VÍ DỤ MINH HỌA ❖❖❖

VÍ DỤ 1. Hãy tính

a $\int (1 - 2x) e^x dx$

b $\int x e^{-x} dx$

c $\int x \sin^2 x dx$

VÍ DỤ 2. Tìm nguyên hàm các hàm số sau

a $I = \int \ln x dx.$

b $I = \int x \ln(x^2 + 1) dx.$

c $I = \int e^x \cdot \sin x dx.$

Sơ đồ đường chéo

Để đơn giản trong quá trình tính toán, ta có thể sử dụng sơ đồ đường chéo như sau:

a Chia thành 3 cột:

- Cột 1 (cột trái: cột u) luôn lấy đạo hàm tới 0.
- Cột 2 (cột giữa: cột dấu): Bắt đầu từ dấu $+$, sau đó đan dấu $+$, $-$, $+$...
- Cột 3 (cột phải: cột dv), luôn lấy nguyên hàm cho tới khi tương ứng với cột 1.

b Nhân chéo kết quả cột 1 và 3 với nhau với dấu là dấu của cột 2.

c Cộng các kết quả vừa nhân lại.

(đạo hàm) u	dấu	(nguyên hàm) dv
u'	$+$	v
u''	$-$	$\int v$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
0		

✍ Nếu biểu thức cùng 1 dòng có thể rút gọn được thì ta phải rút gọn trước rồi mới làm tiếp.

✍ Chú ý bước chọn v , ta chọn $+C$ linh hoạt sao cho rút gọn được u' .

✍ Sơ đồ đường chéo dừng lại khi hai cột nhân nhau ta tính nguyên hàm được.

✍ Trong trường hợp nguyên hàm xoay vòng, ta dừng lại khi cột 1 và cột 3 trở lại như dòng đầu tiên. Khi đó, ta nối 2 phần tử ở dòng dừng lại, thêm dấu nguyên hàm ở

trước kết quả và coi gạch nối là 1 đường chéo, sử dụng quy tắc đan dấu.

❖❖❖❖ VÍ DỤ MINH HỌA ❖❖❖❖

VÍ DỤ 1. Tính nguyên hàm $I = \int (2x^3 - 3x) e^x dx$.

Lời giải.

(đạo hàm) $u = 2x^3 - 3x$	dấu	(nguyên hàm) $dv = e^x dx$
$6x^2 - 3$	+	e^x
$12x$	-	e^x
12	+	e^x
0	-	e^x

Vậy $I = (2x^3 - 3x)e^x - (6x^2 + 3)e^x + 12x(e^x) - 12e^x + C$.

VÍ DỤ 2. Tính nguyên hàm $I = \int (3x^3 - 2x^2) \sin x dx$.

Lời giải.

(đạo hàm) $u = 3x^3 - 2x^2$	dấu	(nguyên hàm) $dv = \sin x dx$
$9x^2 - 4x$	+	$-\cos x$
$18x - 4$	-	$-\sin x$
18	+	$\cos x$
0	-	$\sin x$

Vậy $I = (3x^3 - 2x^2)(-\cos x) - (9x^2 - 4x)(-\sin x) + (18x - 4)\cos x - 18\sin x + C$.

VÍ DỤ 3. Tính nguyên hàm $I = \int x \ln x dx$.

Lời giải.

(đạo hàm) $u = \ln x$	dấu	(nguyên hàm) $dv = x dx$
$\frac{1}{x}$	+	$\frac{x^2}{2}$
1	-	$\frac{x^2}{2}$
0	-	$\frac{x^2}{4}$

Ở đây, ta thấy $\frac{1}{x}$ và $\frac{x^2}{2}$ có thể rút gọn được với nhau nên ta rút gọn sẽ được 1 và $\frac{x}{2}$.

Vậy $I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$

VÍ DỤ 4. Tính nguyên hàm $I = \int (2x + 1) \ln^3 x \, dx.$

Lời giải.

(đạo hàm) $u = \ln^3 x$	dấu	(nguyên hàm) $dv = (2x + 1) \, dx$
$\frac{3 \ln^2 x}{x}$	+	$x^2 + x$
$3 \ln^2 x$		$x + 1$
$\frac{6 \ln x}{x}$	-	$\frac{x^2}{2} + x$
$6 \ln x$		$\frac{x}{2} + 1$
$\frac{6}{x}$	+	$\frac{x^2}{4} + x$
6		$\frac{x}{4} + 1$
0	-	$\frac{x^2}{8} + x$

Vậy $I = (x^2 + x) \ln^3 x - \left(\frac{x^2}{2} + x\right) (3 \ln^2 x) + \left(\frac{x^2}{4} + x\right) (6 \ln x) - 6 \left(\frac{x^2}{8} + x\right) + C.$

VÍ DỤ 5. Tính nguyên hàm $I = \int \sin x e^x \, dx.$

Lời giải.

(đạo hàm) $u = e^x$	dấu	(nguyên hàm) $dv = \sin x \, dx$
e^x	+	$-\cos x$
e^x		$-\sin x$ (dừng lại)

+

Vậy $I = e^x(-\cos x) - e^x(-\sin x) + \int e^x(-\sin x) + C = e^x(-\cos x) - e^x(-\sin x) - I + C.$

Suy ra $2I = \sin x e^x - \cos x e^x + C \Rightarrow I = \frac{\sin x e^x - \cos x e^x}{2} + C.$

Làm các ví dụ trắc nghiệm sau bằng sơ đồ đường chéo

VÍ DỤ 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x e^x.$

A. $\int f(x) \, dx = (x + 1)e^x + C.$

B. $\int f(x) \, dx = (x - 1)e^x + C.$

C. $\int f(x) \, dx = x e^x + C.$

D. $\int f(x) \, dx = -x e^x + C.$

☞ Chọn đáp án (B).....

VÍ DỤ 7. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x \sin x$.

A. $-x \cos x + \sin x + C$.

B. $x \cos x + \sin x + C$.

C. $x \cos x - \sin x + C$.

D. $x \sin x + \cos x + C$.

Chọn đáp án **A**.....

VÍ DỤ 8. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \ln(x + 2)$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x + 2) - \frac{x^2 + 4x}{4} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2 - 4}{2} \ln(x + 2) - \frac{x^2 - 4x}{4} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^2 - 4}{2} \ln(x + 2) - \frac{x^2 + 4x}{4} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x + 2) + \frac{x^2 + 4x}{4} + C$.

Chọn đáp án **B**.....

VÍ DỤ 9. Nguyên hàm $I = \int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx$ có kết quả là

A. $\frac{x \ln|x| - (x+1) \ln(x+1)}{x} + C$.

B. $\frac{x \ln x - (x+1) \ln(x+1)}{x} + C$.

C. $\frac{\ln|x| + (x+1) \ln(x+1)}{x} + C$.

D. $\frac{\ln x + (x+1) \ln(x+1)}{x} + C$.

Chọn đáp án **A**.....

VÍ DỤ 10. Tính $F(x) = \int x^2 \cos x dx$. Chọn kết quả đúng?

A. $F(x) = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C$.

B. $F(x) = 2x^2 \sin x - x \cos x + \sin x + C$.

C. $F(x) = x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x + C$.

D. $F(x) = (2x + x^2) \cos x - x \sin x + C$.

Chọn đáp án **A**.....

VÍ DỤ 11. Tính nguyên hàm $I = \int (2x^3 - 3x) e^x dx$.

A. $I = (2x^3 - 3x)e^x - (6x^2 + 3)e^x + 12x(e^x) - 12e^x + C$.

B. $I = (3x - 2x^3)e^x + (6x^2 + 3)e^x - 12x(e^x) + 12e^x + C$.

C. $I = (2x^3 - 3x)e^x + (6x^2 + 3)e^x + 12x(e^x) - 12e^x + C$.

D. $I = (3x - 2x^3)e^x - (6x^2 + 3)e^x + 12x(e^x) - 12e^x + C$.

Chọn đáp án **A**.....

VÍ DỤ 12. Tính nguyên hàm $I = \int (3x^3 - 2x^2) \sin x dx$.

A. $I = -(3x^3 - 2x^2) \cos x - (9x^2 - 4x) \sin x + (18x - 4) \cos x - 18 \sin x + C$.

B. $I = -(3x^3 - 2x^2) \cos x + (9x^2 - 4x) \sin x + (18x - 4) \cos x - 18 \sin x + C$.

C. $I = (3x^3 - 2x^2) \cos x - (9x^2 - 4x) \sin x + (18x - 4) \cos x - 18 \sin x + C$.

D. $I = (3x^3 - 2x^2) \cos x + (9x^2 - 4x) \sin x + (18x - 4) \cos x - 18 \sin x + C$.

Chọn đáp án **B**.....

VÍ DỤ 13. Tính nguyên hàm $I = \int x \ln x dx$.

A. $I = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C$.

B. $I = \frac{x^2}{4} \ln x - \frac{x^2}{2} + C$.

$$C. I = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$D. I = \frac{x^2}{4} \ln x + \frac{x^2}{2} + C.$$

Chọn đáp án (C).

VÍ DỤ 14. Tính nguyên hàm $I = \int \sin x \cdot e^x dx$.

$$A. I = \frac{\cos x e^x - \sin x e^x}{2} + C.$$

$$B. I = \frac{\sin x e^x + \cos x e^x}{2} + C.$$

$$C. I = \frac{-\sin x e^x - \cos x e^x}{2} + C.$$

$$D. I = \frac{\sin x e^x - \cos x e^x}{2} + C.$$

Chọn đáp án (D).

❖❖❖❖ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ❖❖❖❖

CÂU 1. Biết $\int x \sin 3x dx = ax \cos 3x - b \sin 3x + C$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị của $a + 6b$ là

$$A. -21.$$

$$B. -7.$$

$$C. -5.$$

$$D. -1.$$

CÂU 2. Cho $I = \int (x - 1) \sin 2x dx$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

$$A. I = -(x - 1) \cos 2x + \int \cos 2x dx.$$

$$B. I = -(x - 1) \cos 2x \int \cos 2x dx.$$

$$C. I = -\frac{1}{2}(x - 1) \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx.$$

$$D. I = -\frac{1}{2}(x - 1) \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx.$$

CÂU 3. Tính $F(x) = \int x \sin x \cos x dx$. Chọn kết quả đúng?

$$A. F(x) = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C.$$

$$B. F(x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{x}{2} \sin 2x + C.$$

$$C. F(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{8} \cos 2x + C.$$

$$D. F(x) = \frac{-1}{4} \sin 2x - \frac{x}{8} \cos 2x + C.$$

CÂU 4. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (8x - 9) \cdot 7^x$.

$$A. \int f(x) dx = \frac{1}{\ln 7} (8x - 9) \cdot 7^x - \frac{8}{\ln 7} \cdot 7^x + C.$$

$$B. \int f(x) dx = \frac{1}{\ln 7} (8x - 9) \cdot 7^x + \frac{8}{\ln 7} \cdot 7^x.$$

$$C. \int f(x) dx = 7^x \cdot \ln 7 \cdot (8x - 9 - 8 \ln 7) + C.$$

$$D. \int f(x) dx = \frac{1}{\ln 7} \cdot 7^x \cdot \left(8x - 9 - \frac{8}{\ln 7} \right) + C.$$

CÂU 5. $F(x) = \int x \cdot e^{\frac{x}{3}} dx$. Chọn kết quả đúng?

$$A. F(x) = 3(x - 3)e^{\frac{x}{3}} + C.$$

$$B. F(x) = (x + 3)e^{\frac{x}{3}} + C.$$

$$C. F(x) = \frac{x - 3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C.$$

$$D. F(x) = \frac{x + 3}{3} e^{\frac{x}{3}} + C.$$

CÂU 6. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)e^{3x}$.

$$A. \int f(x) dx = \frac{1}{3} (x^2 - x) e^{3x} + C.$$

$$B. \int f(x) dx = \frac{(2x - 1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{9} + C.$$

$$C. \int f(x) dx = (x^2 - x) e^{3x} + c.$$

$$D. \int f(x) dx = \frac{(2x - 1)e^{3x}}{3} - \frac{2e^{3x}}{3} + C.$$

CÂU 7. Kết quả của $\int x \cdot 2^x dx$ bằng

$$A. \frac{x \cdot 2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2} + C.$$

$$B. \frac{2^x (x - 1)}{\ln 2} + C.$$

$$C. 2^x (x + 1) + C.$$

$$D. 2^x (x - 1) + C.$$

CÂU 8. Tìm nguyên hàm của hàm số $y = x^3 \ln x$

A. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x + \frac{1}{16}x^4 + C.$
 C. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln^2 x - \frac{1}{16}x^4 + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$
 D. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^3 + C.$

CÂU 9. Biết $\int x \ln(x+1) dx = (ax^2 + bx + c) \ln(x+1) + mx^2 + nx + p$ với $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 1.$ B. $S = \frac{1}{4}.$ C. $S = \frac{1}{2}.$ D. $S = 2.$

CÂU 10. Nguyên hàm $I = \int 2x \ln(1+x) dx$ có kết quả là

A. $(x^2 - 1) \ln(x+1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + C.$ B. $(x^2 + 1) \ln(x+1) - \frac{1}{2}(x^2 - 2x) + C.$
 C. $(x^2 - 1) \ln(x+1) - (x^2 - x) + C.$ D. $(x^2 - 1) \ln(x+1) - 2(x^2 - 2x) + C.$

CÂU 11. Cho $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + 2x + C.$ B. $\int f'(x)e^{2x} dx = -x^2 + x + C.$
 C. $\int f'(x)e^{2x} dx = x^2 - 2x + C.$ D. $\int f'(x)e^{2x} dx = -2x^2 + 2x + C.$

CÂU 12. Cho $I = \int \frac{2x}{\sin^2 x} dx = ax \cot x + b \ln|\sin x| + C$. Giá trị của biểu thức $T = a + b$ bằng bao nhiêu?

A. $T = 0.$ B. $T = 1.$ C. $T = 2.$ D. $T = 3.$

CÂU 13. Nguyên hàm $I = \int x \log x dx$ có kết quả là

A. $\frac{x^2(2 \ln x + 1)}{4 \ln 10} + C.$ B. $\frac{x(2 \ln x - 1)}{4 \ln 10} + C.$
 C. $\frac{x^2(2 \ln x - 1)}{4 \ln 10} + C.$ D. $\frac{x(2 \ln x + 1)}{4 \ln 10} + C.$

CÂU 14. Nguyên hàm $I = \int \frac{x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ có kết quả là

A. $I = 2x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C.$ B. $I = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C.$
 C. $I = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C.$ D. $I = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x + C.$

CÂU 15. Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$ có kết quả là

A. $I = \frac{1}{x \ln x} + C.$ B. $I = \frac{x^2}{\ln x} + C.$ C. $I = -\frac{x}{\ln x} + C.$ D. $I = \frac{x}{\ln x} + C.$

CÂU 16. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{\cos x} \sin 2x$.

A. $\int f(x) dx = -2e^{\cos x} \cos x + 2e^{\cos x} + C.$ B. $\int f(x) dx = 2e^{\cos x} \cos x - 2e^{\cos x} + C.$
 C. $\int f(x) dx = -2e^{\cos x} + C.$ D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{2}e^{\sin x} \cos 2x + C.$

CÂU 17. Tìm họ nguyên hàm $F(x) = \int e^x \ln(e^x + 1) dx$.

A. $F(x) = e^x \ln(e^x + 1) + e^x + C.$ B. $F(x) = e^x \ln(e^x + 1) - e^x + C.$
 C. $F(x) = (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + e^x + C.$ D. $F(x) = (e^x + 1) \ln(e^x + 1) - e^x + C.$

CÂU 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 2x)e^x$ là

- A. x^2e^x . B. $(x^2 - 2x)e^x$. C. $(2x + 2)e^x$. D. $(x^2 + x)e^x$.

CÂU 19. Tính $I = \int x^3 \cdot \sin x \, dx$.

- A. $I = x^3 \cos x - 3x^2 \sin x - 6x \cos x + 6 \sin x + C$.
 B. $I = -x^3 \cos x - 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$.
 C. $I = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$.
 D. $I = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6x \cos x + 6 \sin x + C$.

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. D	2. C	3. A	4. D	5. A	6. B	7. A	8. B	9. C	10. A
11. D	12. A	13. C	14. C	15. D	16. A	17. D	18. A	19. C	

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

Câu 11. Vì $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$ nên $\int f(x)e^{2x} \, dx = x^2 + C_1$ và $f(x)e^{2x} = 2x$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = f(x) \end{cases}$. Do đó

$$\int f'(x)e^{2x} \, dx = f(x)e^{2x} - 2 \int f(x)e^{2x} \, dx = 2x - 2x^2 + C.$$

🔍 Chọn đáp án **(D)**

Câu 12. Đặt $\begin{cases} u = 2x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = 2 dx \\ v = -\cot x \end{cases}$. Do đó

$$I = -2x \cot x + 2 \int \cot x \, dx = -2x \cot x + 2 \ln |\sin x| + C.$$

Vậy $T = a + b = 0$.

🔍 Chọn đáp án **(A)**

Câu 13. Đặt $\begin{cases} u = \log x \\ dv = x \, dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x \ln 10} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2 \ln 10} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4 \ln 10} + C \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2 \ln 10} - \frac{x^2}{4 \ln 10} + C = \frac{x^2 (2 \ln x - 1)}{4 \ln 10} + C. \end{aligned}$$

🔍 Chọn đáp án **(C)**

Câu 14. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ dv = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\ v = \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$. Do đó

$$I = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int dx = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - x + C.$$

Chọn đáp án **C**

Câu 15. $I = \int \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x} \right) dx = \int \frac{1}{\ln x} dx - \int \frac{1}{\ln^2 x} dx.$

Xét $A = \int \frac{1}{\ln x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{\ln x} \\ dv = dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = -\frac{1}{x \ln^2 x} dx \\ v = x \end{cases}$.

Do đó $A = \frac{x}{\ln x} + \int \frac{1}{\ln^2 x} dx.$

Vậy $I = \frac{x}{\ln x} + \int \frac{1}{\ln^2 x} dx - \int \frac{1}{\ln^2 x} dx = \frac{x}{\ln x} + C.$

Chọn đáp án **D**

Câu 16. $\int e^{\cos x} \sin 2x dx = \int e^{\cos x} \cdot 2 \sin x \cos x dx.$

Đặt $t = \cos x$, ta có $dt = -\sin x dx$. Do đó

$$\int e^{\cos x} \sin 2x dx = \int (-2t)e^t dt.$$

Đặt $\begin{cases} u = -2t \\ dv = e^t dt \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = -2 dt \\ v = e^t \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned} \int e^{\cos x} \sin 2x dx &= -2te^t + \int 2e^t dt = -2te^t + 2e^t + C \\ &= -2e^{\cos x} \cos x + 2e^{\cos x} + C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

Câu 17. Đặt $t = e^x + 1$, ta có $dt = e^x dx$. Do đó $\int e^x \ln(e^x + 1) dx = \int \ln t dt.$

Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{t} dt \\ v = t \end{cases}$. Do đó

$$\int \ln t dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + C = (e^x + 1) \ln(e^x + 1) - e^x + C.$$

Chọn đáp án **D**

DẠNG 2. Tích phân từng phần

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

- A. $I = \frac{\pi}{2}$. B. $I = \frac{\pi}{2} - 1$. C. $I = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}$. D. $I = \frac{\pi}{3}$.

Chọn đáp án (B).

VÍ DỤ 2. Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} \, dx = ae^2 + b$ (a, b là các số hữu tỷ). Khi đó tổng $a + b$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{4}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D).

VÍ DỤ 3. Cho $b > a > -1$. Tích phân $I = \int_a^b \ln(x+1) \, dx$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - a + b$. B. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - b + a$.
C. $I = \frac{1}{x+1} \Big|_a^b$. D. $I = x \ln(x+1) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{x}{x+1} \, dx$.

Chọn đáp án (B).

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x(f'(x) - 2) \, dx = f(1)$.

Giá trị của $I = \int_0^1 f(x) \, dx$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. -2.

Chọn đáp án (C).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho biết $\int_0^1 x e^{-x} \, dx = a + \frac{b}{e}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

- A. 7. B. 5. C. 3. D. 4.

CÂU 2. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx = \frac{e^a + 1}{b}$ với $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $\sin a + \cos 2a + b$ bằng

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 0.

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $\int_1^2 (x-1)f'(x) \, dx = a$. Tính $\int_1^2 f(x) \, dx$ theo a và $b = f(2)$.

- A. $a - b$. B. $a + b$. C. $b - a$. D. $-b - a$.

CÂU 4. Biết $\int_0^3 x \ln(x^2 + 16) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + \frac{c}{2}$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

- A. $T = 2$. B. $T = -16$. C. $T = -2$. D. $T = 16$.

CÂU 5. Biết $I = \int_1^2 (3x^2 + \ln x) dx = a + b \ln 2$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 4$. B. $S = 6$. C. $S = 2$. D. $S = 8$.

CÂU 6. Biết $I = \int_0^1 x \ln(2 + x^2) dx = \frac{a}{2} \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{2}$ với a, b, c là các số nguyên. Tính tổng $a + b + c$.

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_0^2 x \cdot f'(2x) dx$.

- A. $I = 12$. B. $I = 7$. C. $I = 13$. D. $I = 20$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$ và thỏa mãn $\int_0^2 x(f'(x) - 1) dx = 2f(2)$.

Tính giá trị của $I = \int_0^2 f(x) dx$.

- A. 1. B. 2. C. -1. D. -2.

CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 1$; $f'(0) = 2021$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $\int_0^1 f''(x)(1 - x) dx = -2021$. B. $\int_0^1 f''(x)(1 - x) dx = 2021$.
C. $\int_0^1 f''(x)(1 - x) dx = 1$. D. $\int_0^1 f''(x)(1 - x) dx = -1$.

CÂU 10. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $g(0) = -2$, $g(1) = 4$ và $\int_0^1 f'(x)g(x) dx = 7$. Tính $\int_0^1 f(x)g'(x) dx$.

- A. $I = -3$. B. $I = 17$. C. $I = 3$. D. $I = -17$.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. Biết $\frac{1}{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số

$y = f'(x) \ln x$ và $f(2) = \frac{1}{\ln 2}$. Khi đó $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx$ bằng

- A. $-\frac{7}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{4}$.

CÂU 12. Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ (với a là số thực, $b; c$ là số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị $T = 2a + 3b + c$.

A. $T = -6$.

B. $T = 6$.

C. $T = 4$.

D. $T = 5$.

CÂU 13. Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{1}{2}$.

C. $S = \frac{1}{3}$.

D. $S = \frac{5}{6}$.

CÂU 14. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \frac{a}{e+1} + b \ln \frac{2}{e+1} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b + c$.

A. 1.

B. -1.

C. 3.

D. 2.

CÂU 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tích phân $I = \int_0^1 f'(\sqrt{x}) dx$ bằng

A. $I = 2$.

B. $I = -2$.

C. $I = -1$.

D. $I = 1$.

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$.

A. $I = \frac{2}{3}$.

B. $I = -\frac{4}{3}$.

C. $I = \frac{4}{3}$.

D. $I = -\frac{2}{3}$.

🔗🔗🔗 BẢNG ĐÁP ÁN 🔗🔗🔗

1. B	2. A	3. C	4. B	5. D	6. C	7. B	8. D	9. A	10. C
11. D	12. C	13. D	14. A	15. B	16. C				

🔗🔗🔗 HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU 🔗🔗🔗

Câu 1. Xét tích phân $I = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$. Do đó

$$I = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{e} - (e^{-1} - 1) = 1 - \frac{2}{e}.$$

Suy ra $a = 1, b = -2$. Vậy $a^2 + b^2 = 5$.

🔗 Chọn đáp án **(B)**

Câu 2. Ta dùng sơ đồ đường chéo để giải tích phân này như sau

(đạo hàm) $u = e^x$	dấu	(nguyên hàm) $dv = \sin x \, dx$
e^x	+	$-\cos x$
e^x	-	$-\sin x$ (dừng lại)
	+	

Do đó

$$\begin{aligned}
 I &= (-e^x \cos x + e^x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \\
 \Leftrightarrow 2I &= (-e^x \cos x + e^x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 \Leftrightarrow I &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}.
 \end{aligned}$$

Suy ra $a = \frac{\pi}{2}$ và $b = 2$.

Vậy $\sin a + \cos 2a + b = 2$.

Chọn đáp án A

Câu 4. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 + 16) \\ dv = x \, dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 16} \, dx \\ v = \frac{1}{2}(x^2 + 16) \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 x \ln(x^2 + 16) \, dx &= \left[\frac{1}{2}(x^2 + 16) \cdot \ln(x^2 + 16) \right] \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{2x}{x^2 + 16} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 16) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \ln 25 - \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \ln 16 - \int_0^3 x \, dx \\
 &= 25 \ln 5 - 16 \ln 4 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 \\
 &= 25 \ln 5 - 32 \ln 2 - \frac{9}{2}.
 \end{aligned}$$

Suy ra $a = 25$, $b = -32$, $c = -9$.

Vậy $T = a + b + c = 25 - 32 - 9 = -16$.

Chọn đáp án B

Câu 9. Đặt $\begin{cases} u = 1 - x \\ dv = f''(x) dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = -dx \\ v = f'(x) \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 f''(x)(1-x) dx &= (1-x)f'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x) dx \\ &= 0 - f'(0) + f(x) \Big|_0^1 = -f'(0) + f(1) - f(0) \\ &= -2021 + 1 - 1 = -2021. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

Câu 10. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = g'(x) dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = g(x) \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x) dx \\ &= f(1)g(1) - f(0)g(0) - 7 = 2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2) - 7 = 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

Câu 11. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{dx}{x} \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \ln x \end{cases}$. Do đó

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = f(x) \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 f'(x) \ln x dx = 1 - \frac{1}{x^2} \Big|_1^2 = \frac{7}{4}.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 12. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$. Do đó

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Suy ra $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$. Vậy $T = 4$.

Chọn đáp án **C**

Câu 13. Đặt $\begin{cases} u = x + \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{x+1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$. Do đó

$$I = -\frac{(x + \ln x)}{x + 1} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = -\frac{2 + \ln 2}{3} + \frac{1}{2} + \ln x \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}.$$

Suy ra $a = 2, b = 3, c = 6$.

Vậy $S = \frac{a+b}{c} = \frac{5}{6}$.

Chọn đáp án **(D)**.

Câu 14. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(1+x)^2} \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{1+x} + 1 = \frac{x}{1+x} \end{cases}$. Do đó

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= \frac{x \ln x}{1+x} \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{e}{1+e} - \ln|1+x| \Big|_1^e \\ &= \left(\frac{1}{1+e} - 1 \right) - \ln(1+e) + \ln 2 \\ &= \frac{1}{1+e} + \ln \frac{2}{1+e} - 1. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 1, b = 1, c = -1$. Vậy $a + b + c = 1$.

Chọn đáp án **(A)**.

Câu 15. Đặt $t = \sqrt{x}$, ta có $t^2 = x$ và $2t dt = dx$. Do đó $\frac{I}{2} = \int_0^1 t f'(t) dt$.

Đặt $\begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$. Do đó $\frac{I}{2} = t f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt = -1$.

Vậy $I = -2$.

Chọn đáp án **(B)**.

Câu 16. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x \cdot f'(\sin x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 2 \sin x \\ du = \cos x \cdot f'(\sin x) dx \end{cases}$, ta có $\begin{cases} du = 2 \cos x dx \\ v = f(\sin x) \end{cases}$. Do đó

$$I = (2 \sin x \cdot f(\sin x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \cdot f(\sin x) dx = 2 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx.$$

Tính $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$. Đặt $t = \sin x$, ta có $dt = \cos x dx$. Do đó

$$I_1 = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = 2 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án C

CHỦ ĐỀ 5. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

DẠNG 1. Tính diện tích hình phẳng

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

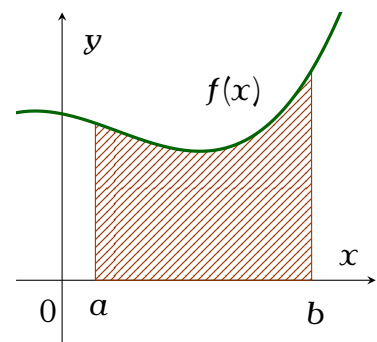
CÂU 1. Tìm diện tích S của miền phẳng gạch chéo trong hình bên.

A. $S = - \int_a^b f(x) dx.$

B. $S = \int_a^b f(x) dx.$

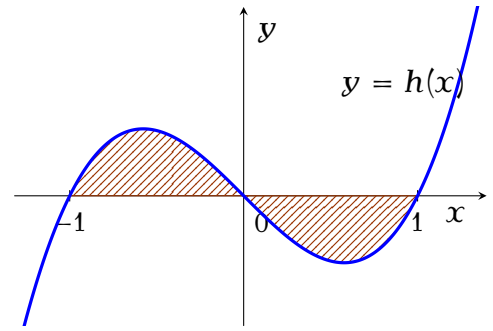
C. $S = - \int_b^a f(x) dx.$

D. $S = \int_a^b -f(x) dx.$



CÂU 2. Cho đồ thị hàm số $y = h(x)$. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên bằng

- A. $\int_{-1}^0 h(x) dx + \int_0^1 h(x) dx$.
 B. $\int_{-1}^1 h(x) dx$.
 C. $\int_{-1}^0 h(x) dx + \int_1^0 h(x) dx$.
 D. $-\int_{-1}^0 h(x) dx + \int_0^1 h(x) dx$.



CÂU 3. Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành.

- A. $\frac{4}{3}$. B. $-\frac{4}{3}\pi$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}\pi$.

CÂU 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x\sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$.

- A. $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$. B. $\frac{3 - \sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{3\sqrt{2} - 1}{3}$. D. $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}$.

CÂU 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2 - x^2$ và $y = x$.

- A. 5. B. 7. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

CÂU 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = \frac{x^2}{4}$ và $y = -\frac{x^2}{2} + 3x$.

- A. 12. B. 8. C. 4. D. 16.

CÂU 7. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{2x + 3}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$.

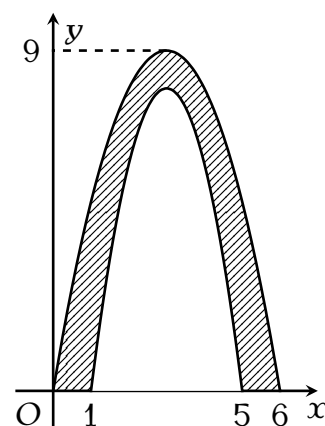
- A. $S = \frac{\pi}{6} \ln 7$. B. $S = \frac{1}{2} \ln 7$. C. $S = \frac{\sqrt{2}}{3} \ln 7$. D. $S = 2 \ln 7$.

CÂU 8. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$, hai trục tọa độ và đường thẳng $x = 2$ là

- A. $S = \frac{5}{2}$. B. $S = \frac{3}{2}$. C. $S = \frac{7}{2}$. D. $S = \frac{9}{2}$.

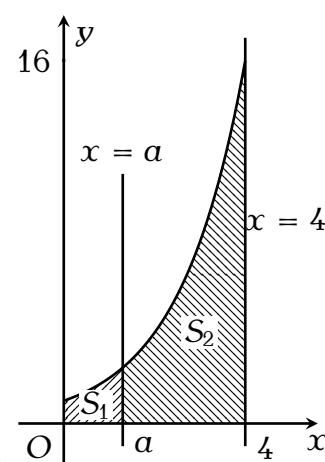
CÂU 9. Người ta cần sơn trang trí một bề mặt của một cổng chào có hình dạng như hình vẽ sau đây. Các biên của hình tương ứng là các parabol có phương trình $y = -x^2 + 6x$, $y = -2x^2 + 12x - 10$ (đơn vị đo độ dài bằng mét). Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lít sơn? Biết tỉ lệ phủ của sơn là $10 \text{ m}^2/\text{lít}$.

- A. 3.6 lít. B. 2.2 lít. C. 1.5 lít. D. 2.4 lít.



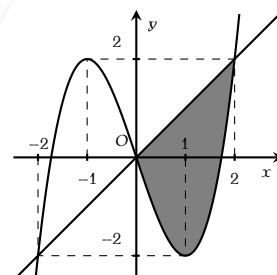
CÂU 10. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm a để $S_2 = 4S_1$.

- A. $a = 3$. B. $a = \log_2 13$.
C. $a = 2$. D. $a = \log_2 \frac{16}{5}$.



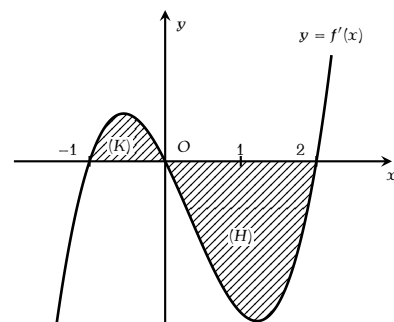
CÂU 11. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho phần hình phẳng được tô đậm như hình bên được giới hạn bởi một đồ thị hàm số đa thức bậc ba và một đường thẳng. Diện tích S của phần tô đậm đó bằng bao nhiêu?

- A. $S = 8$ (đvdt). B. $S = 6$ (đvdt). C. $S = 2$ (đvdt). D. $S = 4$ (đvdt).



CÂU 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Diện tích các hình phẳng (K) , (H) lần lượt là $\frac{5}{12}$ và $\frac{8}{3}$. Biết $f(-1) = \frac{19}{12}$, tính $f(2)$.

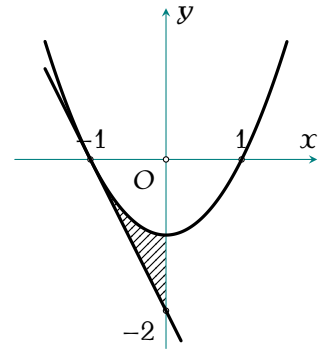
- A. $f(2) = \frac{11}{6}$. B. $f(2) = -\frac{2}{3}$.
C. $f(2) = 3$. D. $f(2) = 0$.



CÂU 13. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P) :

$y = x^2 - 1$, trục tung và tiếp tuyến của (P) tại điểm $M(-1;0)$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{5}{3}\pi$.

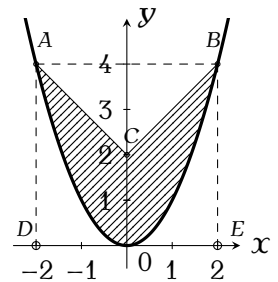


CÂU 14. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường (C) : $y = x^2$, trục hoành và tiếp tuyến của (C) tại điểm $x_0 = 1$. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

- A. $S = 3$ (đvtt). B. $S = \frac{1}{3}$ (đvtt). C. $S = \frac{1}{4}$ (đvtt). D. $S = \frac{1}{12}$ (đvtt).

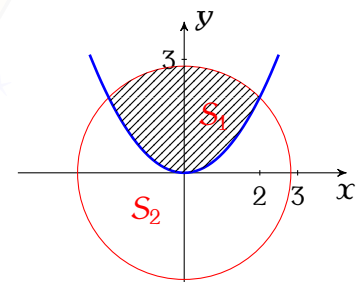
CÂU 15. Tính diện tích S của phần hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2$ và hai đoạn thẳng AC và BC như hình vẽ bên.

- A. $S = \frac{25}{6}$. B. $S = \frac{20}{3}$. C. $S = \frac{10}{3}$. D. $S = 9$.



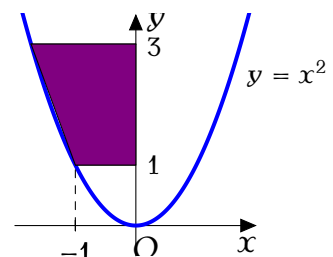
CÂU 16. Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên. Tính $\frac{S_2}{S_1}$.

- A. $\frac{9\pi - 1}{3\pi + 2}$. B. $\frac{9\pi - 2}{3\pi - 2}$. C. $\frac{23}{10}$. D. $\frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$.

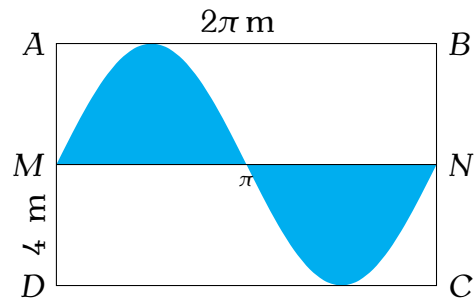


CÂU 17. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm ở hình bên.

- A. $S = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$. B. $S = \frac{28}{3}$.
C. $S = \frac{26}{3}$. D. $S = 3\sqrt{2} - \frac{1}{3}$.

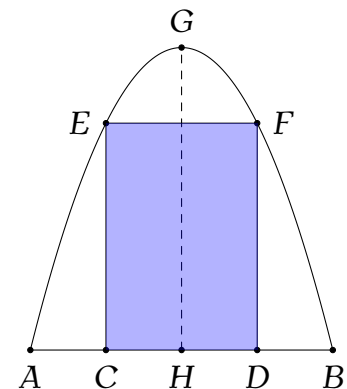


CÂU 18. Ông Bình có một mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2\pi \text{ m}$, $AD = 4 \text{ m}$ và dự định trồng hoa trên giải đất giới hạn bởi đường trung bình MN và một đường hình sin như hình vẽ trên. Kinh phí trồng hoa là 100 000 đồng/ m^2 . Hỏi ông Bình cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên mảnh đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)



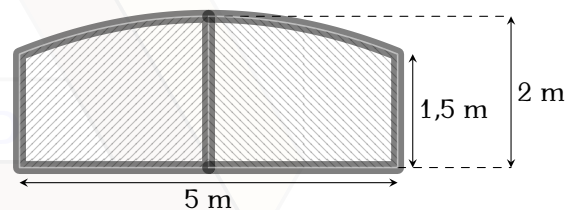
- A. 1 600 000 đồng. B. 800 000 đồng.
C. 900 000 đồng. D. 400 000 đồng.

CÂU 19. Một cái cổng hình parabol như hình vẽ. Chiều cao $GH = 4 \text{ m}$, chiều rộng $AB = 4 \text{ m}$, $AC = BD = 0,9 \text{ m}$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng chi phí để là hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



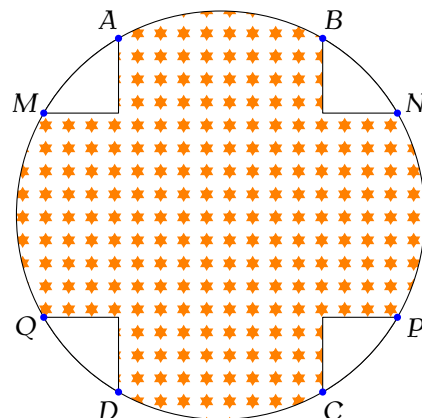
- A. 11445000 (đồng). B. 7368000 (đồng).
C. 4077000 (đồng). D. 11370000 (đồng).

CÂU 20. Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol. Giá 1 m^2 của rào sắt là 700.000 đồng. Hỏi ông An phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng phần nghìn).



- A. 6 520 000 đồng. B. 6 320 000 đồng. C. 6 417 000 đồng. D. 6 620 000 đồng.

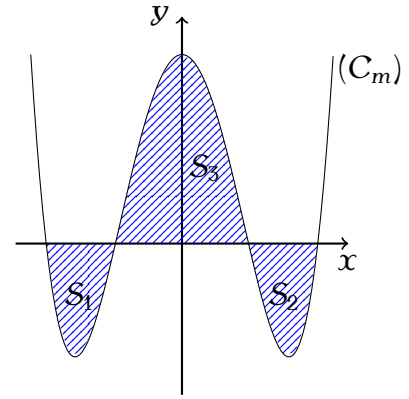
CÂU 21. Một mảnh vườn hoa dạng hình tròn có bán kính bằng 5 m. Phần đất trồng hoa là phần tô trong hình vẽ bên. Kinh phí trồng hoa là 50.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền cần để trồng hoa trên diện tích phần đất đó là bao nhiêu, biết hai hình chữ nhật $ABCD$ và $MNPQ$ có $AB = MQ = 5 \text{ m}$?



- A. 3.641.528 đồng. B. 3.533.057 đồng.
C. 3.641.529 đồng. D. 3.533.058 đồng.

CÂU 22. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$, có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox như hình vẽ bên. Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Tìm m để $S_1 + S_2 = S_3$.

- A. $m = -\frac{5}{2}$. B. $m = -\frac{5}{4}$. C. $m = \frac{5}{2}$. D. $m = \frac{5}{4}$.



❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. C	2. C	3. B	4. B	5. C	6. C	7. C	8. D	9. C	10. D
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

Câu 13. Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(-1;0)$ là $y = -2x - 2$.

Gọi (H_1) là hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục tung. Thể tích V_1 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_1) quanh trục Ox là:

$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 (x^2 - 1)^2 dx \text{ (đvtt)}$$

Gọi (H_2) là hình phẳng giới hạn bởi $y = -2x - 2$ trục hoành và trục tung. Thể tích V_2 của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H_2) quanh trục Ox là:

$$V_1 = \pi \int_{-1}^0 (-2x - 2)^2 dx \text{ (đvtt)}$$

Thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox là:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-1}^0 ((x^2 - 1)^2 - (-2x - 2)^2) dx = \frac{4}{5}\pi \text{ (đvtt)}$$

🐞 Chọn đáp án **B**

Câu 19.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2; 4)$ và đi qua gốc tọa độ.

Gọi phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$.

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 2 \\ 2^2a + 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Nên phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả công là

$$S = \int_0^4 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \approx 10,67 (m^2)$$

Do vậy chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79$ (m), $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2$ (m).

Diện tích hai cánh công là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \approx 6,14$ (m²).

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = 10,67 - 6,14 = 4,53$ (m²).

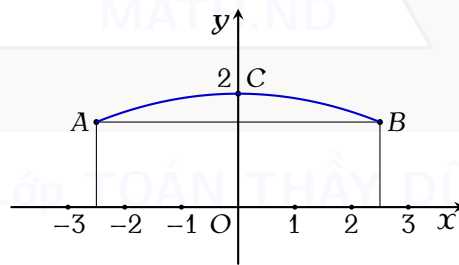
Nên tiền là hai cánh công là $6,14 \cdot 1200000 = 7368000$ (đồng) và tiền làm phần xiên hoa

là $4,53 \cdot 900000 = 4077000$ (đồng).

Vậy tổng chi phí là 11445000 đồng.

Chọn đáp án A

Câu 20.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Trong đó $A(-2,5; 1,5)$, $B(2,5; 1,5)$, $C(0; 2)$.

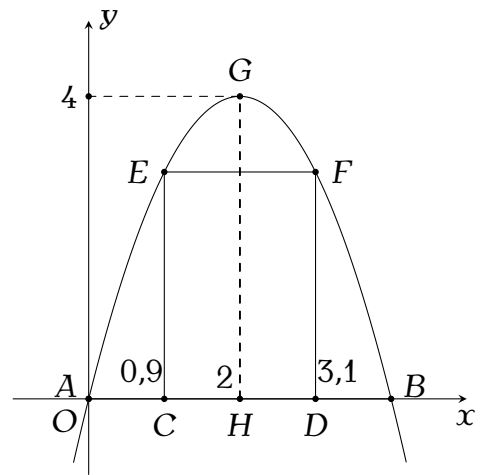
Giả sử đường cong trên là một Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5; 1,5)$, $B(2,5; 1,5)$, $C(0; 2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2. \end{cases}$$

Khi đó phương trình Parabol là $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$.

Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{2}{25}x^2 + 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -2,5$, $x = 2,5$.

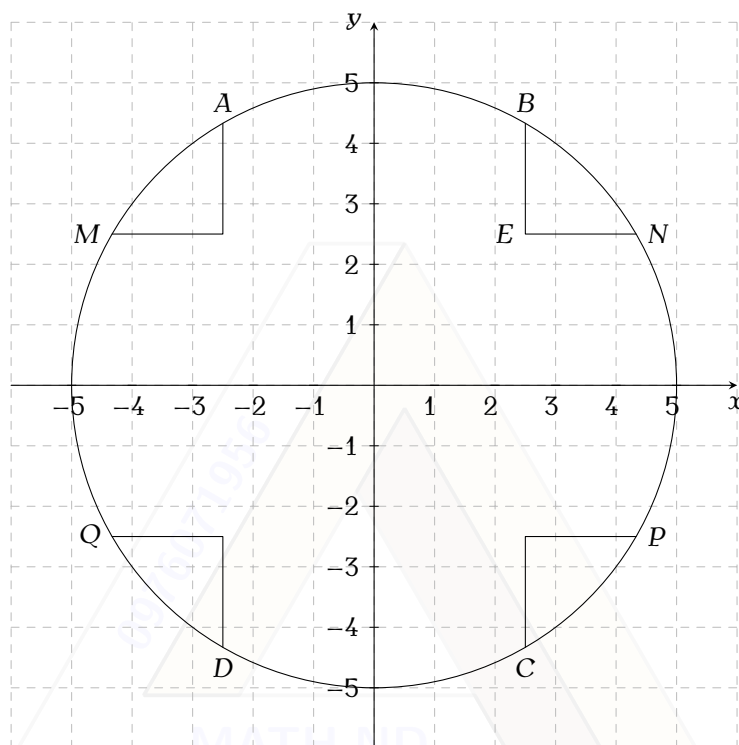


$$\text{Ta có } S = \int_{-2,5}^{2,5} \left(-\frac{2}{25}x^2 + 2 \right) dx = \frac{55}{6}.$$

Vậy ông An phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là $S \cdot 700.000 = \frac{55}{6} \cdot 700.000 \approx 6.417.000$ (đồng).

Chọn đáp án **C**

Câu 21.



Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ.

Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - x^2}$.

Tìm được tọa độ điểm $N \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2} \right)$ (một giao điểm của đường tròn và đường thẳng $y = \frac{5}{2}$).

Diện tích 4 phần trắng (không trồng cây) là: $S_1 = 4 \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{25 - x^2} - \frac{5}{2} \right) dx$.

Diện tích phần trồng rau bằng diện tích hình tròn trừ cho S_1 , tức là

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 - S_1 = \pi \cdot 5^2 - 4 \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{25 - x^2} - \frac{5}{2} \right) dx \\ &= 25\pi - 4 \left(\frac{25\pi}{12} - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} \right) \right) = \frac{50\pi}{3} + 25\sqrt{3} - 25. \end{aligned}$$

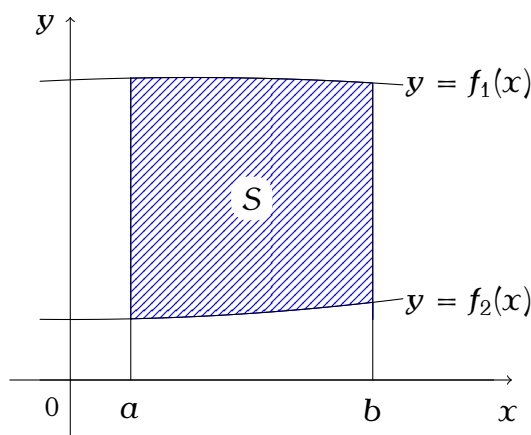
Số tiền cần để trồng hoa là $50000 \cdot S \approx 3533057$ đồng.

Chọn đáp án **B**

DẠNG 2. Tính thể tích vật thể

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số trên và các đường thẳng $x = a, x = b$. Thể tích V của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay S xung quanh trục Ox được tính bởi công thức nào sau đây?



A. $V = \pi \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx.$

B. $V = \pi \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$

C. $V = \int_a^b (f_1^2(x) - f_2^2(x)) dx.$

D. $V = \pi \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))^2 dx.$

CÂU 2. Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi $y = \ln x, y = 0, x = e$ quanh trục Ox được tính theo công thức nào sau đây?

A. $\pi \int_1^e \ln x dx.$

B. $\pi \int_e^1 (\ln x)^2 dx.$

C. $\pi \int_1^e (\ln x)^2 dx.$

D. $\int_1^e (\ln x)^2 dx.$

CÂU 3. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x, y = 0, x = 0$ và $x = 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay quanh trục Ox .

A. $\frac{\pi}{2}(e - 1).$

B. $\pi(e - 1).$

C. $\pi(e^2 - 1).$

D. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1).$

CÂU 4. Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh trục Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành là

A. $\frac{34\pi}{3}.$

B. $\frac{35\pi}{3}.$

C. $\frac{31\pi}{3}.$

D. $\frac{32\pi}{3}.$

CÂU 5. Gọi $(\mathcal{H})$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay $(\mathcal{H})$ quanh trục Ox .

A. $\frac{8\pi}{5}.$

B. $\frac{6\pi}{5}.$

C. $\frac{2\pi}{5}.$

D. $\frac{\pi}{5}.$

CÂU 6. Thể tích khối tròn xoay được tạo nên khi quay miền $\mathbb{D}$ quanh trục Ox , biết miền $\mathbb{D}$ được giới hạn bởi các đường $y = 4 - x^2$ và $y = x^2 + 2$, là

A. $16\pi.$

B. $12\pi.$

C. $14\pi.$

D. $10\pi.$

CÂU 7. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi elip có phương trình $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và trục hoành quay xung quanh trục Ox .

- A. $4\pi b$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi b^2$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi b^2$. D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi b^2$.

CÂU 8. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi ba đường $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$ và $y = 0$ quay quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{3\pi}{2}$. B. $\frac{5\pi}{6}$. C. π . D. $\frac{2\pi}{3}$.

CÂU 9. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

- A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$. B. $V = \frac{124\pi}{3}$.
C. $V = \frac{124}{3}$. D. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

CÂU 10. Thể tích vật thể giới hạn giữa hai mặt phẳng $x = 0$, $x = 2$ và có mặt cắt là hình vuông cạnh bằng $x\sqrt{x^2 + 1}$ là

- A. $\frac{8}{15}$. B. $\frac{136}{15}$. C. 2. D. $\frac{64}{15}$.

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. A	2. C	3. D	4. D	5. A	6. A	7. C	8. B	9. C	10. B
------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

📁 CHỦ ĐỀ 6. CÁC DẠNG TOÁN NÂNG CAO

📁 DẠNG 1. Các bài toán lý thuyết

❖❖❖ VÍ DỤ MINH HỌA ❖❖❖

VÍ DỤ 1. Nếu $\int_0^1 f(x) dx = -2$, $\int_0^1 g(x) dx = 1$ thì $\int_0^1 [2020f(x) + 2021g(x)] dx$ bằng

A. -2019. B. -2020. C. -2018. D. -1.

🔍 Chọn đáp án (C).....

VÍ DỤ 2. Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_1^2 [3 + 2f(x)] dx$ bằng

A. 5. B. 7. C. 10. D. 6.

🔍 Chọn đáp án (B).....

VÍ DỤ 3. Nếu $\int_{-1}^2 [f(x) + 3g(x)] dx = 5$ và $\int_{-1}^2 [-f(x) + g(x)] dx = -1$ thì $\int_{-1}^2 [2f(x) + 3g(x) - 1] dx$ bằng

- A. 7. B. 6. C. 4. D. 5.

🔍 Chọn đáp án (C).....

VÍ DỤ 4. Nếu $\int_0^2 f(x) dx = 1$ và $\int_0^4 f(y) dy = 5$ thì $\int_{\frac{2}{3}}^4 f(z) dz$ bằng

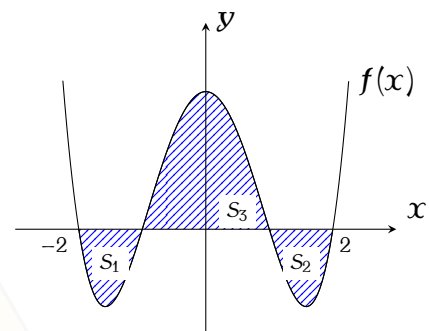
- A. -4. B. 6. C. -6. D. 4.

🔍 Chọn đáp án (D).....

VÍ DỤ 5. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích $S_1 = S_2 = \frac{22}{15}, S_3 = \frac{76}{15}$. Tính

tích phân $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{18}{5}$. B. $I = \frac{32}{15}$. C. $I = \frac{98}{15}$. D. $I = 8$.



🔍 Chọn đáp án (B).....

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 3]$, $f(2) = -1$, $f(3) = -2$. Tính tích phân $I = \int_2^3 f'(x) dx$.

- A. $I = -1$. B. $I = -3$. C. $I = 1$. D. $I = 2$.

🔍 Chọn đáp án (A).....

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 4$ và $f'(x) = e^x + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. $\frac{6e + 13}{6}$. B. $\frac{6e + 25}{6}$. C. $\frac{6e + 25}{3}$. D. $\frac{6e + 19}{6}$.

🔍 Chọn đáp án (A).....

🔗🔗🔗BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM🔗🔗🔗

CÂU 1. Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tính $I = \int_1^3 [2 - f(x)] dx$.

- A. $I = 20$. B. $I = -26$. C. $I = -22$. D. $I = 28$.

CÂU 2. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $[a; b]$. Phát biểu nào sau đây sai?

- A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. B. $\int_a^b f(x) dx \neq \int_a^b f(t) dt$.

C. $\int_a^b f(x)dx = 0.$

D. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

CÂU 3. Cho $a < b < c$, $\int_a^b f(x)dx = 5$, $\int_c^b f(x)dx = 2$. Tính tích phân $\int_a^c f(x)dx$.

A. $\int_a^c f(x)dx = 7.$ B. $\int_a^c f(x)dx = 3.$ C. $\int_a^c f(x)dx = -3.$ D. $\int_a^c f(x)dx = 10.$

CÂU 4. Cho $\int_0^2 f(x)dx = 2$ và $\int_0^2 g(x)dx = 3$. Tính phân $\int_0^2 [2f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. 5. B. 7. C. -1. D. 1.

CÂU 5. Nếu $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 10. B. 4. C. -4. D. 21.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$, $\int_2^6 f(x)dx = 3$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

A. 10. B. 4. C. 3. D. -4.

CÂU 7. Cho $\int_0^1 f(x)dx = -2$ và $\int_1^5 2f(x)dx = 6$, khi đó $\int_0^5 f(x)dx$ bằng

A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

CÂU 8. Biết $\int_1^3 f(x)dx = 2$, $\int_3^5 f(x)dx = 4$, $\int_1^5 g(x)dx = 8$. Tính $I = \int_1^5 [3f(x) - g(x)]dx$.

A. 4. B. 2. C. 26. D. 10.

CÂU 9. Cho các hằng số a, b, k ($k \neq 0$) và hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\int_a^b k.f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

C. $\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

D. $\int_a^b f(x)dx \neq \int_a^b f(t)dt.$

CÂU 10. Cho $\int_{-1}^1 [5f(x) + x^{2021} + x]dx = 20$. Tính $\int_{-1}^1 f(x)dx$.

A. 5. B. 4. C. 1. D. 0.

CÂU 11. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 3$, $\int_0^2 [f(x) - g(x)]dx = 3$, $\int_0^2 [f(x) + g(x)]dx = 7$. Tính $I = \int_1^2 f(x)dx$.

- A. $I = 0$. B. $I = -2$. C. $I = 3$. D. $I = 2$.

CÂU 12. Cho hàm số $F(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên đoạn $[2; 4]$. Biết $f'(2) = 1, f'(4) = 5$. Giá trị

của $I = \int_2^4 f''(x)dx$ là

- A. $I = 4$. B. $I = 3$. C. $I = 2$. D. $I = 1$.

CÂU 13. Nếu $\int_{-1}^4 f(x) dx = 3, \int_{-1}^0 f(x) dx = 2$ thì $\int_0^4 [4e^{2x} + 3f(x)] dx$ bằng

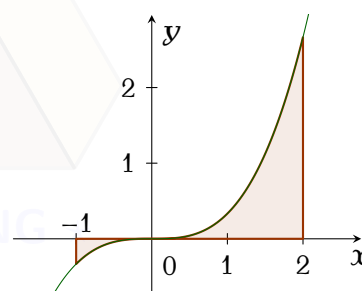
- A. $4e^8 - 1$. B. $2e^8$. C. $2e^8 + 2$. D. $2e^8 + 1$.

CÂU 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x - 1) = 3x^2 + 2x + 2$. Biết $f(1) = 5$, giá trị của $f(5)$ bằng

- A. 161. B. 149. C. 253. D. 265.

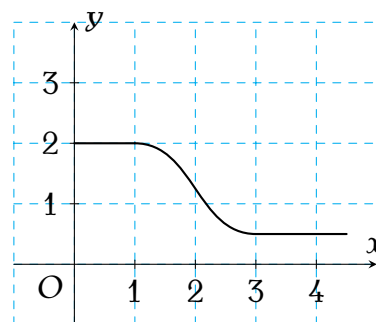
CÂU 15. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x)dx, b = \int_0^2 f(x)dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $S = b - a$. B. $S = b + a$.
C. $S = -b + a$. D. $S = -b - a$.



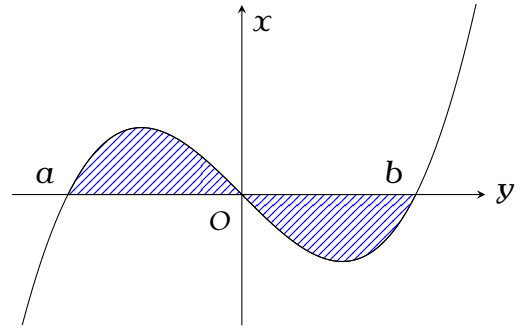
CÂU 16. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $\int_1^3 f(x) dx = 2,3$ và $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in [0; 4]$. Tính hiệu $F(3) - F(0)$?

- A. 0,3. B. 1,3. C. 3,3. D. 4,3.



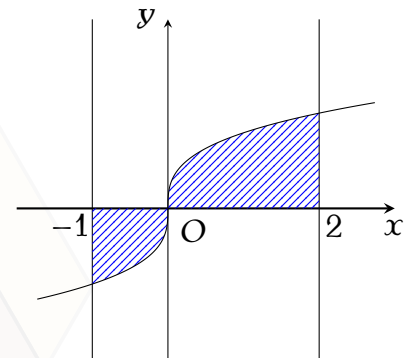
CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Diện tích hình phẳng S (phần tô màu trong hình vẽ) được tính bởi công thức nào?

- A. $S = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx.$
- B. $S = 2 \int_0^b f(x)dx.$
- C. $S = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx.$
- D. $S = \int_a^b f(x)dx.$



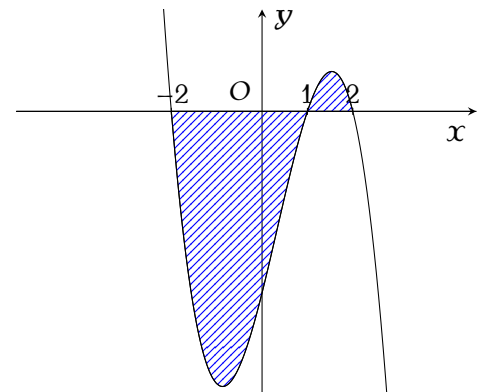
CÂU 18. Cho hàm số $y = f(x)$ và phần hình phẳng (H) được gạch chéo như hình vẽ bên. Diện tích hình phẳng (H) là

- A. $\int_0^2 f(x)dx - \int_{-1}^0 f(x)dx.$
- B. $\int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx.$
- C. $\left| \int_{-1}^2 f(x)dx \right|.$
- D. $\int_{-1}^2 f(x)dx.$



CÂU 19. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Diện tích S của hình phẳng (phần tô màu) được xác định bởi công thức

- A. $\int_{-2}^2 f(x)dx.$
- B. $\int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$
- C. $\int_1^{-2} f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$
- D. $\int_{-2}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$



CÂU 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

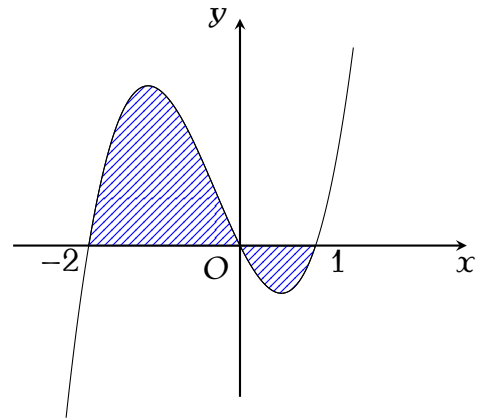
Diện tích hình phẳng phần tô đậm trong hình vẽ là

A. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx.$

B. $S = \int_0^{-2} f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx.$

C. $S = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx.$



🔗🔗🔗 BẢNG ĐÁP ÁN 🔗🔗🔗

1. C	2. B	3. B	4. D	5. B	6. B	7. A	8. D	9. D	10. B
11. D	12. A	13. C	14. C	15. A	16. D	17. C	18. A	19. C	20. C

📁 DẠNG 2. Tích phân hàm ử

Tích phân của hàm số chẵn, hàm số lẻ:

- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$
- Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số chẵn trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$
- Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ thì

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx \quad (\text{với } \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ và } a > 0)$$

- Nếu $f(x)$ liên tục trên $[0; \frac{\pi}{2}]$ thì $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx.$
- Nếu $f(x)$ liên tục và $f(a+b-x) = f(x)$ hoặc $f(a+b-x) = -f(x)$ thì đặt $t = a+b-x.$

🔗🔗🔗 VÍ DỤ MINH HỌA 🔗🔗🔗

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x) dx = 1, \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 13.$

Tính tích phân $I = \int_0^1 x^2 f(x^3) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 8$.

C. $I = 7$.

D. $I = 9$.

Lời giải.

Gọi $F(X)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

$$\begin{cases} \int_1^{\frac{1}{3}} f(x) dx = 1 \\ \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F\left(\frac{1}{3}\right) - F(0) = 1 \\ F(1) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 26 \end{cases} \Rightarrow F(1) - F(0) = 27.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 x^2 f(x^3) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x^3) d(x^3) = \frac{1}{3} [F(1) - F(0)] = 9.$$

Chọn đáp án **D**.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $\int_0^1 x(f'(x) - 2) dx = f(1)$.

Giá trị của $I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = (f'(x) - 2) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) - 2x \end{cases}. \text{ Ta có}$$

$$f(1) = x(f'(x) - 2) \Big|_0^1 - \int_0^1 (f(x) - 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow f(1) = f(1) - 2 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = -2.$$

Chọn đáp án **D**.

VÍ DỤ 3. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(-x) dx =$

$$6, \int_1^3 f(2x) dx = 5. \text{ Tính } I = \int_{-1}^6 f(x) dx.$$

A. $I = 11$.

B. $I = 17$.

C. $I = 8$.

D. $I = 16$.

Lời giải.

- Ta có $\int_{-1}^2 f(-x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx = 6$, vì $f(x)$ là hàm chẵn.

- Ta có $\int_1^3 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_2^6 f(u) d(u) = 5$. Từ đó suy ra $\int_2^6 f(x) d(x) = 10$.

- Vậy $I = 16$.

👉 Chọn đáp án **(D)**

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ và thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$,

$\forall x \in \mathbb{R}^*$. Tính tích phân $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = \frac{5}{2}$.

C. $I = 4 \ln 2 - \frac{15}{8}$.

D. $I = 4 \ln 2 + \frac{15}{8}$.

Lời giải.

Đặt $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$.

Đổi cận: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 2, x = 2 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x)}{x} dx = \int_2^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{t}\right) \cdot t \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx$.

Ta có $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x \Leftrightarrow \frac{f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 3$

$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 3 dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{3f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \frac{9}{2} \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \frac{3}{2}$.

👉 Chọn đáp án **(A)**

VÍ DỤ 5. Cho biết $\int_0^1 f(x) dx = 2018$. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{f(|x|) dx}{1 + 2018^x}$.

A. $I = e^{2018}$.

B. $I = 2018$.

C. $I = 1009$.

D. $I = 2019$.

Lời giải.

Đặt $x = -t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1; x = -1 \Rightarrow t = 1$. Ta có

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(|x|) dx}{1 + 2018^x} = - \int_1^{-1} \frac{f(|-t|) dt}{1 + 2018^{-t}} = \int_{-1}^1 \frac{2018^t \cdot f(|t|) dt}{1 + 2018^t} = \int_{-1}^1 \frac{2018^x \cdot f(|x|) dx}{1 + 2018^x}.$$

$$\text{Khi đó } 2I = \int_{-1}^1 f(|x|) dx = 2 \int_0^1 f(|x|) dx \Rightarrow I = \int_0^1 f(|x|) dx.$$

$$\text{Vì hàm } y = f(|x|) \text{ là hàm số chẵn trên } [-1; 1], \text{ nên } I = \int_0^1 f(|x|) dx = \int_0^1 f(x) dx = 2018.$$

🔍 Chọn đáp án **(B)**.....

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $3f'(x) + 2f^2(x) = 0$. Tính $f(1)$ biết rằng $f(0) = 1$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có $3f'(x) + 2f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -\frac{2}{3}$. Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = - \int_0^1 \frac{2}{3} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} \Big|_0^1 = -\frac{2}{3}x \Big|_0^1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - 1 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow f(1) = \frac{3}{5}.$$

🔍 Chọn đáp án **(C)**.....

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(1)$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Theo giả thiết $f(x) + x \cdot f'(x) = 3x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (xf(x))' = 3x^2 + 2x \Rightarrow \int_0^1 (xf(x))' dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x) dx = 2 \Rightarrow (xf(x)) \Big|_0^1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2.$$

🔍 Chọn đáp án **(A)**.....

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0, f'(1) = \frac{9}{2}$,

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{39}{4}, \int_0^1 (x^2 + x)f''(x) dx = \frac{5}{2}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^2 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{14}{3}$.

B. $I = 14$.

C. $I = \frac{7}{3}$.

D. $I = 7$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{5}{2} = \int_0^1 (x^2 + x)f''(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x) df'(x) = (x^2 + x)f'(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 1)f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x + 1)f'(x) dx = \frac{13}{2} \quad (1).$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [4[f'(x)]^2 - 12(2x+1)f'(x) + 9(2x+1)^2] dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [2f'(x) - 3(2x+1)]^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow 2f'(x) - 3(2x+1) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3(x^2+x)}{2} + C$$

$$\text{Từ } f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{3(x^2+x)}{2}. \text{ Vậy } I = \int_0^2 \frac{3(x^2+x)}{2} dx = 7.$$

☞ Chọn đáp án **(D)**

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -3 và 6 . Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y = 1$ bằng

A. $2 \ln 3$.

B. $\ln 3$.

C. $\ln 18$.

D. $2 \ln 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\bullet f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

$$\bullet f''(x) = 6x + 2a.$$

$$\bullet f'''(x) = 6.$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$, ta có $g'(x) = f'(x) + f''(x) + f'''(x) = f'(x) + f''(x) + 6$.

Theo giả thiết ta có phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm m, n và $\begin{cases} g(m) = -3 \\ g(n) = 6. \end{cases}$

Xét phương trình $\frac{f(x)}{g(x)+6} = 1 \Leftrightarrow g(x) + 6 - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = n. \end{cases}$

Diện tích hình phẳng cần tính là

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_m^n \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)+6} \right) dx \right| = \left| \int_m^n \frac{g(x)+6-f(x)}{g(x)+6} dx \right| = \left| \int_m^n \frac{f'(x)+f''(x)+6}{g(x)+6} dx \right| \\ &= \left| \ln |g(x)+6| \Big|_m^n \right| = |\ln |g(n)+6| - \ln |g(m)+6|| = |\ln 12 - \ln 3| = \ln 4 = 2 \ln 2. \end{aligned}$$

☞ Chọn đáp án **(D)**

CÂU 1. Cho $\int_0^3 f(x) dx = 9$. Tính $I = \int_0^1 f(3x) dx$.

- A. $I = \frac{9}{2}$. B. $I = 9$. C. $I = 27$. D. $I = 3$.

CÂU 2. Cho biết $\int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx = 4$, $\int_2^3 f(z) dz = 2$, $\int_9^{16} \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt = 2$. Tính $\int_0^4 f(x) dx$.

- A. 10. B. 11. C. 9. D. 1.

CÂU 3. Biết $\int_0^1 xf(x) dx = 2$, tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f(\cos x) dx$.

- A. 6. B. 3. C. 8. D. 4.

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và $\int_0^2 f(x) dx = 1$, $\int_0^4 f(x) dx = 3$. Tính

$$I = \int_{-1}^1 f(|3x - 1|) dx.$$

- A. $I = 4$. B. $I = 2$. C. $I = \frac{4}{3}$. D. $I = 1$.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $f(0) = 6$, $\int_0^1 (2x - 2)f'(x) dx = 6$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ có giá trị bằng

- A. -3. B. -9. C. 3. D. 6.

CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và $\int_1^2 (x - 1)f'(x) dx = a$. Tính $\int_1^2 f(x) dx$ theo a và $b = f(2)$.

- A. $a - b$. B. $a + b$. C. $b - a$. D. $-b - a$.

CÂU 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tích phân $\int_0^1 f'(\sqrt{x}) dx$ bằng

- A. 3. B. -2. C. 1. D. 4.

CÂU 8. Cho $f(x)$ là một hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-2}^0 f(x) dx = 2018$, $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2017$.

Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng

- A. $I = 2$. B. $I = 1$. C. $I = 0$. D. $I = -1$.

CÂU 9. Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6; 6]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f(x) dx = 8$

và $\int_1^3 f(-2x) dx = 3$. Tính $\int_{-1}^6 f(x) dx$.

A. $I = 11$.

B. $I = 5$.

C. $I = 2$.

D. $I = 14$.

CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên $[-4; 4]$. Biết $\int_{-2}^0 f(-x) dx = 2$ và

$\int_1^2 f(-2x) dx = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = -10$.

B. $I = -6$.

C. $I = 6$.

D. $I = 10$.

CÂU 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn điều kiện $f(x) + 2f(1 - x) = 3x^2 - 6x, \forall x \in [0; 1]$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(1 - x^2) dx$.

A. $I = -\frac{4}{15}$.

B. $I = 1$.

C. $I = -\frac{2}{15}$.

D. $I = \frac{2}{15}$.

CÂU 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và thỏa mãn $2 \cdot f(3x) + 3 \cdot f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$,

$\int_3^9 f(x) dx = k$. Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

A. $I = -\frac{45 + k}{9}$.

B. $I = \frac{45 - k}{9}$.

C. $I = \frac{45 + k}{9}$.

D. $I = \frac{45 - 2k}{9}$.

CÂU 13. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn điều kiện $2f(x) + 3f(1 - x) = x\sqrt{1 - x}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = -\frac{4}{15}$.

B. $I = \frac{1}{15}$.

C. $I = \frac{4}{75}$.

D. $I = \frac{1}{25}$.

CÂU 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(2018 - x) = 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Tính giá trị của tích phân $\int_0^{2018} f(x) dx$.

A. 1009.

B. 4036.

C. 2018.

D. 1009^2 .

CÂU 15. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $[0; 2]$. Biết $f(0) = 1$

và $f(x) \cdot f(2 - x) = e^{2x^2 - 4x}$, với mọi $x \in [0; 2]$. Tính tích phân $\int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx$.

A. $I = -\frac{16}{3}$.

B. $I = -\frac{16}{5}$.

C. $I = -\frac{14}{3}$.

D. $I = -\frac{32}{5}$.

CÂU 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa $f(4 - x) = f(x) \forall x \in [1; 3]$ và

$\int_1^3 x \cdot f(x) dx = -2$. Giá trị $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. -2.

D. 1.

CÂU 17. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = x^2y$ và $f(-1) = 1$. Tính $f(2)$.

- A. $e + 1$. B. e^3 . C. $2e$. D. e^2 .

CÂU 18. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = (2x + 1)f^2(x)$ và $f(1) = -0,5$. Biết rằng tổng $\sum_{i=1}^{2017} f(i) = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a + b = -1$. B. $a \in (-2017; 2017)$.
C. $\frac{a}{b} < -1$. D. $b - a = 4035$.

CÂU 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$, biết $f'(x) + (2x + 4)f^2(x) = 0$, $f(x) > 0 \forall x > 0$ và $f(2) = \frac{1}{15}$. Tính $S = f(1) + f(2) + f(3)$.

- A. $S = \frac{7}{15}$. B. $S = \frac{11}{15}$. C. $S = \frac{11}{30}$. D. $S = \frac{7}{30}$.

CÂU 20. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên đoạn $[1; 4]$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f'(1) = \frac{2}{5}$ và thỏa mãn $2f''(x) + xf'''(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [1; 4]$. Tính $I = \int_1^4 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{139}{75}$. B. $I = \frac{213}{25}$. C. $I = \frac{263}{75}$. D. $I = \frac{119}{25}$.

CÂU 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1; 4]$ và thỏa mãn $2xf'(x) - f(x) = 2x\sqrt{x}$, $\forall x \in [1; 4]$. Biết rằng $f(1) = 0$, tính $I = \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx$.

- A. $I = \frac{22}{3}$. B. $I = \frac{20}{3}$. C. $I = \frac{8}{3}$. D. $I = \frac{14}{3}$.

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. D	2. B	3. D	4. C	5. C	6. C	7. B	8. D	9. D	10. C
11. C	12. A	13. C	14. C	15. B	16. B	17. B	18. D	19. D	20. C
21. C									

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

Câu 12. Từ giả thiết $2 \cdot f(3x) + 3 \cdot f\left(\frac{2}{x}\right) = -\frac{15x}{2}$, suy ra

$$2 \int_1^3 f(3x) dx + 3 \int_1^3 f\left(\frac{2}{x}\right) dx = \int_1^3 \left(-\frac{15x}{2}\right) dx = -30.$$

Xét tích phân $K = \int_1^3 f(3x) dx$.

Đặt $t = 3x \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$. Với $x = 1 \Rightarrow t = 3$; $x = 3 \Rightarrow t = 9$. Suy ra

$$K = \int_3^9 f(t) \frac{1}{3} dt = \frac{k}{3}.$$

Xét tích phân $L = \int_1^3 f\left(\frac{2}{x}\right) dx.$

Đặt $\frac{1}{t} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2 dt.$ Với $x = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = 3 \Rightarrow t = \frac{3}{2}.$ Suy ra

$$L = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{t}\right) 2 dt = 2I.$$

Vậy ta có

$$2 \cdot \frac{k}{3} + 3 \cdot 2I = -30 \Leftrightarrow I = -\frac{45+k}{9}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 15. Có $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x}$, thay $x = 0$ ta được $f(0) \cdot f(2) = 1 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{f(0)} = 1.$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \frac{(x^3 - 3x^2)f'(x)}{f(x)} dx = (x^3 - 3x^2) \ln f(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 \ln f(x) d(x^3 - 3x^2) \\ &= -4 \ln f(2) - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx. \end{aligned}$$

Xét $A = \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx.$

Đặt $x = 2 - t$, suy ra

- $dx = -dt$
- $3x^2 - 6x = 3(2-t)^2 - 6(2-t) = 12 - 12t + 3t^2 - 12 + 6t = 3t^2 - 6t.$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(x) dx = - \int_2^0 (3t^2 - 6t) \ln f(2-t) dt \\ &= \int_0^2 (3t^2 - 6t) \ln f(2-t) dt = \int_0^2 (3x^2 - 6x) \ln f(2-x) dx. \end{aligned}$$

Lại có $f(x) \cdot f(2-x) = e^{2x^2-4x} \Rightarrow f(2-x) = \frac{e^{2x^2-4x}}{f(x)} \Rightarrow \ln f(2-x) = 2x^2 - 4x - \ln f(x)$.

Nên $A = \int_0^2 (3x^2 - 6x)(2x^2 - 4x - \ln f(x)) dx$.

Suy ra

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^2 (3x^2 - 6x)(2x^2 - 4x) dx = \int_0^2 (6x^4 - 12x^3 - 12x^3 + 24x^2) dx \\ &= \int_0^2 (6x^4 - 24x^3 + 24x^2) dx = \frac{32}{5} \\ \Rightarrow A &= \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

Vậy $I = -\frac{16}{5}$.

Chọn đáp án **B**.

DẠNG 3. Tích phân hàm số cho bởi nhiều biểu thức

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 1 \\ 1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

A. $\int_0^3 f(x) dx = 3$. B. $\int_0^3 f(x) dx = 5$. C. $\int_0^3 f(x) dx = \frac{9}{2}$. D. $\int_0^3 f(x) dx = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 1 dx + \int_1^3 x dx = x \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 5.$$

Chọn đáp án **B**.

VÍ DỤ 2. Tính tích phân $I = \int_{-3}^3 |4x^2 - 4| dx$.

A. $\frac{180}{3}$. B. $\frac{168}{3}$. C. $\frac{172}{3}$. D. $\frac{176}{3}$.

Lời giải.

$4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Bảng xét dấu của $4x^2 - 4$ trên $[-3; 3]$ là:

x	-3	-1	1	3	
$4x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó: $I = \int_{-3}^{-1} (4x^2 - 4) dx - \int_{-1}^1 (4x^2 - 4) dx + \int_1^3 (4x^2 - 4) dx = \frac{176}{3}.$

Chọn đáp án **D**.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^2 f(x)dx = 3$. Tính $\int_{-1}^1 f(|2x|)dx$.

A. 3. B. 6. C. $\frac{3}{2}$. D. 0.

Lời giải.

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$.

Do $x \in [-1; 1]$ nên $t \in [-2; 2]$.

$I = \int_{-1}^1 f(|2x|)dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(|t|)dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dx = \int_0^2 f(t)dx = 3$

Chọn đáp án **A**.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{khi } x < 8 \\ \frac{40}{x-7} & \text{khi } x \geq 8 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_{e^2}^{e^4} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx$ bằng

A. $-36 + \frac{40}{7} \ln 2 - \frac{15}{7} \ln 3$. B. $36 + \frac{40}{7} \ln 2 + \frac{20}{7} \ln 3$.
C. $36 - \frac{40}{7} \ln 2 + \frac{15}{7} \ln 3$. D. $6 - \frac{20}{7} \ln 2 + \frac{40}{7} \ln 3$.

Lời giải.

Ta có $\int_{e^2}^{e^4} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \int_{e^2}^{e^4} \frac{f(\ln^2 x) \cdot \ln x}{x \ln^2 x} dx$.

Đặt $t = \ln^2 x \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x dx}{x}$.

Đổi cận $x = e^2 \Rightarrow t = 4, x = e^4 \Rightarrow t = 16$.

Vậy $I = \int_4^{16} \frac{f(t) dt}{2t} = \int_4^{16} \frac{f(x) dx}{2x} = \int_4^8 \frac{f(x) dx}{2x} + \int_8^{16} \frac{f(x) dx}{2x}$.

$\int_4^8 \frac{f(x) dx}{2x} = \int_4^8 \frac{x^2 - 3x}{2x} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_4^8 = 6$.

$\int_8^{16} \frac{f(x) dx}{2x} = \int_8^{16} \frac{20}{x(x-7)} dx = \int_8^{16} \frac{20}{7} \left(\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x} \right) dx$
 $= \frac{20}{7} \ln \left| \frac{x-7}{x} \right| \Big|_8^{16} = \frac{20}{7} \ln \frac{9}{2} = \frac{40}{7} \ln 3 - \frac{20}{7} \ln 2$.

Vậy $I = 6 - \frac{20}{7} \ln 2 + \frac{40}{7} \ln 3$.

Chọn đáp án **D**.

❖❖❖ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ❖❖❖

CÂU 1. Tích phân $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - 5|x| + 6} dx$ bằng

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

CÂU 2. Tính tích phân $I = \int_0^1 (|3x - 1| - 2|x|) dx$.

- A. $I = -\frac{1}{6}$. B. $I = -\frac{11}{6}$. C. $I = -\frac{7}{6}$. D. $I = 0$.

CÂU 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x > 3 \\ ax - 3a + 7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ với a là tham số thực. Nếu $\int_0^1 f(e^x + 1) dx = e^2$ thì a bằng

- A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}$. B. $6e - 6$. C. $6e + 6$. D. $-6e + 6$.

CÂU 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x > 3 \\ ax - 3a + 7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ với a là tham số thực. Nếu $\int_0^1 f(e^x + 1) dx = e^2$ thì a bằng

- A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}$. B. $6e - 6$. C. $6e + 6$. D. $-6e + 6$.

CÂU 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx$ bằng

- A. $\frac{23}{3}$. B. $\frac{23}{6}$. C. $\frac{17}{6}$. D. $\frac{17}{3}$.

CÂU 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + 2x + 1 & \text{khi } x < 0 \\ -3x^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_1^e \frac{1}{x} f(2 \ln x - 1) dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2e} + \frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2e} - \frac{3}{2}$. C. $-\frac{1}{2e} - \frac{5}{2}$. D. $-\frac{1}{2e} + \frac{3}{2}$.

CÂU 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x^2 + 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(3 \cos x - 1) \sin x dx$ bằng

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{31}{18}$. D. $-\frac{2}{9}$.

CÂU 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 5}{x + 1} & \text{khi } x > 2 \\ 6x^2 - 21 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_0^{2 \ln 2} f(e^x - 1) e^x dx$ bằng

- A. $-24 + 3 \ln \frac{4}{3}$. B. $-26 + 3 \ln \frac{4}{3}$. C. $-24 + 3 \ln \frac{3}{4}$. D. $-26 + 3 \ln \frac{3}{4}$.

❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. C	2. A	3. B	4. B	5. B	6. D	7. B	8. A
------	------	------	------	------	------	------	------

HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU

Câu 3. Ta có $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$ và $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = 7$.

Nhận xét $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 7$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = e + 1$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx &= \int_2^{e+1} f(t) dt = \int_2^{e+1} f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{e+1} f(x) dx \\
 &= \int_2^3 (ax - 3a + 7) dx + \int_3^{e+1} (2x + 1) dx \\
 &= \left(\frac{ax^2}{2} - 3ax + 7x \right) \Big|_2^3 + (x^2 + x) \Big|_3^{e+1} \\
 &= \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21 \right) - (2a - 6a + 14) + [(e+1)^2 + (e+1)] - (3^2 + 3) \\
 &= -\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3
 \end{aligned}$$

Theo giả thiết $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ nên $-\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3 = e^2 \Leftrightarrow a = 6e - 6$.

🔍 Chọn đáp án **(B)**

Câu 4. Ta có $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$ và $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = 7$.

Nhận xét $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 7$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = e + 1$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx &= \int_2^{e+1} f(t) dt = \int_2^{e+1} f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{e+1} f(x) dx \\
 &= \int_2^3 (ax - 3a + 7) dx + \int_3^{e+1} (2x + 1) dx \\
 &= \left(\frac{ax^2}{2} - 3ax + 7x \right) \Big|_2^3 + (x^2 + x) \Big|_3^{e+1} \\
 &= \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21 \right) - (2a - 6a + 14) + [(e+1)^2 + (e+1)] - (3^2 + 3)
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3$$

Theo giả thiết $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ nên $-\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3 = e^2 \Leftrightarrow a = 6e - 6$.

Chọn đáp án (B)

Câu 5. Đặt $2 \sin x + 1 = t \Rightarrow \cos x dx = \frac{1}{2} dt$.

$$\text{Suy ra } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_2^3 f(x) dx.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (x^2 - 1) dx = \frac{23}{6}.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 6.

- Đặt $t = 2 \ln x - 1 \Rightarrow dt = \frac{2}{x} dx$.
- Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1$ và $x = e \Rightarrow t = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (e^x + 2x + 1) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (-3x^2 + 2x + 2) dx \\ &= \frac{1}{2} (e^x + x^2 + x) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} (-x^3 + x^2 + 2x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-1}) + 1 \\ &= -\frac{1}{2e} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 7.

- Đặt $t = 3\cos x - 1 \Rightarrow dt = -3\sin x dx$.
- Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$ và $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -1$.

Ta có

$$\begin{aligned}
 I &= -\frac{1}{3} \int_2^{-1} f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{3} \int_1^2 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (-x^2 + 3x) dx + \frac{1}{3} \int_1^2 (2x^2 + x - 1) dx \\
 &= \frac{1}{3} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\
 &= -\frac{2}{9} + \frac{31}{18} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

Câu 8.

- Đặt $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.
- Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 2\ln 2 \Rightarrow t = 3$.

Ta có

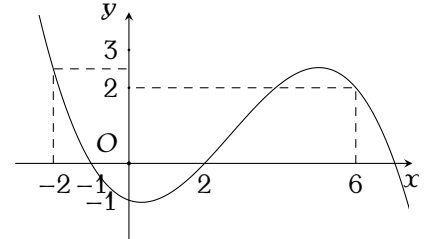
$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^2 (6x^2 - 21) dx + \int_2^3 \frac{2x+5}{x+1} dx \\
 &= (2x^3 - 21x) \Big|_0^2 + (2x + 3\ln|x+1|) \Big|_2^3 \\
 &= -26 + (6 + 3\ln 4 - 4 - 3\ln 3) \\
 &= -24 + 3\ln \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

DẠNG 4. Ứng dụng tích phân giải các bài toán khảo sát hàm số

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.



A. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-2).$

B. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(2).$

C. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(6).$

D. $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(-1).$

Lời giải.

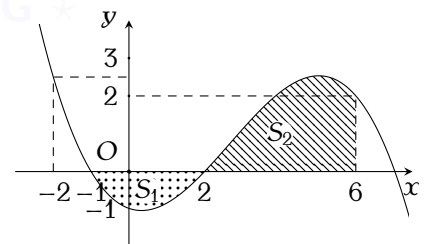
Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 6]$.

x	-2	-1	2	6		
y'		+	0	-	0	+
y	$f(-2)$ $f(-1)$ $f(2)$ $f(6)$					

Do đó hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại $x = -1$ hoặc $x = 6$.

Gọi S_1, S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn được tô như hình vẽ. Ta có

$$\begin{aligned}
 f(6) - f(-1) &= \int_{-1}^6 f'(x) dx \\
 &= \int_{-1}^2 f'(x) dx + \int_2^6 f'(x) dx \\
 &= -S_1 + S_2 > 0
 \end{aligned}$$

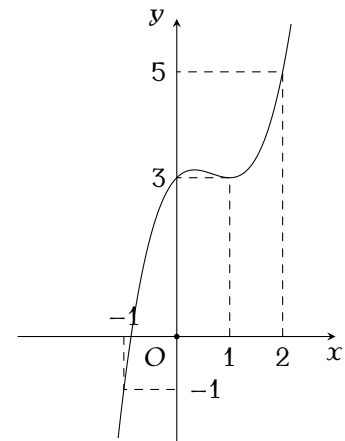


Suy ra $f(6) > f(-1)$. Vậy $\max_{x \in [-2; 6]} f(x) = f(6)$.

Chọn đáp án C

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như dưới đây. Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $g(-1) > g(1) > g(2)$. B. $g(-1) > g(2) > g(1)$.
C. $g(2) > g(1) > g(-1)$. D. $g(1) > g(2) > g(-1)$.

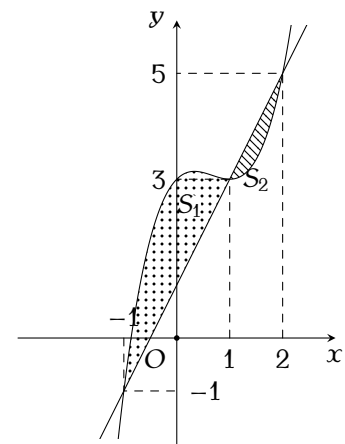


Lời giải.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1$ (*).

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta thấy đường thẳng $y = 2x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại ba điểm lần lượt có hoành độ là

$$-1, 1, 2. \text{ Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$



Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	-1	1	2
$g'(x)$	0	+	0
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-1;2]} g(x) = g(1)$.

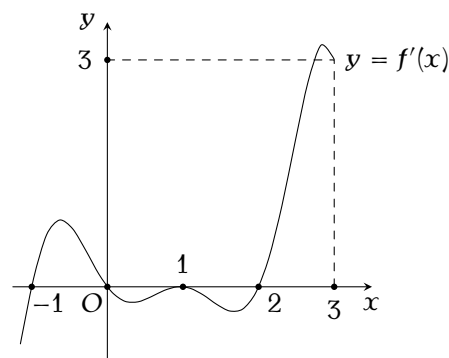
Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $y = f'(x)$, $y = 2x + 1$, $x = -1$ và $x = 1$.

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $y = f'(x)$, $y = 2x + 1$, $x = 1$ và $x = 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} g(2) - g(-1) &= \int_{-1}^2 g'(x) dx = \int_{-1}^2 [f'(x) - (2x + 1)] dx \\ &= \int_{-1}^1 [f'(x) - (2x + 1)] dx + \int_1^2 [f'(x) - (2x + 1)] dx \\ &= S_1 - S_2 > 0 \\ \Rightarrow g(2) &> g(-1). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-4; 3]$. Tính giá trị của $M - m$.



A. $f(3) - f(2)$.

B. $f(3) - f(0)$.

C. $f(4) - f(0)$.

D. $f(4) - f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Mặt khác hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn.

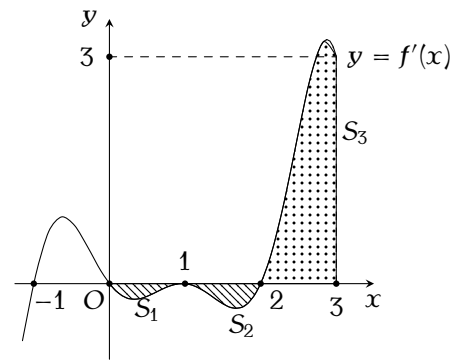
Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ và $f(|x|)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(0)$			$+\infty$	
		$f(-1)$			$f(2)$		

x	-4	-2	0	2	3
$f(x)$	$f(4)$	$f(2)$	$f(0)$	$f(2)$	$f(3)$

Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn được tô như hình vẽ. Ta có

$$\begin{aligned} f(3) - f(0) &= \int_0^3 f'(x) dx \\ &= \int_0^2 f'(x) dx + \int_2^3 f'(x) dx \\ &= -(S_1 + S_2) + S_3 > 0 \end{aligned}$$



Suy ra $f(3) > f(0)$. Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên $f(3) < f(4)$.

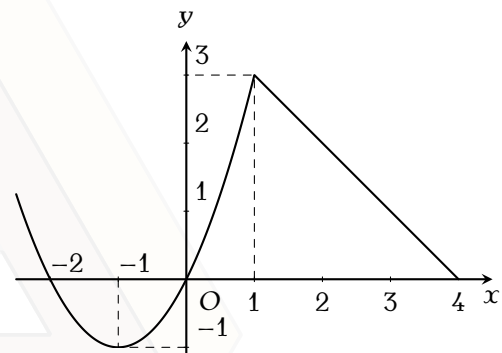
Vậy $f(0) < f(3) < f(4)$.

Từ đó ta có $\min_{[-4;3]} f(|x|) = f(2) = m$ và $\max_{[-4;3]} f(|x|) = f(4) = M$. Vậy $M - m = f(4) - f(2)$.

Chọn đáp án D

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ trên $[-2; 4]$ được hợp bởi một parabol và một đoạn thẳng như hình vẽ. Biết $f(2) = 7$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[-2; 4]$.

- A. 9. B. $\frac{9}{2}$. C. 3. D. 7.



Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{khi } -2 \leq x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{khi } 1 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Suy ra

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C_1 & \text{khi } -2 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 4x + C_2 & \text{khi } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Từ đồ thị của $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của $y = f(x)$ như sau

x	-2	0	4
y'	-	0	+
y	$f(-2)$	$f(0)$	$f(4)$

Từ đó ta được $\max_{[-3;2]} f(x) = \max\{f(-2); f(4)\}$.

Do hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $[-2; 4]$ nên $f(x)$ liên tục trên $[-2; 4]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} + C_1 = \frac{7}{2} + C_2 \Leftrightarrow C_1 - C_2 = \frac{13}{6} \quad (1).$$

$$\text{Mà } f(2) = 7 \Leftrightarrow 6 + C_2 = 7 \Leftrightarrow C_2 = 1 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } C_1 = \frac{19}{6}.$$

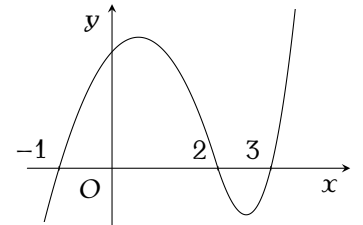
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{19}{6} & \text{khi } -2 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 4x + 1 & \text{khi } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

Ta có $f(-2) = \frac{9}{2}$ và $f(4) = 9$. Suy ra $f(-2) < f(4)$. Vậy $\max_{[-2; 4]} f(x) = 9$.

Chọn đáp án A.....

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) < 0$.

Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x)|$ trên $[-1; 3]$. Khi đó M, m lần lượt là



- A. $f(-1), f(3)$. B. $|f(3)|, |f(-1)|$.
C. $|f(-1)|, |f(2)|$. D. $|f(-1)|, |f(3)|$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ như hình bên.

Mà $f(2) < 0$ nên ta có bảng biến thiên của hàm số $|f(x)|$ $[-1; 3]$ như hình bên dưới.

x	-1	2	3
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(3)$

Từ đó suy ra $M = \max_{[-1; 3]} |f(x)| = |f(2)|$.

Để xác định $m = \min_{[-1; 3]} |f(x)|$, ta cần so sánh

$$|f(-1)| \text{ và } |f(3)|.$$

x	-1	2	3
$ f(x) $	$ f(-1) $	$ f(2) $	$ f(3) $

hay $-f(-1)$ và $-f(3)$.

Từ đồ thị trên đề bài ta có

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx > \int_2^3 -f'(x) dx \Leftrightarrow f(2) - f(-1) > -f(3) + f(2)$$

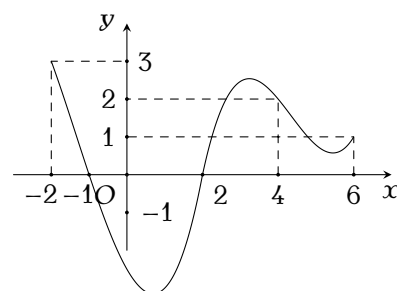
Từ đó suy ra $-f(-1) > -f(3) \Rightarrow |f(-1)| > |f(3)|$.

Vậy $m = \max_{[-1; 3]} |f(x)| = |f(-1)|$ và $M = \max_{[-1; 3]} |f(x)| = |f(2)|$.

Chọn đáp án C.....

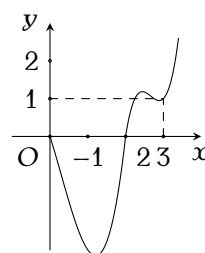
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÂU 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau



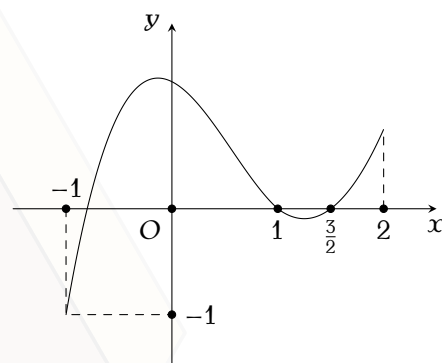
- A. $\min_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$. B. $\min_{[-2;6]} f(x) = f(2)$. C. $\min_{[-2;6]} f(x) = f(6)$. D. $\min_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$.

CÂU 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ lần lượt là



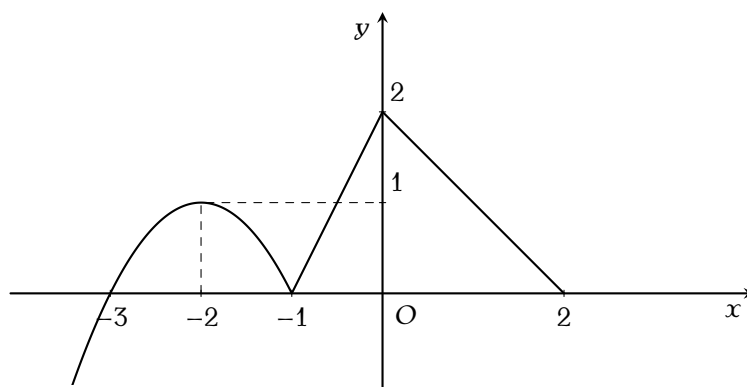
- A. $f(0), f(3)$. B. $f(2), f(0)$. C. $f(1), f(3)$. D. $f(2), f(3)$.

CÂU 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 2]$, có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(-1)$. B. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2)$.
C. $\max_{[-1;2]} f(x) = f(1)$. D. $\max_{[-1;2]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right)$.

CÂU 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ trên $[-3; 2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).

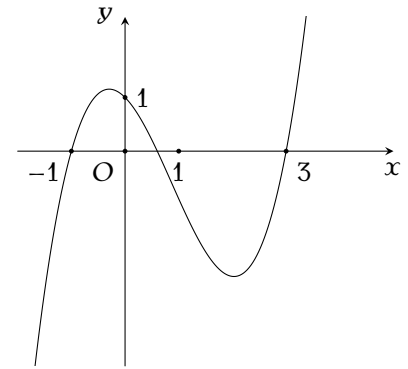


Biết $f(1) = 0$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $m + M$.

- A. $\frac{10}{3}$. B. $-\frac{10}{3}$. C. $-\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

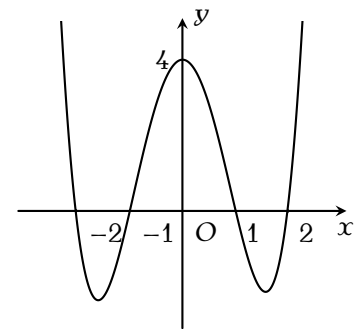
CÂU 5. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là

- A. $f(-1)$. B. $f(3)$. C. $f(0)$. D. $f(2)$.

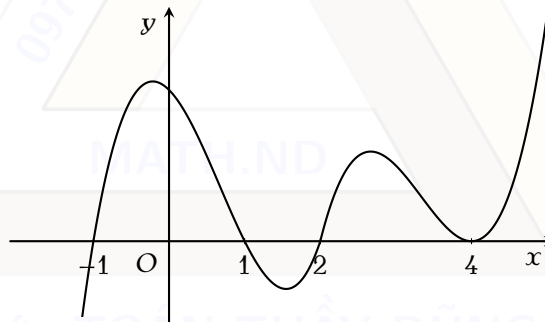


CÂU 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(|x|)$ trên đoạn $[-2; 1]$. Tính $M + m$.

- A. $f(1) + f(0)$. B. $f(1) + f(2)$.
C. $f(-2) + f(-1)$. D. $f(-1) + f(0)$.



CÂU 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

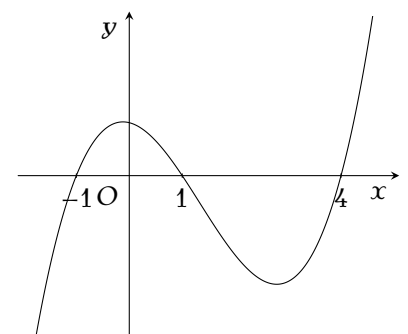


Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$.

- A. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$. B. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.
C. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(4); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(2)$. D. $\max_{[-1;4]} f(|x|) = f(1); \min_{[-1;4]} f(|x|) = f(0)$.

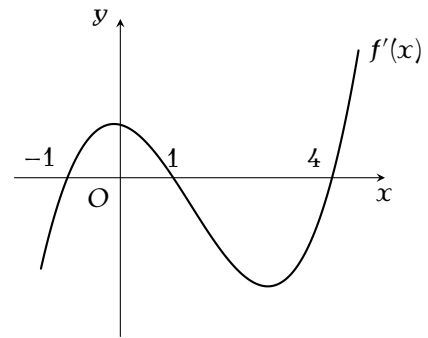
CÂU 8. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ sau. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(|x|)$ trên đoạn $[-1; 4]$.

- A. $f(-1)$. B. $f(1)$. C. $f(0)$. D. $f(4)$.



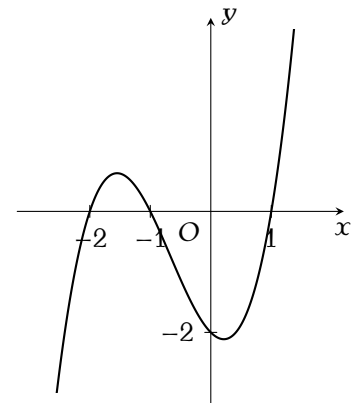
CÂU 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây và $f(1) < 0$. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-1; 4]$ bằng

- A. $|f(0)|$. B. $|f(1)|$. C. $|f(-1)|$. D. $|f(4)|$.



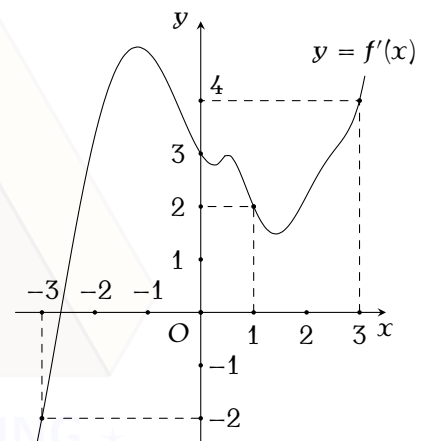
CÂU 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau và $f(-1) < -2$. Khi đó gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + 2|$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là M, m . Tổng $M + m$ bằng

- A. $g(-2) + g(1)$. B. $g(-2) + g(-1)$.
C. $|f(-1) + 2| + |f(1) + 2|$. D. $|f(-1) + f(1) + 4|$.



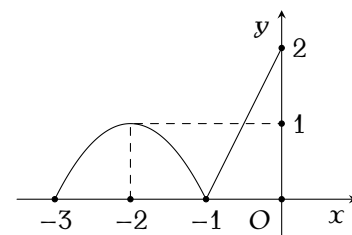
CÂU 11. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 2f(x) - (x + 1)^2$.

- A. $g(-3)$. B. $g(3)$. C. $g(1)$. D. $g(-1)$.



CÂU 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ trên $[-3; 0]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$). Biết $\int_{e^{-3}}^1 \frac{f(\ln x)}{x} dx = \frac{2}{3}$. Tính giá trị $f(0)$.

- A. 1. B. 2. C. $\frac{14}{9}$. D. $-\frac{7}{9}$.



❖❖❖ BẢNG ĐÁP ÁN ❖❖❖

1. C	2. A	3. B	4. B	5. B	6. D	7. B	8. A
------	------	------	------	------	------	------	------

❖❖❖ HƯỚNG DẪN GIẢI MỘT SỐ CÂU ❖❖❖

Câu 3. Ta có $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$ và $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = 7$.

Nhận xét $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 7$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = e + 1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx &= \int_2^{e+1} f(t) dt = \int_2^{e+1} f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{e+1} f(x) dx \\ &= \int_2^3 (ax - 3a + 7) dx + \int_3^{e+1} (2x + 1) dx \\ &= \left(\frac{ax^2}{2} - 3ax + 7x \right) \Big|_2^3 + (x^2 + x) \Big|_3^{e+1} \\ &= \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21 \right) - (2a - 6a + 14) + [(e+1)^2 + (e+1)] - (3^2 + 3) \\ &= -\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3 \end{aligned}$$

Theo giả thiết $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ nên $-\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3 = e^2 \Leftrightarrow a = 6e - 6$.

Chọn đáp án (B)

Câu 4. Ta có $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7$ và $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = 7$.

Nhận xét $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3) = 7$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = e + 1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx &= \int_2^{e+1} f(t) dt = \int_2^{e+1} f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^{e+1} f(x) dx \\ &= \int_2^3 (ax - 3a + 7) dx + \int_3^{e+1} (2x + 1) dx \\ &= \left(\frac{ax^2}{2} - 3ax + 7x \right) \Big|_2^3 + (x^2 + x) \Big|_3^{e+1} \\ &= \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21 \right) - (2a - 6a + 14) + [(e+1)^2 + (e+1)] - (3^2 + 3) \\ &= -\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3 \end{aligned}$$

Theo giả thiết $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ nên $-\frac{1}{2}a + e^2 + 3e - 3 = e^2 \Leftrightarrow a = 6e - 6$.

Chọn đáp án (B)

Câu 5. Đặt $2 \sin x + 1 = t \Rightarrow \cos x \, dx = \frac{1}{2} dt$.

$$\text{Suy ra } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2 \sin x + 1) \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int_1^3 f(t) \, dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_2^3 f(x) \, dx.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) \, dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (x^2 - 1) \, dx = \frac{23}{6}.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 6.

- Đặt $t = 2 \ln x - 1 \Rightarrow dt = \frac{2}{x} dx$.
- Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = -1$ và $x = e \Rightarrow t = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(x) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 (e^x + 2x + 1) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (-3x^2 + 2x + 2) \, dx \\ &= \frac{1}{2} (e^x + x^2 + x) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} (-x^3 + x^2 + 2x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-1}) + 1 \\ &= -\frac{1}{2e} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

Câu 7.

- Đặt $t = 3 \cos x - 1 \Rightarrow dt = -3 \sin x \, dx$.

- Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$ và $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -1$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{3} \int_2^{-1} f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 f(x) dx + \frac{1}{3} \int_1^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (-x^2 + 3x) dx + \frac{1}{3} \int_1^2 (2x^2 + x - 1) dx \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{3} \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 \\ &= -\frac{2}{9} + \frac{31}{18} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**.

Câu 8.

- Đặt $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$.
- Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = 2 \ln 2 \Rightarrow t = 3$.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_0^2 (6x^2 - 21) dx + \int_2^3 \frac{2x+5}{x+1} dx \\ &= (2x^3 - 21x) \Big|_0^2 + (2x + 3 \ln |x+1|) \Big|_2^3 \\ &= -26 + (6 + 3 \ln 4 - 4 - 3 \ln 3) \\ &= -24 + 3 \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**.